

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ENRICO GIUSTI

**Equazioni quasi-ellittiche e spazi  $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta)$  (II)**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 21, n° 3 (1967), p. 353-372*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1967\\_3\\_21\\_3\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_3_353_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# EQUAZIONI QUASI-ELLITTICHE E SPAZI $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta)$ (II)

ENRICO GIUSTI (\*)

## Introduzione.

Sia  $E(u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u)$  un operatore fortemente quasi-ellittico in un aperto limitato  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u(x)$  una soluzione debole (variabile) in  $\Omega$  dell'equazione

$$(1) \quad E(u) = f.$$

In un precedente lavoro<sup>(0)</sup> [7] ho dimostrato, sotto opportune ipotesi per i coefficienti  $a_{\alpha\beta}(x)$  che se  $f = \sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} D^\alpha f_\alpha$  con  $f_\alpha \in \mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})$  (cfr. 1) allora ogni soluzione debole di (1) ha derivate  $D^\beta u$  ( $\langle \beta, q \rangle \leq m$ ) in  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathfrak{m}})$ , essendo  $\Omega_0$  un qualsivoglia aperto tale che  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ .

In questo lavoro si continuerà lo studio delle soluzioni deboli di (1) in ipotesi di maggiore regolarità del secondo membro e dei coefficienti. Sotto opportune ipotesi per questi ultimi si troveranno i seguenti risultati:

- 1) Se  $f(x) \in H^{mj}(\mathfrak{m}, \Omega)$  (cfr. 1) ogni soluzione debole della (1) appartiene ad  $H^{m(j+2)}(\mathfrak{m}, \Omega_0)$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) (cfr. teor. 3.1).
- 2) Se  $f(x) \in H^{mj,\theta}(\mathfrak{m}, \Omega)$  ogni soluzione  $u$  ha le derivate  $D^\alpha D^\beta u$  ( $\langle \alpha, q \rangle \leq m$ ,  $\langle \beta, q \rangle \leq m(j+1)$ ) in  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathfrak{m}})$  (cfr. teoremi 4.I e 4.III).
- 3) In particolare, se  $f(x)$  è hölderiana (rispetto ad una opportuna metrica  $\delta_{\mathfrak{m}}$ ) in  $\Omega$ , allora ogni soluzione debole di (1) è una soluzione in senso classico, intendendo per questo che esistono e sono hölderiane (rispetto a  $\delta_{\mathfrak{m}}$ ) le derivate delle  $u(x)$  che figurano nell'operatore  $E$ . (cfr. teor. 4.II).

Pervenuto alla Redazione il 16 Dicembre 1966.

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 46 del C.N.R.

<sup>(0)</sup> Questo lavoro è il naturale proseguimento del primo. Pertanto si rimanda a quello ed in particolare al Cap. I<sup>o</sup> per tutte le notazioni e le definizioni.

4) Se  $f \in H^{m_j, p}(\mathbf{m}, \Omega)$  ( $p \geq 2$ ) ed  $u$  è la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} E(u) = f \\ u \in H_0^m(\mathbf{m}, \Omega) \end{cases}$$

allora le derivate  $D^\alpha D^\beta u$  ( $\langle \alpha, q \rangle \leq m, \langle \beta, q \rangle \leq m(j+1)$ ) appartengono ad  $L^p(\Omega_0)$  (cfr. n° 5).

### 1. Alcuni spazi funzionali.

Sia  $\mathbf{m}$  una  $n$ -pla di interi positivi  $m_1, \dots, m_n$  e sia  $m = \max m_i$ ; indichiamo con  $q$  la  $n$ -pla  $(m/m_1, \dots, m/m_n)$  e con  $\langle \alpha, q \rangle$  il « prodotto scalare »  $\sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$ .

$J(\mathbf{m})$  è l'insieme dei razionali non negativi  $k$  per i quali esiste almeno un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ( $\alpha_i$  interi non negativi) tale che  $\langle \alpha, q \rangle = k$ .

$\delta_{\mathbf{m}}(x)$  è la metrica su  $\mathbb{R}^n$  così definita:

$$\delta_{\mathbf{m}}(x) = |x|_{\mathbf{m}} = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^{m_i} \right\}^{1/m}.$$

Indichiamo con  $\bar{\Omega}$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

$C^k(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$  ( $k \in J(\mathbf{m})$ ) è lo spazio delle funzioni continue in  $\bar{\Omega}$  insieme alle loro derivate  $D^\alpha u$  con  $\langle \alpha, q \rangle \leq k$ .

$C^k(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$  è uno spazio di Banach con la norma

$$(1.1) \quad \|u\|_{C^k(\mathbf{m}, \bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} \sup_{\langle \alpha, q \rangle \leq k} |D^\alpha u(x)|$$

$C^{k, \nu}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$  è lo spazio delle funzioni  $u \in C^k(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$  aventi tutte le derivate  $D^\alpha u$  ( $\langle \alpha, q \rangle \leq k$ ) hölderiane con esponente  $\nu$  rispetto alla metrica  $\delta_{\mathbf{m}}$ . È uno spazio di Banach con la norma

$$(1.2) \quad \|u\|_{C^{k, \nu}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\mathbf{m}, \bar{\Omega})} + \sup_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \sup_{\langle \alpha, q \rangle \leq k} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\delta_{\mathbf{m}}^\nu(x-y)}.$$

Sia  $\mathcal{G}$  un cubo di  $\mathbb{R}^n$  di lato  $l$ ;  $C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$  è lo spazio delle funzioni  $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  periodiche su  $\mathcal{G}$  (periodiche con periodo  $l$  rispetto ad ogni variabile).

$C_{\#}^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  [risp.  $C_{\#}^{k, \ast}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ ] è lo spazio delle funzioni  $u(x) \in C^k(\mathfrak{m}, \mathbb{R}^n)$  [risp.  $C^{k, \ast}(\mathfrak{m}, \mathbb{R}^n)$ ] e periodiche su  $\mathcal{G}$ . È uno spazio di Banach con la norma (1.1) (risp. (1.2)).

$H^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  [risp.  $H_0^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ , risp.  $H_{\#}^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ ] è il completamento di  $C^\infty(\bar{\mathcal{G}})$  [risp.  $C_0^\infty(\mathcal{G})$ , risp.  $C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$ ] rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} = \left\{ \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$H^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ ,  $H_0^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  ed  $H_{\#}^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  sono spazi di Hilbert con il prodotto scalare

$$(u, v)_{H^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq k} \int_{\mathcal{G}} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx.$$

**OSSERVAZIONE.** Per ogni  $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{G})$  esiste una ed una sola funzione  $\varphi_{\#} \in C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$  tale che  $\varphi(x) = \varphi_{\#}(x)$  su  $\mathcal{G}$ . L'immersione canonica  $\varphi(x) \rightarrow \varphi_{\#}(x)$  applica  $C_0^\infty(\mathcal{G})$  in un sottospazio di  $C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$ . Nel seguito noi identificheremo  $C_0^\infty(\mathcal{G})$  con la sua immagine e scriveremo  $C_0^\infty(\mathcal{G}) \subset C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$ .

Analogamente  $C_0^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  [rispet.  $H_0^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ ] sarà considerato come un sottospazio di  $C_{\#}^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  [rispet.  $H_{\#}^k(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ ].

Indichiamo con  $I(x_0, \varrho)$  la sfera aperta di centro  $x_0$  e raggio  $\varrho$  nella metrica  $\delta_{\mathfrak{m}}$  e poniamo  $\Omega(x_0, \varrho) = \Omega \cap I(x_0, \varrho)$ .

$\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})$ ,  $\theta \geq 0$ , è lo spazio delle funzioni  $u \in L^2(\Omega)$  per cui

$$[u]_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})}^2 = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \varrho > 0}} |\Omega(x_0, \varrho)|^{-\theta} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - u_{\Omega(x_0, \varrho)}|^2 dx < +\infty$$

$\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})$  è uno spazio di Banach con la norma

$$u \rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} + [u]_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})}.$$

Per le proprietà di questi spazi, che saranno utilizzati nel seguito, si veda [6] e [7], par 2.

## 2. Spazi $S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ e loro proprietà.

**DEFINIZIONE 2.1.** Sia  $\mathcal{G}$  un cubo di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $r \in \mathbb{R}$ .

$S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  è lo spazio delle distribuzioni  $u$  periodiche su  $\mathcal{G}^{(4)}$  e tali che<sup>(2)</sup>

$$(2.1) \quad \|u\|_{S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} = \left\{ \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{u}_\xi|^2 (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}})^{2r} \right\}^{1/2} < +\infty$$

$S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{P})$  è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(u, v)_{S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}_\xi \overline{\widehat{v}_\xi} (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}})^{2r}.$$

PROPOSIZIONE 2.1.  $S^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  è isomorfo ad  $H_{\#}^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ).

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità supporremo che  $\mathcal{G}$  sia il cubo di lato  $2\pi$ . Sia  $u \in H_{\#}^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ . Per il teorema di Parseval

$$(2.2) \quad \|u\|_{H^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})}^2 = \sum_{\xi} |\widehat{u}_\xi|^2 \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq mj} \xi^{2\alpha}.$$

D'altra parte

$$(2.3) \quad \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq mj} \xi^{2\alpha} \leq c_1 \sum_{\substack{k \in J(\mathfrak{m}) \\ k \leq mj}} |\xi|_{\mathfrak{m}}^{2k} \leq c_2 (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}})^{2mj}$$

$$(2.4) \quad \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq mj} \xi^{2\alpha} \geq 1 + \sum_{\langle \alpha, q \rangle = mj} \xi^{2\alpha} \geq c_3 (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}}^{2mj}) \geq c_4 (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}})^{2mj}.$$

Dalle (2.2), (2.3) e (2.4) segue allora che  $u \in S^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  e si ha la maggiorazione

$$c' \|u\|_{S^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} \leq \|u\|_{H^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} \leq c \|u\|_{S^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})}.$$

Viceversa se  $u \in S^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  allora le funzioni

$$u_k(x) = \sum_{|\xi|_{\mathfrak{m}} \leq k} u_\xi e^{i \langle \xi, x \rangle} (2\pi)^{-n/2} \in C_{\#}^{\infty}(\mathcal{G})$$

formano una successione che converge ad  $u(x)$  in  $L^2(\mathcal{G})$ .

<sup>(4)</sup> Vedasi ad es. [9] tomo II<sup>o</sup> pag. 80.

<sup>(2)</sup> Con  $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$  si indica la sommatoria  $\sum_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\xi_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{\xi_n=-\infty}^{+\infty}$ .

D'altra parte per ogni  $\alpha$  tale che  $\langle \alpha, q \rangle \leq m_j$ , la successione  $\{D^\alpha u_k\}$  è di Cauchy in  $L^2(\mathcal{G})$ . Ne consegue che  $u_k \rightarrow u$  in  $H_{\#}^{m_j}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ .

**PROPOSIZIONE 2.II.** *Se  $u \in S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  allora  $D^\alpha u \in S^{r - \langle \alpha, q \rangle}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  e si ha*

$$(2.5) \quad \|D^\alpha u\|_{S^{r - \langle \alpha, q \rangle}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} \leq c \|u\|_{S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $(\widehat{D_\alpha u})_\xi = \widehat{u}_\xi \xi_\alpha$  la tesi segue dalla disegualianza

$$\xi^{2\alpha} (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}})^{2r - 2 \langle \alpha, q \rangle} \leq c (1 + |\xi|_{\mathfrak{m}})^{2r}.$$

**TEOREMA 2.I.** *Sia  $T$  una applicazione lineare di  $S^{r_i}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  in  $S^{r_i}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  ( $i = 1, 2$ ) tale che  $\forall u \in C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$*

$$\|Tu\|_{S^{r_i}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} \leq K_i \|u\|_{S^{r_i}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})}.$$

Allora, per ogni  $0 \leq \sigma \leq 1$ ,  $T$  applica  $S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  in  $S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  ( $r = r_1(1 - \sigma) + r_2\sigma$ ) e si ha

$$(2.6) \quad \|Tu\|_{S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})} \leq K_1^{1-\sigma} K_2^\sigma \|u\|_{S^r(\mathfrak{m}, \mathcal{G})}.$$

Si tratta in sostanza di interpolare tra due spazi  $l^2$  (di successioni) rispetto a misure diverse. Basta ripetere ad es., con modifiche puramente formali, la dimostrazione data da E. M. Stein e G. Weiss [12].

### 3. Regolarizzazione in $H^k(\mathfrak{m}, \Omega)$ delle soluzioni di equazioni fortemente quasi-ellittiche.

Rammentiamo alcune definizioni date in [7] Cap. 2<sup>o</sup> (3).

**DEFINIZIONE 3.I.** *Un operatore differenziale*

$$E(u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u)$$

(3) Vedi anche [2].

si dice *fortemente quasi-ellittico* in  $\Omega$  se esistono due costanti positive  $\nu$  ed  $N$  tali che  $\forall x \in \Omega$  e  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\nu |\xi|_{\mathbf{m}}^{2m} \leq \operatorname{Re} P_0(x, \xi) = \operatorname{Re} \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle = m \\ \langle \beta, q \rangle = m}} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \leq N |\xi|_{\mathbf{m}}^{2m}.$$

DEFINIZIONE 3.II. Si dice *associata all'operatore*  $E(u)$  la forma

$$B(u, v) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u \overline{D^{\alpha} v} dx$$

definita in  $H^m(\mathbf{m}, \Omega) \times H^m(\mathbf{m}, \Omega)$ .

DEFINIZIONE 3.III. Una funzione  $u(x) \in H^m(\mathbf{m}, \Omega)$  si dice *soluzione in  $\Omega$  dell'equazione*

$$E(u) = f$$

con  $f \in H^{-m}(\mathbf{m}, \Omega)$ , se  $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , risulta

$$B(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica la dualità tra  $H^{-m}(\mathbf{m}, \Omega)$  ed  $H_0^m(\mathbf{m}, \Omega)$ .

LEMMA 3.I. Sia  $u \in H^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  soluzione debole in  $\mathcal{G}$  dell'equazione

$$[1 + P(D)]u = u + \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle = m \\ \langle \beta, q \rangle = m}} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta} D^{\beta} u) = f$$

con  $P(D)$  *fortemente quasi-ellittico a coefficienti*  $a_{\alpha\beta}$  *costanti.*

Se  $f \in S^r(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  allora  $u \in S^{2m+r}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  e si ha la maggiorazione

$$(3.1) \quad \|u\|_{S^{2m+r}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \leq c \|f\|_{S^r(\mathbf{m}, \mathcal{G})}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per semplicità che  $\mathcal{G}$  sia il cubo di lato  $2\pi$ . Si ha,  $\forall \xi \in \mathbb{Z}^n$ :

$$[1 + P(\xi)] \widehat{u}_{\xi} = \widehat{f}_{\xi}.$$

D'altra parte, essendo

$$\operatorname{Re} P(\xi) \geq \nu |\xi|_{\mathbf{m}}^{2m}$$

risulta

$$|\widehat{u}_\xi| = |\widehat{f}_\xi| |1 + P(\xi)|^{-1} \leq c_1 |\widehat{f}_\xi| (1 + |\xi|_{\mathbf{m}}^{2m})^{-1} \leq c_2 |\widehat{f}_\xi| (1 + |\xi|_{\mathbf{m}})^{-2m}.$$

Allora  $u \in S^{2m+r}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  con la maggiorazione

$$\begin{aligned} \|u\|_{S^{2m+r}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} &= \left\{ \sum_{\xi} |\widehat{u}_\xi|^2 (1 + |\xi|_{\mathbf{m}})^{4m+2r} \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq c_2 \left\{ \sum |f_\xi|^2 (1 + |\xi|_{\mathbf{m}})^{2r} \right\}^{1/2} = c_2 \|f\|_{S^r(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \end{aligned}$$

c.v.d.

Consideriamo ora l'operatore

$$(3.2) \quad E(u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta(u))$$

fortemente quasi-ellittico in  $\mathcal{G}$ , con i coefficienti  $a_{\alpha\beta} \in C_{\#}^0(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  se  $\langle \alpha, q \rangle = \langle \beta, q \rangle = m$ , misurabili e limitati se  $\langle \alpha + \beta, q \rangle < 2m$ . Sia  $B(u, v)$  la forma associata ad  $E(u)$  e supponiamo che  $\forall u, v \in H_{\#}^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  si abbia

$$(3.3) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} B(u, u) \geq c_1 \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})}^2 \\ |B(u, v)| \leq c_2 \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \|v\|_{H^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})}. \end{cases}$$

Per l'isomorfismo tra  $H^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  ed  $S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$ , (prop. 2.I) nelle maggiorazioni (3.3) si può sostituire  $\|\cdot\|_{H^m}$  con  $\|\cdot\|_{S^m}$ .

Il teorema di Lax-Milgram (cfr. ad es. [14]) assicura l'esistenza di una applicazione lineare e continua  $T_1$  di  $S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  su  $S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$ , con inversa  $T_1^{-1}$  continua, tale che  $\forall u, v \in S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  risulti

$$\bullet \quad B(u, v) = (T_1 u, v)_{S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})}.$$

Consideriamo l'operatore f. q. e.

$$Ku = u + \sum_{i=1}^n D_i^{2m_i} u$$

e sia  $A(u, v)$  la forma ad esso associata.

$A(u, v)$  verifica le ipotesi del teorema di Lax-Milgram, e quindi esiste un operatore  $T_2$  tale che  $\forall u, v \in S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$

$$A(u, v) = (T_2 u, v)_{S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})}.$$

Posto allora  $T = T_2^{-1} T_1$  si ha

$$(3.4) \quad B(u, v) = A(Tu, v).$$

LEMMA 3.II. *Se l'operatore  $E(u)$  ha i coefficienti  $a_{\alpha\beta}$  appartenenti a  $C_{\#}^{mj}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), allora  $T$  è un'applicazione lineare e continua, con inversa continua, di  $S^{m(j+1)}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  su  $S^{m(j+1)}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ .*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (3.4) segue, per ogni  $\varphi, \psi \in C_{\#}^{\infty}(\mathcal{G})$ ,

$$(3.5) \quad B(\varphi, K^j \psi) = (\varphi, E^* K^j \psi)_{L^2(\mathcal{G})} = (T\varphi, K^{j+1} \psi)_{L^2(\mathcal{G})} = A(T\varphi, K^j \psi)$$

dove

$$E^*(u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle < m \\ \langle \beta, q \rangle < m}} D^{\beta} \overline{(a_{\alpha\beta}(x))} D^{\alpha} u.$$

Consideriamo ora gli operatori  $K^j E(u)$  e  $K^{j+1}(u)$ .

Essi sono ancora fortemente quasi-ellittici<sup>(4)</sup>. Esiste quindi, per il teorema di Lax-Milgram, un'applicazione lineare e continua  $T_j$ , di  $S^{m(j+1)}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$  su  $S^{m(j+1)}(\mathfrak{m}, \mathcal{G})$ , con inversa  $T_j^{-1}$  continua, tale che

$$B_j(u, v) = A_j(T_j u, v).$$

Essendo  $B_j(u, v)$  ed  $A_j(u, v)$  le forme associate rispettivamente a  $K^j E(u)$  e  $K^{j+1}(u)$ .

Dalla (3.6) discende,  $\forall \varphi, \psi \in C_{\#}^{\infty}(\mathcal{G})$

$$(3.7) \quad (\varphi, E^* K^j \varphi)_{L^2(\mathcal{G})} = (T_j \varphi, K^{j+1} \varphi)_{L^2(\mathcal{G})}.$$

Confrontando la (3.7) con la (3.5) si ottiene

$$(3.8) \quad (T\varphi - T_j \varphi, K^{j+1} \varphi)_{L^2(\mathcal{G})} = 0 \quad \forall \varphi, \psi \in C_{\#}^{\infty}(\mathcal{G}).$$

(4) La parte principale di  $K^j E(u)$  è

$$F(u) = \left( \sum_{i=1}^n D_i^{2m_i} \right)^j \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle = m \\ \langle \beta, q \rangle = m}} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}) D^{\beta} u$$

e si ha

$$\left( \sum_{i=1}^n \xi_i^{2m_i} \right)^j \operatorname{Re} \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle = m \\ \langle \beta, q \rangle = m}} a_{\alpha\beta} \xi^{\alpha+\beta} \geq c_j |\xi|_{\mathfrak{m}}^{2(j+1)}.$$

Indichiamo con  $w$  la funzione  $T\varphi - T_j\psi$  ( $w \in S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$ ).

Scelta  $\psi$  in modo tale che  $\widehat{\psi}_\xi = \delta_{\xi\eta}$  ( $\eta \in \mathbb{Z}^n$ ) la (3.8) diviene

$$\widehat{w}_\eta \left( 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^{2m_i} \right)^{j+1} = 0$$

da cui  $\forall \eta \in \mathbb{Z}^n$ :

$$\widehat{w}_\eta = 0.$$

Allora per ogni  $\varphi \in C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$  si ha

$$T\varphi = T_j\varphi$$

ed essendo  $C_{\#}^\infty(\mathcal{G})$  denso in  $S^{m(j+1)}(\mathbf{m}, \mathcal{G}) \subset H_{\#}^{m(j+1)}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  si ottiene la tesi.

**LEMMA 3.III.** *Sia  $u(x) \in H_{\#}^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  una soluzione debole in  $\mathcal{G}$  dell'equazione*

$$E(u) = f$$

con  $E(u)$  fortemente quasi-ellittico.

*Se il secondo membro  $f$  appartiene ad  $S^{(j-r)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  ( $j$  intero  $\geq 0$ ,  $0 \leq r < 1$ ) ed i coefficienti  $a_{\alpha\beta}(x)$  sono in  $C_{\#}^{(j+1)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$ , allora  $u \in S^{(j+2-r)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  e si ha la maggiorazione*

$$(3.9) \quad \|u\|_{S^{(j+2-r)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \leq c \{ \|f\|_{S^{(j-r)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} + \|u\|_{S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $B(u, v)$  la forma associata ad  $E(u)$ .

Esistono due costanti  $c_1$  e  $\lambda_0$  tali che  $\forall u \in H_{\#}^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  <sup>(5)</sup>

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq c_1 \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2(\mathcal{G})}^2.$$

La funzione  $u$  è allora soluzione in  $\mathcal{G}$  dell'equazione

$$E'(u) = E(u) + \lambda_0 u = f + \lambda_0 u = g$$

e la forma  $B'(u, v)$ , associata ad  $E'(u)$ , verifica la (3.3).

<sup>(5)</sup> Vedi ad es. [7], teor. 6.II. Questo teorema è stato enunciato nel caso in cui  $u(x)$  sia a supporto compatto, ma resta valido anche in questo caso, poichè lo spazio  $H_{\#}^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  è isomorfo allo spazio  $H^m(\mathbf{m}, T)$ , dove  $T$  è il toro a  $n$ -dimensioni.

Dimostriamo a questo punto che se  $u \in S^p(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  ( $m \leq p$ ), allora  $u$  appartiene ad  $S^q(\mathbf{m}, \mathcal{G})$ , con  $q = \min\{(j+2-r)m, 2m+p\}$  e si ha la maggiorazione

$$\|u\|_{S^q(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \leq c \{ \|f\|_{S^{(j-r)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} + \|u\|_{S^p(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \}.$$

La tesi seguirà quindi con una semplice iterazione del procedimento. Per ogni  $\varphi \in C_{\#}^{\infty}(\mathcal{G})$  si ha

$$\langle g, \varphi \rangle = B'(u, \varphi) = A(Tu, \varphi).$$

La funzione  $Tu \in S^p(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  è soluzione in  $\mathcal{G}$  dell'equazione

$$K(w) = g$$

con  $g \in S^l(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  con  $l = \min\{(j-r)m, p\}$ . Dal lemma 3.1 segue allora che  $Tu \in S^{2m+l}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  e si ha

$$\|Tu\|_{S^{2m+l}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \leq c_2 \|g\|_{S^l(\mathbf{m}, \mathcal{G})}.$$

Consideriamo l'operatore  $T^{-1}$ . Esso applica con continuità  $S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  in  $S^m(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  e, per il lemma 3.II,  $S^{(j+2)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  in  $S^{(j+2)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})$ . Dal teorema 2.I segue che  $T^{-1}$  applica  $S^q(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  in  $S^q(\mathbf{m}, \mathcal{G})$  e si ha la maggiorazione

$$\begin{aligned} \|u\|_{S^q(\mathbf{m}, \mathcal{G})} &\leq c_3 \|Tu\|_{S^q(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \leq c_4 \|g\|_{S^l(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \leq \\ &\leq c_5 \{ \|f\|_{S^{(j-r)m}(\mathbf{m}, \mathcal{G})} + \|u\|_{S^p(\mathbf{m}, \mathcal{G})} \} \quad \text{c. v. d.} \end{aligned}$$

**TEOREMA 3.I.** *Sia  $u(x) \in H^m(\mathbf{m}, \Omega)$  una soluzione debole in  $\Omega$  dell'equazione fortemente quasi-ellittica*

$$E(u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) = f.$$

*Se  $f \in H^{jm}(\mathbf{m}, \Omega)$  ed i coefficienti  $a_{\alpha\beta} \in C^{(j+1)m}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$ , allora, per ogni aperto  $\Omega_0 \subset \subset \Omega$ ,  $u(x) \in H^{(j+2)m}(\mathbf{m}, \Omega_0)$  e si ha la maggiorazione:*

$$(3.10) \quad \|u\|_{H^{(j+2)m}(\mathbf{m}, \Omega_0)} \leq c \{ \|f\|_{H^{jm}(\mathbf{m}, \Omega)} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}$$

*dove  $c$  è una costante che dipende da  $\Omega_0$  e dall'operatore  $E(u)$ , ma non da  $u$  e da  $f$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità dimostreremo il teorema nel caso  $j = 0$ . Ci si può convincere però che, con un semplice ragionamento per induzione, la dimostrazione si estende a qualsiasi  $j$  intero.

Faremo vedere che per ogni punto  $x_0 \in \Omega$  esiste un cubo  $Q_{x_0}$  per cui è valida la (3.10).

Siano  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{m+1}$  di cubi di centro  $x_0$  verificanti la relazione

$$Q_{m+1} \subset\subset Q_m \subset\subset \dots \subset\subset Q_0 \subset\subset \Omega$$

e siano  $\varphi_i(x)$   $m + 1$  funzioni verificanti la proprietà :

$$\begin{cases} \varphi_i \in C_0^\infty(Q_i) \\ 0 \leq \varphi_i \leq 1 \\ \varphi_i = 1 \quad \text{su} \quad Q_{i+1} \end{cases} \quad (i = 0, 1, \dots, m).$$

La funzione  $\varphi_1 u$  verifica in  $Q_0$  l'equazione :

$$(3.11) \quad E(\varphi_1 u) = \varphi_1 f + \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \left\{ \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_1 D^{\alpha-\gamma} (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\delta \neq 0 \\ \delta \leq \beta}} \binom{\beta}{\delta} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\delta \varphi_1 D^{\beta-\delta} u) \right\}$$

da cui<sup>(6)</sup>

$$(3.12) \quad E_0(\varphi_1 u) = \varphi_1 f + \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \left\{ \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_1 D^{\alpha-\gamma} [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta (\varphi_0 u)] + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\delta \neq 0 \\ \delta \leq \beta}} \binom{\beta}{\delta} D^\alpha [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\delta \varphi_1 D^{\beta-\delta} (\varphi_0 u)] \right\} = v_1$$

dove si è posto

$$E_0(\varphi_1 u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta (\varphi_1 u)].$$

Esaminiamo il secondo membro  $v_1$  della (3.12).

Ovviamente  $\varphi_1 f \in L^2(Q_0)$ . Un generico termine della prima sommatoria è

$$D^\gamma \varphi_1 D^{\alpha-\gamma} [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta (\varphi_0 u)].$$

<sup>(6)</sup> Infatti  $\varphi_1 \neq 0 \Rightarrow \varphi_0 = 1$ .

Poichè  $\varphi_0 u \in H_0^m(\mathbf{m}, Q_0) \subset H_{\#}^m(\mathbf{m}, Q_0)$  si ha  $\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta(\varphi_0 u) \in L^2(Q_0)$  e quindi  $D^\gamma \varphi_1 D^{\alpha-\gamma} [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta(\varphi_0 u)] \in S^{-m+1}(\mathbf{m}, Q_0)$  e si ha

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \varphi_1 D^{\alpha-\gamma} [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta(\varphi_0 u)]\|_{S^{-m+1}(\mathbf{m}, Q_0)} &\leq c_1 \|\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta(\varphi_0 u)\|_{L^2(Q_0)} \leq \\ &\leq c_2 \|\varphi_0 u\|_{S^m(\mathbf{m}, Q_0)} \leq c_3 \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\|D^\alpha [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\delta \varphi_1 D^{\beta-\delta}(\varphi_0 u)]\|_{S^{-m+1}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq c_4 \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)}.$$

Dal lemma 3.III segue allora che  $\varphi_1 u \in S^{m+1}(\mathbf{m}, Q_0)$ , con la maggiorazione

$$\|\varphi_1 u\|_{S^{m+1}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq c_5 \|v_1\|_{S^{-m+1}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq K_1 \{\|f\|_{L^2(Q)} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)}\}.$$

A questo punto consideriamo la funzione  $\varphi_2 u = \varphi_2 \varphi_1 u$ .

Essa verifica in  $Q_0$  l'equazione

$$\begin{aligned} (3.13) \quad E_0(\varphi_2 u) &= \varphi_2 v_1 + \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \left\{ \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^\gamma \varphi_2 D^{\alpha-\gamma} [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\beta(\varphi_1 u)] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\delta \neq 0 \\ \delta \leq \beta}} \binom{\beta}{\delta} D^\alpha [\varphi_0 a_{\alpha\beta} D^\delta \varphi_2 D^{\beta-\delta}(\varphi_1 u)] \right\} = v_2. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che  $\varphi_2 v_1 = \varphi_2 f$ ; infatti  $\varphi_2 v_1 - f \varphi_2 = 0$  perchè  $\varphi_2 \neq 0 \implies \varphi_1 = 1$ .

Si può verificare anche che  $v_2 \in S^{-m+2}(\mathbf{m}, Q_0)$ , e che

$$\|v_2\|_{S^{-m+2}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq c_6 \{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1 u\|_{S^{m+1}(\mathbf{m}, Q_0)}\}.$$

Allora  $\varphi_2 u \in S^{m+2}(\mathbf{m}, Q_0)$  e si ha la maggiorazione

$$\|\varphi_2 u\|_{S^{m+2}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq c_7 \|v_2\|_{S^{-m+2}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq K_2 \{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)}\}.$$

Iterando il ragionamento si ottiene che  $\varphi_m u \in S^{2m}(\mathbf{m}, Q_0)$ , con la maggiorazione

$$\|\varphi_m u\|_{S^{2m}(\mathbf{m}, Q_0)} \leq K_m \{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)}\}.$$

Dall'isomorfismo degli spazi  $S^{2m}(\mathfrak{m}, Q_0)$  ed  $H_{\#}^{2m}(\mathfrak{m}, Q_0)$  segue che  $\varphi_m u \in H_{\#}^{2m}(\mathfrak{m}, Q_0)$  e, poichè  $\varphi_m = 1$  su  $Q_{m+1}$ , si ha  $u \in H^{2m}(\mathfrak{m}, Q_{m+1})$  e

$$\|u\|_{H^{2m}(\mathfrak{m}, Q_{m+1})} \leq \|\varphi_m u\|_{H^{2m}(\mathfrak{m}, Q_0)} \leq K \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^m(\mathfrak{m}, \Omega)} \}$$

c. v. d.

#### 4. Regolarizzazione in $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})$ .

Dimostriamo in questo paragrafo il seguente teorema di regolarizzazione:

**TEOREMA 4.I.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , di tipo (A) rispetto alla metrica  $\delta_{\mathfrak{m}}$ , e sia  $u(x) \in H^m(\mathfrak{m}, \Omega)$  una soluzione debole in  $\Omega$  dell'equazione fortemente quasi-ellittica*

$$(4.1) \quad E(u) = \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) = f.$$

Supponiamo che  $f$  appartenga a  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})$ ,  $0 \leq \theta < 1 + \frac{2}{\mu}$  e che i coefficienti  $a_{\alpha\beta}(x) \in C^{m, \nu_\theta}(\mathfrak{m}, \Omega)$ , dove

$$\nu_\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta < 1 \\ \varepsilon > 0 \text{ arbitrario} & \text{se } \theta = 1 \\ \frac{\mu(\theta - 1)}{2} & \text{se } 1 < \theta < 1 + \frac{2}{\mu}. \end{cases}$$

Allora per ogni aperto  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  la funzione  $u$  e tutte le sue derivate  $D^\alpha D^\beta u$ , con  $\langle \alpha, q \rangle \leq m$  e  $\langle \beta, q \rangle \leq m$ , appartengono ad  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathfrak{m}})$  e si ha la maggiorazione:

$$(4.2) \quad \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \|D^\alpha D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathfrak{m}})} \leq c \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathfrak{m}, \Omega)} \}$$

Come caso particolare del teorema 4.1, in virtù delle proprietà degli spazi  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathfrak{m}})$  (vedi [6], [4]) si ha il seguente risultato:

**TEOREMA 4.II.** *Sia  $u(x)$  una soluzione debole in  $\Omega$  dell'equazione f.q.e.*

$$E(u) = f.$$

Se  $f \in C^{0,\nu}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})$  ed i coefficienti  $a_{\alpha\beta} \in C^{m,\nu}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$  allora, per ogni aperto  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ , di tipo (A) rispetto a  $\delta_{\mathbf{m}}$  tutte le derivate  $D^\alpha D^\beta u$  ( $\langle \alpha, q \rangle \leq m$ ,  $\langle \beta, q \rangle \leq m$ ) appartengono a  $C^{0,\nu}(\bar{\Omega}_0, \delta_{\mathbf{m}})$  e si ha la maggiorazione:

$$\sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \|D^\alpha D^\beta u\|_{C^{0,\nu}(\bar{\Omega}_0, \delta_{\mathbf{m}})} \leq c \{ \|f\|_{C^{0,\nu}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}.$$

In altre parole ogni soluzione debole in  $\Omega$  di  $E(u) = f$  è, all'interno, una soluzione « classica ».

Prima di passare alla dimostrazione del teorema 4.I, dimostreremo un lemma.

**DEFINIZIONE 4.I.** Siano  $A$  e  $B$  due spazi di Banach, rispettivamente con norme  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  costituite di funzioni definite su  $\Omega$ . Diciamo che  $A$  è uno spazio di moltiplicatori per  $B$  se  $\forall \varphi \in A$  e  $\forall u \in B$  si ha:

$$\varphi u \in B \quad e \quad \|\varphi u\|_B \leq c \|\varphi\|_A \|u\|_B.$$

Se  $\theta$  è un numero compreso fra 0 e  $1 + \frac{2}{\mu}$ , poniamo

$$\nu_\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta < 1 \\ \varepsilon > 0 \text{ arbitrario} & \text{se } \theta = 1 \\ \frac{\mu(\theta - 1)}{2} & \text{se } \theta > 1. \end{cases}$$

**LEMMA 4.I.** Sia  $\Omega$  di tipo (A) rispetto a  $\delta_{\mathbf{m}}$ .

$C^{0,\nu_\theta}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})$  è uno spazio di moltiplicatori per  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$ .

**DIMOSTRAZIONE.**  $a: \theta < 1$ . Sia  $\varphi \in C^0(\Omega)$  e  $u \in \mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$ ; allora

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |\varphi u|^2 dx \leq \sup_{\bar{\Omega}} |\varphi(x)|^2 \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u|^2 dx$$

ed essendo  $\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  isomorfo ad  $L^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  [6]:

$$\|\varphi u\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}^2 \leq c_1 \|\varphi\|_{C_0(\bar{\Omega})}^2 \|u\|_{L^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}^2 \leq c_2 \|\varphi\|_{C_0(\bar{\Omega})}^2 \|u\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}^2$$

$b: \theta = 1$ . Sia  $\varphi \in C^{0, \varepsilon}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})$  e  $u \in \mathcal{L}^{2, 1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$ ; si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u\varphi - \{u\varphi\}_e|^2 dx &= \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x)\varphi(x_0) + u(x)[\varphi(x) - \varphi(x_0)] - \\ &\quad - \{u(x)[\varphi(x) - \varphi(x_0)]\}_e - u_e \varphi(x_0)|^2 dx \leq \\ &\leq c_1 \left\{ |\varphi(x_0)|^2 \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u - u_e|^2 dx + \varrho^{2\varepsilon} \|\varphi\|_{C^{0, \varepsilon}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})}^2 \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u|^2 dx \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(\dagger)}{\leq} c_2 \|\varphi\|_{C^{0, \varepsilon}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})}^2 \left\{ (\varrho^\mu \|u\|_{\mathcal{L}^{2, 1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}^2 + \varrho^{2\varepsilon} \cdot \varrho^{\mu-2\varepsilon} \|u\|_{L^{2, 1-\frac{2\varepsilon}{\mu}}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}^2) \right\} \leq \\ \leq c_3 \varrho^\mu \|\varphi\|_{C^{0, \varepsilon}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})}^2 \|u\|_{\mathcal{L}^{2, 1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}^2 \end{aligned}$$

$c: \theta > 1$ . È ovvio, poichè  $\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  è isomorfo a  $C^{0, \kappa_\theta}(\bar{\Omega}, \delta_{\mathbf{m}})$ .

Possiamo ora dimostrare il teorema 4.I. Facciamo vedere in primo luogo che le derivate  $D_i D^\beta u \langle \beta, q \rangle \leq m, i = 1, \dots, n$  appartengono ad  $\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})$  per ogni  $\Omega_0 \subset \subset \Omega$ .

Sia  $\Omega_1$  un aperto verificante la relazione  $\Omega_0 \subset \subset \Omega_1 \subset \subset \Omega$ .

Per il teorema 3.I  $u \in H^{2m}(\mathbf{m}, \Omega_1)$ , avendosi la maggiorazione (3.10). Allora  $D_i u (i = 1, \dots, n)$  appartiene ad  $H^m(\mathbf{m}, \Omega_1)$  e verifica in  $\Omega_1$  l'equazione

$$E(D_i u) = D_i f - \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} D^\alpha (D_i a_{\alpha\beta} \cdot D^\beta u).$$

Per il teorema 10.I di [7]<sup>(8)</sup>  $D^\beta u \in \mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})$  e quindi, per il lemma

(<sup>7</sup>) Si usa qui il fatto che  $\theta_1 \leq \theta_2 \Rightarrow \mathcal{L}^{2, \theta_2}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}}) \subset \mathcal{L}^{2, \theta_1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  e si ha  $\forall u \in \mathcal{L}^{2, \theta_2}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{2, \theta_2}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} \leq \theta \|u\|_{\mathcal{L}^{2, \theta_1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})}.$$

(<sup>8</sup>) Tale teorema è stato dimostrato nel caso particolare in cui il secondo membro dell'equazione contenesse solo termini del tipo  $D^\alpha f_\alpha$  con  $f_\alpha \in L^2(\Omega)$  e  $\langle \alpha, q \rangle = m$ . Non è difficile però convincersi che esso resta valido anche se sono presenti termini  $D^\alpha f_\alpha$  con  $\langle \alpha, q \rangle < m$ .

4.I, appartengono ad  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})$  anche le funzioni

$$\varphi_\alpha = \sum_{\langle \beta, q \rangle \leq m} D_i a_{\alpha\beta} \cdot D^\beta u.$$

Allora, di nuovo per il teorema 10.I di [7],  $\forall \beta: \langle \beta, q \rangle \leq m$ ,  $D_i D^\beta u \in \mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})$  e si ha la maggiorazione

$$\begin{aligned} \|D_i D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})} &\leq c_1 \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m} \|\varphi_\alpha\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})} + \\ &\quad + \|D_i u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega_1)} \} \end{aligned}$$

ed essendo

$$\|\varphi_\alpha\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})} \leq c_2 \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}$$

$$\|D_i u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega_1)} \leq c_3 \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}$$

si ottiene

$$\|D_i D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})} \leq c \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}.$$

Supponiamo ora che, comunque fissato un aperto  $\Omega_1 \subset \subset \Omega$ , tutte le derivate  $D^\sigma D^\beta u$  con  $\langle \sigma, q \rangle \leq m$ ,  $|\sigma| \leq k$  e  $\langle \beta, q \rangle \leq m$  appartengano ad  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})$ , e che sia

$$\|D^\sigma D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})} \leq c \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}$$

e dimostriamo che lo stesso vale per  $D^\tau D^\beta u$  con  $\langle \tau, q \rangle \leq m$ ,  $|\tau| = k+1$  e  $\langle \beta, q \rangle \leq m$ .

Infatti siano  $\Omega_0$  e  $\Omega_1$  due aperti verificanti la relazione  $\Omega_0 \subset \subset \Omega_1 \subset \subset \Omega$ .  $D^\tau u \in H^m(\mathbf{m}, \Omega_1)$  verifica in  $\Omega_1$  l'equazione

$$E(D^\tau u) = D^\tau f - \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma \leq \tau}} \binom{\tau}{\gamma} D^\alpha (D^\gamma a_{\alpha\beta} \cdot D^{\tau-\gamma} D^\beta u).$$

D'altra parte, essendo  $|\tau - \gamma| \leq k$ ,  $D^{\tau-\gamma} D^\beta u \in \mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})$  e quindi anche  $\varphi_\alpha = \sum_{\langle \beta, q \rangle \leq m} \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma < \tau}} \binom{\tau}{\gamma} D^\gamma a_{\alpha\beta} \cdot D^{\tau-\gamma} D^\beta u \in \mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})$ .

Per il teorema 10.I di [7] si ha allora che  $D^\tau D^\beta u \in \mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})$  con la maggiorazione

$$\|D^\tau D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})} \leq c_1 \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m} \|\varphi_\alpha\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_1, \delta_{\mathbf{m}})} + \|D^\tau u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega_1)} \} \leq c_2 \{ \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}.$$

Il teorema è così dimostrato.

Con la stessa tecnica usata nella dimostrazione del teorema 4.I si può provare che se  $f$  ha le derivate  $D^\sigma f$  ( $\langle \sigma, q \rangle \leq mj$ ) in  $\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  e se i coefficienti  $a_{\alpha\beta} \in C^{m(j+1), \nu_\theta}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$ , allora  $u$  ha tutte le derivate

$$D^\tau D^\beta u [\langle \tau, q \rangle \leq m(j+1), \langle \beta, q \rangle \leq m] \text{ in } \mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}}).$$

Si ha allora il seguente.

**TEOREMA 4.III.** *Sia  $u(x)$  una soluzione debole in  $\Omega$  dell'equazione f.q.e.*

$$E(u) = f.$$

*Se  $f$  ha le derivate  $D^\sigma f$  ( $\langle \sigma, q \rangle \leq mj$ ) in  $\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  e se i coefficienti  $a_{\alpha\beta}(x) \in C^{m(j+1), \nu_\theta}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$  allora per ogni aperto  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  le derivate  $D^\tau D^\beta u$  ( $\langle \tau, q \rangle \leq m(j+1), \langle \beta, q \rangle \leq m$ ) appartengono ad  $\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})$  e si ha la maggiorazione:*

$$\|D^\tau D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega_0, \delta_{\mathbf{m}})} \leq c \{ \sum_{\langle \sigma, q \rangle \leq mj} \|D^\sigma f\|_{\mathcal{L}^{2, \theta}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})} + \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \}.$$

### 5. Maggiorazioni in $L^p$ per la soluzione del problema di Dirichlet.

I risultati dei precedenti paragrafi ci permettono di dare un'ulteriore teorema riguardante la soluzione del problema di Dirichlet

$$\mathfrak{D}: \begin{cases} u \in H_0^m(\mathbf{m}, \Omega) \\ E(u) + \lambda u = f \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Con  $E(u)$  come in (4.1) ed  $f \in L^2(\Omega)$ . È noto (vedi ad es. [7], teor. 13.I) che se  $\text{Re } \lambda$  è abbastanza grande il problema  $D$  ha soluzione unica, e si ha

$$(5.1) \quad \|u\|_{H^m(\mathbf{m}, \Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sussiste il seguente teorema :

**TEOREMA 5.I.** *Sia  $E(u)$  un operatore fortemente quasi-ellittico con i coefficienti  $a_{\alpha\beta} \in C^{m,\varepsilon}(\mathfrak{m}, \bar{\Omega})$  per qualche  $\varepsilon > 0$ , e sia  $u(x)$  la soluzione del problema di Dirichlet  $\mathfrak{D}$ . Sia  $Q$  una sfera nella metrica  $\delta_{\mathfrak{m}}^*$ <sup>(9)</sup> strettamente contenuta in  $\Omega$ .*

*Se la funzione  $f \in L^p(\Omega)$  ( $2 \leq p < +\infty$ ), le derivate  $D^\alpha D^\beta u$  ( $\langle \alpha, q \rangle \leq m$ ,  $\langle \beta, q \rangle \leq m$ ) della soluzione appartengono ad  $L^p(Q)$  e si ha la maggiorazione:*

$$(5.2) \quad \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq m \\ \langle \beta, q \rangle \leq m}} \|D^\alpha D^\beta u\|_{L^p(Q)} \leq c \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Per la dimostrazione di questo teorema si userà un teorema di interpolazione di G. Stampacchia (vedi [11], [10], [5]) di cui ricordiamo l'enunciato:

**TEOREMA 5.II.** *Sia  $Q$  una sfera nella metrica  $\delta_{\mathfrak{m}}^*$ .  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  un'applicazione lineare di  $L^p(\Omega)$  in  $L^p(Q)$  ( $p > 1$ ) e di  $L^\infty(\Omega)$  in  $\mathcal{L}^{1,1}(Q, \delta_{\mathfrak{m}}^*)$ , tale che:*

$$\|Tf\|_{L^p(Q)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\|Tf\|_{\mathcal{L}^{1,1}(Q, \delta_{\mathfrak{m}}^*)} \leq C_2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Allora per ogni  $q$ ,  $p \leq q < +\infty$ ,  $T$  è un'applicazione lineare e continua di  $L^q(\Omega)$  in  $L^q(Q)$  e si ha la maggiorazione*

$$(5.3) \quad \|Tf\|_{L^q(Q)} \leq K \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

dove  $K$  è una costante positiva che dipende da  $p, q, |\Omega|/|Q|$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .

Dimostriamo ora il teorema 5.I.

Sia  $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$  l'applicazione che alla funzione  $f \in L^2(\Omega)$  fa corrispondere la restrizione a  $Q$  della derivata  $D^\alpha D^\beta u$  della soluzione  $u$  di  $D$ .

Per il teorema 3.I,  $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$  applica  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(Q)$  e si ha la maggiorazione

$$(5.4) \quad \|D^\alpha D^\beta u\|_{L^2(Q)} \leq c_1 \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^m(\mathfrak{m}, \Omega)} \} \leq c_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

<sup>(9)</sup>  $\delta_{\mathfrak{m}}^*(x, y)$  è la metrica così definita

$$\delta_{\mathfrak{m}}^*(x, y) = \sup_i \{ |x_i - y_i|^{\frac{m_i}{m}} \}$$

ed è equivalente alla metrica  $\delta_{\mathfrak{m}}(x, y)$ .

D'altra parte, per il teorema 4.II,  $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$  applica  $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}}^*)$  in  $\mathcal{L}^{2,1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}}^*)$ <sup>(10)</sup> e si ha

$$(5.5) \quad \|D^\alpha D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{2,1}(Q, \delta_{\mathbf{m}}^*)} \leq c_3 \|f\|_{\mathcal{L}^{2,1}(Q, \delta_{\mathbf{m}}^*)}.$$

Il teorema 5.II assicura allora che  $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$  applica  $L^p(\Omega)$  ( $2 \leq p < +\infty$ ) in  $L^p(Q)$ , con la maggiorazione

$$\|D^\alpha D^\beta u\|_{L^p(Q)} \leq c \|f\|_{L^p(Q)}$$

c. v. d.

Dal teorema 4.III discende, con lo stesso ragionamento il seguente risultato :

TEOREMA 5.III. *Sia  $u(x)$  una soluzione debole in  $\Omega$  dell'equazione f.q.e.*

$$E(u) = f.$$

*Se la funzione  $f \in H^{m,j,p}(\mathbf{m}, \Omega)$  ed i coefficienti  $a_{\alpha\beta}(x) \in C^{m(j+1), \varepsilon}(\mathbf{m}, \bar{\Omega})$  ( $\varepsilon > 0$  arbitrario) allora le derivate  $D^\tau D^\beta u$  ( $\langle \tau, q \rangle \leq m(j+1)$ ,  $\langle \beta, q \rangle \leq m$ ) appartengono ad  $L^p(Q)$  per ogni sfera  $Q$  nella metrica  $\delta_{\mathbf{m}}^*$ ,  $Q \subset\subset \Omega$ , e si ha la maggiorazione*

$$\|D^\tau D^\beta u\|_{L^p(Q)} \leq c(j) \|f\|_{H^{m,j,p}(\mathbf{m}, \Omega)}.$$

Università di Pisa

---

<sup>(10)</sup> Ricordiamo (cfr. [4]) che se due metriche  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono equivalenti, gli spazi  $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta_1)$  ed  $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta_2)$  sono isomorfici; e che gli spazi  $\mathcal{L}^{p,1}(\Omega, \delta_{\mathbf{m}})$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) sono tutti isomorfi tra loro.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON - « *Lectures on elliptic boundary value problems* », Van Nostrand Math. Studies, Princeton, New Jersey.
- [2] G. C. BAROZZI - « *Sulla struttura degli operatori quasi-ellittici* ». Convegno sulle equazioni alle derivate parziali, Ed. Cremonese, Roma (1965).
- [3] S. CAMPANATO - « *Equazioni ellittiche del  $II^0$  ordine e spazi  $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$*  ». Ann. di Mat. Vol. LXIX (1965).
- [4] S. CAMPANATO - « *Equazioni paraboliche del  $II^0$  ordine e spazi  $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega, \delta)$*  ». Ann. di Mat. Vol. LXXIII (1966).
- [5] S. CAMPANATO - « *Su un teorema di interpolazione di G. Stampacchia* ». Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa, Vol. XX (1966).
- [6] G. DA PRATO - « *Spazi  $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta)$  e loro proprietà* ». Ann. di Mat. Vol. LXIX (1965).
- [7] E. GIUSTI - « *Equazioni quasi-ellittiche e spazi  $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta)(I)$*  ». Ann. di Mat. Vol. LXXV (1967).
- [8] L. HORMANDER - « *Linear partial differential operators* ». Springer-Verlag, Berlino.
- [9] L. SCHWARTZ - « *Théorie des distributions* ». Act. Science et Ind.
- [10] S. SPANNE - « *Sur l'interpolation entre les espaces  $\mathcal{L}_k^{p,\Phi}$*  ». Annali Sc. Nor. Sup. Pisa, Vol. XX (1966).
- [11] G. STAMPACCHIA - « *The spaces  $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$   $N^{(p,\lambda)}$  and interpolation* ». Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. XIX (1975).
- [12] E. M. STEIN, G. WEISS - « *Interpolation of operators with change of measure* ». Trans. Amer. Matem. Soc., 87 (1958).
- [13] L. P. VOLEVIC - « *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici* ». Math. Sbornik, Vol. 59 (101) (1962).
- [14] K. YOSIDA - « *Functional analysis* » Springer-Verlag, Berlino.