ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE TOMASSINI

Tracce delle funzioni olomorfe sulle sottovarietà analitiche reali d'una varietà complessa

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 1 (1966), p. 31-43

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_31_0>

TRACCE DELLE FUNZIONI OLOMORFE SULLE SOTTOVARIETÀ ANALITICHE REALI D'UNA VARIETÀ COMPLESSA (*)

GIUSEPPE TOMASSINI

Sia X_n una varietà complessa di dimensione complessa n e X^p una sottovarietà analitica reale, di dimensione reale p, della X_n.

Il problema che trattiamo è quello di riconoscere quali funzioni analitiche reali $f : X^p \rightarrow \mathbf{C}$ sono tracce su X^p di funzioni olomorfe in un intorno di X^p in X_n.

Ad ogni punto $x \in X^p$ è associato un intero $r(x, X_n) \leq p, n$ che rappresenta la dimensione del più piccolo germe di varietà complessa contenente il germe di X^p in x.

Noi tratteremo il caso in cui $r(x, X_n)$ è costante, uguale ad r, su ogni componente connessa della X^p.

In questo caso si riconosce che esiste un germe di varietà complessa, di dimensione r, lungo X^p, che è la riunione dei germi locali descritti e che chiameremo la *complessificata di X^p in X_n*.

Il nostro problema è quindi ricondotto ai due problemi seguenti: in primo luogo riconoscere quando la f è restrizione di una funzione olomorfa sulla complessificata di X^p in X_n, in secondo luogo riconoscere quando una funzione olomorfa, definita su una sottovarietà complessa V di un aperto di X_n, è restrizione a V di una funzione olomorfa in un intorno di V in X_n.

Per il primo problema diamo una condizione necessaria e sufficiente che essenzialmente dice che f è soluzione della « restrizione » a X^p delle equazioni differenziali di Cauchy-Riemann.

Pervenuto alla Redazione il 27 Apr. 1965 ed in forma definitiva il 9 Set. 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n^0 35 del Comitato per la Matematica del C. N. R. nell'anno accademico 1964-65.

Per il secondo problema possiamo dare una risposta solo in casi particolari e precisamente nel caso che X_n sia una varietà di Stein, X^p sia compatta e sia $r = p$.

Questo problema è stato considerato in casi particolari e dal punto di vista locale da F. SEVERI [5] e da G. FUBINI [3].

Ringrazio A. ANDREOTTI per i suggerimenti datimi nella preparazione del presente lavoro.

1. Introduzione.

Sia X_n (¹) una varietà complessa di dimensione complessa n; X_n è dotata in maniera naturale di una struttura analitica reale; sia X^p una sottovarietà analitica reale di dimensione reale p.

Sia x un punto di X^p ed U un intorno coordinato di x in X_n dove $z_1, \dots, z_n$ sono coordinate olomorfe; nelle vicinanze di x, X^p ammette equazioni parametriche del tipo

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(t_1, \dots, t_p) \\ &\vdots \\ z_n &= f_n(t_1, \dots, t_p) \end{aligned}$$

dove $t_1, \dots, t_p$ variano in un intorno ω dell'origine in $\mathbf{R}^p$, e dove le f sono funzioni analitiche reali delle t, a valori complessi, tali che il rango della matrice jacobiana

$$\frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(t)} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)}{\partial(t_1, \dots \dots \dots, t_p)}$$

è uguale a p in ogni punto di X^p.

Introduciamo anche, per ogni punto $x = f(t)$ di X^p, il rango $r(x, X_n)$ della matrice

$$\frac{\partial(z)}{\partial(t)} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}.$$

Risulta ovviamente che $r(x, X_n)$ non dipende nè dalla scelta delle coordinate z nè dalla scelta dei parametri t, e si hanno le disuguaglianze

$$(1) \qquad \begin{cases} r(x, X_n) \leq p \leq 2r(x, X_n) \\ r(x, X_n) \leq n; \end{cases}$$

(¹) Le varietà considerate si suppongono paracompatte.

che sia $p \leq 2r(x, X_n)$ discende dal fatto che le matrici $\dfrac{\partial (z)}{\partial (t)}, \dfrac{\partial (\bar{z})}{\partial (t)}$ hanno lo stesso rango in ogni punto.

Noi ci limiteremo a studiare quelle varietà X^p per cui $r(x, X_n)$ è costante su ogni componente connessa.

2. Primo teorema d'estensione.

Indichiamo con $C^\omega(X^p)$ lo spazio delle funzioni analitiche reali, a valori complessi, definite su X^p.

TEOREMA 1. *Supponiamo* $r(x, X_n) = n$ *in ogni punto* $x \in X^p$. *C. n. e. s. perchè* $f \in C^\omega(X^p)$ *sia restrizione a* X^p *d'una funzione* F, *olomorfa in un intorno* U *di* X^p *in* X_n, *è che*

$$df \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n|_{X^p} = 0 \tag{2}$$

in ogni punto $x \in X^p$, $z_1, \ldots, z_n$ *essendo coordinate olomorfe in un intorno di* x *in* X_n.

Inoltre se F_1 e F_2 sono funzioni olomorfe in un intorno di X^p in X_n e $F_1|_{X^p} = F_2|_{X^p}$ allora $F_1 = F_2$ in un conveniente intorno di X^p in X_n.

Premettiamo i seguenti lemmi.

LEMMA 1. *Sia* D *un aperto connesso di* $\mathbf{C}^n$ *e sia* X^p *una sottovarietà analitica reale con* $r(x, D) = n$ *in ogni punto* $x \in X^p$. *Ogni funzione olomorfa in* D, *che si annulla su* X^p, *è identicamente nulla in* D.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservazione seguente: sia F una funzione olomorfa in un intorno connesso Ω dell'origine in $\mathbf{C}^n$, dove $\tau_1, \ldots \tau_n$ sono coordinate olomorfe; sia

$$\omega = \{\tau \in \Omega \mid \operatorname{Im} \tau_\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq n\};$$

se $F|_\omega = 0$ allora F è identicamente nulla in Ω.

Basta osservare che tutte le derivate parziali di F nell'origine sono nulle.

Sia $x \in X^p$ e siano $z_1, \ldots, z_n$ coordinate olomorfe in un intorno connesso U di x, $U \subset D$, nel quale X^p abbia equazioni parametriche $z_\alpha = f_\alpha(t_1, \ldots, t_p)$, $1 \leq \alpha \leq n$, con le f analitiche reali in un intorno convesso ω_p dell'origine in $\mathbf{R}^p$ e $x = f(0)$. L'ipotesi dice che il rango di $\left\{\dfrac{\partial (z)}{\partial (t)}\right\}_{t=0}$ è n. Senza scapito di generalità possiamo supporre che il rango di $\left\{\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (t_1, \dots, t_n)}\right\}_{t=0}$ sia n. Sia ω_n la parte di ω_p dove $t_{n+1} = \dots = t_p = 0$. Consideriamo la sottovarietà analitica reale X^n di U, definita dalle equazioni parametriche $z_\alpha = f_\alpha(t_1, \dots t_n, 0, \dots, 0)$, $1 \leq \alpha \leq n$. Basta provare, dato che $X^n \subset X^p$, che ogni funzione F olomorfa in U, nulla su X^n, è identicamente nulla in U.

Esistono un intorno connesso Ω dell'origine in $\mathbf{C}^n$, dove $\tau_\alpha = t_\alpha + i s_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq n$, sono coordinate olomorfe, e n funzioni olomorfe in $\Omega, g_1, \dots, g_n$, tali che

$$f_\alpha (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0) = g_\alpha (\tau_1, \dots, \tau_n) |_{\omega_n} \qquad 1 \leq \alpha \leq n .$$

D'altra parte

$$\det \left\{\frac{\partial (g_1, \dots, g_n)}{\partial (\tau_1, \dots, \tau_n)}\right\}_{\tau=0} = \det \left\{\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (t_1, \dots, t_n)}\right\}_{t=0} \neq 0,$$

quindi $\tau_1, \dots, \tau_n$ si possono assumere come coordinate olomorfe in un intorno convenientemente piccolo U' di x in X_n, ed avremo che

$$U' \cap X^n = \{\tau \in U' \mid \operatorname{Im} \tau_\alpha = 0, \ 1 \leq \alpha \leq n\}.$$

Basta allora applicare l'osservazione fatta al principio per concludere.

LEMMA 2. *Sia X una varietà differenziabile, Y una sottovarietà differenziabile, K un compatto di Y. Dato comunque un intorno U di K in X esiste un intorno V di K in X, $V \subset U$, che gode della seguente proprietà : esiste una retrazione $\sigma : V \longrightarrow Y \cap V$ tale che per ogni sottoinsieme connesso A di $Y \cap V$, $\sigma^{-1}(A)$ è connesso. Inoltre se $U = U_1 \cup \dots \cup U_l$, dove $\{U_i\}_{1 \leq i \leq l}$ è un ricoprimento di K, e se $\{U'_i\}_{1 \leq i \leq l}$ è un ricoprimento di K tale che, per ogni indice i, U'_i è relativamente compatto in U_i, si può supporre $\sigma^{-1}(U'_i \cap K) \subset U^i$.*

Dimostrazione. Mettiamo su X una metrica riemanniana completa e indichiamo con $\nu(Y, X)$ il fibrato normale di Y; sia $\pi : \nu(Y, X) \longrightarrow Y$ la proiezione naturale. Esiste un'applicazione differenziabile $\varphi : \nu(Y, X) \longrightarrow X$ tale che se s_0 è la sezione nulla di $\nu(Y, X)$ si ha

i) $\varphi |_{s_0} = \pi |_{s_0}$

ii) il rango di φ nei punti di s_0 è uguale alla dimensione di X.

L'applicazione φ è quella che associa ad ogni vettore λ normale a Y nel punto y, il punto della geodetica uscente da y, nella direzione λ, a distanza da y uguale alla lunghezza di λ.

Esiste un intorno aperto W di s_0 in $\nu(Y, X)$ tale che φ applica W su un aperto di X con un'applicazione che è un omeomorfismo locale. Osserviamo che l'applicazione φ è biunivoca su s_0.

La prima parte del lemma sarà dimostrata se dimostriamo il seguente

LEMMA 3. *Siano X, X' due spazi topologici e supponiamo che X sia di Hausdorff. Sia A un compatto di X e $\varphi : X \longrightarrow X'$ un'applicazione continua che sia un omeomorfismo locale. Se $\varphi|_A$ è biunivoca esiste un intorno U di A in X tale che $\varphi|_U$ è un omeomorfismo.*

Infatti sia N un intorno aperto di K in $\nu(Y, X)$ tale che $\varphi|_N$ sia un omeomorfismo; possiamo supporre $N \subset \varphi^{-1}(U)$. Per ogni punto $x \in s_0 \cap N$ sia $\varrho(x)$ il raggio del più grande disco con centro nell'origine, sulla fibra $\pi^{-1}(x)$ in $\nu(Y, X)$, contenuto in N; possiamo poi scegliere una funzione $\tilde{\varrho}(x)$ per $x \in s_0 \cap N$, continua (anzi basta semicontinua superiormente), tale che $0 < \tilde{\varrho}(x) \leq \varrho(x)$ per ogni $x \in s_0 \cap N$.

Sia
$$\Theta = \{\lambda \in N \,|\, |\lambda| < \tilde{\varrho}(\pi(\lambda))\};$$
Θ è un aperto, $V = \varphi(\Theta)$ è un intorno aperto di K e l'applicazione di V su $V \cap \lambda$ è data da $\pi \circ \varphi^{-1}$.

Dimostrazione del lemma 3. Sia Δ la diagonale di $X' \times X'$ e sia δ l'applicazione diagonale $X \longrightarrow X \times X$; consideriamo il sottoinsieme $B = (\varphi \times \varphi)^{-1}(\Delta) - \delta(X)$: basta provare che $\overline{B} \cap (A \times A) = \emptyset$.

È chiaro che
$$(\varphi \times \varphi)^{-1}(\Delta) \cap (A \times A - \delta(A)) = \emptyset$$
poichè $\varphi|_A$ è biunivoca; supponiamo che $\overline{B} \cap (A \times A) \neq \emptyset$ e sia x un suo punto; certamente $x \in \delta(A)$ onde $x = (a, a)$ con $a \in A$; d'altra parte x deve essere limite di punti $x_m = (a_m, b_m)$ con $a_m, b_m \in B$ e $\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} b_m = a$.

Ora questo è impossibile perchè esiste un intorno D di a in X su cui $\varphi|_D$ è biunivoca; se m è sufficientemente grande $a_m, b_m \in D$ e questo è assurdo.

L'aperto $X \times X - \overline{B}$ è dunque un intorno di $A \times A$; per concludere basta osservare che se $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un sistema fondamentale d'intorni di A in X, $\{N_\alpha \times N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un sistema fondamentale d'intorni di $A \times A$ in $X \times X$.

Rimane da dimostrare l'ultima parte del lemma 2. Per questo basta scegliere la funzione $\varrho(x)$ in maniera che l'immagine per φ del disco con centro nell'origine, sulla fibra $\pi^{-1}(x)$, sia contenuta in $\bigcap_{U_i' \ni x} U_i'$.

Osservazione. Se $\{K_m\}$ è una successione di sottoinsiemi compatti, connessi, di X, $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$, U_m è un intorno di K_m in X, V_m l'intorno di K_m in X di cui al lemma 2, si può supporre che i sottoinsiemi $V_m \cap \left(\bigcup_{l=1}^{m-1} V_l\right), m=1,2,\ldots,$ siano connessi.

Dimostrazione del teorema 1.

(A) Non è restrittivo supporre che X^p sia connessa.

Sia $X^p = \bigcup_m K_m$ dove i K_m sono compatti di X^p e $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$; per l'ultima osservazione e per il lemma 1 basta provare il fatto seguente: data $f \in C^\omega(X^p)$ soddisfacente alle condizioni specificate, per ogni m esistono un intorno aperto U_m di K_m in X_n e una funzione F_{U_m} olomorfa in U_m tale che

$$F_{U_m}\big|_{X^p \cap U_m} = f\big|_{X^p \cap U_m}.$$

Ciò posto il nostro problema si riconduce ad un problema locale. Infatti supponiamo che per ogni punto $x \in X^p$ si possano trovare un intorno aperto $U(x)$ di x in X_n e una funzione $F_{U(x)}$ olomorfa in $U(x)$ tale che

$$F_{U(x)}\big|_{X^p \cap U(x)} = f\big|_{X^p \cap U(x)};$$

scegliamo un ricoprimento di K_m con intorni $U_1^m, \ldots, U_{j_m}^m$ del tipo detto; siano $U_1^{'m}, \ldots, U_{j_m}^{'m}$ aperti connessi tali che $K_m \subset U_1^{'m} \cup \ldots \cup U_{jm}^{'m}$ e, per ogni indice s, $U_s^{'m}$ sia relativamente compatto in U_s^m.

Costruiamo un intorno V^m di K_m in X_n come al lemma 2 e sia

$$V_s^m = \sigma^{-1}(X^p \cap U_s^{'m});$$

$\{V_s^m\}_{1 \le s \le j_m}$ è un ricoprimento aperto di K_m. Su ogni V_s^m è definita una funzione olomorfa F_s^m tale che se

$$W^m = V_1^m \cup \ldots \cup V_{j_m}^m$$

allora $F_s^m\big|_{X^p \cap W^m} = f$.

Su $V_s^m \cap V_t^m$ le funzioni olomorfe F_s^m, F_t^m coincidono perchè $V_s^m \cap V_t^m$ è connesso, $X^p \cap V_s^m \cap V_t^m$ è pure connesso e su quest'ultimo sottoinsieme di X^p F_s^m e F_t^m coincidono: quindi la conclusione per il lemma 1.

(B) Basta dunque risolvere la questione nell' intorno di un punto $x_0 \in X^p$; non è restrittivo allora supporre che X_n sia un aperto di $\mathbf{C}^n$.

La condizione (2) è necessaria perchè se F è una funzione olomorfa in un intorno di X^p in X_n e $F|_{X^p} = 0$, si ha

$$dF \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \partial F \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = 0$$

da cui

$$df \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n |_{X^p} = 0.$$

Proviamo la sufficienza supponendo dapprima $p = n$.

Abbiamo già osservato (cf. dimostrazione del lemma 1) che si possono scegliere coordinate olomorfe $\tau_1, \dots, \tau_n$, in un intorno $U(x_0)$ di x_0 in X_n, in maniera che

$$X^n \cap U(x_0) = \{\tau \in U(x_0) \mid \operatorname{Im} \tau_\alpha = 0,\ 1 \leq \alpha \leq n\}.$$

È allora chiaro che ogni funzione analitica reale su $X^n \cap U(x_0)$ è restrizione di una funzione olomorfa in un aperto contenuto in $U(x_0)$ e contenente $X^n \cap U(x_0)$.

Procediamo per induzione sull'intero p. Esiste almeno una sottovarietà analitica reale Y^{p-1} di un intorno di x_0 in X_n, di dimensione reale $p-1$, passante per x_0, tale che $r(y, X_n) = n$, per ogni $y \in Y^{p-1}$; non è restrittivo supporre che Y^{p-1} sia la varietà coordinata di equazione $t_p = 0$. Posto $g = f|_{Y^{p-1}}$ si ha

$$dg \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n |_{Y^{p-1}} = (df \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n |_{X^p})|_{Y^{p-1}} = 0.$$

Per l'induzione ammessa esistono un intorno $U(x_0)$ di x_0 in X_n e una funzione F, olomorfa in $U(x_0)$, tale che $F|_{Y^{p-1} \cap U(x_0)} = g$: si deve provare che la funzione analitica reale $G = F|_{X^p \cap U(x_0)}$ coincide con f in un intorno di x_0.

Entrambe le funzioni G ed f soddisfano la condizione (2), cioè un sistema di $\binom{p}{n+1}$ equazioni differenziali lineari del I ordine nelle variabili $t_1, \dots t_p$ i cui coefficienti sono i minori di ordine n della matrice $\dfrac{\partial (z)}{\partial (t)}$. Per l'ipotesi fatta su Y^{p-1}, in una delle equazioni il coefficiente della derivata rispetto a t_p è non nullo in un intorno di x_0; si avrà in tale intorno

$$G_{t_p} = A_1 G_{t_1} + \dots + A_{p-1} G_{t_{p-1}} \tag{3}$$

$$f_{t_p} = A_1 f_{t_1} + \dots + A_{p-1} f_{t_{p-1}}. \tag{4}$$

D'altra parte $G|_{Y^{p-1}} = f|_{Y^{p-1}}$ e questo implica

$$\frac{\partial^k G}{\partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_k \leq p-1$$

in un intorno W di x_0 in Y^{p-1}. Da (3) e (4) segue

$$\frac{\partial^{k+1} G}{\partial t_p \, \partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t_p \, \partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_k \leq p-1$$

in ogni punto di W. Per induzione allora, sempre mediante (3) e (4), si ottiene

$$\frac{\partial^{k+j} G}{\partial t_p^j \, \partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} = \frac{\partial^{k+j} f}{\partial t_p^j \, \partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} \qquad \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_k \leq p-1 \\ j = 0, 1, \dots \end{array}$$

in ogni punto di W e quindi $G = f$ in un intorno di x_0 in X^p.

L'affermazione finale del teorema è conseguenza immediata del lemma 1.

3. **Costruzione della complessificata.**

Prima di passare a trattare il teorema d'estensione nel caso generale, abbiamo bisogno di introdurre la nozione di complessificata di X^p in X_n.

TEOREMA 2. *Sia $r(x, X_n) = r$, costante su X^p connessa. Esistono un intorno U di X^p in X_n ed una sottovarietà complessa V_r di U, connessa, di dimensione complessa r, tale che*

i) $X^p \subset V_r$

ii) *se F è una funzione olomorfa in un intorno W in X_n di un punto $x_0 \in X^p$ e F è nulla in un intorno di x_0 in X^p, allora F è nulla in un intorno di x_0 in V_r.*

La V_r, o meglio il germe di V_r lungo X^p, si chiama la *complessificata di X^p in X_n.*

Dimostrazione del teorema 2. Osserviamo subito che una tale varietà se esiste è unica in un intorno di X^p in X_n.

Ragionando come nel punto (A) della dimostrazione del teorema 1 si vede che basta provare l'esistenza della complessificata nell'intorno in X_n di un punto $x_0 \in X^p$. Si può allora supporre che X_n sia un aperto connesso di $\mathbf{C}^n$ in cui $z_1, \dots, z_n$ sono coordinate olomorfe, e in cui la X^p abbia equazioni parametriche $z_\alpha = f_\alpha(t_1, \dots, t_p)$, $1 \leq \alpha \leq n$, con le f_α analitiche reali in un intorno connesso ω dell'origine in $\mathbf{R}^p$ e $x_0 = f(0)$.

Distinguiamo i tre casi: $r = n$, $r = p$, $r < n, p$.

Nel primo caso si ha $V_r = X_n$ (lemma 1).

Sia $r = p$; esistono un intorno connesso Ω dell'origine in $\mathbf{C}^n$ dove $\tau_\beta = t_\beta + is_\beta$, $1 \leq \beta \leq p$, sono coordinate olomorfe, e n funzioni olomorfe in Ω, $g_1, \dots, g_n$, tali che $f_\alpha(t_1, \dots, t_p) = g_\alpha(\tau_1, \dots, \tau_p) \mid \omega$, $1 \leq \alpha \leq n$.

D'altra parte

$$\left\{\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(\tau_1, \dots, \tau_n)}\right\}_{\tau=0} = \left\{\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}\right\}_{t=0},$$

il rango della matrice $\left\{\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}\right\}_{t=0}$ è massimo, quindi le equazioni $z_\alpha = g_\alpha(\tau_1, \dots, \tau_p)$, $1 \leq \alpha \leq n$, definiscono una sottovarietà complessa V_r di un intorno U di x_0 in X_n, che è connessa, ha dimensione complessa r e contiene $X^p \cap U$. Osservando che $\tau_1, \dots, \tau_p$ sono coordinate olomorfe su V_r segue la proprietà ii).

Sia da ultimo $r < n, p$; dalla matrice $\frac{\partial(z)}{\partial(t)}$ si può estrarre una matrice $r \times p$ (che si può supporre formata con le prime r righe) di rango r su un intorno connesso S di X_0 in X^p, tale che la matrice

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_r, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)}{\partial(t_1, \dots\dots\dots, t_p)}$$

abbia rango p su S [1]. Se π è la proiezione di $\mathbf{C}^n$ sullo spazio $\mathbf{C}^r$ di equazioni $z_{r+1} = \dots = z_n = 0$, le equazioni $z_\beta = f_\beta(t_1, \dots, t_p)$, $1 \leq \beta \leq r$, definiscono una sottovarietà analitica reale $\pi(S)$ di un intorno $N(x_0)$ di $\pi(x_0)$ in $\mathbf{C}^r$, isomorfa a S.

---

[1] Infatti $\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}$ abbia rango r in x_0; $\frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(t)}$ ha rango $p > r$ in x_0 quindi un determinante $\frac{\partial(f_1, \dots, f_r, \bar{f}_{i_1}, \dots, \bar{f}_{i_{p-r}})}{\partial(t_1, \dots\dots\dots\dots, t_p)}$ è non nullo in x_0. Ma $\frac{\partial(\bar{z})}{\partial(t)}$ ha rango r in x_0 quindi ognuna delle ultime $p - r$ colonne è combinazione delle coniugate delle prime r, donde la conclusione.

Le funzioni $f_{r+1}, \dots, f_n$ sono definite su $\pi(S)$ e

$$\begin{aligned} df_{r+1} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_r \,|_{\pi(S)} &= 0 \\ &\vdots \\ df_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_r \,|_{\pi(S)} &= 0 \end{aligned}$$

in ogni punto di $\pi(S)$. Per il teorema 1 esistono un intorno M di $\pi(S)$ in $\mathbf{C}^r$ ed $n - r$ funzioni olomorfe in M, $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n$, tali che $\varphi_{r+1}|_{\pi(S)} = f_{r+1}, \dots$ $\dots, \varphi_n|_{\pi(S)} = f_n$. Le equazioni $z_\gamma = \varphi_\gamma(z_1, \dots, z_r)$, $r + 1 \leq \gamma \leq n$, definiscono una sottovarietà complessa V_r, di un intorno di S in X_n, che è connessa, ha dimensione complessa r e contiene S.

Sia W un intorno di x_0 in X_n e sia F una funzione olomorfa in W, nulla in un intorno $S' \subset S$ di x_0. La funzione $F|_{V_r \cap W}$ è espressa da $\Phi =$ $= F(z_1, \dots, z_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n)$ ed è quindi olomorfa in un intorno N' di $\pi(S')$ in $\mathbf{C}^r$; poichè $\varphi_{r+1}|_{\pi(S')} = f_{r+1}, \dots, \varphi_n|_{\pi(S')} = f_n$ e poichè $F|_{S'} = 0$, si ha $\Phi|_{\pi(S')} = 0$ e quindi $\Phi = F|_{V_r \cap W} = 0$ in un intorno di S' in V_r (lemma 1): ciò prova la proprietà ii).

Consideriamo X^p come sottovarietà della sua complessificata V_r; allora possiamo ridefinire l'invariante $r(x, V_r)$ e risulta $r(x, V_r) = r$ in ogni punto $x \in X^p$; perciò X^p, rispetto a V_r si trova nelle condizioni del primo teorema d'estensione. Possiamo quindi enunciare il secondo teorema d'estensione.

TEOREMA 3. *Sia* $r(x, X_n)$ *costante su* X^p. *C. n. e. s. perchè* $f \in C^\infty(X^p)$ *sia restrizione a* X^p *d'una funzione* F, *olomorfa in un intorno* U *di* X^p *nella complessificata* V_r *di* X^p *in* X_n, *è che*

$$df \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_r \,|_{X^p} = 0$$

in ogni punto $x \in X^p$, $z_1, \dots, z_r$ *essendo coordinate olomorfe in un intorno di* x *in* V_r.

H. CARTAN [1] ha introdotto, per ogni varietà analitica reale, la nozione di varietà complessificata astratta: data una varietà analitica reale X^p, di dimensione reale p, sia Y_p una varietà complessa, di dimensione complessa p, e $i : X^p \to Y_p$ un'applicazione bianalitica reale di X^p su una sottovarietà $i(X^p)$ di Y_p: supponiamo inoltre che su Y_p esistano, nell'intorno U di un punto $y_0 \in i(X^p)$, coordinate olomorfe $z_1, \dots, z_p$ tali che

$$i(X^p) \cap U = \{y \in U \mid \operatorname{Im} z_\alpha = 0, \; 1 \leq \alpha \leq p\}.$$

In queste condizioni la varietà Y_p si chiama una *complessificata astratta* della varietà X^p. Si dimostra [6] che ogni varietà analitica reale ammette una complessificata astratta ed inoltre che se Y, Y' sono due complessificate astratte della varietà X^p esistono due intorni U, U' della X^p, considerata rispettivamente come sottovarietà di Y_p, Y_p', ed un isomorfismo φ: $U \longrightarrow U'$ tale che $\varphi|_{X^p}$ è l'identità su X^p.

Osserviamo che nel caso da noi considerato, qualora sia $r = p$, la complessificata da noi introdotta è una complessificata astratta di X^p.

La complessificata astratta Y_p di una varietà analitica reale X^p gode della proprietà che la X^p, come sottovarietà della Y_p, ha un sistema fondamentale d'intorni che sono varietà di Stein [4].

LEMMA. *Sia D un aperto di $\mathbf{C}^N$, V una sottovarietà complessa di D che sia una varietà di Stein, X una sottovarietà analitica reale, compatta, di V. Sia $\nu = \nu(V, D)$ il fibrato normale olomorfo di V in D, $\pi: \nu(V, D) \longrightarrow V$ la proiezione naturale, e V_0 la sezione nulla di $\nu(V, D)$. Esistono un intorno W di X in $\nu(V, D)$ ed un isomorfismo ψ di W su un intorno di X in D tale che*

$$\pi|_{V_0 \cap W} = \psi|_{V_0 \cap W} .$$

Dimostrazione. La dimostrazione si trova essenzialmente in [2]; la riportiamo adottata al nostro caso.

Sia T_V il fibrato tangente olomorfo di V e sia Ξ il fibrato tangente olomorfo di $\mathbf{C}^N$ ristretto a D. Risulta $\Xi \simeq D \times \mathbf{C}^N$. Si ha la successione esatta su V

$$0 \longrightarrow T_V \xrightarrow{i^*} \Xi|_V \xrightarrow{j} \nu(V, D) \longrightarrow 0.$$

Da questa deduciamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\nu, T_V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\nu, \Xi|_V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\nu, \nu) \longrightarrow 0.$$

Passando ai fasci dei germi di sezioni si ottiene la successione esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, T_V) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, \Xi|_V) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, \nu) \longrightarrow 0.$$

Tenendo conto che V è una varietà di Stein, dalla successione esatta di coomologia si deduce la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, T_V)) \longrightarrow \Gamma(V, \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, \Xi|_V) \longrightarrow \Gamma(\nu, \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, \nu)) \longrightarrow 0.$$

Sia $\varphi \in \Gamma(V, \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, \nu))$ l'elemento che associa l'omomorfismo identico di ν su se stesso. Esiste un elemento $h \in \Gamma(V, \underline{\mathrm{Hom}}(\nu, \Xi|_V))$ tale che $j \circ h = \varphi$. Tenendo conto che $\Xi|_V \simeq V \times \mathbf{C}^N$, h risulta dato localmente da una matrice $(N - p) \times N$ ($p = \dim_{\mathbf{C}} V$) a elementi funzioni olomorfe su V. Consideriamo l'applicazione ψ di ν in $\mathbf{C}^N$ definita nel modo seguente:

$$\psi(y) = \pi(y) + h(y) \qquad y \in \mathbf{C}^N .$$

Risulta intanto $\psi|_{V_0} = \pi|_{V_0}$. Dimostriamo che il rango dell'applicazione ψ è uguale a N in ogni punto di V. Infatti sia z_0 un punto di V ed F la fibra di ν passante per z_0; il rango di $h|_F$ è $N-p$ perchè $j \circ h = \varphi$: d'altra parte $\varphi = 0$ su V mentre $\pi|_{V_0}$ è di rango p perchè è un isomorfismo di V_0 su V. Esiste perciò un intorno W_1 di V_0 in ν tale che $\psi|_{W_1}$ è di rango N.

L'applicazione ψ è quindi un isomorfismo locale su W: la tesi del lemma è allora conseguenza del lemma 2.

COROLLARIO. *Sia X_n una varietà di Stein, X^p una sottovarietà analitica reale, compatta, di X_n tale che $r(x, X_n) = p$ in ogni punto $x \in X^p$. Ogni funzione $f \in C^\omega$ è restrizione a X^p d'una funzione olomorfa in un intorno di X^p in X_n.*

Dimostrazione. Sia U un intorno di X^p in X_n tale che la complessificata V_p di X^p in X_n si possa realizzare come sottovarietà complessa di U. In virtù di quanto detto al paragrafo 3 non è restrittivo supporre che V_p sia una varietà di Stein. Poichè X_n è una varietà di Stein possiamo anche supporre che X_n sia una sottovarietà di $\mathbf{C}^N$. Il teorema risulta dimostrato se dimostriamo che ogni funzione olomorfa su V_p è restrizione a V_p d'una funzione olomorfa su un intorno di V_p in $\mathbf{C}^N$: infatti già sappiamo che ogni funzione $f \in C^\omega(X^p)$ è traccia di una funzione olomorfa in un intorno di X^p in V_p, intorno che possiamo supporre essere una varietà di Stein. Questa discende dal lemma precedente in quanto esiste un intorno W di V_p in $\mathbf{C}^N$ e una retrazione olomorfa ψ di W su V_p.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTAN (H.). - *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes,* Bull. Soc. math. Fr. t. 85, fasc. 1, 1957.

[2] DOCQUIER (F.). e GRAUERT (H.). - *Levisches Problem und Rungescher Satz fur Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten,* Math. Annalen, t. 140, 1960.

[3] FUBINI (G.). - *Su un teorema di Severi per le funzioni analitiche di due variabili,* Rend. Acc. Lincei, vol. XIV, serie 6, fasc. 11, 1931.

[4] GRAUERT (H.). - *On Levi's problem and imbedding of real analytic manifold.* Annals of Math , t. 68, 1958.

[5] SEVERI (F.) - *La geometria delle funzioni analitiche di più variabili....* Annali di Mat., serie 4, t. 17, 1937.

[6] WHITNEY (H.) e BRUHAT (F.). - *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels,* Comm. Math. Helv , vol. 33, fasc. 2, 1959.