Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giulio Cesare Barozzi

Su una generalizzazione degli spazi $L^{(q,\gamma)}$ di Morrey

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 4 (1965), p. 609-626

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_4_609_0>

SU UNA GENERALIZZAZIONE DEGLI SPAZI $L^{(q,\lambda)}$ DI MORREY

GIULIO CESARE BAROZZI (*)

I. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$; si dice che una funzione $u(x) \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, appartiene allo spazio di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$, $0 \leq \lambda \leq n$, se per ogni $x \in \Omega$ sussiste una maggiorazione del tipo

$$\int_{S(x,\varrho) \cap \Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq M \varrho^\lambda ,$$

M essendo una quantità positiva indipendente da x, ed $S(x,\varrho)$ essendo la sfera di centro x e raggio ϱ positivo arbitrario. È possibile munire $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ di una struttura di spazio di Banach. Agli spazi $L^{(q,\lambda)}$, introdotti originariamente in connessione con questioni di calcolo delle variazioni e di regolarizzazione delle soluzioni delle equazioni ellittiche, è dedicata una estesa letteratura; di particolare interesse per il presente lavoro è una nota di S. Campanato [4], in cui vengono stabiliti teoremi del tipo di Sobolev per funzioni aventi certe derivate in spazi di Morrey opportuni.

Nei numeri 2 e 3 della presente nota, dopo aver richiamato la definizione degli spazi di Morrey, vengono introdotti spazi funzionali analoghi a questi, nei quali, però, alle sfere $S(x,\varrho)$ vengono sostituiti gli intorni relativi ad una certa distanza in $\mathbb{R}^n$, nella quale le diverse coordinate x_i, $i = 1, \ldots, n$, compaiono in modo differenziato.

Una tale distanza « anisotropa » si presenta in modo, per così dire, spontaneo, quando si affronta lo studio delle equazioni quasi-ellittiche. Vengono stabiliti teoremi di immersione tra spazi diversi del tipo indicato (che

---

Pervenuto alla Redazione il 25 Giugno 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo n⁰ 2 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1964-65.

risultano effettivamente diversi da quelli di Morrey) ed anche teoremi di immersione tra spazi anisotropi e spazi di Morrey. Nei numeri 4 e 5 si mostra la possibilità di adattare alcune tecniche di Campanato [4] al caso allo studio, trovando così teoremi del tipo di Sobolev analoghi a quelli stabiliti dal citato Autore.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato; per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo $\| x \|^2 = \sum_{j=1}^{n} | x_j |^2$, $S(x, \varrho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \| x - \xi \| < \varrho,\ \varrho \in \mathbb{R}^+\}$, $\Omega(x, \varrho) = \Omega \cap S(x, \varrho)$. Se q e λ sono due numeri reali con $q \geq 1$ e $\lambda \in [0, n]$, poniamo

$$L^{(q, \lambda)}(\Omega) = \Big\{ u(x);\ u \text{ misurabile in } \Omega,\ \int_{\Omega(x, \varrho)} | u(\xi) |^q \, d\xi \leq M \varrho^\lambda$$

$$(M \text{ dipendente da } u),\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \varrho \in \mathbb{R}^+ \Big\}.$$

Se si assume come norma di $u \in L^{(q, \lambda)}(\Omega)$ la quantità

$$\left[\sup_{\substack{x \in \Omega \\ \varrho \in \mathbb{R}^+}} \varrho^{-\lambda} \int_{\Omega(x, \varrho)} | u(\xi) |^q \, d\xi \right]^{1/q},$$

$L^{(q, \lambda)}(\Omega)$ viene munito di una struttura di spazio di Banach, ove si identifichino, come di consueto, funzioni uguali dappertutto. È chiaro che per dimostrare l'appartenenza di u allo spazio $L^{(q, \lambda)}$ è sufficiente verificare la maggiorazione

$$\int_{\Omega(x, \varrho)} | u(\xi) |^q \, d\xi \leq M \varrho^\lambda$$

per ogni $x \in \Omega$ ed ogni $\varrho \in]\, 0, \varrho^*]$, essendo ϱ^* un numero positivo ad arbitrio: sceglieremo spesso $\varrho^* = 1$.

Ricordiamo che $L^{(q, 0)}(\Omega) = L^q(\Omega)$ e $L^{(q, n)}(\Omega) = L^\infty(\Omega)$, le uguaglianze intendendosi nella categoria degli spazi di Banach. Ricordiamo ancora che per $\lambda > n$ $L^{(q, \lambda)}(\Omega)$ si riduce alla sola funzione nulla. Se in $\mathbb{R}^n$ si introduce la norma

$$\| x \|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

convenendo di porre, come di consueto,

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} | x_j |,$$

e si introducono gli intorni

$$S_p(x,\varrho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \|x-\xi\|_p < \varrho,\ \varrho \in \mathbb{R}^+\},$$

si può definire lo spazio $L_p^{(q,\lambda)}(\Omega)$ allo stesso modo di $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ (che possiamo indicare col simbolo $L_2^{(q,\lambda)}(\Omega)$) salvo la sostituzione di $S_p(x,\varrho)$ a $S(x,\varrho) = S_2(x,\varrho)$. Nel seguito ci occuperemo dei valori di $p \geq 2$. Dalle inclusioni

$$S_2(x,\varrho) \subset S_p(x,\varrho) \subset S_\infty(x,\varrho) \subset S_2(x,\sqrt{n}\,\varrho), \quad \forall\, p > 2, \quad \forall\, \varrho \in]0,1[,$$

tenendo presente un risultato di S. Campanato [5] (Appendice n^0 1) si ha subito

$$L_p^{(q,\lambda)}(\Omega) = L^{(q,\lambda)}(\Omega), \quad \forall\, p \in [2,+\infty], \quad q \geq 1, \quad \lambda \in [0,n].$$

Se $(m_1,\dots,m_n)$ è un'ennupla assegnata di numeri maggiori di zero, poniamo

$$m = \max_{1\leq j\leq n} m_j, \quad m' = \min_{1\leq j\leq n} m_j, \quad n^* = \sum_{j=1}^{n}\frac{m}{m_j} \;(\geq n).$$

Supporremo $m_j \geq 1$, $m \geq 2$, ipotesi queste, come vedremo tra breve, non restrittive. Per ogni $p \in [1,+\infty]$ consideriamo la distanza in $\mathbb{R}^n$ definita dall'eguaglianza

$$d_p(x,0) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{p\frac{m_j}{m}}\right)^{1/p} \qquad \Big(d_\infty(x,0) = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|^{\frac{m_j}{m}}\Big);$$

poniamo

$$I_p(x,\varrho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ d_p(x,\xi) < \varrho,\ \varrho \in \mathbb{R}^+\}.$$

La quantità $|||x|||_p = d_p(x,0)$ soddisfa agli assiomi di una «quasi-norma» in $\mathbb{R}^n$ (v., per es., K. Yosida [8], pag. 30). Se $\bar{x} \neq 0$, per $x = (t^{\frac{m}{m_1}}\bar{x}_1,\dots,t^{\frac{m}{m_n}}\bar{x}_n)$, $t \geq 0$, si ha $|||x|||_m = t\,|||\bar{x}|||_m$. È facile inoltre verificare che le quasi-norme $|||x|||_p$ (e quindi le distanze d_p) sono due a due equivalenti:

$$c_1\,|||x|||_{p_1} \leq |||x|||_{p_2} \leq c_2\,|||x|||_{p_1},$$

per opportune costanti $c_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2$, indipendenti da x. Osserviamo esplicitamente che se si eccettua il caso banale in cui gli m_j sono tutti uguali, le distanze d_p ora introdotte non sono equivalenti alla distanza ordinaria in $\mathbb{R}^n$. Per $p < m$ gli intorni $I_p(x,\varrho)$ possono essere insiemi non convessi (1): nel seguito considereremo pertanto di preferenza valori $p \geq m$.

Se q è un numero maggiore o uguale ad 1 e $\lambda \in [0, n^*]$, poniamo

$$L^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega) = \Big\{ u(x) ;\ u \text{ misurabile in } \Omega,\ \int\limits_{I_m(x, \varrho) \cap \Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq M \varrho^\lambda,$$

$$(M \text{ dipendente da } u) \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, \varrho \in \mathbb{R}^+ \Big\}.$$

È immediato che $L^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ non muta se si moltiplicano gli m_j per uno stesso numero positivo: ad esempio se gli m_j sono naturali non è restrittivo supporli primi tra di loro. Se si pone

$$\| u \|_{L^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)} = \left[\sup_{\substack{x \in \Omega \\ \varrho \in \mathbb{R}^+}} \varrho^{-\lambda} \int\limits_{I_m(x, \varrho) \cap \Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \right]^{1/q},$$

si munisce $L^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ di una struttura di spazio di Banach. Analogamente a quanto fatto in precedenza per gli spazi di Morrey, si potrebbero definire gli spazi $L_p^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$, utilizzando gli intorni $I_p(x, \varrho)$; le inclusioni

$$I_m(x, \varrho) \subset I_p(x, \varrho) \subset I_\infty(x, \varrho) \subset I_m(x, \sqrt[m]{n}\, \varrho), \quad \forall\, p \geq m, \quad \forall\, \varrho \in [0, 1]$$

conducono però all'eguaglianza

$$L_p^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega) = L^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\forall\, p \in [m, +\infty], \quad \forall\, q \geq 1, \quad \forall\, \lambda \in [0, n^*].$$

È immediato che se $m_j = m$, $j = 1, \dots n$, allora

$$L^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega) = L^{(q, \lambda)}(\Omega). \tag{2.2}$$

---

(1) Per $p \geq m$ risulta $p m_j / m \geq 1$; se dunque $\Sigma_j |x_j|^{p \frac{m_j}{m}} < \varrho^p$, $\Sigma_j |y_j|^{p \frac{m_j}{m}} < \varrho^p$, si ha $\Sigma_j \left(\frac{1}{2} |x_j + y_j| \right)^{p \frac{m_j}{m}} \leq \frac{1}{2} \Sigma_j (|x_j|^{p \frac{m_j}{m}} + |y_j|^{p \frac{m_j}{m}}) < \varrho^p$, da cui la convessità di $I_p(x, \varrho)$.

Si ha ancora

$$(2.3) \qquad L^{(q,0;m_1,\dots,m_n)}(\Omega) = L^q(\Omega), \qquad L^{(q,n^*;m_1,\dots,m_n)}(\Omega) = L^\infty(\Omega).$$

La sola inclusione che non è immediata è $L^{(q,n^*;m_1,\dots,m_n)}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$. Utilizzando (2.1) possiamo riscriverla $L_\infty^{(q,n^*;m_1,\dots,m_n)}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$; ora se $u \in L_\infty^{(q,n^*;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ si ha

$$\int_{I_\infty(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq M\varrho^{n^*} = 2^{-n} M \operatorname{mis} I_\infty(x,\varrho),$$

da cui subito la nostra tesi, ove si tenga presente che, in virtù di un teorema di Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund ([7], teor. 6), risulta

$$\lim_{\varrho\to 0} \left\{ \frac{1}{\operatorname{mis} I_\infty(x,\varrho)} \int_{I_\infty(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \right\} = |u(x)|^q$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. Lo stesso ragionamento prova anche che per $\lambda > n^*$, $L^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ si riduce alla sola funzione nulla.

3. Per $\varrho \in]0,1]$ si ha facilmente l'inclusione

$$I_m(x,\varrho) \subset S_m(x,\varrho);$$

ne segue, se $u \in L^{(q,\lambda'')}(\Omega)$,

$$\int_{I_m(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq \int_{S_m(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq M\varrho^{\lambda''} \leq M\varrho^{\lambda}, \qquad \forall\, \lambda \leq \lambda''.$$

Si ha analogamente

$$S_m(x,\varrho) \subset I_m(x, \sqrt[m]{n}\, \varrho^{\frac{m'}{m}});$$

se dunque $u \in L^{(q,\lambda;(m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ si ha

$$\int_{S_m(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq \int_{I_m(x,\sqrt[m]{n}\varrho^{\frac{m'}{m}})\cap\Omega} |u(\xi)|^q \, d\xi \leq M\varrho^{\frac{m'}{m}\lambda} \leq M\varrho^{\lambda'}, \qquad \forall\, \lambda' \leq \frac{m'}{m}\lambda.$$

Si ha in definitiva

$$(3.1)\quad \left\{0 \leq \lambda' \leq \frac{m'}{m}\lambda \leq \lambda \leq \lambda''\right\} \Longrightarrow \{L^{(q,\lambda'')}(\Omega) \subset L^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega) \subset L^{(q,\lambda')}(\Omega)\},$$
$$\forall\, q \geq 1 .$$

OSSERVAZIONE. La (3.1) è in accordo con l'inclusione

$$\{\lambda' \leq \lambda''\} \Longrightarrow \{L^{(q,\lambda'')}(\Omega) \subset L^{(q,\lambda')}(\Omega)\}$$

(v. S. Campanato [2], nota (3)); inoltre la (3.1) contiene la (2.2) e la prima delle (2.3).

Esaminiamo ora in dettaglio un semplice esempio per verificare che:

a) gli spazi $L^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ sono effettivamente differenti dagli $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$;

b) le limitazioni per λ' e λ'' nella (3.1) non possono essere migliorate.

Scegliamo $n = 2$, $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $\lambda = \frac{3}{2}$ $\left(\lambda \frac{m'}{m} = \frac{3}{4}\right)$, $q = 1$. La (3.1) fornisce dunque

$$(3.2)\qquad L^{(1,3/2)}(\Omega) \subset L^{(1,3/2;2,1)}(\Omega) \subset L^{(1,3/4)}(\Omega) .$$

Dico che, scelto ad arbitrio un valore $\lambda \in]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}[$, risulta $L^{(1,3/2,2,1)}(\Omega) \neq L^{(1,\lambda)}(\Omega)$. Per definire gli spazi che intervengono nella (3.2) si possono utilizzare gli intorni

$$S_\infty(x, \varrho) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 ;\ |\xi_j - x_j| < \varrho,\ j = 1, 2,\ \varrho \in \mathbb{R}^+\}$$

$$I_\infty(x, \varrho) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 ;\ |\xi_1 - x_1| < \varrho,\ |\xi_2 - x_2| < \varrho^2,\ \varrho \in \mathbb{R}^+\} .$$

Consideriamo funzioni del tipo

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{|x_1|^{1-\alpha_1}} \frac{1}{|x_2|^{1-\alpha_2}},\quad \alpha_j > 0,\qquad j = 1, 2.$$

Un semplice calcolo mostra che $u \in L^{(1,\lambda)}(\Omega)$ se e solo se $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \lambda$, mentre $u \in L^{(1,3/2;2,1)}(\Omega)$ se e solo se $\alpha_1 + 2\alpha_2 \geq \frac{3}{2}$. Se, ora, si sceglie una coppia (α'_1, α'_2) tale che $\alpha'_1 + \alpha'_2 \geq \lambda$ e $\alpha'_1 + 2\alpha'_2 < \frac{3}{2}$ $\left(\text{ad es. } \alpha'_1 = \lambda,\ \alpha'_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\right)$, si ottiene $u \in L^{(1,\lambda)}(\Omega)$, $u \notin L^{(1,3/2;2,1)}(\Omega)$. Viceversa scegliendo una coppia (α_1'', α_2'') tale che $\alpha_1'' + \alpha_2'' < \lambda$ e $\alpha_1'' + 2\alpha_2'' \geq \frac{3}{2}$ $\left(\text{ad es. } \alpha_1'' = \right.$ $\left. = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 2\lambda\right),\ \alpha_2'' = \lambda\right)$ si ha $u \notin L^{(1,\lambda)}(\Omega)$ $u \in L^{\left(1,\frac{3}{2};2,1\right)}(\Omega)$.

Con lo stesso ragionamento si prova anche che $L^{\left(1,\frac{3}{2};2,1\right)}(\Omega)$ è diverso tanto da $L^{\left(1,\frac{3}{4}\right)}(\Omega)$ quanto da $L^{\left(1,\frac{3}{2}\right)}(\Omega)$.

Terminiamo questo numero con un teorema di inclusione tra spazi $L^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$.

Proviamo che

$$(3.3)\quad \{q' \leq q,\ q'(n^* - \lambda) \leq q(n^* - \lambda')\} \Longrightarrow \{L^{(q,\lambda';m_1,\dots,m_n)}(\Omega) \subset L^{(q',\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)\},$$

(cfr. S. Campanato [2], nota (3)). Infatti se $u \in L^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$, applicando la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\left[\sup_{\substack{x \in \Omega \\ \varrho \in]0,\varrho_0]}} \varrho^{-\lambda'} \int_{I_\infty(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^{q'} d\xi\right]^{1/q'} \leq 2^{n\frac{q-q'}{qq'}} \varrho_0^{\frac{q-q'}{qq'}n^* - \frac{\lambda'}{q'} + \frac{\lambda}{q}} \left[\sup_{\substack{x \in \Omega \\ \varrho \in]0,\varrho_0]}} \varrho^{-\lambda} \int_{I_\infty(x,\varrho)\cap\Omega} |u(\xi)|^q d\xi\right]^{1/q}$$

essendo ϱ_0 il diametro di Ω.

4. Come si è detto al n° 1, in questo e nel seguente numero verranno estesi alcuni risultati di S. Campanato [4].

Sia $g(x) \in L(\Omega)$; poniamo

$$U_{g,\alpha}(x) = \int_\Omega \frac{g(x)}{d_m(x,\xi)^{n^*-\alpha}} d\xi, \quad \alpha > 0\,.$$

Sussiste il seguente

LEMMA I. *Se* $g \in L^{(1,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ *allora*

a) *se* $0 \leq \lambda < n^* - \alpha$, $U_{g,\alpha} \in L^{(1,\lambda+\alpha;m_1,m_n)}(\Omega)$;

b) *se* $\lambda = n^* - \alpha$, $U_{g,\alpha} \in L^{(1,\mu;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ *per ogni* $\mu < n^*$; *in ogni caso si ha*

$$\| U_{g,\alpha} \|_{L^{(1,\mu,m_1,\dots m_n)}(\Omega)} \leq c \, \| g \|_{L^{(1,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)}$$

essendo $\mu = \lambda + \alpha$ *nel primo caso,* $\mu < n^*$ *nel secondo.*

c) *Se infine* $n^* - \alpha < \lambda \leq n^*$, $U_{g,\alpha}$ *è limitata in* Ω *e si ha*

$$\sup_{x\in\Omega} | U_{g,\alpha}(x) | \leq c \, \| g \|_{L^{(1,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)}\,.$$

Nell'enunciato del Lemma e così nel seguito indicheremo con c una costante positiva, non necessariamente la stessa in ogni formula, indipendente dalle funzioni che in essa intervengono.

Osserviamo innanzitutto che la convergenza dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} d_m(x, 0)^{-k}\, dx\,,$$

per $k < n^*$, o, ciò che è lo stesso, la convergenza dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} d_1(x, 0)^{-k}\, dx\,,$$

può stabilirsi con un calcolo diretto, utilizzando, per esempio, il cambiamento di variabili $\xi_j = | x_j |^{\frac{m_j}{2m}} \operatorname{sgn} x_j\,, j = 1, \dots n$. L'esistenza per quasi ogni $x \in \Omega$ dell'integrale

$$\int_{\Omega} g(\xi)\, d_m(x, \xi)^{\alpha - n^*}\, d\xi$$

segue allora dall'applicazione del teorema di Fubini-Tonelli. Per la dimostrazione di $a)$, supposto $\varrho \in\,]\, 0, \frac{1}{2}\varrho_0\,]$ e scelto $x_0 \in \Omega$, scriviamo

$$| U_{g,\alpha}(x) | \leq \int_{\Omega - I_m(x_0\,,\, 2\varrho)} | g(\xi) |\, d_m(x, \xi)^{\alpha - n^*}\, d\xi + \int_{\Omega \cap I_m(x_0\,,\, 2\varrho)} | g(\xi)\ d_m(x, \xi)^{\alpha - n^*}\, d\xi = U'_{g,\,\alpha}(x) + U''_{g,\,\alpha}(x)\,.$$

Per $r \in [0, \varrho_0]$ $x \in I_m(x_0\,, \varrho) \cap \Omega$, poniamo

$$\varphi_x(r) = \int_{\{\Omega \cap I_m(x_0\,,\, 2\varrho)\} \cap I_m(x,\, r)} | g(\xi) |\, d\xi\,;$$

si ha $\varphi_x(r) = 0$, per $r \in [0, \varrho]$, $\varphi_x(r) \leq \| g \|\, r^\lambda$, per $r \in [\varrho, \varrho_0]$ (si intende che la norma di g è quella di $L^{(1,\,\lambda\,;\, m_1, \dots, m_n)}(\Omega))$.

Con una integrazione per parti, tenendo presente che $\alpha - n^* + \lambda > 0$, si trova:

$$U'_{g,\,\alpha}(x) = \int_{\varrho}^{\varrho_0} r^{\alpha - n^*}\, \varphi'_x(r)\, dr \leq c\, \| g \|\, \varrho^{\alpha - n^* + \lambda}\,,$$

da cui

$$\int\limits_{I_m(x_0,\varrho)\cap\Omega} U'_{g,\alpha}(x)\,dx \leq c\,\|g\|\,\varrho^{\lambda+\alpha},$$

(si ha mis $I_m(x_0,\varrho) \leq c\varrho^{n^*}$). Analogamente si trova

$$\int\limits_{I_m(x_0,\varrho)\cap\Omega} U''(x)\,dx \leq c\,\|g\|\,\varrho^{\lambda+\alpha},$$

da cui a).

La b) segue da a) ove si osservi che se $\lambda = n^* - \alpha$, da $g \in L^{(1,\lambda;m_1,\ldots,m_n)}(\Omega)$ segue $g \in L^{(1,\lambda-\varepsilon:m_1,\ldots,m_n)}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon \in]0,\lambda]$ (v. (3.3)).

Per dimostrare infine c) si introduce la funzione

$$\psi_x(r) = \int\limits_{I_m(x,r)\cap\Omega} |g(\xi)|\,d\xi,\quad r \geq 0,\quad x \in \Omega;$$

risulta $\psi_n(r) \leq \|g\|\,r^\lambda$, essendo $n^* - \alpha < \lambda \leq n^*$. Con un'integrazione per parti si trova

$$|U_{g,\alpha}(x)| \leq \int_0^{\varrho_0} r^{\alpha-n^*}\,\psi'_x(r)\,dr \leq c\,\|g\|\,\varrho_0^{\alpha-n^*+\lambda} = c'\,\|g\|,$$

cioè l'asserto.

Introduciamo ora un ipotesi « del tipo di cono », relativamente all'aperto Ω. Supponiamo ordinati gli m_j in modo che risulti

$$m = m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n > 0.$$

Poniamo

$$E_1^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leq x_1 \leq a,\ \sum_{j=2}^n |x_j|^{m_j} \leq \alpha\, x_1^m;\ a, \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\};$$

$$E_1^- = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ -a \leq x_1 \leq 0,\ \sum_{j=2}^n |x_j|^{m_j} \leq \alpha\,|x_1|^m;\ a, \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Se fosse $m = m_1 = \ldots = m_k$ $(k \leq n)$, definiremo in modo analogo gli insiemi E_j per $j = 1,\ldots,k$. Diremo che E_1^+ (rispettivamente E_1^-) ha il vertice nell'origine, e chiameremo « base » di esso l'insieme dei punti per cui è $x_1 = a$ (rispettivamente $x_1 = -a$); indicheremo tale base con Σ_1^+ (Σ_1^-).

Supporremo che Ω soddisfi alla seguente condizione:
Esistono due numeri $a, \alpha \in \mathbb{R}^+$, tali che per ogni $x \in \Omega$ esiste un insieme $E(x)$ ottenibile mediante traslazione da uno degli E_j $(j = 1, \dots, k)$, avente vertice in x stesso e tale che, detta $\Sigma(x)$ la base di $E(x)$,

i) *esiste un insieme misurabile $\Sigma^*(x) \subset \Sigma(x) \cap \Omega$, con* mis $\Sigma^*(x) \geq c > 0$ (c *indipendente da* x);

ii) *se $\xi \in \Sigma^*(x)$, ogni punto x^* di coordinate*

$$x_j^* = x_j = t^{\frac{m}{m_j}} (\xi_j - x_j),\ j = 1, \dots, n,\ t \in [0, 1]$$

appartiene ad Ω; l'insieme di tali punti verrà indicato con $E^*(x)$.

Osserviamo esplicitamente che se gli m_j sono naturali e di più costituiscono una ennupla « quasi-ellittica » (v. G. C. Barozzi [1]) allora i domini « normali » relativi alle equazioni quasi ellittiche di multi-indice $(m_1, \dots, m_n)$ (v. B. Pini [9], A. Cavallucci [6]) sono la chiusura di aperti Ω per cui la condizione precedente è soddisfatta (v. Appendice).

Ciò posto sussiste il seguente

LEMMA 2. *Nelle ammesse ipotesi su Ω, se u e le derivate prime di u (nel senso delle distribuzioni) sono sommabili in Ω, per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha la maggiorazione*

$$|u(x)| \leq c \int_\Omega \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} |D^\alpha u(\xi)| \, [d_m(x, \xi)]^{1-n^*} \, d\xi,$$

(v. S. Campanato [3]).

Supponiamo che per un certo $x \in \Omega$ $E(x)$ sia ottenuto per traslazione da E_1^+. Sia $\varphi(t)$ una funzione di classe $C^{(1)}[0, +\infty[$ con

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], \\ 0, & \text{per } t \in \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Per ogni $\xi \in \Sigma^*(x)$ si ha

$$u(x) = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\varphi(t)\, u\left(x_1 + t\alpha, x_2 + t^{\frac{m}{m_2}}(\xi_2 - x_2), \dots, x_n + t^{\frac{m}{m_n}}(\xi_n - x_n)\right)\right] dt$$

con una integrazione su $\Sigma^*(x)$ si trova

$$|u(x)| \leq \frac{\max[|\varphi| + |\varphi|]}{c} \int_{E^*(x)} \left[|u(x^*)| + \sum_{j=1}^{k} \left|\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j^*}\right|\right] \left|\frac{\partial(t, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial(x_1^*, \dots, x_n^*)}\right| dx^*.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\frac{\partial (t, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial (x_1^*, \dots, x_n^*)} = \frac{a^{n^*-2}}{(x_1^* - x_1)^{n^*-1}}.$$

Ma essendo $x^* \in E^*(x)$, si ha

$$\sum_{j=1}^{n} | x_j^* - x_j |^{m_j} \leq (1 + \alpha) | x_1^* - x_1 |^m ,$$

cioè

$$d_m (x, x^*) \leq (1 + \alpha)^{\frac{1}{m}} | x_1^* - x_1 |.$$

Si trova dunque

$$| u(x) | \leq C \int_{E^*(x)} \frac{| u(x^*) | + \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u (x^*)}{\partial x_1^*} \right|}{d_m (x, x^*)^{n^*-1}} dx^*$$

avendo posto $C = c^{-1} a^{n^*-2} (1 + \alpha)^{\frac{n^*-1}{m}} \max [| \varphi | + | \varphi' |]$.

5. Supponiamo soddisfatta da Ω l'ipotesi del numero precedente. Indichiamo con $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ (k naturale) lo spazio delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$, con le derivate fino all'ordine k incluso. Con $W^{(q, \lambda ; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ indicheremo il completamento funzionale di $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma

$$\| u \|_{(k, q, \lambda)} = [\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|^q_{L^{(q, \lambda ; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)}]^{1/q}$$

in particolare $\| u \|_{(0, q, \lambda)} = \| u \|_{L^{(q, \lambda ; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)}$. Essendo $W_k^{(q, \lambda ; m_1, \dots, m_n)} \subset W_k^q$ risulta, com'è noto, $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$, per $| \alpha | \leq k$. Se $u \in W_1^q$ il Lemma 2 assicura che

$$| u(x) | \leq c \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha| \leq 1} | D^\alpha u (\xi) | \right] [d_m (x, \xi)]^{1-n^*} d\xi$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. Supponiamo $k = 1$, $q > 1$; poniamo

$$q' = \frac{q}{q-1}, \quad p^* = \frac{q (n^* - \lambda)}{n^* - \lambda - q}, \quad \text{se } 0 \leq \lambda < n^* - q, \; p = + \infty, \text{ se } \lambda = n^* - q.$$

Sussiste il

TEOREMA I. *Se* $u \in W_1^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ *allora*

a) *per* $0 \leq \lambda \leq n^* - q$, $u \in L^{(p, \mu; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ *per ogni* $p \in [1, p^*[$ *e ogni* $\mu < n^* - \frac{p}{q} n^* + p + \frac{p}{q} \lambda$; *sussiste la maggiorazione*

$$\| u \|_{(0, p, \mu)} \leq c \| u \|_{(1, q, \lambda)} .$$

b) *Se* $n^* - q < \lambda \leq n^*$, u *è quasi dappertutto uguale ad una funzione continua in* $\bar{\Omega}$, *e per essa si ha*

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} | u(x) | \leq c \| u \|_{(1, q, \lambda)} .$$

Una volta provati i lemmi 1 e 2, la dimostrazione del teorema si consegue apportando a quella dell'analogo teorema I, 2 di [4] modifiche puramente formali (sostituzione di n^* ad n); riteniamo pertanto di poterla omettere. Un analogo risultato sussiste per k naturale qualunque e $q > 1$. Poniamo attualmente

$$p^* = \frac{q(n^* - \lambda)}{n^* - \lambda - kq}, \text{ se } 0 \leq \lambda \leq n^* - kq, \; p^* = +\infty, \text{ se } \lambda = n^* - kq.$$

Si ha il seguente

TEOREMA. 2. *Se* $u \in W_k^{(q, \lambda; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ *allora*

a) *se* $0 \leq \lambda \leq n^* - kq$, $u \in L^{(p, \mu; m_1, \dots, m_n)}(\Omega)$ *per ogni* $p \in [1, p^*[$ *ed ogni* $\mu < n^* + kp - \frac{p}{q} n^* + \frac{p}{q} \lambda$; *sussiste inoltre la maggiorazione*

$$\| u \|_{(0, p, \mu)} \leq c \| u \|_{(k, q, \lambda)} .$$

b) *Se* $n^* - hq < \lambda \leq n^*$ *per un certo naturale* h, $1 \leq h \leq k$, *ogni* $D^\alpha u$, *con* $|\alpha| = k - h$, *è quasi dappertutto uguale ad una funzione continua in* $\bar{\Omega}$ *e si ha la maggiorazione*

$$\sum_{|\alpha| = k - h} \sup_{x \in \bar{\Omega}} | D^\alpha u | \leq c \| u \|_{(k, q, \lambda)} .$$

La dimostrazione si consegue, come per il teorema II. 2 di [4], applicando il teorema 1 successivamente alle derivate di ordine $k - 1$, $k - 2, \dots$.

Ci proponiamo infine di dimostrare come l'appartenenza di u allo spazio $W_k^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$, per opportuni valori di $k, \lambda, q\ (q > 1)$, ed in certe ipotesi su Ω, implichi che la u stessa soddisfa ad una condizione del tipo di Hölder. Si tratta, tuttavia, di una condizione di Hölder differenziata rispetto alle diverse variabili, in armonia con la dissimmetria degli spazi che stiamo studiando. Per semplificare al massimo i ragionamenti supporremo che Ω sia addirittura un intervallo (aperto) di $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x_j \in]\,a_j, b_j\,[\,,\, a_j < b_j\,, j = 1, \dots, n\}.$$

Sfruttando un procedimento di Morrey, già utilizzato in [4], dimostriamo il seguente

Teorema 3. *Se $u \in W_k^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega)$ con $n^* - kq < \lambda \leq n^*$, allora u coincide quasi dappertutto in $\bar{\Omega}$ con una funzione (che indicheremo ancora con u), tale che, per ogni coppia $x, y \in \bar{\Omega}$, si ha*

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,\|u\|_{(k,q,\lambda)}\, d_\infty(x,y)^\alpha \leq c\,\|u\|_{(k,q,\lambda)} \sum_{j=0}^{n} |x_j - y_j|^{\alpha\frac{m_j}{m}}$$

con $\alpha \in]\,0, k + \dfrac{\lambda}{q} - \dfrac{n^*}{q}\,[$, se $n^* - kq < \lambda \leq n^* - (k-1)\,q$, mentre la u è lipschitziana se $\lambda > n^* - (k-1)\,q$.

Siano x ed y due punti di Ω; non è restrittivo supporre $|x_j - y_j| \leq 1$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Considereremo intervalli chiusi T che siano uguali alla chiusura di intorni del tipo $I_\infty(x, r)$, cioè

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x_j \in [a_j, a_j + l^{\frac{m}{m_j}}],\, j = 1, \dots, n\,;\, l \in \mathbb{R}^+\};$$

diremo l il «lato» di T. Risulterà mis $T = l^{n^*}$. Per ogni coppia $x, y \in \Omega$, esiste certamente un intervallo $T(x, y)$ del tipo specificato, tale che $x, y \in T(x, y)$ e di più risulti $l =$ lato di $T(x, y) = d_\infty(x, y)$. Inoltre, se x ed y sono abbastanza vicini è sicuramente $T(x, y) \in \Omega$. Sia $\xi \in T(x, y)$: abbiamo

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(\xi)| + |u(\xi) - u(y)|. \tag{7.1}$$

Valutiamo il primo degli addendi al secondo membro.

$$|u(x) - u(\xi)| = \left|\int_0^1 \frac{du\,[\xi + t(x - \xi)]}{dt}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - \xi_j|^{\frac{m_j}{m}} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta_j} \right|_{\eta=\xi+t(x-\xi)} dt \leq$$

$$\leq n\, d_\infty(x, y) \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left| \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta_j} \right|_{\eta=\xi+t(x-\xi)} dt.$$

Con una integrazione per parti in $d\xi$ su $T(x, y)$ si trova

$$\int_{T(x,y)} | u(x) - u(\xi) | \, d\xi \leq n\, d_\infty(x, y) \int_0^1 dt \int_{T(x,y)} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta_j} \right|_{\eta=\xi+t(x-\xi)} d\xi.$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili $\eta_j = \xi_j + t(x_j - \xi_j)$; indichiamo con $T_t(x, y)$ il trasformato di $T(x, y)$. Si ha che $l_t =$ lato di $T_t(x, y) = (1 - t)\, l$; se ne deduce

$$\int_{T(x,y)} | u(x) - u(\xi) | \, d\xi \leq n\, d_\infty(x, y) \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^n} \int_{T_t(x,y)} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta_j} \right| d\eta$$

$$\leq n\, |d_\infty(x, y)|^{1+n^*\left(1-\frac{1}{q}\right)} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{n^*}{q}}} \left[\int_{T_t(x,y)} \left| \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta_j} \right|^q d\eta \right]^{1/q}.$$

Supponiamo ora che risulti più precisamente, $n^* - kq < \lambda \leq n^* - (k-1)q$; il teorema 2, applicato alle derivate prime della u, assicura che $\frac{\partial u}{\partial \eta_j} \in L^{(q, \mu; m_1, \ldots, m_n)}(\Omega)$, per ogni $\mu < (k-1)q + \lambda$. Dalla maggiorazione

$$\left[\frac{1}{l_t^{\mu}} \int_{T_t(x,y)} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_j} \right|^q d\eta \right]^{1/q} \leq c \, \| u \|_{(k, q, \lambda)}$$

si trae in definitiva

$$\int_{T(x,y)} | u(x) - u(\xi) | \, d\xi \leq c\, d_\infty(x, y)^{1+n^*+\frac{\mu-n^*}{q}} \, \| u \|_{(k, q, \lambda)} \tag{7.2}$$

se $n^* - q < \mu < (k-1)q + \lambda$. Con la stessa tecnica si trova

$$\int_{T(x,y)} | u(\xi) - u(y) | \, d\xi \leq c\, d_\infty(x, y)^{1+n^*+\frac{\mu-n^*}{q}} \, \| u \|_{(k, q, \lambda)}; \tag{7.3}$$

combinando (7.1), (7.2) e (7.3) si ottiene in definitiva

$$|u(x) - u(y)| \leq c \, \| u \|_{(k,q,\lambda)} \, d_\infty(x, y)^* \tag{7.4}$$

dove $0 < \alpha < k + \frac{\lambda}{q} - \frac{n^*}{q}$, cioè la prima affermazione del teorema ([2]).

Se poi risultasse $\lambda > n^* - (k-1)q$, sarebbe $n^* - (k-h)q < \lambda \leq n^* - (k-h-1)q$, per un opportuno naturale $h \, (1 \leq h \leq k-1)$. Si può applicare il procedimento precedente alle derivate della u di ordine h e si trova per ciascuna di esse una condizione di Hölder del tipo della (7.4). In tal caso ogni derivata della u di ordine inferiore ad h, dunque anche la u stessa, soddisfa ad una condizione di Lipschitz.

Appendice.

Proviamo l'affermazione contenuta nel numero 4, relativamente all'ipotesi sull'aperto Ω. Limitandoci al caso tridimensionale, siano m_1, m_2, m_3 numeri naturali costituenti una terna quasi-ellittica. Supponiamo dapprima $m_1 > m_2 > m_3$. In tal caso un dominio «normale» D per le equazioni quasi-ellittiche di multi-indice (m_1, m_2, m_3) ha come frontiera due domini piani B_1 e B_2 contenuti nei piani caratteristici $x_3 = h_1$, $x_3 = h_2$ $(h_1 < h_2)$; due porzioni di superficie L_1 ed L_2 di equazioni $x_1 = \gamma_i(x_2, x_3)$, $i = 1, 2$, con $\gamma_1(x_2, x_3) < \gamma_2(x_2, x_3)$; due porzioni di superficie cilindriche M_1 ed M_2 di equazioni $x_2 = \delta_i(x_3)$, $i = 1, 2$, con $\delta_1(x_3) < \delta_2(x_3)$. Le funzioni γ_i e δ_i sono differenziabili con continuità rispettivamente in un certo compatto $D_{2,3}$ del piano (x_2, x_3) (proiezione di D su tale piano) e nell'intervallo $[h_1, h_2]$. Poniamo

$$\gamma(x_2, x_3) = \frac{1}{2}[\gamma_1(x_2, x_3) + \gamma_2(x_2, x_3)],$$

$$\gamma = \inf_{(x_2, x_3) \in D_{2,3}} [\gamma_2(x_2, x_3) - \gamma_1(x_2, x_3)]$$

$$D^+ = \{x \in D \, ; \; \gamma_1(x_2, x_3) \leq x_1 \leq \gamma(x_2, x_3)\}$$

$$D^- = \{x \in D \, ; \; \gamma(x_2, x_3) \leq x_1 \leq \gamma_2(x_2, x_3)\}.$$

([2]) Dall'inclusione $W^{(q,\lambda;m_1,\dots,m_n)}(\Omega) \subset W^{\left(q,\lambda\frac{m'}{m}\right)}(\Omega)$, applicando il teorema di I.3 di [4], segue che u soddisfa ad una condizione di Hölder (ordinaria) di esponente α, con $0 < \alpha < k + \frac{\lambda}{q}\frac{m'}{m} - \frac{n}{q} < k + \frac{\lambda}{q} - \frac{n^*}{q}$.

Fissiamo la nostra attenzione su D^+; associamo ad ogni x di esso un insieme $E(x)$, di vertice x, che sia il traslato di un insieme E_1^+. Scegliamo l'altezza $a \leq \frac{1}{2}\gamma$, e successivamente α abbastanza piccolo, in modo tale che, quando $x \in L_1$, $E(x)$ non abbia punti in comune con L_2, ciò che può ottenersi in virtù del fatto che γ_2 è differenziabile con continuità. Sia ora

$$\delta = \sup_{i=1,2} \sup_{h_1 \leq x_3 \leq h_2} | \delta_i'(x_3) | < +\infty ;$$

se si considerano gli insiemi

$$A = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2; \ |x_2|^{m_2} + |x_3|^{m_3} \leq \alpha\, a^{m_1}\},$$

$$B = \left\{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2; \ x_2 \geq 0, \ 0 \leq x_3 \leq \frac{x_2}{\delta}\right\},$$

e si pone

$$c = \operatorname{mis}\{A \cap B\},$$

è chiaro che comunque si prenda $x \in D^+$, l'intersezione della base $\Sigma(x)$ di $E(x)$ con D, è un insieme la cui misura non è inferiore a c. Si ragiona in modo analogo su D^-, scegliendo $E(x)$ traslato di E_1^-.

Supponiamo che sia $m_1 > m_2 = m_3$; in tal caso un dominio normale è limitato da due superficie del tipo delle L_1 e L_2, e da una superficie cilindrica Σ di generatrici parallele all'asse x_1. Conservando a γ, $\gamma(x_2, x_3)$, D^+, D^- il significato già specificato, associamo ad ogni $x \in D^+$ un insieme $E(x)$ con lo stesso criterio impiegato nel caso precedente. Essendo Σ una superficie di classe $C^{(1)}$, la sua proiezione sul piano (x_2, x_3) (cioè la frontiera $\mathfrak{F} D_{2,3}$ di $D_{2,3}$) è una curva di classe $C^{(1)}$ in tale piano.

Ciò implica che per ogni $x \in D^+$, $\Sigma(x) \cap D$ è un insieme di misura (bidimensionale) maggiore di zero, e di più tale misura è una funzione continua di x (in effetti $\Sigma(x) \cap D$ non varia al variare di x_1, mentre, se x' e x'' sono due punti appartenenti allo stesso piano $x_1 = \text{cost.}$, risulta $|\operatorname{mis}\{\Sigma(x') \cap D\} - \operatorname{mis}\{\Sigma(x'') \cap D\}| \leq \operatorname{mis}[\{\Sigma(x') - \Sigma(x'')\} \cup \{\Sigma(x'') - \Sigma(x')\}]$).

Posto dunque

$$c = \inf_{x \in D^+} \operatorname{mis}\{\Sigma(x) \cap D\}$$

è chiaro che risulta $c > 0$.

Supponiamo infine $m_1 = m_2 > m_3$. In tal caso un dominio normale è limitato da due domini piani quali B_1 e B_2 e da una superficie S di classe $C^{(1)}$, rappresentabile localmente nella forma $x_1 = \gamma(x_2, x_3)$, oppure $x_2 = \delta(x_1, x_3)$. Essendo S un compatto in $\mathbb{R}^3$ lo si può ricoprire con un numero finito di insiemi relativamente aperti $\Omega_i \subset S$, $i = 1, \dots, n$, ciascuno dei quali rappresentabile nella forma $x_1 = \gamma(x_2, x_3)$ oppure $x_2 = \delta(x_1, x_2)$; inoltre non è restrittivo supporre che la proiezione di Ω_i sul piano (x_2, x_3) (oppure (x_1, x_3)) abbia per frontiera una curva regolare, semplice, chiusa. Se ora si pone $S_1 = \overline{\Omega}_1$, $S_2 = \{\overline{\Omega_2 - \Omega_1}\}$, $S_3 = \{\overline{\Omega_3 - \{\Omega_1 \cup \Omega_2\}}\}$, ecc., si viene a scomporre S in un numero finito di superficie S_i, ciascuna delle quali è rappresentabile nella forma $x_2 = \gamma(x_2, x_3)$ (oppure $x_2 = \delta(x_1, x_3)$) con (x_2, x_3) appartenente ad un dominio regolare E_i del piano x_2, x_3 (oppure del piano x_1, x_3). Due superficie S_i e S_j o sono disgiunte, oppure hanno come intersezione una curva regolare, lungo la quale si raccordano con continuità del piano tangente. Consideriamo S_1 e supponiamo che essa sia rappresentabile nella forma $x_1 = \gamma(x_2, x_3)$ con $\gamma \in C^{(1)}(E_1)$. Supponiamo che per ogni $x \in S_1$, la semiretta avente vertice in x e parallela al semiasse positivo x_1, sia penetrante in D. Per ogni $(x_2, x_3) \in E_1$ esistono dunque $h \in \mathbb{R}^+$, tali che

$$\{\gamma(x_2, x_3) < x_1 < \gamma(x_2, x_3) + h\} \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in D - \mathfrak{F} D,$$

poniamo $a(x_2, x_3) = \sup h$. La funzione $a(x_2, x_3)$ è positiva ed inferiormente semicontinua, per le ipotesi ammesse su S; risulta dunque

$$a^* = \inf_{(x_2, x_3) \in E_1} a(x_2, x_3) > 0.$$

Poniamo

$$D_1^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 ;\ (x_2, x_3) \in E_1,\ \gamma(x_2, x_3) \leq x_1 \leq \gamma(x_2, x_3) + \frac{a^*}{2}\right\},$$

$$D_1^- = \left\{x \in \mathbb{R}^3 ;\ (x_2, x_3) \in E_1,\ \gamma(x_2, x_3) + \frac{a^*}{2} \leq x_1 \leq \gamma(x_2, x_3) + a^*\right\};$$

si ha $D_1^+ \subset D$, $D_1^- \subset D$. Ad ogni punto $x \in D_1^+$ associamo un insieme $E(x)$ che sia il traslato di un E_1^+. Ripetendo un ragionamento già utilizzato nel primo dei casi esaminati, scegliamo l'altezza a_1 degli $E(x)$ minore od uguale ad $\frac{a^*}{2}$, e successivamente il valore di α abbastanza piccolo in modo tale che al variare di x su S_1, $E(x)$ non incontri la superficie di equazione $x_1 = \gamma(x_2, x_3) + a^*$.

Un ragionamento visto sopra conduce alla conclusione che

$$\inf_{x \in S_1} \operatorname{mis} \{\Sigma(x) \cap D\} = c_1 > 0.$$

In D_1^- si ragiona allo stesso modo salvo scegliere $E(x)$ traslato di E_1^-, con la stessa scelta dei parametri a ed α. Il procedimento ora illustrato relativamente ad S_1, può ripetersi su ognuna delle superficie $S_j, j = 2, \dots, n$, salvo utilizzare insiemi $E(x)$ traslati di opportuni $E_2^{\pm}$, per le S_j rappresentate nella forma $x_2 = \delta(x_1, x_3)$.

Se infine si pone $a = \min\limits_{1 \leq j \leq n} a_j$, $\alpha = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \alpha$, $c = \min\limits_{1 \leq j \leq n} c_j$ si comprende come ad ogni $x \in D$ si possa associare un $E(x)$ avente come parametri i valori a ed α ora specificati, che sia ottenibile per traslazione da uno dei quattro insiemi E_1^+, E_1^-, E_2^+, E_2^-, e tale che $\text{mis}\{\Sigma(x) \cap D\} \geq c > 0$.

Si osserverà che esistono domini i quali, pur avendo frontiera assai regolare (tale, per esempio, da renderli « normali » per il caso ellittico), non soddisfano all'ipotesi del « tipo di cono », di cui ci stiamo occupando, in conseguenza del fatto che gli insiemi $E(x)$ sono orientati secondo direzioni privilegiate.

Bologna, Università.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. C. BAROZZI, *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici*, Boll. U.M.I., vol. 19 (1964);

[2] S. CAMPANATO, *Caratterizzazione delle tracce di funzioni appartenenti ad una classe di Morrey insieme con le loro derivate prime*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, s. III, vol. XV (1961);

[3] S. CAMPANATO, *Il teorema di immersione di Sobolev per una classe di aperti non dotati della proprietà di cono*, Ricerche di Mat., Vol XI (1962);

[4] S. CAMPANATO, *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey*, Ricerche di Mat., Vol. XII (1963);

[5] S. CAMPANATO, *Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$, (in corso di stampa su « Annali di Matematica pura e applicata »);

[6] A. CAVALLUCCI, *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche relativamente a domini normali*, Boll. U.M.I.. vol. 19 (1964);

[7] B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, *Note on the differentiability of multiple integral*, Fund. Mathematicae, T. XXV (1935);

[8] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Berlin 1965;

[9] B. PINI, *Su un problema tipico relativo a una certa classe di equazioni ipoellittiche*, Atti Acc. Scienze Ist. Bologna, Serie XII, T. I (1964).