ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JINDŘICH NEČAS

Sur une méthode générale pour la solution des problèmes aux limites non linéaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 4 (1966), p. 655-674

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_4_655_0>

SUR UNE MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA SOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES

JINDŘICH NEČAS

§ 1. Introduction.

Soient B_1, B_2 deux espaces de Banach et A un opérateur, en général, non-linéaire de B_1 dans B_2. Étant donné $f \in B_2$, on cherche $u \in B_1$ tel que $A(u) = f$. On suppose d'avoir défini encore un opérateur $A(t, u)$ de $\langle 0, 1 \rangle \times B_1$ dans B_2, de sorte que $A(1, u) = A(u)$ et une courbe différentiable dans B_2, soit $f(t)$, avec $f(1) = f$. Supposons d'avoir trouvé $u_0 \in B_1$ tel que $A(0, u_0) = f(0)$ et cherchons $u(t) \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, B_1)$ de la manière que

$$(1.1) \qquad u(0) = u_0, \quad \frac{\partial A}{\partial t}(t, u) + dA(t, u, u'(t)) = f'(t),$$

où $dA(t, u, w)$ signifie la différentielle de Frèchet. Une telle courbe $u(t)$ trouvée, $u(1)$ est la solution du problème original. Nous reformulerons cette idée dans la suite du point de vue des problèmes aux limites.

Le résultat principal (sans la formulation précise): Soit $M(t, u, \cdot)$ l'inverse de $A(t, u, \cdot)$ dont l'existence est supposée pour $u \in B_1$. L'opérateur $u \longrightarrow M\left(t, u, f' - \frac{\partial A}{\partial t}(t, u)\right)$ soit dans un sens compact ou lipschitzien et désignons par M l'ensemble des solutions eventuelles de l'équation intégrale $u(t) = u(0) + \int_0^t M\left(\tau, u(\tau), f'(\tau) - \frac{\partial A}{\partial t}(\tau, u)\right) d\tau, \ 0 \leq t \leq \varepsilon \leq 1$. On suppose que pour $u(t) \in M$, $t \in \langle 0, \varepsilon \rangle$,

$$(1.2) \qquad \left\| M\left(t, u(t), f'(t) - \frac{\partial A}{\partial t}(t, u(t))\right) \right\|_{B_1} \leq C_1(M) + C_2(M) \| u(t) \|_{B_1}.$$

Pervenuto alla Redazione il 1 Febbraio 1966.

Alors il existe une solution de (1.1) dans $\langle 0, 1 \rangle$ et à plus forte raison, du problème original.

Remarquons que notre méthode est proche des procédés bien connus, cf. p. ex. T. H. Hildebrandt, L. M. Graves [1], J. Leray, J. Schauder [2] e.t.c.

Voici les notations que nous utiliserons: si A est un opérateur de B_1 dans B_2, nous écrirons $A \in B_1 \to B_2$ ou si $A(u) = f$, $u \to f \in B_1 \to B_2$. Le cas, ou A est linéaire et continu, sera désigné par $A \in [B_1 \to B_2]$. Si A est continu de la topologie faible de B_1 dans la topologie faible de B_2, nous dirons que A est faiblement continu.

A a la différentielle de Fréchet au point $u \in B_1$ désignée par $dA(u, w)$ si pour $w \in B_1$, $\lim\limits_{\|w\|_{B_1} \to 0} \dfrac{\|A(u+w) - A(u) - dA(u,w)\|_{B_1}}{\|w\|_{B_1}} = 0$ et $A(u, \cdot) \in$ $\in [B_1 \to B_2]$. On définit encore la différentielle de Gateaux pour $u \in B_1$, $w \in B_1$, comme $DA(u,w) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(u + hw) - A(u)}{h}$, $DA(u, \cdot) \in [B_1 \to B_2]$. On a pour les espaces reéls, cf. M. M. Vajnberg [3]:

PROPOSITION 1.1. *Si au point* $u \in B_1$, $u \to DA(u, \cdot)$ *est continu, alors* $DA(u, \cdot) = dA(u, \cdot)$.

Nous utiliserons dans la suite à côté du théorème de Banach sur le point fixe pour la contraction les théorèmes suivants de J. Schauder, cf. J. Schauder [4], [5]:

PROPOSITION 1.2. *L'application continu et compacte d'un ensemble convexe et fermé dans lui même a un point fixe.*

PROPOSITION 1.3. *Soit* B *séparable et* $K \subset B$ *un ensemble convexe, faiblement compacte et faiblement fermé,* A *un opérateur faiblement continu de* K *dans lui même. Alors* A *a dans* K *un point fixe.*

§ 2. Théorèmes fondamentaux.

On se donne V, B deux espaces de Banach, $B_0 \subset B$ un sous-espace fermé de B et l'on désigne par V' le dual du V. Soit encore P un autre espace de Banach tel que $P \subset V'$ algébriquement et topologiquement et $A(v, u)$ une application de $V \times B$ dans les nombres réels ou complexes, linéaire et continue en v pour chaque u fixé. On se donne $\bar{g} \in P$, $u_0 \in B$ et l'on cherche $u \in B$ de sorte que

$$u - u_0 \in B_0, \tag{2.1}$$

$$\text{pour chaque } v \in V: \ A(v, u) = \bar{g}\, v. \tag{2.2}$$

Puis, définissons $A(t, v, u)$, une application de $\langle 0, 1 \rangle \times V \times B$ dans E_1 ou C_1, telle que $A(1, v, u) = A(v, u)$ (1).

Supposons que pour chaque v fixé, $A(t, v, u)$ a la différentielle de Fréchet

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t, \tau, v, w) + \frac{\partial A}{\partial u}(t, u, v, w) \tag{2.3}$$

avec $\frac{\partial A}{\partial u}$ bilinéaire ou sesquilinéaire en v, w, $\frac{\partial A}{\partial t}$ linéaire et continue en v. Soit $\overline{g(t)} \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, P)$, $u_0(t) \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, B)$ avec $\overline{g(1)} = \overline{g}$, $u_0(1) = u_0$. Ici par $C^{(k)}$ on désigne comme d'habitude les applications k-fois continûment différentiables. Soit $u(0)$ une solution du problème (2. 1), (2.2) avec $A(0, v, u)$, $u_0 = u_0(0)$, $\overline{g} = \overline{g(0)}$. On suppose maintenant que le problème de trouver $w \in B$ de sorte que

$$w - u_0'(t) \in B_0, \tag{2.4}$$

(2.5) pour chaque $v \in V$, $\frac{\partial A}{\partial u}(t, u, v, w) = \overline{g'(t)}\, v - \frac{\partial A}{\partial t}(t, 1, v, u), 0 \leq t \leq 1, u \in B,$

est résoluble et que sa solution est donnée par $N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ (2).

HYPOTHÉSE 2.6. *$N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ est uniformément continu pour* $0 \leq t \leq 1, \| u \|_B \leq R$,

HYPOTHÈSE 2.7. *$N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ est compact comme l'application $u \longrightarrow N$.*

Désignons par M l'ensemble des extrémités droites des courbes $u(t) \in C^{(1)}(\langle 0, \varepsilon \rangle, B)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, solutions eventuelles de l'équation intégrale

$$u(t) = u_0 + \int_0 N(\tau, u(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau))\, d\tau . \tag{2.8}$$

Désignons comme

HYPOTHÈSE 2.9. $\| N(\varepsilon, u(\varepsilon), g'(\varepsilon), u_0'(\varepsilon)) \|_B \leq C_1(M) + C_2(M) \| u(\varepsilon) \|_B$, $u \in M$, $C_1(M) > 0$, $C_2(M) \geq 0$.

---

(1) Le cas très important est celui, où $A(t, v, u)$ ne dépend pas de t.

(2) On coordonne à V l'espace conjugé $\overline{V}$ en définissant $\overline{v}$ pour $v \in V$. On définit $g'(t) \in \overline{V}$ par $g'(t)\, \overline{v} = \overline{g'(t)\, v}$. Si V est un espace des fonctions, $\overline{v}$ a le sens usuel. L'opération $\overline{v}$ est antilinéaire, $\| \overline{v} \| = \| v \|$.

Nous avons

THÉORÈME 2.1. *Le problème* (2.1), (2.2) *soit donné. On suppose l'existence de* $u(0)$, *les hypothèses* 2.6, 2.7, 2.9. *Alors il existe* $u(t) \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, B)$, *une solution de* (2.8) *et* $u(1)$ *est une solution du problème* (2.1), (2.2).

DÉMONSTRATION. Supposons que nous avons une solution de (2.8) dans $\langle 0, \varepsilon \rangle$, $0 \leq \varepsilon < 1$. J'affirme qu'il existe une telle solution dans $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ avec $\varepsilon < \varepsilon_1 \leq 1$. En effet, pour ce but, il suffit de démontrer l'existence d'une solution de l'équation intégrale

$$u(t) = u(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{t} N(\tau, u(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau))\, d\tau \tag{2.10}$$

pour $\varepsilon \leq t \leq \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 - \varepsilon$ assez petit. Prenons $0 < \mu < 1$ et soit $\delta > 0$ et $K_\delta = \{u(t), \| u(t) - u(\varepsilon) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)} \leq \delta\}$; par $C^{(0),\mu}$ on désigne comme d'habitude l'espace des applications μ — höldériennes avec le norme

$$\| u(t) \|_{C^{(0),\mu}} = \max \| u(t) \|_B + \sup \frac{\| u(t_1) - u(t_2) \|_B}{| t_1 - t_2 |^\mu} .$$

Soit

$N_\delta = \sup\limits_{\| u - u(\varepsilon) \|_B \leq \delta,\, \varepsilon \leq \tau \leq \varepsilon_1} \| N(\tau, u, g'(\tau), u_0'(\tau)) \|$. On a $N_\delta < \infty$ en vertu de l'hypothèse 2.6. Si nécéssaire, diminuons ε_1 de sorte que $\varepsilon_1 - \varepsilon \leq \left(\dfrac{\delta}{2 N_\delta}\right)^{\frac{1}{1-\mu}}$. Maintenant l'application

$$\omega(t) = u(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{t} N(\tau, u(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau))\, d\tau \tag{2.11}$$

transforme K_δ dans lui même: en effet $\| \omega(t) - u(\varepsilon) \|_B \leq (\varepsilon_1 - \varepsilon) N_\delta$, $\| \omega(t_1) - \omega(t_2) \|_B \leq | t_1 - t_2 | N_\delta$, d'où

$\| \omega(t) - u(\varepsilon) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)} \leq (\varepsilon_1 - \varepsilon) N_\delta + (\varepsilon_1 - \varepsilon)^{1-\mu} N_\delta \leq 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)^{1-\mu} N_\delta \leq \delta.$

L'application (2.11) est compacte. Pour le voir, soit $u_n(t) \in K_\delta$; les éléments $u_n(t)$ sont également continues dans $\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle$, alors les éléments $h_n(t) = N(t, u_n(t), g'(t), u_0'(t))$ en vertu de l'hypothèse 2.6 le sont aussi. Pour t fixé de $\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle$, on peut tirer de $h_n(t)$ une sous-suite convergente dans B. Du theorème d'Arzelà suit l'existence d'une sous-suite $h_{n_k}(t)$ qui converge fortement dans $C^{(0)}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)$, d'où $\omega_{n_k}(t)$ converge dans $C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)$.

On applique la proposition 1.2, alors il existe un point fixe pour l'application (2.11), d'où l'énoncé.

Démontrons maintenant: s'il existe une solution $u(t)$ de (2.8) dans l'intervalle $\langle 0, \varepsilon)$, il en est ainsi pour l'intervalle $\langle 0, \varepsilon \rangle$. Posons $C = \max(C_1(M), C_2(M))$ et choisissons a de sorte que $1 - 2a^{1-\mu} C \geq \frac{1}{2}$. Soit $\varepsilon - a < \varepsilon^* < \varepsilon$. Maintenant pour $t \in \langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle$ nous obtenons $\| u(t) - u(\varepsilon - a) \|_B \leq ac(1 + \| u(t) - u(\varepsilon - a) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle, B)})$ et pour

$$t_1, t_2 \in \langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle : \frac{\| u(t_1) - u(t_2) \|_B}{| t_1 - t_2 |^\mu} \leq$$
$$\leq a^{1-\mu} C (1 + \| u(t) - u(\varepsilon - a) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle, B)}.$$

Alors $\| u(t) - u(\varepsilon - a) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle, B)} \leq$

$$\leq 2a^{1-\mu} C (1 + \| u(t) - u(\varepsilon - a) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle, B)},$$

d'où

$$\| u(t) - u(\varepsilon - a) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon - a, \varepsilon^* \rangle, B)} \leq 4ca^{1-\mu} + \| u(\varepsilon - a) \|_B \tag{2.12}$$

(2.12) ne dépendant pas de ε^*, on peut prolonger $u(t)$ sur l'intervalle $\langle 0, \varepsilon \rangle$ sur une fonction de $C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon - a, \varepsilon \rangle, B)$; évidemment (2.8) est satisfaite.

Nous avons ainsi obtenu l'existence d'une solution de (2.8) sur $\langle 0, 1 \rangle$ dans $C^{(0),\mu}(\langle 0, 1 \rangle, B)$. Évidemment une telle solution appartient dans $C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, B)$ et $u(0) = u_0$, pour $0 \leq t \leq 1 : u'(t) - u_0'(t) \in B_0$, pour chaque

$$v \in V, \frac{\partial A}{\partial u}(t, u, v, u') + \frac{\partial A}{\partial t}(t, 1, v, u) = \overline{g'(t)}\, v.$$

Il en suit que

$$\frac{d}{dt}(A(t, v, u(t))) = \overline{g'(t)}\, v, \quad \text{d'où } A(t, v, u(t)) = \overline{g(t)}\, v,$$

$$u(t) - u_0(t) \in B_0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1, \text{ c.q.f.d.}$$

REMARQUE 2.1. Nous laissons au lecteur la redémonstration du théorème 2.1 pour le cas de $N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ défini au voisinage de chaque solution eventuelle $u(t) \in C^{(0)}(\langle 0, \varepsilon \rangle, B)$ de l'équation 2.8: $N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ est défini en u au voisinage de u_0 pour $0 \leq t \leq \varepsilon \leq 1$; si $u(t)$ est une solution de (2.8) dans $\langle 0, \varepsilon \rangle$, $N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ est defini pour $\varepsilon \leq t \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon < \varepsilon_1 \leq 1$ en u dans un voisinage de $u(\varepsilon)$ e.t.c. Puis si $u(t)$ est une solution de (2.8) dans $\langle 0, \varepsilon \rangle$ et s'il existe $\lim_{t \to \varepsilon - 0} u(t) = u(\varepsilon)$, $N(t, u(t), g'(t), u_0'(t))$ est supposé continu pour $t = \varepsilon - 0$. Les hypothèses (2.6), (2.7) s'énoncent aussi localement. Cette remarque est valable aussi pour les théorèmes qui suivront.

Les hypothèses (2.6), (2.7) peuvent être remplacées par les hypothèses:

HYPHOTHÈSE 2.13. *B est un Banach réfléxif, séparable, $N(t, u, g'(u), u_0'(t))$ une application bornée de $\langle 0, 1 \rangle \times B$ dans B, continue localement uniformément (de la topologie forte dans la topologie faible) de $\langle 0, 1 \rangle \times B$ dans B, et continue de $\langle 0, 1 \rangle \times B$ dans B.*

HYPOTHÈSE 2.14. *$n \longrightarrow N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ est une application faiblement continue.*

THÉORÈME 2.2. *Le problème (2.1), (2.2) soit donné. On suppose l'existence de $u(0)$, (2.9), (2.13), (2.14). Alors l'assertion du théorème 2.1 est valable.*

DÉMONSTRATION. La première assertion de la démonstration du théorème 2.1 a lieu, En effet, considérons l'équation (2.10). Premièrement, choisissons ε_1 comme dans la démonstration du théorème 2.1 et soit $\Delta t = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{n}$. Cherchons $u_i \in B$, $i = 0, \dots n$, $u_0 = u(\varepsilon)$ de sorte que pour $i = 1, 2, \dots n$

$$(2.15) \qquad u_i = u(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{i} N(\varepsilon + j\Delta t, u_j, g'(\varepsilon + j\Delta t), u_0'(\varepsilon + j\Delta t))\,\Delta t\ (^3).$$

Plongeons les éléments $(u_1, u_2, \dots u_n) \equiv U$ dans $C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)$ en définissant $u(t)$ pour $t = \varepsilon + i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots n$, par $u(\varepsilon + i\Delta t) = u_i$ et pour $\varepsilon(i-1)\Delta t < t < \varepsilon + i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots n$, linéairement. Soit $\| U \| = \| u(t) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)}$. Désignons par B_n l'espace de tels éléments. Soit $K_\delta^n = K_\delta \cap B_n$. L'application 2.16

$$(2.16) \qquad \omega_i = u(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{i} N(\varepsilon + j\Delta t, u_j, g'(\varepsilon + j\Delta t), u_0'(\varepsilon + j\Delta t))\,\Delta t$$

transforme K_δ^n dans lui même. Nous appliquons la proposition 1.3 et obtenons un point fixe. Nous avons ainsi trouvé une suite des $u_n(t) \in C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)$ avec (2·17) $\| u_n(t) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)} \leq C_1$. Par le procédé diagonal, on tire de $u_n(t)$ une sous-suite convergeante dans chaque point rationel de $\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle$ faiblement vers $u(t)$ (on la désigne encore $u_n(t)$). En vertu de (2.17) cette sous-suite converge faiblement pour chaque t et évidemment $\| u(t) \|_{C^{(0),\mu}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)} \leq C_1$.

---

(3) Ce procédé a une grande importance du point de vue des calculs numériques.

L'élément $u(t)$ satisfait à l'équation (2.10); en effet, soit $f \in B'$ et $t \in \langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle$. Nous obtenons que $f(u(t)) = \lim_{n \to \infty} \int_0^t f N(\tau, u_n(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau))\, d\tau$.
D'autre part $\lim_{n \to \infty} f N(\tau, u_n(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau)) = f N(\tau, u(\tau), g'(\tau) u_0'(\tau))$ et $| f(N(\tau, u_n(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau)) | \leq C_2$, alors $\lim_{n \to \infty} \int_0^t f N(\tau, u_n(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau))\, d\tau =$
$= \int_0 f N(\tau, u(\tau), g'(\tau), u_0'(\tau))\, d\tau$, d'où l'énoncé. Le reste de la démonstration coincide avec celui du théorème 2.1, c.q.f.d.

Remarque 2.2. L'estimation 2.9 est substentielle et la croissance linéaire ne peut pas être amèliorée de $\varepsilon > 0$.

Pour obtenir 2.9, considérons

Hypothèse 2.18. *Soit* $B = B_0 = V$ *un espace de Hilbert,* $\dfrac{\partial A}{\partial t} = 0$, Q *un autre espace de Hilbert tel que* $V \subset Q$ *et que l'application identique de* V *dans* Q *soit complètement continue; soit encore* V *dense dans* Q. *Supposons* $\dfrac{\partial A}{\partial u}(u, v, w)$ *hermitienne (en* v, w*).*

Un élément $w \in V$ et $\lambda \in C_1$ est dit un élément propre et une valeur propre respectivement, correspondant à l'hypothèse 2.18, si pour chaque $v \in V : \dfrac{\partial A}{\partial u}(u, v, w) = \overline{\lambda}(v, w)_Q$; ici $(v, w)_Q$ est le produit scalaire dans Q.

Nous allons resoudre (2.1), (2.2) avec $u_0 \equiv 0$ et $\overline{g} v = (v, g)_Q$, $g \in V$. Il faut faire encore

Hypothèse 2.19. *Il existe* $\lambda_0(u) > 0$ *de sorte que* $\dfrac{\partial A}{\partial u}(u, v, v) + \lambda_0(v, v)_Q \geq$ $\geq C(u) \| v \|_V^2$, $C(u) > 0$.

On dèsigne par $d(u)$ la distance du zéro au spectre.

Thèoréme 2.3. *Les hypothèses* 2.18, 2.19 *aient lieu,* $\lambda = 0$ *ne soit pas une valeur propre, alors* $g'(t) \to N$ *est un opérateur linéaire et complétement continu de* V *dans* V *et* $\| N(u, \cdot) \| = \dfrac{1}{d(u)}$.

Démonstration. On définit l'opérateur $Z_\varkappa$ de $V \to V$ en posant $\dfrac{\partial A}{\partial u}(u, v, w) + \varkappa (v, w)_Q = (v, Z_\varkappa w)_V$, où $(\ ,\ )_V$ signifie le produit scalaire dans

V. En vertu de l'hypothèse 2.19, Z_{λ_0} a l'inverse. Désignons encore par T l'opérateur de $V \to V$, défini par $(v, Tf)_V = (v, f)_Q$. T est linéaire et complétement continu. L'équation

$$\frac{\partial A}{\partial u}(u, v, w) = (v, g'(t))_Q \tag{2.20}$$

équivaut a $Z_{\lambda_0} w - \lambda_0 T w = T g'(t)$, ce qui équivaut à $w - \lambda_0 Z_{\lambda_0}^{-1} T w = Z_{\lambda_0}^{-1} T g'(t) \cdot Z_{\lambda_0}^{-1} T$ étant un opérateur complètement continu, on a l'alternative de Fredholm ; d'àprès l'hypothèse, λ_0 n'est pas une valeur propre. Cela veut dire que Z_0 a l'inverse et (2.20) équivaut à

$$w = Z_0^{-1} T g'(t). \tag{2.21}$$

$R = Z_0^{-1} T$ est un opérateur linéaire, complétement continu, symétrique. Considérons ces valeurs caractéristiques, à savoir les nombres μ pour lesquels $Rw - \mu w = 0$ a une solution différente de zéro. Mais $\mu = 0 \Longrightarrow Z^{-1} T w = 0 \Longrightarrow T w = 0 \Longrightarrow w = 0$, alors $\| R \| = \max |\mu| = \dfrac{1}{d(u)}$, c.q.f.d.

Nous démontrerons encore un théorème d'existence, analogue aux théoremes 2.1, 2.2, en utilisant le théorème sur la contraction de Banach. Faisons

HYPOTHÈSE 2.22. *On suppose B un Banach quelconque, $N(t, u, g'(t), u_0'(t))$ une application bornée et continue de $\langle 0, 1 \rangle \times B$ dans B. Supposons encore que pour chaque $u \in B$, il existe $R(u) > 0$, $c(u) > 0$ de sorte que pour*

$$\| u_1 - u \|_B \leq R(u), \ \| u_2 - u \|_B \leq R(u) :$$
$$\| N(t, u_1, g'(t), u_0'(t)) - N(t, u_2, g'(t), u_0'(t)) \|_B \leq c(u) \| u_1 - u_2 \|_B .$$

THÉORÈME 2.4. *Le problème* (2.1), (2.2) *soit donné. On suppose l'existence de $u(0)$,* 2.9, *hypothèses* 2.9, 2.22. *Alors l'assertion du théorème* 2.1 *est valable.*

DÉMONSTRATION se fera d'une manière analogue à celle du théoreme 2.1. Supposons que nous avons une solution de (2.8) dans $\langle 0, \varepsilon \rangle$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Alors il existe une telle solution dans $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ avec $\varepsilon < \varepsilon_1 \leq 1$. En effet, on prend $0 < \delta \leq R(u)$ et soit

$$K_\delta = \{ u(t) \in C^{(0)}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B), \| u(t) - u(\varepsilon) \|_{C^{(0)}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)} \leq \delta \}.$$

N_δ soit comme audessus et posons $\varepsilon_1 - \varepsilon \leq \dfrac{\delta}{N_\delta}$. La transformation (2.11) applique $C^{(0)}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle . B)$ dans lui même. Si nécéssaire, nous prenons ε_1 si proche de ε que $(\varepsilon_1 - \varepsilon)\, c\,(u\,(\varepsilon)) < 1$. Dans ce cas la transformation (2.11) est une contraction de K_δ dans lui même, il existe alors un point fixe unique. Il est évident dans $C^{(1)}(\langle \varepsilon, \varepsilon_1 \rangle, B)$.

Le reste de la démonstration restant inchangé, on a l'assertion, c.q.f.d.

§ 3. **Exemples.**

Nous n'avons pas tâché de faire dans ce paragraphe une théorie des équations elliptiques non linéaires. Les exemples ont été choisis pour illustrer les résultats du paragraphe précédent. Pour obtenir dans les cas spéciaux les résultats plus précis, il faut trouver des estimations convenables.

Exemple 3.1. Soit Ω un domaine borné a frontière assez régulière. On définit dans $\Omega \times E_\varkappa$ avec $\varkappa$ défini plus loin des fonctions $a_i(x, D^j u)$, $a(x, D^j u)$ avec i, j les multiindices, aux cartes entières non-négatives, $i = (i_1, i_2, \dots i_N)$, $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_N$, $D^j = \dfrac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_N^{j_N}}$, $|i| \leq 2k$, k un entier > 0, $|j| < 2k$ et $\varkappa$ soit le nombre de toutes les indices $|j| < 2k$. Supposons que $a_i(x, \eta)$, $a(x, \eta)$ soient deux fois continûment differéntiables dans $\bar{\Omega} \times E_\varkappa$ et que $a(x, 0) = 0$.

Soit encore donné $g \in C^{(0),\mu}(\bar{\Omega})$, $h \in C^{(2k),\mu}(\partial\Omega)$, où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω et on cherche $u \in C^{(2k),\mu}(\bar{\Omega})$ de sorte que

$$u = h \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.1}$$

$$\sum_{|i| = 2k} a_i(x, D^j u)\, D^i u + a(x, D^j u) = g(x) \text{ dans } \Omega. \tag{3.2}$$

Soit $u_0 \in C^{(2k),\mu}(\bar{\Omega})$ telle que $u_0 = h$ sur $\partial\Omega$ et

$$u_0(t) \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, C^{(2k),\mu}(\bar{\Omega})),\ u_0(1) = u_0,\ g \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle, C^{(0),\mu}(\bar{\Omega})),$$

$$A(t, u) = a(t)\, \Delta^{2k} u + b(t) \Big(\sum_{|i| = 2k} a_i(x, D^j u)\, D^i u + a(x, D^j u) \Big).$$

Ici

$$a(t), b(t) \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle),\ a(t) \geq 0,\ b(t) \geq 0,\ a(1) = 0,\ b(1) = 1.$$

HYPOTHÈSE. 3.3. *On suppose que l'équation*

$$a(t)\, \Delta^{2k} w + a'(t)\, \Delta^{2k} u + b'(t) \Big(\sum_{|i|=2k} a_i(x, D^j u)\, D^i u + a(x, D^j u) \Big) + \tag{3.4}$$

$$+ b(t) \Big(\sum_{|i|=2k} a_i(x, D^j u)\, D^i w + \sum_{|j|<2k} \frac{\partial a_i}{\partial D^j u}(x, D^j u)\, D^i u\, D^j w +$$

$$+ \sum_{|j|<2k} \frac{\partial a}{\partial D^j u}(x, D^j u)\, D^j w = G$$

a pour chaque

$$u \in C^{(2k),\mu}(\bar{\Omega}),\ G \in C^{(0),\mu}(\bar{\Omega}),\ H \in C^{(2k),\mu}(\partial \Omega),\ t \in \langle 0, 1 \rangle$$

une solution unique dans $C^{(2k),\mu}(\bar{\Omega})$ *avec* $u = H$ *sur* $\partial\, \Omega$.

Pour $G = g'(t), H = u_0'(t)$, définissons par l'hypothèse 3.3 $N(t, u, g'(t), u_0'(t))$. Supposons l'hypothèse 2.22, 2.9.

Désignons par $\Gamma \subset C^{(2k),\mu}(\bar{\Omega})$ l'ensemble des solutions eventuelles $u(t)$ du problème

$$A(t, u(t)) = g(t) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.5}$$

$$u(t) = u_0(t) \qquad \text{sur } \partial\, \Omega,\ t \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{3.6}$$

Rappelons la signification de M, cf. 2.9. Nous obtenons immédiatement cette proposition importante:

PROPOSITION 3.1. $M \subset \Gamma$

REMARQUE 3.1. Si nous avons une estimation pour l'ensemble Γ, c'est en vertu de la proposition 3.1 une estimation pour M; si Γ appartient dans une boule, l'hypothèse 2.9 en vertu de l'hypothèse 2.22 est satisfaite. En général, pour l'hypothèse 2.9 n'est pas nécéssaire de savoir « a priori » que Γ appartient dans une boule, cf. aussi l'exemple 3.3.

Nous obtenons ainsi en vertu du théorème 2.4:

PROPOSITION 3.2. *Sous les hypothèses mentionées, il existe une solution du problème* (3.1), (3.2).

Au lieu des espaces $C^{(2k),\mu}$, on peut utiliser les cspaces $W_p^{(2k)}$, cf. la définition plus loin, avec $p > N$, cf. A. I. Košelev [6], S. Agmon, A. Douglis. L. Nirenberg [7]; ce sont les théorèmes 2.2 et 2.4 qui peuvent être employés.

EXEMPLE 3.2. Définissons d'abord les espaces $W_p^{(k)}(\Omega)$: Soit k un entier positif, $1 \leq p \leq \infty$. Par $W_p^{(k)}(\Omega)$, on désigne un sous-espace de $u \in L_p(\Omega)$, tel que $\| u \|_{W_p^{(k)}} \overset{df}{=} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega | D^\alpha f |^p \, d\, x \right)^{1/p} < \infty$. $D^\alpha u$ sont prises au sens des distributions.

On désigne encore par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables dans Ω (un domaine) à support compact et par $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W_p^{(k)}$.

Soit Ω un domaine borné, V un sous-espace fermé de $W_2^{(k)}$ tel que $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)} \subset V \subset W_2^{(k)}$. Soit $V \subset Q$ algébriquement et topologiquement, $D(\Omega)$ soit dense dans Q et soit $f \in Q'$ (4). Soit $P \subset \overline{V}'$, l'anihilateur de $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}$; on se donne $g \in P$. Enfin soit $u_0 \in W_2^{(k)}$ et supposons V, Ω choisis de sorte que les théorèmes suivants de l'immersion sont valables: (cf. E. Gagliardo [8]). Soit k un entier positif, $| i | \leq k$, $0 < \varepsilon < 1$,

$$\frac{1}{q_{k-|i|}} = \frac{1}{2} - \frac{k - |i|}{N} \text{ si } \frac{1}{2} - \frac{k-|i|}{N} > 0, = \varepsilon > 0 \text{ si } \frac{1}{2} - \frac{k-|i|}{N} = 0 ,$$

$= 0$ si $\dfrac{1}{2} - \dfrac{k-|i|}{N} < 0$. Alors l'application $v \longrightarrow D^i v$ est une application de $[V \longrightarrow L_{q_{k-|i|}}]$.

On désigne par $\dfrac{1}{p_{|i|}} = 1 - \dfrac{1}{q_{k-|i|}}$, $\dfrac{1}{p_{|i|,|j|}} = 1 - \dfrac{1}{q_{k-|i|}} - \dfrac{1}{q_{k-|j|}}$.

On se donne des fonctions $a_i(x, \eta)$ avec $\eta \in E_\varkappa$ (ou $C_\varkappa$), où $\varkappa$ est le nombre de toutes les indices de la longeur $|j| \leq k$. On suppose $a_i(x, \eta)$ mesurable en x pour tout η; pour presque tous les points x une fois continûment différentiable en η. Soit $a_i(x, D^j u) \in W_2^{(k)} \longrightarrow L_{p_{|i|}}$.

On cherche $u \in W_2^{(k)}$ de sorte que

$$u - u_0 \in V, \tag{3.7}$$

$$\text{pour chaque } v \in V: \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v \, \overline{a_i(x, D^j u)} \, dx = \langle v, \overline{f} \rangle_\Omega + \langle v, \overline{g} \rangle_{\partial\Omega} . \tag{3.8}$$

Ici $\langle v, h \rangle_\Omega$, $\langle v, m \rangle_{\partial\Omega}$ signifient la dualité entre Q et Q', V et V' respectivement. On définit $\overline{f} v = \overline{\overline{f \overline{v}}}$ pour $v \in Q$, $\overline{g} v = \overline{\overline{g \overline{v}}}$ pou $v \in V$. Désignons

---

(4) On peut prendre $f \in L \subset Q'$ avec $L \subset Q'$ algébriquement et topologiquement.

$a_{ij} = \dfrac{\partial a_i}{\partial D^i u}$. Nous supposerons que l'application $a_i(x, D^j u)$ a la différentielle de Fréchet égale $\sum\limits_{|j| \leq k} a_{ij}(x, D_\alpha u) D^j w$. Plus on supposera que $a_{ij}(x, D^\alpha u) \in$ $\in W_2^{(k)} \rightarrow L_{p_{|i|,|j|}}$ et que cette application est continu de la topologie faible dans la topologie forte.

Considérons la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire)

$\int\limits_\Omega \sum\limits_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{w}\, \alpha x$ et supposons qu'il n'existe pas une fonction $w \in V$, $w \not\equiv 0$, de sorte que pour chaque $v \in V$

$$\int\limits_\Omega \sum\limits_{|i|,|j| \leqq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v D^j \bar{w}\, dx = 0, \tag{3.9}$$

d'autre part supposons que pour $u \in W_2^{(k)}$, il existe $\lambda(u) > 0$, $c(u) > 0$ de sorte que

$$\left| \int\limits_\Omega \sum\limits_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{v}\, \alpha\, x + \lambda(u) \int\limits_\Omega |v|^2\, \alpha\, x \right| \geq c(u) \|v\|^2_{W_2^{(k)}} \tag{3.10}$$

Supposons encore $a_i(x, 0) = 0$ et soit $g(t) = t\, g$, $u_0(t) = t\, u_0$, $f(t) = t f$. Le problème de trouver $w \in W_2^{(k)}$ de sorte que

$$w - u_0 \in V, \tag{3.11}$$

$$\text{pour chaque } v \in V\colon \int\limits_\Omega \sum\limits_{|i|,|j| \leq k}{}' \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{w}\, d\, x = \langle v, \bar{f} \rangle_\Omega + \tag{3.12}$$
$$+ \langle v, \bar{g} \rangle_{\partial\Omega}$$

est sous les hypothèses 3.9, 3.10 uniquement résoluble; à plue forte raison, s'il y a $F \in V'$, on trouve uniquement $\omega \in V$ de sorte que pour chaque

$$v \in V\colon \int\limits_\Omega \sum\limits_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{\omega}\, d\, x = Fv$$

et que

$$\|\omega\|_{W_2^{(k)}} \leq c(u) \|F\|_{V'}, \quad c(u) > 0. \tag{3.13}$$

La solution du problème (3.11), (3.12) se trouve facilement en cherchant $\omega = v - u_0 \in V$ de sorte que pour chaque

$$v \in V : \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{\omega}\ dx =$$

$$= \langle v, \bar{f} \rangle_\Omega + \langle v, \bar{g} \rangle_{\partial\Omega} - \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{u}_0\, dx.$$

Étant w la solution, on désigne $w = N(u, f, g, u_0)$.

Voici une proposition facile, mais importante:

Proposition 3.3. *Soit pour* $u \in W_2^{(k)}$, $v \in V$

$$\left| \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{v}\ dx \right| \geq (c_1 + c_2 \| u \|_{W_2^{(k)}})^{-1} \| v \|^2_{W_2^{(k)}}.$$

Alors

$$\| N(u, f, g, 0) \|_{W_2^{(k)}} \leq (c_3 + c_4 \| u \|_{W_2^{(k)}}) (\| f \|_{Q'} + \| g \|_{\overline{V}'}).$$

Nous obtenons aussi sans difficulté:

Proposition 3.4. *Soit pour* $u \in W_2^{(k)}$, $v \in V$

$$\left| \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \bar{v}\ dx \right| \geq (c_1 + c_2 \| u \|_{W_2^{(k)}})^{-\alpha} \| v \|^2_{W_2^{(k)}},$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad \| a_{ij}(x, D^\alpha u) \|_{L_{p_{|i|,|j|}}} \leq (c_3 + c_4 \| u \|_{W_2^{(k)}})^\beta,$$

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = 1,$$

alors

$$\| N(u, f, g, u_0) \|_{W_2^{(k)}} \leq (c_5 + c_6 \| u \|_{W_2^{(k)}})(\| f \|_{Q'} + \| g \|_{\overline{V}'} + \| u_0 \|_{W_2^{(k)}}).$$

Naturellement, la condition 2.9 peut découler d'autres hypothèses, p. ex. du théorème 2.3:

Proposition 3.5. *Soit* $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$, $f \in V \equiv P$ (4) *et* V, Ω *tels que l'injection* $W_2^{(k)}$ *dans* L_2 *est complètement continu (c'est le cas si* $\partial\Omega$ *est lipschitzienne).*

Alors $\| N(u,f,0,0) \|_{W_2^{(k)}} \leq (c_1 + c_2 \| u \|_{W_2^{(k)}}) \| f \|_{W_2^{(k)}}$ *si pour* $d(u)$, *la distance au spectre* (*cf. le théoreme* 2.3), *est valable* $d(u) \geq (c_1 + c_2 \| u \|_{W_2^{(k)}})^{-1}$.

Nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 3.6. *Supposons que* $c(u)$ *de* (3.13) *est une application bornée* (*ce qui peut découler des proposition précédentes*). *Alors sous nos hypothèses, l'opérateur* $u \longrightarrow N(u,f,g,u_0)$ *est localement uniformément continu et faiblement continue.*

DÉMONSTRATION. Premièrement, il suit d'un théorème de E. S. Citlanadze [9], cf. M. M. Vajnberg [3], que les opérateurs $u \longrightarrow a_{ij}(x, D^\alpha u)$ sont compactes et localement uniformément continue (5).

La condition (3.13) nous entraîne que $u \longrightarrow N(u,f,g,u_0)$ est un opérateur borné. Il est faiblement continu: soit $u_n \rightharpoonup u$, alors

$$\int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u_n)}\, D^i v\, D^j \overline{w}_n\, dx = \langle v \overline{f} \rangle_\Omega + \langle v, \overline{g} \rangle_{\partial\Omega}. \tag{3.14}$$

Il suffit de démontrer que de chaque sous-suite de w_n, on peut tirer une sous-suite faiblement convergente vers $w = N(u,f,g,u_0)$. Mais on peut toujours tirer de la sous-suite mentionnée un suite faiblement convergente. On la désigne encore w_n et soit $w_n \longrightarrow \omega$. Mais il suit de (3.14) que

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u_n)}\, D^i v\, D^j \overline{w}\, dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u)}\, D^i v\, D^j \overline{\omega}\, dx,$$

d'où la première partie de l'assertion.

Soit $R > 0$ et $\| u_1 \|_{W_2^{(k)}} \leq R$, $\| u_2 \|_{W_2^{(k)}} \leq R$. Il suit de (3.12) que

$$\int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u_1)}\, D^i v D^j (\overline{w}_1 - \overline{w}_2)\, dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} (\overline{a_{ij}(x, D^\alpha u_2)} - \overline{a_{ij}(x, D^\alpha u_1)})\, D^i v D^j \overline{w}_2\, dx.$$

(5) Si B, B_1 sont deux espaces de Banach, B rèfléxif, alors A de $B \to B_1$, continue de la topologie faible dans la topologie forte est compacte et uniformément continu et reciproquement.

Mais d'après (3.13), $\| w_2 \|_{W_2^{(k)}} \leq C(R)$; $a_{ij}(x, D^\alpha u)$ étant continue uniformément, on obtient l'assertion, c.q.f.d.

Nous pouvons maintenant combiner des différentes propositions pour vérifier les hypothèses du théorème 2.2. Nous obtenons ainsi la solution du problème (3.7), (3.8) pouz chaque f, g, u_0. Remarquons que la condition

$$\text{Re} \int_\Omega \overline{a_{ij}}\, D^i v\, D^i \overline{v}\, d\,x \geq c(u) \| v \|^2_{W_2^{(k)}}, \quad c(u) > 0, \tag{3.15}$$

entraîne l'unicité. Cela s'obtient aisément de la formule $A(u_2 - u_1, u_2) - A(u_2 - u_1, u_1) = \int_0^1 d\,A(u_2 - u_1, u_1 + \tau(u_2 - u_1), u_2 - u_1)\, d\,\tau$. Si (3.15) est satisfaite avec $c(u) \geq (c_1 + c_2 \| u \|_{W_2^{(k)}})^{-1}$, nous obtenons pour la coercitivité : dans notre cas

$$\lim_{\| u \|_{W_2^{(k)}} \to \infty} \frac{\text{Re} \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i u\, \overline{a_i(x, D^j u)}\, d\,x}{\| u \|_{W_2^{(k)}}} = \infty$$

car

$$\text{Re} \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D_i u\, \overline{a_i(x, D^j u)}\, d\,x \geqq \frac{\| u \|_{W_2^{(k)}}}{C_1} \lg(1 + c_2 \| u \|_{W_2^{(k)}}), \; u \in V.$$

Nous obtenons aussi la condition de monotonie, cf. F. Browder [10].

Exemple 3.3. S. N. Bernstein a démontré dans son travail [12] l'existence de la solution classique du problème de Dirichlet pour l'équation $y'' = f(x, y, y')$. La méthode de Bernstein est basée sur deux estimations à priori pour y dans $C^{(0)}$ et y' dans $C^{(1)}$. C'est le procédé typique pour les méthodes topologiques, cf. p. ex. J. Cronin [11]. Notre méthode utilise seulement des estimations à priori pour y dans $C^{(0)}$, ce qui nous suffira pour la démonstration de l'estimation 2.9.

S. N. Bernstein a démontré l'existence d'une solution classique et l'unicité sous les conditions que $f(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ sont continues dans

$$\langle a, b \rangle \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), \frac{\partial f}{\partial y} \geq k > 0,$$

$$|f(x, y, y')| \leq a(x, y)\, y'^2 + b(x, y)$$

avec $a(x, y)$, $b(x, y)$ continues dans $\langle a, b \rangle \times (-\infty, \infty)$.

Nous reformulerons ce problème : Tout est réel, $a_1(x, u, u')$, $a(x, u, u')$ soient deux fonctions mesurables sur $(0, 1)$ en x pour chaque u, u', continûment différentiables en u, u'. On suppose que $u \longrightarrow a_1(x, u, u') \in W_2^{(1)} \longrightarrow L_1$, $u \longrightarrow a(x, u, u') \in W_2^{(1)} \longrightarrow L_1$. Soil a, b deux nombres et $g \in L_\infty$. On cherche $u \in W_2^{(1)}$ de sorte que

$$u(0) = a, \qquad u(1) = b, \tag{3.16}$$

$$\text{pour chaque } v \in C^{(1)}(\langle 0, 1 \rangle),\ v(0) = v(1) = 0 : \tag{3.17}$$

$$\int_0^1 \left(a_1(x, u, u') \frac{dv}{dx} + a(x, u, u')\, v \right) dx = \int_0^1 v\, g\, d\, x.$$

Nous supposons encore $a_1(x, 0, 0) = a(x, 0, 0) = 0$ et les opérateurs avec la différentielle de Fréchet $\dfrac{\partial a_1}{\partial u} w + \dfrac{\partial a_1}{\partial u'} w'$,

$$\frac{\partial a}{\partial u} w + \frac{\partial a}{\partial u'} w' \quad , \qquad \text{respectivement, telle que}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial u'} \in W_2^{(1)} \longrightarrow W_2^{(1)}, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial u} \in W_2^{(1)} \longrightarrow W_1^{(1)}$$

$$\frac{\partial a}{\partial u'} \in W_2^{(1)} \longrightarrow L_2 \quad , \qquad \frac{\partial a}{\partial u} \in W_2^{(1)} \longrightarrow L_1 .$$

Les opérateurs mentionnés sont supposés faiblement continus. Nous supposons encore que

$$\frac{\partial a_1}{\partial u'} \geq c_1(\| u \|_{C^{(0)}}), \tag{3.18}$$

où $C_1(R)$ est une fonction continue sur $\langle 0, \infty \rangle$, positive, que

$$\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u}\right) \geq \alpha > 0 \tag{3.19}$$

au sens des distributions et que pour $\| u \|_{C^{(0)}} \leq R$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\| \frac{\partial a_1}{\partial u'} \right\|_{L_2} \leq C_1(R)(1 + \| u \|_{W_2^{(1)}}), \quad \left\| \frac{\partial a_1}{\partial u} \right\|_{L_2} \leq C_2(R)(1 + \| u \|_{W_2^{(1)}}), \\ \left\| \frac{\partial a}{\partial u'} \right\|_{L_2} \leq C_3(R)(1 + \| u \|_{W_2^{(1)}}), \quad \left\| \frac{\partial a}{\partial u} \right\|_{L_1} \leq C_4(R)(1 + \| u \|^2_{W_2^{(1)}}). \end{array}\right. \tag{3.20}$$

Soit

$$u_0(x) = (1 - x)\, a + x\, b,\ u_0(t) = t\, u_0\,,\ g(t) = t\, g,\ A(t, v, u) = A(v, u) =$$

$$= \int_0^1 \left(a_1(x, u, u') \frac{dv}{dx} + a(x, u, u') \right) v\, d\,x.$$

Le probléme en variations est:

$$w - u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}, \tag{3.21}$$

pour chaque

$$v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)} : \int_0^1 \left(\frac{\partial a_1}{\partial u'} w' v' + \frac{\partial a_1}{\partial u} w\, v' + \frac{\partial a}{\partial u'} w'\, v + \frac{\partial a}{\partial u} w\, v \right) d\,x = \int_0^1 v\, g\, d\,x. \tag{3.22}$$

L'opérateur $u \longrightarrow N(u, u_0, g) \equiv w$ de $W_2^{(1)}$ dans lui même existe: pour le voir, il suffit de démontrer que si w de $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$ satisfait à l'équation (3.22) avec $g \equiv 0$, cela implique $w \equiv 0$. Supposons alors que $w \not\equiv 0$ et posons $w_+ = \max(w, 0)$, $v = w_+^{\lambda}$ avec $\lambda \geq 1$. Posons $\varphi = w_+^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}}$; nous obtenons de (3.22)

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial a}{\partial u'} \frac{\lambda}{\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} \varphi' \varphi' + \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \varphi' \varphi + \right. \tag{3.23}$$

$$\left. + \frac{\partial a}{\partial u} \varphi^2 + \frac{\partial a}{\partial u'} \frac{1}{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \varphi' \varphi \right) d\,x = 0,$$

d'où après la multiplication par $\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}$, compte tenu de (3.19), il suit

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial a}{\partial u'} \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \varphi'^2 + \frac{\partial a}{\partial u'} \varphi' \varphi + \frac{\lambda}{2} \alpha \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial u} \varphi^2 \right) dx \leq 0,$$

ce qui pour λ assez grand donne $\varphi \equiv 0$, alors $w \leq 0$; on repète ce raisonement pour-w et obtient $w \equiv 0$.

Considérons d'abord le cas de $g \equiv 0$ dans (3.22). En répétant le raisonement que nous venons de faire avec $v = w_M^\lambda$, où $w_M = \max(w, M) - M, M \geq 0$, $M = \max(|a|, |b|)$, nous obtenons

$$\| w \|_{C^{(0)}} \leq \max(|a|, |b|). \tag{3.24}$$

Soit maintenant $u_0 \equiv 0$. Par le même procédé, après avoir choisi un $\mu > 0$, assez grand, nous obtenons

$$\int_0^1 \alpha \left(\frac{\lambda}{2} - \mu \right) w_+^{1+\lambda} \, dx \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \int_0^1 w_+^\lambda \, g dx,$$

d'où par l'inégalité de Hölder, pour $\lambda \to \infty$: $|w_+| \leq \frac{1}{\alpha} \| g \|_{L_\infty}$; en répetant ce raisonement avec-w, on obtient finalement

$$\| w \|_{C^{(0)}} \leq \frac{1}{\alpha} | g |_{L_\infty}, \tag{3.25}$$

alors il suite de (3.24), (3.25)

$$\| N(u, g, u_0) \|_{C^{(0)}} \leq \max(|a|, |b|) + \frac{1}{\alpha} | g |_{L_\infty}. \tag{3.26}$$

Cela étant, soit $u(t) \in C^{(1)}(\langle 0, \varepsilon \rangle, W_2^{(1)})$ une solution eventuelle de l'équation intégrale (2.8). $u'(t)$ satisfait à (3.26), alors tant plus $u(t)$; nous avons obtenu une estimation à priori :

$$u \in M \Longrightarrow \| u \|_{C^{(0)}} = C_1 . \tag{3.27}$$

Il suit maintenant de (3.18), (3.20), (3.26), (3.27) immédiatement:

PROPOSITION 3.7 *Sous les hypothèses mentionnées*

$$\| N(u, g, u_0) \|_{W_2^{(1)}} \leq C(g, u_0)(1 + \| u \|_{W_2^{(1)}}).$$

Nous démontrons maintenant facilement:

PROPOSITION 3.8. *L'opérateur* $u \longrightarrow N(u, g, u_0)$ *satisfait aux conditions 2.6, 2.7 sous les hypothéses mentionnées.*

En effet, il suffit d'appliquer le théorème déjà cité de E. S. Citlanadze et de démontrer que $u \longrightarrow N(u, g, u_0)$ est une application continue de la topologie faible dans la topologie forte. Mais il suit immédiatement de (3.23) que pour la solution w on a $\| w'' \|_{L_1} \leq c$ avec c dépandant de $\| u \|_{W_2^{(1)}}$, $\| w \|_{W_2^{(1)}}$, $\| g \|_{L_\infty}$, d'où après les raisonements standarts, tenant compte de la continuité faible des $\dfrac{\partial a_1}{\partial u}$ et du fait que l'application identique de $W_1^{(2)}$ dans $W_2^{(1)}$ est complétement continu (ce qui est facile), s'obtient le résultat.

Nous pouvons alors appliquer le théorème 2.1 et de démontrer l'existence d'une solution du problème (3.16), (3.17). De plus, la solution est unique. En effet, étant deux solutions u_1, u_2, on aurait $A(u_2 - u_1, u_1) - A(u_2 - u_1, u_2) = 0 = dA(u_1 + \theta(u_2 - u_1), u_2 - u_1, u_2 - u_1)$, d'où $u_1 = u_2$ ce qui est une contradiction.

Université de Prague

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. H. HILDEBRANDT, L. M. GRAVES : *Implicit functions and their differentials in general Analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), 127-153.

[2] J. LERAY, J. SCHAUDER : *Topologie et équations fonctionnelles,* Ann. Éc. N. Sup. 51 (1934), 45-78.

[3] M. M. VAJNBERG : *Les méthodes variationnelles dans la théorie des opérateurs non-linéaires* (en russe), Moscou 1956.

[4] J. SCHAUDER : *Zur Théorie stetiger Abbildungen in Fuktionalräumen,* Math. Zeitschrift (1927), 26, 47-65.

[5] J. SCHAUDER : *Der Fixpunktsatz in Funktionalräume,* Studia Math. II (1930), 171-180.

[6] A. I. KOŠELEV : *Les estimations à priori dans L_p et les solutions généralisées des équations elliptiques ainsi que des systèmes,* (en russe), Uspech. Mat. Nauk, XIII (1958), 29-88.

[7] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG : *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I,* Comm. Pure Appl. Math. XII, 623-727, 1959.

[8] E. GAGLIARDO : *Proprietà di alcune classi in più variabili,* Ricerche di Matem. (1958), I, 102-137.

[9] E. S. CITLANADZE : *Sur la différentiabilité des fonctionelles,* (en russe) Matem. Sbor. 29 (1951), 3-12.

[10] F. E. BROWDER : Séminaire de mathématiques supérieurs Montréal, 1965.

[11] J. CRONIN : *Fixed points and topological degree in non-linear analysis,* Amer. Math. Soc. 1964.

[12] S. N. BERNSTEIN : *Sur les équations du calcul des variations,* Ann. Éc. Norm. Sup., 29 (1912), 431-486.