ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

IACOPO BARSOTTI

# Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva. Capitolo 5

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 19, nº 4 (1965), p. 481-512

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_4_481_0>

# METODI ANALITICI PER VARIETÀ ABELIANE IN CARATTERISTICA POSITIVA. CAPITOLO 5.

IACOPO BARSOTTI [1]

I primi due capitoli sono pubblicati in questi stessi Annali, vol. 18, 1964, pp. 1-25; il terzo e quarto capitolo nel vol. 19, 1965, pp. 277-330; la numerazione prosegue quella dei precedenti capitoli.

## CAPITOLO 5.

## L'analisi sui bicampi.

41. Vogliamo estendere alcune delle considerazioni del n⁰ 6 di MC. Sia $\{d_{-1}, d_{-2}, \dots; d'_{-1}, d'_{-2}, \dots\}$ un insieme di indeterminate su $Q$, e pongasi $L' = I[\dots, d_{-i}, d'_{-i}, \dots]$, $L'_0 = QL'$; siano $h_i (i = 0, 1, 2, \dots)$, con $h_0 = 1$, i monomi monici nelle $d_{-j}, d'_{-j}$. Si doti $L'_0$ della seguente topologia $L'_0$-lineare numerabile: detto $M_m$ l'ideale generato dai monomi nelle $d_{-i}, d'_{-i}$ di grado $m$, e detto $N_n$ l'ideale generato dalle $d_{-i}, d'_{-i}$ con $i \geq n$, un sistema di intorni dello 0 è dato dagli $M_m \cap N_n$. In tale topologia le successioni $-i \rightarrow d_{-i}$, $-i \rightarrow d'_{-i}$ risultano simultaneamente ammesse; siano $L, L_0$ i completamenti di $L', L'_0$ in tale topologia.

5.1 LEMMA. *In $L_0 \,\overline{\times}\, L_0$ le successioni $-i \rightarrow d_{-i} \,\overline{\times}\, 1$, $-i \rightarrow 1 \,\overline{\times}\, d_{-i}$ sono simultaneamente ammesse. Inoltre, in $L_0$, nessuna combinazione lineare di una infinità numerabile di elementi distinti scelti fra gli $h_i$, a coefficienti in $Q$ non tutti nulli, è 0.*

DIM. Dimostriamo per prima la seconda asserzione. Si chiami $\alpha$ la topologia descritta di $L'_0$, e si chiami $\beta$ la topologia linearmente compatta di $L'_0$; allora $\alpha$ è più fina di $\beta$, e quindi esiste un omomorfismo canonico continuo, di $Q$ algebre, di $L_0$ sul $\beta$-completamento $A$ di $L'_0$. L'asserto essendo vero per $A$, esso dovrà essere vero anche per $L_0$.

---

Pervenuto alla Redazione il 5 Maggio 1965.
(1) Lavoro parzialmente finanziato dai grants AFEOAR 6329 e 65-42.

Per dimostrare la prima asserzione, si consideri un intorno dello 0 in $L_0$; esso sarà del tipo $M_m \cap N_n$, ove ora $M_m$, $N_n$ stanno ad indicare le chiusure in $L_0$ degli ideali così indicati per $L_0'$; allora per sistema di intorni dello 0 in $L_0 \mathbin{\overline{\times}} L_0$ si può prendere l'insieme degli $(M_m \cap N_n) \mathbin{\overline{\times}} L_0 + L_0 \mathbin{\overline{\times}} (M_m \cap N_n)$. Per dimostrare che le due successioni descritte sono simultaneamente ammesse basta dimostrare che esiste un $s$ con la seguente proprietà: ogni monomio di peso $-1$ nelle $d_{-i} \mathbin{\overline{\times}} 1$, $1 \mathbin{\overline{\times}} d_{-i}$, di grado 0 in ogni $1 \mathbin{\overline{\times}} d_{-i}$ con $i \geq n$, e di grado positivo in qualche $d_{-i} \mathbin{\overline{\times}} 1$ con $i \geq s$, ha nelle $d_{-i} \mathbin{\overline{\times}} 1$ grado $\geq m$. Si prenda allora per $s$ il minimo intero $\geq (p-1)^{-1}(m-1) + n - 1$, e si consideri un monomio $f$ del tipo descritto; esisteranno un $h \geq s$, e degli $r_{-h}, \ldots, r_{-2}, s_{-n+1}, \ldots, s_{-2}$, con $r_{-h} \neq 0$, tali che $f = \prod_{ij} (d_{-i} \mathbin{\overline{\times}} 1)^{r_{-i}} (1 \mathbin{\overline{\times}} d_{-j})^{s_{-j}}$; e si deve avere inoltre $\Sigma_i \, r_{-i} p^{-i} + \Sigma_j \, s_{-j} p^{-j} = 1$. Ora, la seconda sommatoria avrà un valore $lp^{-n+1}$, ove $l$ è un intero $\geq 0$ e $< p^{n-1}$; quindi $\Sigma_i \, r_{-i} p^{-i} = 1 - lp^{-n+1}$.

Fra gli $f$ con questi valori di $h$ ed $l$, quello di minimo grado, ossia col minimo valore di $\Sigma_i \, r_{-i}$, si ottiene prendendo $r_{-h} = p$, $r_{-h+1} = r_{-h+2} = \ldots \ldots = r_{-n} = p - 1$, e certi valori per $r_{-n+1}, \ldots, r_{-2}$, che non occorre computare, e che dipendono da $l$; allora tale minimo grado è $\geq 1 + (p-1)(h-n+1) \geq 1 + (p-1)(s-n+1) \geq m$, C. V. D..

I covettori $d = (\ldots, d_{-2}, d_{-1})$ e $d'$ esistono (Cap. 1), e inoltre $d \mathbin{\overline{\times}} 1$, $1 \mathbin{\overline{\times}} d$ sono simultaneamente ammessi. Esiste allora un'unico omomorfismo continuo $\mathbf{P}$ di $L_0$ su $L_0 \mathbin{\overline{\times}} L_0$, come $Q$-algebre, tale che $\mathbf{P}d = d \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} d$, $\mathbf{P}d' = d' \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} d'$, $\mathbf{P}1 = 1 \mathbin{\overline{\times}} 1$; esso è un coprodotto commutativo (n$^0$ 19; l'essere $k$ di caratteristica $p$ nel n$^0$ 19 è inessenziale), ed è un isomorfismo perchè la coidentità $\varepsilon$ è data da $\varepsilon 1 = 1$, $\varepsilon d_{-i} = \varepsilon d'_{-i} = 0$.

Sia $\alpha$ una indeterminata su $L_0$, e in una chiusura algebrica del corpo quoziente di $L_0(\alpha)$ si considerino radici $p^n$-esime di $\alpha$, che indicheremo con $\alpha^{p^{-n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; l'applicazione $d_{-n} \to \alpha^{p^{-n}} d_{-n}$, per ogni $n$, dà un isomorfismo bicontinuo $\lambda$ di $L_0$, e di $L$, su un certo anello topologico; il covettore $(\ldots, \alpha^{p^{-2}} d_{-2}, \alpha^{p^{-1}} d_{-1})$ sarà indicato con $\{\alpha\} d$.

Sia $M$ un $I$-modulo libero finito, con generatori liberi $x_0, \ldots, x_{q-1}$, $y_0, \ldots, y_{q-1}$, e pongasi $M_0 = QM$; si considerino l'$I$-modulo $L \otimes_I M$ e il $Q$-modulo $L_0 \otimes_Q M_0 = L_0 \otimes_I M = L \otimes_I M_0$; il simbolo di prodotto tensoriale verrà omesso, e si scriverà $LM$, $LM_0$; si identifichi $1 \otimes x_i = 1x_i$ con $x_i$, e analogamente per $1y_i$, cosicchè $M \subseteq LM$; se $U$ percórre un sistema di intorni dello 0 in $L_0$, gli $UM$ danno un sistema di intorni dello 0 in $L_0 M$, che definiscono in questo una topologia $Q$-lineare rispetto alla quale esso è completo; gli elementi di $L_0 M$ sono combinazioni lineari infinite, a coefficienti in $Q$, degli $h_i x_j$, $h_i y_j$; ed i coefficienti sono univocamente determinati per 5.1. Siano ora $A$, $A_0$ le algebre polinomiali rispettivamente sull'$I$-modulo $LM$ e sul $Q$-modulo $L_0 M$, e si doti $A_0$ della topologia $A_0$-lineare un cui sistema di intorni dello 0 è dato dagli ideali $(UM_0)\,\Lambda_0$; questa induce in $L_0\,M$ la sua topologia.

Gli elementi di $L_0$ sono applicazioni $Q$-lineari continue di $L_0\,M$ in sè, se si definisce $a\,(bz) = (ab)\,z$ per $a, b \in L_0$ e $z \in M$; esse divengono applicazioni $Q$-lineari continue di $\Lambda_0$ in sè se si definisce, per $x, y \in \Lambda_0$ e $\delta \in L_0$:

$$5.2 \qquad \delta\,(xy) = \mu_{\Lambda_0}\,\mathbf{P}\delta\,(x \,\overline{\times}\, y)\,;$$

qui, $\Lambda_0 \,\overline{\times}\, \Lambda_0$ non significa il prodotto tensoriale completo, ma significa l'algebra polinomiale sul $Q$-modulo $L_0\,M \,\overline{\times}\, L_0\,M$ (questo è prodotto tensoriale completo). La $(\delta, z) \rightarrow \delta z$ di $L_0 \times \Lambda_0$ su $\Lambda_0$ è $Q$-bilineare, ed è continua in $\delta$ per ogni $z \in \Lambda_0$, e continua in $z$ per ogni $\delta \in L_0$. Inoltre $\delta z \in \Lambda$ se $\delta \in L$ e $z \in \Lambda$. Per le componenti fantasma $d^{(-n)}$ si ha in particolare

$$\mathbf{P}d^{(-n)} = d^{(-n)} \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, d^{(-n)}\,,$$

onde $d^{(-n)}\,(xy) = xd^{(-n)}\,y + yd^{(-n)}\,x$; le $d^{(-n)}$ sono cioè derivazioni di $\Lambda_0$. Dalle 5.2 segue anche $d^{(-n)}\,1_{\Lambda_0} = 0$, onde $d_{-n}\,1 = 0$ per 1.10; perciò $h_j\,1 = 0$ se $j \neq 0$. Indicheremo con $L^*$, $L_0^*$ le sottoalgebre chiuse di $L$, $L_0$ ottenute come le $L$, $L_0$, ma da $d_{-2}, d_{-3}, \dots, d'_{-2}, d'_{-3}, \dots$; le analoghe di $\Lambda$, $\Lambda_0$ saranno indicate con $\Lambda^*$, $\Lambda_0^*$; esse sono sottoalgebre di $\Lambda$, $\Lambda_0$.

42. Il risultato che andiamo a dimostrare è l'analogo del 6.2 di MC, ed anzi ne corregge un errore: la 3 del 6.2 di MC è errata (e tale è la sua dimostrazione); diviene vera sotto le ipotesi dell'enunciato che segue; le applicazioni di essa fatte in MC sono tutte sotto tali ipotesi, e quindi l'errore non porta conseguenze.

5.3 Teorema. *Sia $\vartheta$ l'isomorfismo bicontinuo di $L_0^*$ su tutto $L_0$, come $Q$-algebre, dato da $\vartheta 1 = 1$, $\vartheta d_i = d_{i+1}$, $\vartheta d'_i = d'_{i+1}$ $(i < -1)$; si indichi con $\vartheta$ anche l'omorfismo continuo di $\Lambda_0^*$ su $\Lambda_0$, come $Q$-algebre, dato da $\vartheta\,(h_i\,x_j) = (\vartheta h_i)\,(x_j^p)$ e $\vartheta\,(h_i\,y_j) = (\vartheta h_i)\,(y_j^p)$, dove gli $h_i$ hanno i significati del* n⁰ 41, *e sono supposti in $L^*$ (ossia non divisibili nè per $d_{-1}$ nè per $d'_{-1}$); in particolare, $\vartheta x_j = x_j^p$, $\vartheta y_j = y_j^p$. Allora $\vartheta\,\Lambda^* \subseteq \Lambda$, e:*

1. $\vartheta z \equiv z^p\,(\mathrm{mod}\;p\Lambda)$ *se* $z \in \Lambda^*$;
2. $\vartheta\,(\delta z) \equiv (\vartheta\delta)\,(\vartheta z)$ $(\mathrm{mod}\;p\Lambda)$ *se* $\delta \in L^*$ *e* $z \in \Lambda^*$;
3. $(\vartheta h_i)\,(x_j^{p^{r+1}}) = \vartheta\,(h_i\,(x_j^{p^r}))$ *se $r$ è intero non negativo, e* $h_i \in L^*$.

Dim. Lavoreremo sempre con $d$ ed $x$. Stabiliamo anzitutto la

$$5.4 \qquad d_{-i+1}\,(z^p) \equiv (d_{-i}\,z)^p\;\;(\mathrm{mod}\;p\Lambda)\;\; per\;\; z \in \Lambda\;\; ed\;\; i > 1.$$

In $L \overline{\times} \dots \overline{\times} L$ ($p$ volte) si indichi con $d_{-i+1,j}$ l'elemento $1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1 \overline{\times} d_{-i+1} \overline{\times} 1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1$, ove $d_{-i+1}$ è l'$j$-esimo fattore; si ponga $e = \sum_{1}^{p}{}_j (\dots, d_{-2,j}, d_{-1,j})$; allora $d_{-i+1}(y^p) = \mu_A^p \, e_{-i+1}(y \overline{\times} \dots \overline{\times} y)$, per le 5.2. Si ha $e_{-i+1} = \Sigma_j \, c_j h_{j_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} h_{j_p}$, ove $c_j = c_{j'}$ se $j'$ è ottenuta permutando fra loro le componenti di $j = (j_1, \dots, j_p)$; quindi nell'espressione di $d_{-i+1}(y^p)$ sono divisibili per $p$ tutte le somme di termini che si riferiscono ad un $j$ in cui non tutti gli $j_r$ siano uguali, ed alle permutazioni di questo $j$; quanto ai rimanenti termini, la formula $(\pi\, td)^{(i)} = (pd)^{(i)} - pd_i$ del n$^0$ 6 mostra che il loro contributo è proprio $(d_{-i}\, y)^p$, come richiesto.

Passiamo alla dimostrazione delle 1 e 2, del tutto analoga a quella data per il 6.2 di MC. La 2 vale, per ipotesi, se $\delta = h_i \in L^*$ e $z = x_j$, e quindi anche se $\delta \in L^*$ e $z = x_j$; ma allora $\vartheta(\delta h_i x_j) \equiv (\vartheta(\delta h_i))(\vartheta x_j) = (\vartheta\delta)(\vartheta h_i)(\vartheta x_j) \equiv (\vartheta\delta)\,\vartheta(h_i x_j) \pmod{pA}$, che è la 2 per $\delta \in L^*$ e $z = h_i x_j \in A^*$.

Dimostriamo la 1 nel caso generale: la si supponga vera per un certo $z = h_i x_j \in A^*$; poichè per tale $z$ vale la 2, si ha, per $l < -1$, $\vartheta(d_l z) \equiv d_{l+1}\, \vartheta z \equiv d_{l+1}(z^p) \equiv (d_l z)^p \pmod{pA}$ per 5.4; perciò la 1 vale anche per $d_l z$ in luogo di $z$; pertanto la 1, certo valida per $z = x_j$, vale per ogni $z \in A^*$.

Torniamo ai casi ancora scoperti della 2: le 1 e 5.4 danno ora, per $i > 1$ e $z \in A^*$: $(\vartheta d_{-i})(\vartheta z) \equiv d_{-i+1}(z^p) \equiv (d_{-i}\, z)^p \equiv \vartheta(d_{-i}\, z) \pmod{pA}$, che è la 2 per ogni $z \in A^*$ e per $\delta = d_{-i} \in L^*$; supposta allora la 2 valida per $\delta = h_j \in L^*$, ne segue

$$\vartheta(d_{-i}\, h_j\, z) \equiv (\vartheta d_{-i})\, \vartheta(h_j z) \equiv (\vartheta d_{-i})(\vartheta h_j)(\vartheta z) =$$

$$(\vartheta(d_{-i}\, h_j))(\vartheta z) \pmod{pA}, \text{ che è la 2 per } \delta = d_{-i}\, h_j;$$

essa vale quindi per ogni $\delta \in L^*$ e per ogni $y \in A^*$.

Resta da dimostrare la 3; come nella dimostrazione di 5.4, costruiamo $e$, ma con $p^r$ fattori e $p^r$ addendi anzichè $p$; se $h_i$ è un prodotto di certe $d_{-l}$ $(l > 1)$, indichiamo con $h'_i$ lo stesso prodotto delle $e_{-l}$; allora il primo membro della 3 è, con ovvia estensione del significato di $\vartheta$: $\mu_A^{p^r}(\vartheta h'_i)(x_j^p \overline{\times} \dots \overline{\times} x_j^p)$ ($p^r$ fattori); il secondo membro è $\vartheta[\mu_A^{p^r} h'_i (x_j \overline{\times} \dots \overline{\times} x_j)] = \mu_A^{p^r}(\vartheta h'_i)(x_j^p \overline{\times} \dots \overline{\times} x_j^p)$, C. V. D..

43. Indichiamo con $x$ il vettore finito di Witt $(x_0, \dots, x_{q-1})$, e analogamente per $y$, e definiamo un vettore finito $W$ mediante le

5.5 $$W^{(n)} = d_{n-q}\, x^{(n)} \in A_0, \quad per \quad 0 \leq n < q.$$

(Nota: per un vettore finito di Witt, si usano come componenti fantasma quelle legate alle componenti dalla $x^{(i)} = x_0^{p^i} + p x_1^{p^{i-1}} + \dots + p^i x_i$).

Si ha:

5.6 TEOREMA. *Il vettore $W$ ha tutte le componenti $W_n$ in $A$.*

DIM. Si ha $W^{(n)} = \sum_0^n {}_i\, p^i d_{n-q}(x_i^{p^{n-i}})$; se $n < q-1$ la 3 di 5.3 dà allora $\vartheta W^{(n)} = \sum_0^n {}_i\, p^i d_{n-q+1}(x_i^{p^{n-i+1}}) = W^{(n+1)} - p^{n+1} d_{n-q+1} x_{n+1}$, onde

5.7 $$W^{(n+1)} \equiv \vartheta W^{(n)} \pmod{p^{n+1} A}.$$

D'altra parte, per $n = 0$ si ha $W_0 = W^{(0)} = d_{-q}\, x_0 \in A$; poi $W^{(n+1)} - \vartheta W^{(n)} = \sum_0^{n+1} {}_i\, p^i W_i^{p^{n+1-i}} - \sum_0^n {}_i\, p^i \vartheta W_i^{p^{n-i}} = p^{n+1} W_{n+1} + \sum_0^n {}_i\, p^i (W_i^{p^{n+1-i}} - \vartheta W_i^{p^{n-i}})$. Se si suppone che $W_i \in A$ per $i \leq n$ (è vero per $i = 0$), e che quindi, per la 1 di 5.3, $\vartheta W_i \equiv W_i^p \pmod{pA}$, si avrà anche $p^i (W_i^{p^{n+1-i}} - \vartheta W_i^{p^{n-i}}) \equiv 0 \pmod{p^{n+1} A}$ per $i \leq n$, e la precedente darà quindi $W^{(n+1)} - \vartheta W^{(n)} - p^{n+1} W_{n+1} \equiv 0 \pmod{p^{n+1} A}$. Di qui, e da 5.7, si ottiene appunto $W_{n+1} \in A$, C. V. D..

Le $W_n$ sono combinazioni lineari, generalmente infinite, a coefficienti interi, ben determinati per 5.1, di monomi monici, di grado superiormente limitato, nelle $h_i x_j$; in realtà, $W_n$ contiene solo le $x_i$ con $i \leq n$ e le $d_j$ con $j \leq n - q$. Per maggiore precisione, si indicherà $W_n$ con $W_{q,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots ; x_0, \dots, x_{q-1})$; è allora utile notare subito le seguenti proprietà, tutte dedotte da 5.5:

5.8 $$W_{q+1,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots ; x_0, \dots, x_q) = \\ = W_{q,n}(d_{-2}, d_{-3}, \dots ; x_0, \dots, x_{q-1}) \quad se \quad n < q;$$

5.9 $$W_{q+1,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots ; 0, x_0, \dots, x_{q-1}) = \\ = W_{q,n-1}(d_{-1}, d_{-2}, \dots ; x_0, \dots, x_{q-1}) \quad se \quad n > 0, \\ ed = 0 \quad se \quad n = 0.$$

E dalle 3, 1 di 5.3:

5.10 $$W_{q,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots ; x_0^p, \dots, x_{q-1}^p) \equiv \\ \equiv [W_{q,n}(d_{-2}, d_{-3}, \dots ; x_0, \dots, x_{q-1})]^p \pmod{pA}.$$

Poi:

5.11 LEMMA. *Si attribuisca peso $p^i$ a $d_i$ ed $x_i$; e ad un monomio nelle $h_i x_j$ si attribuisca il peso nelle $d_i$ che avrebbe lo stesso monomio nelle $h_i$, e il peso nelle $x_j$ che avrebbe lo stesso monomio nelle $x_j$. Allora $W_{q,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots; x_0, \dots, x_{q-1})$ è isobarico separatamente nelle $d_i$ e nelle $x_j$, ed ha nelle $d_i$ peso $p^{n-q}$, e nelle $x_j$ peso $p^n$. Inoltre $W_{q,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots; x_0, \dots, x_{q-1}) = d_{-1} x_{q-1} +$ $+$ monomi nelle $h_i x_j$ con $j < q-1$.*

Per i risultati che seguono è opportuno indicare il vettore $W$ del 5.5 con $d * x$; si indicherà poi con $A$ l'anello dei vettori finiti di Witt, a $q$ componenti, con componenti in $A$; si ha allora facilmente:

5.12 $$\begin{cases} d * (x + y) = d * x + d * y \\ d * (\{\alpha\} x) = \{\alpha\} (d * x) \\ (\{\alpha\} d) * x = \{\alpha^{p^{-q}}\} (d * x). \end{cases}$$

Se poi $t^i d *$ significa $(t^i d) *$, si ha anche, da 5.5 e 1.11:

5.13 $$(d + d') * x = \Phi(d *, td *, t^2 d *, \dots; d' *, td' *, t^2 d' *, \dots) x,$$

*da interpretare come*

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_i [\varphi_i (d *, td *, \dots; d' *, td' *, \dots) x],$$

*il limite dovendo essere preso sulle componenti;*

e analogamente:

5.14 $$d * (xy) = \mu \Phi (d * \otimes \iota, td * \otimes \iota, \dots; \iota \otimes d *, \iota \otimes td *, \dots)(x \otimes y),$$

*con interpretazione simile a quella del* 5.13, *$\iota$ e $\mu$ essendo quelli dell'anello A.*

44. Le $W_{q,n}(d_{-1}, d_{-2}, \dots; x_0, \dots, x_{q-1})$ sono definite (per 5.6), e soddisfano le 5.8, ..., 5.14 non appena:

1. Le $d_i$, $d'_i$ appartengono ad una $k$-algebra $D$; le $x_j$, $y_j$ ad una $k$-algebra $R$; $\alpha$ appartiene a $k$;

2. $D$ è completa rispetto ad una topologia $D$ lineare, tale che per ogni intorno $U$ dello 0 siano in $U$ i monomi nelle $d_{-i}$ e $d'_{-i}$ di grado elevato, e divisibili per qualche $d_{-i}$ o $d'_{-i}$ con $i$ elevato;

3. Esistono applicazioni $k$ bilineari $(d, x) \to dx$ di $D \times R$ su $R$;

4. $R$ è dotata di una topologia $R$-lineare, e per ogni $x \in R$ la $d \to dx$, quando $d$ percorre $D$, è continua;

5. $d_{-i}(xy) = \mu_R \Phi (d_{-i} \times 1, d_{-i-1} \times 1, \dots; 1 \times d_{-i}, 1 \times d_{-i-1}, \dots)(x \times y)$, e analogamente per $d'_{-i}$, quando $x$, $y \in R$.

Sia allora $\mathcal{R}$ un bicampo su $k$, $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{R}}$ il suo duale, e sia $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$; sia $x \in \operatorname{biv} \mathcal{R}$ un bivettore speciale a componenti in $\mathcal{R}^0$, e sia per esempio $x_i = 0$ per $i < n$. Dati un intero $m \leq n$, ed un intero $q > 0$, si prenda per $D$ il sottoipercampo di $\mathcal{D}$ generato da $d_{m+q-1}$, $d_{m+q-2}$, ... (quando occorrano anche $d'$ ed $y$, si aggiungeranno le $d'_{m+q-1}, \ldots$); sia invece $R$ la minima sottoalgebra di $\mathcal{R}$ contenente tutti i $\delta x_m$, $\delta x_{m+1}, \ldots, \delta x_{m+q-1}$, per $\delta \in D$. Le condizioni $1, \ldots, 5$ elencate sono soddisfatte, e si può quindi porre, per $m \leq i < m + q$: $w_{m,q,i}(d\,;\,x) = W_{q,\,i-m}(d_{m+q-1}, d_{m+q-2}, \ldots; x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+q-1})$. Si ha subito $w_{m,q,i} = 0$ se $i < n$; poi, per 5.8, $w_{m,q+1,i} = w_{m,q,i}$ se $i < m + q$; quindi al crescere di $q$ le $w_{m,q,i}$ hanno significato, e restano indipendenti da $q$, quando $m$ ed $i$ siano fissati; il loro comune valore sarà indicato con $w_{m,i}(d\,;\,x)$. Infine, il 5.9 comporta che le $w_{m,i}$ sono anche indipendenti da $m$, quando esistono; perciò il valore di $w_{m,i}$ per $m$ elevato può essere indicato con $w_i(d\,;\,x)$; ed il bivettore $(\ldots, w_{-1}; w_0, w_1, \ldots)$ (si ricordi che $w_i = 0$ per $i < n$) sarà indicato con $d * x$. Le 5.12 danno

5.15
$$\begin{cases} d * (x + y) = d * x + d * y, \\ d * (\{\alpha\}\, x) = \{\alpha\}\,(d * x), \\ (\{\alpha\}\, d) * x = \{\alpha\}\,(d * x), \end{cases}$$

ove ora $\{\alpha\}$, per $\alpha \in k$, ha il significato del n° 9.

Dalle prime due del 5.15 segue $d * ax = a\,(d * x)$ se $a \in K$ è tale che $a_n = 0$ per $n$ elevato; e quindi

5.16
$$d * ax = a\,(d * x) \qquad per \qquad a \in K'.$$

La 5.13 comporta

5.17
$$(d + d') * x = \sum_{0}^{\infty}{}_i\, \varphi_i(d *, td *, \ldots; d' *, td' *, \ldots)\, x.$$

La costruzione stessa di $d * x$ dà

5.18
$$t\,(d * x) = td * tx\,;$$

si hanno inoltre le relazioni seguenti:

5.19
$$\begin{cases} d * \pi\, x = \pi\,(td * x) \\ d * t_{\mathcal{V}}\, x = t_{\mathcal{V}}\,(\pi\, d * x) \\ \mathbf{P}\,(d * x) = (1 \mathbin{\overline{\times}} d) * \mathbf{P}x = (d \mathbin{\overline{\times}} 1) * \mathbf{P}x. \end{cases}$$

DIM. Per la prima: $d * \pi x = d * t^{-1} px = t^{-1}(td * px)$ per 5.18; questa a sua volta eguaglia $t^{-1} p(td * x) = \pi(td * x)$ per la prima 5.15; un altro modo di dimostrare la prima relazione consiste nel fare uso del 5.10; ed un altro modo ancora consiste nell'usare la 2 del 4.27.

La seconda del 5.19 discende dalla 3 del 4.27; l'ultima discende dalla 1 del 4.28, C. V. D..

La 5.14 dà infine:

$$5.20 \qquad d * (xy) = \sum_0^{\infty}{}_i\, \mu\varphi_i (d * \otimes \iota, td * \otimes \iota, \ldots ; \iota \otimes d *, \iota \otimes td *, \ldots)\ (x \,\overline{\times}\, y).$$

45. La prima del 5.15, e la 5.16, mostrano che per $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ la $x \longrightarrow \longrightarrow d * x$ è un'applicazione $K'$-lineare di $Q$ vect $\mathcal{R}^0$ su se stesso; intendiamo dimostrare che è continua; a tale scopo occorre raffinare il 4.27.

5.21 LEMMA. *Suppongasi $\mathcal{R}_t = k$, e sia $\mathcal{R}$ legato all'ipercampo $R$ da $\tau$; pongasi, per $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, $R_i = \pi^{-i} \tau R$; sia $w$ la valutazione di $\mathcal{R}$ che ne dà la topologia, normalizzata in modo che la valutazione indotta da $w$ in $R_0$ abbia $I$ come gruppo valutante. Sia $d$ elemento canonico di $\mathcal{D}^0 = \tilde{\mathcal{R}}^0$, e sia $l$ il minimo intero tale che $dR_{-l} = 0$; se allora $y \in \mathcal{R}$, si ha $w(dy) \geq \geq w(y) - p^l$.*

DIM. Intanto $l$ esiste (se $d \neq 0$; se $d = 0$ è tutto banale) perchè $d \in \mathcal{D}^0$; basta poi dimostrare l'asserto quando $y \in \mathcal{R}^0$, in quanto la $y \longrightarrow dy$ è continua per 4.25, di nuovo perchè $d \in \mathcal{D}^0$. Pongasi allora $S = \pi^l R_0$, e suppongasi che $y \in S' = \pi^{-h} S$; se $h \leq 0$, è $dy = 0$, e l'asserto è vero; supporremo quindi $h \geq 0$, e daremo la dimostrazione per induzione su $h$. Se $w(y) = \alpha$, $\alpha$ è intanto della forma $p^{l-h}\beta$, con $\beta$ intero; inoltre $y$ è combinazione lineare, a coefficienti in $S'$, di prodotti di elementi di un sistema regolare $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di parametri di $S'$, ogni prodotto constando di $\beta$ fattori; basta dimostrare che il $w$-valore di ogni $d(z_1 \ldots z_{\beta+1})$, ove gli $z_1, \ldots, z_\beta$ sono scelti fra gli $x_j$, mentre $z_{\beta+1} \in S'$, è $\geq \alpha - p^l = p^{l-h}(\beta - p^h)$. Essendo $d$ canonico, per la 2 di 4.28 si ha che $d(z_1 \ldots z_{\beta+1}) = z_2 \ldots z_{\beta+1} dz_1 + z_1 z_3 \ldots z_{\beta+1} dz_2 + \ldots + z_1 \ldots z_\beta dz_{\beta+1} +$ (*elementi del tipo* $D_1 z_1 \ldots D_{\beta+1} z_{\beta+1}$), ove ogni $D_i$ è un monomio nelle $td, \ldots, t^{h-1} d$ a coefficienti in $C_p$, e ove la somma dei pesi delle $D_j$, quando a $t^i d$ si dia peso $p^{-i}$, è 1. Ora, per l'induzione è

$$w(D_1 z_1 \ldots D_{\beta+1} z_{\beta+1}) \geq w(z_1) - \sum_1^h{}_i\, p^{l-i} \text{ (esponente di } t^i d \text{ in } D_1) +$$

$$\ldots + w(z_{\beta+1}) - \sum_1^h{}_i\, p^{l-i} \text{ (esponente di } t^i d \text{ in } D_{\beta+1}) = w(z_1 \ldots z_{\beta+1}) - p^l \geq \alpha - p^l.$$

Poi, per esempio,

$$w(z_2 \dots z_{\beta+1}\, dz_1) = w(z_2) + \dots + w(z_{\beta+1}) + w(dz_1) \geq w(z_2) + \dots + w(z_\beta) =$$
$$(\beta - 1)\, p^{l-h} = \alpha - p^{l-h} \geq \alpha - p^l,$$

e

$$w(z_1 \dots z_\beta\, dz_{\beta+1}) \geq w(z_1) + \dots + w(z_\beta) = \alpha > \alpha - p^l, \qquad \text{C. V. D..}$$

Passiamo a dimostrare che per $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ la $x \longrightarrow d * x$ è continua quando $x$ percorre $Q$ vect $\mathcal{R}^0$; useremo in $\mathcal{R}$ gli intorni $U^n(\alpha)$ dello 0 introdotti nel n⁰ 39, ed in Biv $\mathcal{R}$ gli $U_m^n(\alpha)$ che se ne deducono secondo la regola data nel n⁰ 9. Si decomponga $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R} = \mathcal{S} \overline{\times} \mathcal{I}$, ove $\mathcal{S} = \mathcal{R}_t$ è separabile ed $\mathcal{I} = \mathcal{R}_r \overline{\times} \mathcal{R}_\pi$ è inseparabile; se $\mathcal{R}$ è legato da immersione all'ipercampo $R_0$, si scriva analogamente $R_0 = S_0 \overline{\times} I_0$, e si ponga $S_i = t^{-i} S_0$, $I_i = \pi^{-i} I_0$; si chiamino $U^n$, $U(\alpha)$ gli analoghi di $U^n(\infty)$, $U^\infty(\alpha)$ in $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$ rispettivamente, cosicchè $U^n(\alpha) = U^n \overline{\times} \mathcal{I} + \mathcal{S} \overline{\times} U(\alpha)$. Dato $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, siano $m$, $l$ rispettivamente il minimo intero tale che $d_0 S_{-m} = 0$, e il minimo intero tale che $d_0 I_{-l} = 0$; poichè $d_i = t^{-i} d_0$ per 4.31, la 2 del 4.27 dà che $d_i S_{-m} = d_i I_{-l-i} = 0$ per $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$; da notare che, essendo $d_i$ canonico, la $d_i S_{-m} = 0$ comporta anche che $d_i$ è $S_{-m}$-lineare. Di conseguenza, è intanto $d_i U^h \subseteq U^h$ per $h \geq m$; ed allora, per 5.21, $d_i U^h(\alpha) \subseteq U^h(\alpha - p^{l+i})$.

Sia $x \in Q$ vect $\mathcal{R}^0$, e per esempio $x \in U_n^h(\alpha)$ $(h \geq m)$, ossia $x_i \in U^h(p^i \alpha)$ per $i \leq n$; se si attribuisce peso $p^i$ a $d_i$ ed ad $x_i$, per 5.11 l'elemento $(d * x)_i$ è combinazione lineare infinita, a coefficienti in $C_p$, di monomi del tipo

$$M = (d_{j_1}^{s_1} x_{i_1})^{r_1} \dots (d_{j_q}^{s_q} x_{i_q})^{r_q},$$

ove $\Sigma_\nu\, r_\nu\, s_\nu\, p^{j_\nu} = \Sigma_\nu\, r_\nu\, p^{i_\nu} = p^i$. Ora, per quanto visto sopra, è

$$(d_{j_\nu}^{s_\nu} x_{i_\nu})^{r_\nu} \in [U^h(p^{i_\nu} \alpha - s_\nu\, p^{l+j_\nu})]^{r_\nu} \subseteq U^h(r_\nu\, p^{i_\nu} \alpha - r_\nu\, s_\nu\, p^{l+j_\nu}),$$

onde $M \in U^h(p^i \alpha - p^{i+l})$. Ciò valendo per $i < n$, si conclude che $d * x \in U_n^h(\alpha - p^l)$ ogniqualvolta $x \in U_n^h(\alpha)$; e ciò per ogni $h \geq m$. È quanto dire che la $x \longrightarrow d * x$ è continua in $x$; ma allora, per il 2.1, la $x \longrightarrow d * x$ è estensibile in modo unico ad un'applicazione $K'$-lineare continua di Biv $\mathcal{R}$ in sè; vale perciò il:

5.22 Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, e sia $d \in \mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$; la $x \longrightarrow d * x$ è un'applicazione $K'$-lineare continua di* Biv $\mathcal{R}$ *in sè; ed anzi, nelle notazioni precedenti, si ha: se $d_0 S_{-m} = d_0 I_{-l} = 0$, allora $d * U_n^h(\alpha) \subseteq U_n^h(\alpha - p^l)$ per ogni $n$ intero, ogni $h$ intero $\geq m$, ed ogni $\alpha$ reale non negativo.*

46. Il 5.22 può essere rinforzato:

5.23 COROLLARIO. *Sia* $\mathcal{R}$ *un bicampo; allora l'applicazione* $(d * x) \rightarrow d * x$ *di* $\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}^0 \times \mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$ *su* $\mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$ *è continua.*

DIM. Dati $d \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ (ove $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{R}}$), e $x \in \mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$, si tratta di dimostrare che per ogni intorno $A$ dello 0 in $\mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$ esistono un intorno $B$ dello 0 in $\mathcal{C}'\mathcal{D}^0$, ed uno $C$ dello 0 in $\mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$, tali che $(d + d') * (x + x') - d * x \in A$ per $d' \in B$ e $x' \in C$. Ora, un sistema di intorni dello 0 in $\mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ è dato dai $V_l^m$ formati dai $d$ tali che $d_0(S_{-m} \overline{\times} I_{-l}) = 0$ (notazioni come nel n⁰ 45); ed allora il 5.22 dice che $V_l^m * U_n^h(\alpha) \subseteq U_n^h(\alpha - p^l)$ per $h \geq m$.

Sia quindi dato $A$, e suppongasi che $d \in B' = V_l^m$; intanto esiste un $C$ tale che $B' * C \subseteq A$; in particolare, $(d + d') * x' \in A$ per $d' \in B'$ ed $x' \in C$. Basta ora trovare un $B \subseteq B'$ tale che $(d + d') * x - d * x \in A$ per $d' \in B$. Se $x \in Q$ vect $\mathcal{R}^0$, vale la 5.17; essa, e l'1.11, danno che $(d + d') * x - d * x$ è somma di (infiniti) termini del tipo $\delta(t^i d' * x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, con i $\delta$ monomi nelle $t^j d *$, $t^j d' *$. Ed allora, fissato $n$, per $q$ ed $s$ elevati tutte le componenti di posto $\leq n$ in ciascuno di questi termini si annullano quando $d' \in B = V_s^q$; è quanto dire che $(d + d') * x - d * x \in U_n^h(\alpha)$ per $h, \alpha$ arbitrari; in particolare, $\in A$, come richiesto.

Sia infine $x \in \mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$, e si scelga $y \in Q$ vect $\mathcal{R}^0$ tale che $x - y \in C$ (cfr. 2.1); si trovi poi $B$ come sopra, in modo che $(d + d') * y - d * y \in A$ quando $d' \in B$, e quindi $(d + d') * (y + x') - d * y \in A$ quando $d' \in B$ ed $x' \in C$. Ma allora sono in $A$ tanto $(d + d') * (y + (x - y + x')) - d * y$, quanto $d * (y + (x - y)) - d * y$, ed è pertanto in $A$ la loro differenza, che è appunto $(d + d') * (x + x') - d * x$, C. V. D..

5.24 COROLLARIO. *Sia* $\mathcal{R}$ *un bicampo; allora le* 5.17, 5.20 *sono valide per* $d, d' \in \mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ *e per* $x, y \in \mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$.

DIM. Sia $x \in \mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$, e sia $A$ un intorno dello 0 in $\mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$; si dia peso $p^{-i}$ a $t^i d *$ e $t^i d' *$; allora il $\varphi_i$ che compare in 5.17 ha peso $p^{-i}$. Per il 5.22, l'avere $\varphi_i$ peso $p^{-i}$ comporta che esiste un intorno $B$ dello 0 in $\mathrm{Biv}\,\mathcal{R}$ tale che $\varphi_i B \subseteq A$ per ogni $i$. Sia allora $x' \in Q$ vect $\mathcal{R}^0$ tale che $x - x' \in B$; si ha $\varphi_i x = \varphi_i x' + \varphi_i(x - x') \equiv \varphi_i x' \pmod{A}$; ma la convergenza del secondo membro di 5.17, con $x'$ che sostituisce $x$, comporta che $\varphi_i x' \in A$ per $i$ elevato; quindi $\varphi_i x \in A$ per $i$ elevato, e ciò significa che il secondo membro del 5.17 esiste, cioè converge. Esso è poi funzione continua di $x$ in quanto, nelle notazioni precedenti, se $x \in B$ si ha $x' \in B$, $\varphi_i x' \in A$ per ogni $i$, onde $\varphi_i x \in A$ per ogni $i$. Poichè anche il primo membro di 5.17 è funzione continua di $x$, ed ambo i membri sono $K'$-lineari, si conclude che la 5.17 vale per ogni $x \in \mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$.

Passiamo alla 5.20; il $\varphi_i(\dots;\dots)(x \,\overline{\times}\, y)$ del secondo membro di 5.20 è combinazione lineare infinita di prodotti del tipo $\varphi_i' x \,\overline{\times}\, \varphi_j'' y$; dato $A$ come prima, è possibile trovare un $A'$ tale che $A' A' \subseteq A$ (per 2.2), e anche tale che $(\varphi_i' x) A' \subseteq A$, $(\varphi_i'' y) A' \subseteq A$ per ogni $i$ (per 5.22, 2.6, 2.2). È poi possibile trovare un intorno $B$ tale che $\varphi_i' B \subseteq A'$ e $\varphi_i'' B \subseteq A'$ per ogni $i$; scelgansi $x', y' \in Q \text{ vect } \mathcal{R}^0$ in modo che $x - x'$ ed $y - y'$ appartengano a $B$. Allora, come prima, $\varphi_i' x \equiv \varphi_i' x' \pmod{A''}$, e analogamente $\varphi_i'' y \equiv \varphi_i'' y' \pmod{A'}$; pertanto $(\varphi_i' x)(\varphi_i'' y) \equiv (\varphi_i' x')(\varphi_i'' y') \pmod{A}$ per ogni $i$. Come sopra, la convergenza del secondo membro di 5.20, con $x', y'$ in luogo di $x$, $y$, mostra che per $i$ elevato è $(\varphi_i' x')(\varphi_i'' y') \in A$, e ciò comporta che lo stesso vale per $(\varphi_i' x)(\varphi_i'' y)$. Il resto della dimostrazione è analogo alla precedente, C.V.D..

47. Sia $E$ la $K'$-algebra (unitaria, non commutativa) degli endomorfismi del $K'$-modulo $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, e si ponga in $E$ la topologia $\mathcal{V}$ della convergenza semplice come insieme di funzioni su $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, ossia: un sistema di intorni $\mathcal{V}'$ dello 0 per $\mathcal{V}$ è definito da: $V \in \mathcal{V}'$ se e solo se esistono un intorno $A$ dello 0 in $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, e un sottoinsieme finito non vuoto $S$ di $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, tali che $V$ consista dei $\delta$ per i quali $\delta S \subseteq A$; la $E$, con tale topologia, risulta completa. I 5.24 e 5.17 asseriscono allora che

5.25 $$(d + d')* = \Phi(d*, td*, \dots; d'*, td'*, \dots).$$

Sia $E \,\overline{\times}\, E$ la chiusura di $E \otimes E$ nell'algebra degli endomorfismi del $K'$-modulo $\mathrm{Biv}(\mathcal{R} \,\overline{\times}\, \mathcal{R}) \supseteq \mathrm{Biv}\, \mathcal{R} \otimes \mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$; allora i 5.20, 5.24 asseriscono che l'elemento

5.26 $$\mathbf{P}(d*) = \Phi(d* \,\overline{\times}\, 1, \quad td* \,\overline{\times}\, 1, \dots; 1 \,\overline{\times}\, d*, \quad 1 \,\overline{\times}\, td*, \dots)$$

esiste in $E \,\overline{\times}\, E$, e che inoltre

5.27 $$d* xy = \mu \mathbf{P}(d*)(x \otimes y), \text{ ove il } \mu \text{ è quello di } \mathrm{Biv}\, \mathcal{R}.$$

Sia $x \in \mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$; diremo che $x$ è *differenziabile* se per ogni intorno $A$ dello 0 in $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, per ogni insieme finito $\{d_1, \dots, d_r\}$ di elementi di $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, con $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{R}}$, e per ogni $q \in Q'$ (cfr. n$^0$ 9), esiste un $n$ tale che $\delta x \in A$ per ogni monomio ammesso $\delta$ nelle $\pi^i t^j d_l *$ di grado $\geq n$ e peso $\leq q$ (a $\pi^i t^j d_l *$ si attribuisce peso $p^{-j}$); in quanto precede, gli esponenti di $\pi$ e $t$ prendono i valori 0, 1, 2, ..., indipendenti l'uno dall'altro; si noti che $\pi d* = d^p *$ è in generale diverso da $(d*)^p$. Consideriamo l'insieme $\Delta = \Delta(\mathcal{R})$ degli elementi differenziabili di Biv $\mathcal{R}$; esso è chiaramente un $K'$-modulo. Sia poi $D^*$ l'algebra su $K'$ generata da $1 = \iota_E$ e da tutti i $d*$ quando $d$ percorre $\mathcal{C}'\mathcal{D}^0$, e sia $\zeta$ l'applicazione di restrizione di $E$ a $\Delta$; è ovviamente $d^*\Delta \subseteq \Delta$ per $d^* \in D^*$; quindi la restrizione di $\zeta$ a $D^*$ è un omomorfismo di algebre di $D^*$ sull'algebra $E^*$ degli endomorfismi del $K'$-modulo $\Delta$; la $E^*$ verrà dotata della topologia $\mathcal{V}_\Delta$ della convergenza semplice come insieme di funzioni definite su $\Delta$; la restrizione di $\zeta$ a $D^*$ è $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_\Delta)$ continua, cosicchè vale l'analoga della 5.25:

5.28 $$\zeta(d + d')* = \Phi(\zeta d*, \zeta t d*, \ldots; \zeta d'*, \zeta t d'*, \ldots);$$

poi:

5.29 TEOREMA. *Il prodotto di due elementi differenziabili $x$, $y$ è differenziabile, e si ha, per $d \in \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}^0$: $\zeta d * xy = \mu \mathbf{P}(\zeta d *)(x \otimes y)$, ove $\mathbf{P}(\zeta d *) = \zeta \mathbf{P}(d *) = \Phi(\zeta d * \overline{\times} 1, \ldots; 1 \overline{\times} \zeta d *, \ldots)$. Se poi $x$ è differenziabile, tali sono $\pi x$, $\pi^{-1} x$, $tx$, $t^{-1} x$, $t_{\mathcal{R}} x$, $t_{\mathcal{R}}^{-1} x$, $p\iota x$, $(p\iota)^{-1} x$, $\mathbf{P} x$.*

DIM. Siano $x$, $y$ elementi di $\Delta$; si diano $d_1, \ldots, d_r$, $A = U_h$ ($U$ intorno dello 0 in $\mathcal{R}$, ed $h > 0$), $q$ come nella definizione di elemento differenziabile, e si cerchi un $n$ tale che siano in $U_h$ gli elementi $\delta x$, $\delta y$ quando $\delta$ è un monomio ammesso di grado $\geq n$ e peso $\leq q$. Per 2.6 e 5.22, se $s$ è abbastanza piccolo sono in $U_s$ tutti i $\delta x$, $\delta y$ quando $\delta$ varia fra i monomi ammessi nelle $\pi^i t^j d_l *$, di peso $\leq q$ e grado $< n$. Si cerchi infine un $m > n$ tale che siano in $U_{h-s-1}$ tutti i $\delta x$, $\delta y$ quando $\delta$ varia fra i monomi ammessi di peso $\leq q$ e grado $\geq m$.

Sia ora $\delta$ monomio ammesso di peso $\leq q$ e grado $\geq m + n - 1$; da 5.27, 5.26, 1.1 si vede che $\delta(xy)$ è combinazione lineare infinita, a coefficienti interi, di prodotti $(\gamma x)(\beta y)$, ove $\gamma$ e $\beta$ sono monomi ammessi di peso $\leq q$, e ove o $\gamma$ e $\beta$ hanno grado $\geq n$, ovvero l'uno ha grado $< n$ e l'altro $\geq m$; nel primo caso, per 2.2 $(\gamma x)(\beta y)$ è elemento di $U_{2h+1} \subseteq U_h$, e nel secondo caso è elemento di $U_s U_{h-s-1} \subseteq U_h$, come richiesto.

Per dimostrare le ultime asserzioni si proceda come segue: i $\pi$ e $\pi^{-1}$ sono semiisomorfismi di $\mathcal{R}$ e di Biv $\mathcal{R}$, e la prima fra le 5.19 mostra appunto che $\pi x$ e $\pi^{-1} x$ sono differenziabili. Lo stesso vale per $t_{\mathcal{R}}$ e $t_{\mathcal{R}}^{-1}$, e quindi per $p\iota$ e $(p\iota)^{-1}$. Quanto a $t$ e $t^{-1}$ la 5.18, che per continuità è valida per ogni $d$ ed ogni $x$, dà $d * tx = t(t^{-1} d * x)$, o anche $d * t^{-1} x = t^{-1}(td * x)$, che di nuovo mostrano che $tx$ e $t^{-1} x$ sono differenziabili. L'asserzione riguardante $\mathbf{P} x$ discende dall'essere $\mathbf{P}$ un isomorfismo di iperalgebre.

Infine, la seconda asserzione dell'enunciato discende dalla prima, dalla continuità di $\zeta$, e dalle 5.26, 5.27, C. V. D..

Il 5.29 assicura fra l'altro che $\Delta$ è una $K'$-algebra.

Ogni insieme finito di successioni del tipo $i \longrightarrow \zeta\, \pi^{s_{ji}} t^i d_j *$ ($i = 0, 1, \dots$; $s_{ji} \geq 0$), con $d_j \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$, è costituito di successioni simultaneamente ammesse; per $d \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ esiste perciò, nel completamento di $\zeta D^*$ (ossia nella chiusura di $\zeta D^*$ in $E^*$, secondo la topologia $\mathcal{V}_\Delta$), l'elemento

5.30 $$d\,\cdot = \zeta d * + p^{-1}(\zeta t d *)^p + p^{-2}(\zeta t^2 d *)^{p^2} + \dots;$$

la serie $\sum_{0}^{\infty}{}_i\, p^{-i}(\zeta t^i d *)^{p^i} x$, per $x \in \Delta$, converge ad un elemento della chiusura di $\Delta$ in $\operatorname{Biv}\mathcal{R}$; tale elemento sarà indicato con $d \cdot x$; l'1.11, unito ai 5.28, 5.29, dà

5.31 $$\begin{cases} (d + d')\cdot = d\,\cdot + d'\,\cdot \\ \mathbf{P}(d\,\cdot) = (d\,\cdot) \otimes 1 + 1 \otimes (d\,\cdot) = (\mathbf{P}\,d)\,\cdot \\ \mu\,\mathbf{P}(d\,\cdot)(x \otimes y) = d \cdot xy. \end{cases}$$

Si hanno anche le formule seguenti:

5.32 $$\begin{cases} d \cdot \pi x = \pi(td \cdot x) \\ d \cdot t_{\mathcal{R}}\, x = t_{\mathcal{R}}(\pi d \cdot x) \\ \mathbf{P}(d \cdot x) = (1 \,\overline{\times}\, d) \cdot \mathbf{P}\,x = (d \,\overline{\times}\, 1) \cdot \mathbf{P}\,x \\ d \cdot tx = t(t^{-1} d \cdot x) \\ \pi d \cdot x = \pi(d \cdot tx). \end{cases}$$

DIM. Le prime tre discendono da 5.19; la quarta da 5.18. Per l'ultima: $\pi d \cdot x = (t^{-1} p d) \cdot x = t^{-1}(pd \cdot tx)$ per la quarta; questa uguaglia $t^{-1} p (d \cdot tx) = \pi(d \cdot tx)$ per la prima 5.31, C. V. D..

48. Dalla prima 5.31 segue che l'applicazione $d \longrightarrow d\,\cdot$, quando $d$ percorre $\mathcal{C}'\mathcal{D}^0$, è un omomorfismo dell'$I$-modulo $\mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ su un $I$-modulo di derivazioni della $K'$-algebra $\Delta$ sulla propria chiusura. Se $m/n$ è un qualsiasi numero razionale, si ha anche $((m/n)\,d)\,\cdot = m\,[(n^{-1} d)\,\cdot]$; posto $n^{-1} d = d'$, è poi $d = nd'$, onde $d\,\cdot = n\,(d'\,\cdot)$, e infine $((m/n\, d)\,\cdot = (m/n)\,(d\,\cdot)$. Quindi l'applicazione $d \longrightarrow d\,\cdot$ è anche un omomorfismo di $Q$-moduli. Vogliamo dimostrare che tale applicazione è addirittura un omomorfismo di $K'$-moduli, ossia che

5.33 $$(ad)\,\cdot = a\,(d\,\cdot) \quad \textit{se} \quad a \in K'.$$

Premettiamo il

5.34 LEMMA. *Sia $d \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ ed $x \in \Delta$; sia $m \longrightarrow b_{(m)}$ una successione di elementi di $K$; allora* $\lim_{m\to\infty} (p^m b_{(m)} d) \cdot x = 0$.

DIM. Dimostriamo che: per ogni intorno $U$ dello 0 in $\mathcal{R}$ esiste un intero $n$ tale che siano in $U_n$ tutti i $(bd)\cdot x$ quando $b$ percorre $K$. Scritto $b = \{b_0\} + p\,\{b_1^{p^{-1}}\} + \dots$, si ha intanto, per 5.23, $t^i(bd) * x = (b^{\pi^{-i}}\, t^i d) * x = \lim_{r\to\infty} [\{b_0^{p^{-i}}\}\, t^i d + p\,\{b_1^{p^{-i-1}}\}\, t^i d + \dots + p^r\,\{b_r^{p^{-i-r}}\}\, t^i d] * x$. Questa relazione, con la terza relazione del 5.15 e con la 5.25, comporta che $t^i(bd)*$ è somma di una serie convergente di prodotti, di peso $p^{-i}$, di elementi del tipo $\{a\}\,(\pi^j t^l d\, *)$, con $a \in k$; quindi $(bd)\cdot$ è somma di una serie di monomi ammessi di peso 1 in argomenti del tipo $\{a\}\,\zeta\,(\pi^j t^l d\,*)$. Fissato allora un $h$ qualsiasi, la differenziabilità di $x$ assicura che esiste un intero $e$ tale che siano in $U_h$ tutti i $\beta x$ quando $\beta$ è monomio ammesso di peso 1 e grado $\geq e$ nei $\pi^j t^l d\,*$, e quindi anche negli $\{a_{jl}\}\,(\pi^j t^l d\,*)$, ove $a_{jl} \in k$; d'altra parte, e per 5.23, 2.6, gli analoghi $\beta x$ quando $\beta$ ha grado $< e$ appartengono certamente ad $U_s$ per $s$ sufficientemente piccolo; quindi tutti i $\beta x$ appartengono ad $U_n$ se $n = \min(h, s)$. Di qui segue appunto che $(bd)\cdot x \in U_n$ per ogni $b \in K$, come richiesto.

Per dimostrare l'asserzione dell'enunciato, si fissi un $U_r$, e si cerchi un $n$ tale che $(b_{(m)} d)\cdot x \in U_n$ per ogni $m$; se allora $m \geq r - n$, è $(p^m b_{(m)} d)\cdot x = p^m\,[(b_{(m)} d)\cdot x] \in p^m\, U_n \subseteq U_r$, C. V. D..

Siamo ora in grado di dimostrare il 5.33: per ogni $m > 0$ si scriva $a = a_{(m)} + p^m\, b_{(m)}$, ove $a_{(m)} = (\dots, a_{-1}\,;\, a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, 0, 0, \dots)$, e $b_{(m)} \in K$; allora $(a\,d)\cdot = [(a_{(m)} + p^m\, b_{(m)})\, d]\cdot = (a_{(m)}\, d + p^m\, b_{(m)}\, d)\cdot = (a_{(m)}\, d)\cdot + (p^m\, b_{(m)}\, d)\cdot$ per 5.31; poichè $(\{a_i\}\, d)\cdot = \{a_i\}\,(d\,\cdot)$ per la 5.15, ne segue, per 5.31, $(ad)\cdot = a_{(m)}\,(d\,\cdot) + p^m\,[(b_{(m)}\, d)\,\cdot]$. Ma per 5.34, se $x \in \Delta$ si ha $\lim_{m\to\infty} p^m\,(b_{(m)}\, d)\cdot x = 0$, onde $(ad)\cdot x = \lim_{m\to\infty} a_{(m)}\,(d\cdot x) = a\,(d\cdot x)$, che è appunto la 5.33. Conclusione:

5.35 TEOREMA. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo; l'applicazione $d \longrightarrow d\,\cdot$ è un omomorfismo continuo del $K'$-modulo $\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}^0$ sul $K'$-modulo delle derivazioni della $K'$-algebra $\Delta(\mathcal{R})$, sul proprio completamento, che inducono la derivazione nulla su $K'$.*

DIM. della continuità. Dato un intorno dello 0 in $E$, ossia dati un intorno $A$ dello 0 in Biv $\mathcal{R}$, ed un sottoinsieme finito non vuoto $S$ di $\Delta$, si scelga una base $d_1, \dots, d_n$ del $K'$-modulo $\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}^0$; per $m$ elevato è $p^m\, d_i\, S \subseteq A$ per ogni $i$. D'altra parte la penultima asserzione del 4.31 assicura che i $p^m d_i$ generano, come $K$-modulo, un intorno dello 0 in $\mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$, C. V. D..

49. Un insieme $X$ di elementi di $\Delta = \Delta(\mathcal{R})$ è *uniformemente differenziabile* se per ogni intorno $A$ dello 0 in Biv $\mathcal{R}$, per ogni $q \in Q'$, e per ogni insieme finito $\{d_1, \dots, d_r\}$ di elementi di $\mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$, esiste un intero $n$ tale che $\delta x \in A$ per ogni $x \in X$ e per ogni monomio ammesso $\delta$ di peso $\leq q$ e grado $\geq n$ nelle $\pi^i t^j d_l *$ (a queste si dà peso $p^{-j}$).

5.36 Teorema. *Sia $i \longrightarrow x_i$ una successione di elementi di $\Delta$, uniformemente differenziabili; se $y = \lim_{i \to \infty} x_i$, $y$ è differenziabile, e $d \cdot y = \lim_{i \to \infty} d \cdot x_i$ per ogni $d \in \mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$.*

Dim. Se i $\delta$ hanno i significati dati nella definizione precedente, per $n$ elevato è $\delta x_i \in A$ per ogni $i$ ($A$ essendo prefissato), e quindi $\delta y \in A$ perchè la $x \longrightarrow \delta x$ è continua per 5.23; pertanto $y$ è differenziabile. Dato poi ancora $A$, e detta $d_{(r)}$ la somma dei primi $r$ termini di 5.30, possiamo trovare:

(1) un $r$ tale che $d_{(r)} y - d \cdot y \in A$, e che $d_{(r)} x_i - d \cdot x_i \in A$ per tutti gli $i$;

(2) un $s$ tale che $d_{(r)} x_i - d_{(r)} y \in A$ per $i \geq s$;

ed allora $d \cdot y - d \cdot x_i \in A$ per $i \geq s$, il che prova l'asserto, C. V. D..

Vogliamo precisare un altro caso notevole di derivazione:

5.37 Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo; sia $d \in \mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$ ed $x \in \mathcal{R}^0$; se $\{x\}$ è differenziabile, si ha $d \cdot \{x\} \in Q$ vect $\mathcal{R}$ e*

$$(d \cdot \{x\})_i = \pi^i \left[x \lim_{n \to \infty} \pi^{-n} (d_0^{p^n} \pi^{-i} x / \pi^{-i} x)\right].$$

Dim. Deve essere $d \cdot \{x^p\} = p\,\{x^{p-1}\}\, d \cdot \{x\}$; se allora $(d \cdot \{x\})_i$ viene indicato con $\partial_i(x)$, questa dà $\partial_i(x^p) = x^{p^{i+1}-p^i}\,[\partial_{i-1}(x)]^p$, donde $\partial_i(x) = x^{-1} \pi^i [x \partial_0 (\pi^{-i} x)]$. Basta ora dimostrare che

$$\partial_0(x) = x \lim_{n \to \infty} \pi^{-n} (d_0^{p^n} x / x). \tag{5.38}$$

Facciamo dapprima l'ipotesi che $d$ ed $x$ siano tali che $d_0$ induca una derivazione in un opportuno sottoipercampo $R$ di $\mathcal{R}$, contenente $x$; allora dalla definizione di $d *$ segue che $(t^n d * \{x\})_j = 0$ per $j < n$, mentre $(t^n d * \{x\})_n = x^{p^n-1} d_0 x$; quindi $((t^n d *)^{p^n} \{x\})_n = d_0^{p^n-1} (x^{p^n-1} d_0 x)$. Per computare questo, vogliamo dimostrare che, per $n \geq 1$,

5.39 $$d_0^{p^n - 1}(x^{-1} d_0 x) = x^{-1} d_0^{p^n} x - (x^{-1} d_0^{p^{n-1}} x)^p \; ;$$

questa è vera quando $n = 1$ per una ormai ben nota formula (vedasi p. 59 di *Repartitions on abelian varieties*, di I. Barsotti, Illinois Journ. of Math., 2, 1958, p. 43); supposta vera per $n - 1$, si ha $d_0^{p^n - 1}(x^{-1} d_0 x) = (d_0^p)^{p^{n-1}-1} d_0^{p-1}(x^{-1} d_0 x) = (d_0^p)^{p^{n-1}-1} [x^{-1} d_0^p x - (x^{-1} d_0 x)^p]$, e questa, per l'induzione, coincide col secondo membro di 5.39.

Ciò premesso, ne segue, per $n \geq 1$, $((t^n d *)^{p^n} \{x\})_n = x^{p^n - 1} d_0^{p^n} x - x^{p^n - p}(d_0^{p^{n-1}} x)$; ed allora $(p^{-n}((t^n d *)^{p^n} \{x\}))_0 = x^{1-p^{-n}} \pi^{-n} (d_0^{p^n} x) - x^{1-p^{-n+1}} \pi^{-n+1} (d_0^{p^{n-1}} x)$; questa, unita alla $(d * \{x\})_0 = d_0 x$ ed alla definizione di $d \cdot \{x\}$ (5.30), dà appunto la 5.38, che resta quindi dimostrata sotto la ipotesi che $d_0$ induca una derivazione in un $R$ contenente $x$. Se la ipotesi non è soddisfatta, resta vero che un opportuno $(p^j d)_0$ induce in $R \ni x$ una derivazione; ed allora $\partial_0 (x) = (p^{-j}(p^j d \cdot \{x\}))_0 = \pi^{-j}(p^j d \cdot \{x\})_j = x \lim_{n \to \infty} \pi^{-n} (d_{-j}^{p^{n+j}} \pi^{-j} x / \pi^{-j} x) = x \lim_{n \to \infty} \pi^{-n} (\pi^{-j} d_0^{p^{n+j}} x / \pi^{-j} x) = x \lim_{n \to \infty} \pi^{-n} (d_0^{p^n} x / x)$, che è di nuovo la 5.38, C. V. D..

Vogliamo infine trovare la relazione fra l'espressione $d \log x$ definita al $\text{n}^0$ 6 di MC e gli enti definiti in questo capitolo. A tale scopo ci porremo nelle ipotesi e notazioni del 6.4 di MC, ma sostituiremo $x$ con $d$, e $\xi, \zeta, \ldots$ con $x, y, \ldots$ Vogliamo dimostrare precisamente il

5.40 TEOREMA. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo inseparabile, legato all'ipercampo $R$ da un'immersione; sia $x \in \operatorname{vect} R \subset \operatorname{biv} \mathcal{R}$, con $x_0$ non unità di $R$; sia $d \in \mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$ tale che $d_0 \pi R = 0$, e sia $d'$ il vettore $(d'_0, d'_1, \ldots)$, ove $d'_i$ è la restrizione di $d_i$ (come operatore su $\mathcal{R}$) ad $R$. Se allora $d' \log(1 - x)$ ha il significato attribuitogli nel 6.4 di MC, si ha: $d * \log(1 - x) = d' \log(1 - x)$.*

DIM. Poichè $1 - x$ è prodotto infinito di elementi del tipo $1 - t^l \{y\}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$), ove $y \in R$, ed $y$ è non unità di $R$ se $l = 0$, basta dimostrare il teorema per ciascuno di questi elementi (cfr. 2.8 e 5.23). Intanto, $\log(1 - t^l \{y\}) \in \operatorname{vect} R$, e quindi $d * \log(1 - t^l \{y\}) \in \operatorname{vect} R$, se $l > 0$; se $l = 0$, si può scrivere $1 - \{y\}$ come prodotto di $\{1 - y\}$ e di (infiniti) elementi del tipo $1 - t^l \{z\}$, con $z \in R$ ed $l > 0$; per 2.10, $\log \{1 - y\} \in \operatorname{biv} \mathcal{R}$, ed anzi $(\log \{1 - y\})_i \in R$ per ogni $i$, come si vede dalla dimostrazione del 2.10; quindi, di nuovo, $(d * \log \{1 - y\})_i = 0$ per $i < 0$, ossia $d * \log \{1 - y\} \in \operatorname{vect} R$.

Porremo perciò $x = t^l \{y\}$, e procederemo a dimostrare il resto dell'enunciato sotto queste ipotesi; occorre operare in caratteristica 0, in modo da poter usare le componenti fantasma; ciò faremo senza cambiare le notazioni. Indichisi con $\Sigma_i'$ la somma estesa a tutti gli interi $i$, da 1 a $\infty$, che non sono divisibili per $p$; pongasi $h_j' = - d_n' \Sigma_i' i^{-1} p^{lip^j} y^{ip^{n+j-l}}$; allora, per definizione, $(d' \log(1 - x'))^{(n)} = h_0' + p^{-1} h_1' + p^{-2} h_2' + \ldots$. D'altra parte, pongasi $h_j = - d * \Sigma_i' i^{-1} p^{lip^j} \{y^{ip^{j-l}}\}$; allora $d * \log(1 - x) = h_0 + p^{-1} h_1 + p^{-2} h_2 + \ldots$. Ciascun $h_j$ si sa essere un elemento di vect $\mathcal{R}$ avente tutte le componenti in $\pi^j R$, ed avente nulle le prime $j$ componenti; quindi ogni $p^{-j} h_j \in$ vect $R$; basta ora osservare che la $n$-esima componente fantasma di $h_j$ è proprio $h_j'$, secondo la definizione di $d *$, C. V. D..

50. Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, e pongasi $\mathcal{D} = \widetilde{\mathcal{R}}$; sia $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0, x \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$; la terza formula del 5.19 dà subito $\mathbf{P}(d * x) = (1 \overline{\times} d) * (x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x) = 1 \overline{\times} (d * x)$; perciò ogni componente $\xi$ di $d * x$ soddisfa la $\mathbf{P}\xi = 1 \overline{\times} \xi$. Ma allora, per 3.9, $\varepsilon_{\mathcal{R}}\, \xi = \mu_{\mathcal{R}} (\iota \otimes \varepsilon) \mathbf{P}\xi = \iota\xi = \xi$, onde $\xi \in k$; è quanto dire che $d * x \in K'$; di conseguenza $d' * d * x = 0$, e perciò (n$^0$ 47) $x$ è differenziabile, e $d \cdot x = d * x$; la prima e seconda del 5.19 danno due fra le condizioni acchè l'applicazione $(d, x) \longrightarrow d \cdot x$ sia una dualità di $K'$-moduli canonici (n$^0$ 18); dimostreremo che questo è il caso, ed anzi dimostreremo un risultato più preciso:

5.41 Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, $R$ un ipercampo legato ad $\mathcal{R}$ da $\tau$; sia $\sigma$ il duale di $\tau$, onde $\sigma$ è un omomorfismo che lega il duale $\mathcal{D}$ di $\mathcal{R}$ al duale $D$ di $R$; sia $N$ l'insieme dei $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ tali che $\sigma d_{-1} = 0$, onde $\sigma d_i = 0$ per $i < 0$. Allora $N$ è, mediante $\pi$ e $t_{\mathcal{R}}$, un $K$-modulo canonico, contenente una base di $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ come $K'$-modulo, e duale di $\mathcal{C} R$ nella dualità $(d, x) \longrightarrow d * \tau x$, $d \in N, x \in \mathcal{C} R$. Inoltre, si ha $(d * \tau x)_0 = d_0 \circ (\tau x)_0$. Come conseguenza, l'applicazione $(d, x) \longrightarrow d * x = d \cdot x$ pone in dualità i $K'$-moduli canonici $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$.*

Dim. Chiaramente $N$ è un $K$-modulo dotato di $\pi$ e $t$; $N$ contiene una base di $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ perchè per ogni $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ si ha $p^r \iota\, d \in N$ per $r$ elevato. Poi, si ha $d \in N$ se e solo se $(p^i \iota)\, \sigma (p\iota)^{-i} d_{-1} = 0$ ($i$ prefissato); questa significa che $\sigma (p\iota)^{-i} d_{-1}$ è nel nucleo di $p^i \iota_D$; ma $d_{-1}$ è canonico, e l'essere in un certo ideale implica essere nel suo nocciolo. Pertanto $d \in N$ se e solo se $\sigma (p\iota)^{-i} d_{-1} \in D^i$ (notazioni come nel n$^0$ 35), ossia se e solo se $d_{-1} \in \widetilde{R}_0 \cong \widetilde{R}$; ma allora, se $\widetilde{\tau}$ lega $\widetilde{R}$ a $\mathcal{D} = \widetilde{\mathcal{R}}$ (ossia se $\widetilde{\tau}$ è un isomorfismo di $\widetilde{R}$ su tutto $\widetilde{R}_0$), il 4.31 mostra che $N = \widetilde{\tau}\, \mathcal{C} \widetilde{R}$, cosicchè $N$ è canonico. Che $\mathcal{C} \widetilde{R}$ sia duale di $M = \tau\, \mathcal{C} R$ lo si sa già dal 4.3; ma il presente risultato dà il modo di costruire la dualità.

Intanto, per $d \in N$ ad $x \in M$ si ha $d_i x_j = 0$ se $i$ e $j$ sono negativi; quindi $(d * x) = 0$ per $i < 0$ (cfr. nn$^i$ 43, 44); ciò significa che $d * x \in K$, e inoltre comporta, per 5.5, 5.11, che $(d * x)_0 = \varepsilon_{\mathcal{R}} (d * x)_0 = \varepsilon_{\mathcal{R}}\, d_0\, x_0 = d_0 \circ x_0$, come voluto. Per sincerarsi che l'applicazione $*$ dia una dualità che rende $N$ ed $M$ duali occorre controllare che : (1) $d * x = 0$ per ogni $x$ se e solo se $d = 0$ ; (2) $d * x = 0$ per ogni $d$ se e solo se $x = 0$ ; (3) un $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ appartiene ad $N$ se e solo se $d * x \in K$ per ogni $x \in M$. Infatti le prime due garantiscono che $K' N = \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ e $K' M = \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ sono in dualità, e la terza dà lo stesso risultato per $N$ ed $M$, come conseguenza di 3.8.

Allora, dato $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, se $d \neq 0$ sia $i$ il minimo intero tale che $(t^i d)_0 \, t^{-1} \tau R = 0$, e pongasi $t^{i-1} d = d'$ ; se $d * x = 0$ per ogni $x \in M$ è anche $d * x = 0$ per ogni $x \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, e quindi, per 5.19, $d' * x = 0$ per ogni $x \in M$. Ciò comporta, come si è visto, $d'_0 \circ x_0 = 0$ per ogni elemento canonico $x_0$ di $t^{-1} \tau R$. Si ricordi che $d'_0 \circ x_0 x'_0 = \mathbf{P} d'_0 \circ (x_0 \overline{\times} x'_0)$ se $x_0$, $x'_0$ sono elementi canonici di $t^{-1} \tau R$. Essendo $d'_0$ canonico, quest'ultima differisce da $\varepsilon_{\mathcal{R}} (x_0 \, d'_0 \, x'_0 + x'_0 \, d'_0 \, x_0) = 0$ per elementi del tipo $\varepsilon_{\mathcal{R}} (\delta x_0) (\delta' x'_0)$, con $\delta$, $\delta'$ monomi di grado positivo nei $t^s d'_0$ $(s > 0)$. Ora, $(t^s d'_0) \, x_0 = 0$ se $s > 0$, e pertanto $d'_0 \circ x_0 x'_0 = 0$ ; analogamente $d'_0 \circ y = 0$ per ogni prodotto $y$ di elementi canonici di $t^{-1} \tau R$. Poichè tali prodotti generano $t^{-1} \tau R$ come $k$-modulo topologico completo, si conclude che $d'_0 \circ t^{-1} \tau R = 0$, e che quindi $d'_0 \, t^{-1} \tau R = 0$, o infine che $(t^{i-1} d)_0 \, t^{-1} \tau R = 0$, contro l'ipotesi su $i$ ; ciò dimostra la (1).

La (2) non ha bisogno di essere dimostrata : infatti la (1) asserisce che $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ può essere interpretato come uno spazio vettoriale, su $K'$, di applicazioni lineari di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ su $K'$ ; poichè esso ha la stessa dimensione di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, ne deve essere il duale.

Per dimostrare la (3) si operi come segue : sia $i$ il massimo intero tale che $d_i \, \tau R = 0$ ; se si dimostra che la $d * M \in K$ comporta $i \geq -1$, si è dimostrata la (3). Ora, esiste un $x \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, con $x_i \in \tau R$, tale che $(d * x)_{i+1} \neq 0$, in quanto $(d * x)_{i+1} = d_{i+1} \circ x_{i+1}$. Ma dovendo essere $d * x \in K$, ciò comporta $i + 1 \geq 0$, ossia $i \geq -1$, C. V. D..

Il 5.41 mostra, fra l'altro, che l'omomorfismo descritto al 5.35 è un isomorfismo.

51. Vi è a priori un altro modo di ottenere una dualità come quella descritta nel 5.41 ; riepilogando, questa è stata ottenuta così : data la dualità $(d, x) \longrightarrow d \circ x$ fra $\mathcal{D}^0$ ed $\mathcal{R}^0$, essa viene usata, nel n$^0$ 38, per definire l'applicazione $(d, x) \longrightarrow dx = \sigma_d \, x$ (cfr. n$^0$ 38) di $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{R}^0$ su $\mathcal{R}^0$ ; questa, insieme con le $W$ del n$^0$ 43, dà luogo alla $(d, x) \longrightarrow d * x$ di $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0 \times \mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$ su $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, che a sua volta induce la dualità fra $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ e $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$.

Ora, la stessa $(d, x) \longrightarrow d \circ x$ può essere usata, come nel n$^0$ 38, per definire una $(d, x) \longrightarrow \langle dx \rangle = \tau_x \, d$ di $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{R}^0$ su $\mathcal{D}^0$ ; e da questa, scambiando nelle $W$ i ruoli delle $d_j$ ed $x_j$, si ottiene una $(d, x) \longrightarrow \langle d * x \rangle$ di $\mathrm{Biv}\, \mathcal{D} \times \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ su $\mathrm{Biv}\, \mathcal{D}$, che a sua volta dà una dualità fra $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ e $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$. Vogliamo dimostrare che essa è la stessa dualità, ossia che $\langle d * x \rangle = d * x$ se $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$.

Per dimostrarlo cominciamo coll'osservare che, essendo $d * x \in K'$, e per esempio $(d * x)_i = 0$ per $i < n \; (n < 0)$, il $d * x = \varepsilon_{\mathcal{R}} \, d * x$ coincide, per 5.9, con $\varepsilon_{\mathcal{R}} \, d * (\ldots, 0, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{-1}; x_0, x_1, \ldots)$; osserviamo anche che questo elemento viene ottenuto, a norma dei nn[i] 43, 44, operando ciascuna volta soltanto su un numero finito di $x_i$; ed allora tali $x_i$ saranno tutti contenuti in un opportuno sottoipercampo di $\mathcal{R}$, e si avrà $d_h x_i = 0$ per ciascuno di tali $x_i$ e per $h$ abbastanza piccolo. È quanto dire che le $W^{(m)}$ del 5.5 possono essere calcolate operando come se fosse $d_i = 0$ quando $i < n$. In altre parole, indicando con lettera maiuscola gli enti del n$^0$ 43, si ha, dopo opportuna modificazione degli indici delle $W$: $(d * x)_{n+i} = \varepsilon_{\mathcal{R}} \, \nu \, W_i$, ove

$$W_0^{p^i} + p W_1^{p^{i-1}} + \ldots + p^i W_i = W^{(i)} = D_{n+i} X^{(n+i)},$$

avendo posto

$$X^{(n+i)} = X_n^{p^i} + p X_{n+1}^{p^{i-1}} + \ldots + p^i X_{n+i}.$$

Qui, $\nu$ è l'omomorfismo di anelli dato da $\nu X_j = x_j, \nu D_j = d_j, \nu p = 0$. Per uniformità, porremo anche

$$D^{(n+i)} = D_n^{p^i} + p D_{n+1}^{p^{i-1}} + \ldots + p^i D_{n+i}.$$

Poichè i $D_j$ ed $X_j$ con $j < n$ non hanno influenza, si può supporre qui che, nelle notazioni del n$^0$ 41 e seguenti, $L = I[D_n, \ldots, D_{n+i}]$, $L_0 = QL$, che $M_0$ sia generato su $Q$ da $X_n, \ldots, X_{n+i}$, e che $\Lambda_0$ sia l'algebra polinomiale su $L_0 M_0 = L_0 \otimes_Q M_0$, ove $1 \otimes X_i$ è stato identificato con $X_i$. Si può però vedere la cosa in modo diverso: si pone $P = I[X_n, \ldots, X_{n+i}]$, $P_0 = QP$, si costruisce l'algebra polinomiale $\Lambda_0'$ su $L_0 P_0 = L_0 \otimes_Q P_0$, con la convenzione $1 \otimes 1 = 1$; si può ora ottenere $\Lambda_0$ come immagine di $\Lambda_0'$ nell'omomorfismo il cui nucleo è l'ideale $\mathcal{J}_1$ generato dai $\mu_{\Lambda_0'} [(\mathbf{P}\Delta)(X \otimes Y)] - \Delta(XY)$ quando $\Delta$ percorre $L_0$ e $X, Y$ percorrono $P_0$; qui, $\mathbf{P}$ è l'isomorfismo di $Q$ algebre dato da

$$\mathbf{P} D_{n+j} = \Phi(D_{n+j} \otimes 1, \ldots, D_n \otimes 1, 0, 0, \ldots; 1 \otimes D_{n+j}, \ldots, 1 \otimes D_n, 0, 0, \ldots).$$

Teniamo ora presente che si ha anche $\mu_{\mathcal{D}}(\delta \mathbin{\overline{\times}} \delta') \circ \mathbf{P}x = (\delta\delta') \circ x$ per $\delta, \delta' \in \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{R}^0$; ciò significa che il nucleo di $\varepsilon_{\mathcal{R}} \nu$ contiene le immagini, in $\Lambda$, dell'intersezione di $\Lambda'$ con l'ideale $\mathcal{J}_2$ di $\Lambda_0'$ generato dai $\mu_{\Lambda_0'} [(\Delta \otimes \Delta')(\mathbf{P}X)] - (\Delta\Delta') X$, per $\Delta, \Delta' \in L_0$ ed $X \in P_0$. Sia allora $\widetilde{\Lambda}_0$ l'immagine di $\Lambda_0'$ nell'omomorfismo $\zeta$ di nucleo $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$; per $\Delta \in L_0, X \in P_0$, si scriva $\Delta \circ X$ in luogo di $\zeta(\Delta X)$; si ha, in particolare: $1 \circ 1 = 1, 1 \circ X^{(j)} = D^{(j)} \circ 1 = 0$, in quanto, per esempio,

$$1 \circ X^{(j)} = (1 \cdot 1) \circ X^{(j)} = \mu (1 \otimes 1) \circ (X^{(j)} \otimes 1 + 1 \otimes X^{(j)}) = 1 \circ X^{(j)} + 1 \circ X^{(j)};$$

ne segue, per $r \geq 1$,

$$(D^{(j)})^r \circ 1 = (D^{(j)})^{r-1} D^{(j)} \circ 1 = \mu ((D^{(j)})^{r-1} \otimes D^{(j)}) \circ (1 \otimes 1) =$$
$$((D^{(j)})^{r-1} \circ 1)(D^{(j)} \circ 1) = 0;$$

quindi $D_j^r \circ 1 = 0$, e analogamente $1 \circ X_j^{(r)} = 0$, per $r \geq 1$. Se perciò $r > 1$, si ha anche

$$D_j^r \circ X^{(h)} = \mu (D_j^{r-1} \otimes D_j) \circ (X^{(h)} \otimes 1 + 1 \otimes X^{(h)}) = (D_j^{r-1} \circ X^{(h)})(D_j \circ 1) +$$
$$(D_j^{r-1} \circ 1)(D_j \circ X^{(h)}) = 0,$$

e analogamente $D^{(h)} \circ X_j^r = 0$ se $r > 1$.

Si è visto che esiste un omomorfismo $\tilde{\nu}$ di $\tilde{A}$ su $k$ tale che $\varepsilon_{\mathcal{R}} \nu = \tilde{\nu} \zeta$; ciò mostra, unito a quanto precede, che

$$(d * x)_{n+i} = \varepsilon_{\mathcal{R}} (d * x)_{n+i} = \varepsilon_{\mathcal{R}} \nu W_i = \tilde{\nu} (D_{n+i} \circ X^{(n+i)}) = \tilde{\nu} p^{-i} D^{(n+i)} \circ X^{(n+i)}.$$

Essendo questa simmetrica nelle $D_j, X_j$, si conclude che $d * x = \langle d * x \rangle$, come si voleva. Questo ci permette di asserire che non appena sia stata stabilita una dualità $(\tilde{x}, x) \to \tilde{x} \circ x$ fra $\tilde{\mathcal{R}}$ ed $\mathcal{R}$, il significato di $\tilde{y} * y = \tilde{y} \cdot y$, per $\tilde{y} \in \mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$ ed $y \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, è ben stabilito, senza dover a priori accertare quale dei due bicampi venga considerato come insieme di endomorfismi dell'altro. Per tale motivo si scriverà anche $\tilde{y} \circ y$ in luogo di $\tilde{y} * y$ o $\tilde{y} \cdot y$.

52. Dato il bicampo $\mathcal{R}$, la minima sottoalgebra di Biv $\mathcal{R}$ (su $K'$) che contiene 1 e $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ sarà indicata con $\mathcal{F}\mathcal{R}$; è l'algebra di tutti i polinomi, a coefficienti in $K'$, negli elementi di una base di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$. Sia $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{R}}$, e sia $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$; poichè, per 5.29, ogni elemento di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ è differenziabile, la $x \to d \cdot x$ è una derivazione di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ (in sè). Si ha:

5.42 LEMMA. *Nelle notazioni precedenti, le $d \cdot$, per $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, sono tutte e sole le derivazioni di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ per le quali ogni elemento di $K'$ è costante, e che sono* invarianti *nel senso seguente:* $\mathbf{P}(d \cdot x) = (1 \otimes d) \cdot \mathbf{P}x = (d \otimes 1) \cdot \mathbf{P}x$. *Se poi $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme libero di generatori di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, si ha $\mathcal{F}\mathcal{R} = K'[x_1, \dots, x_n]$, e gli $x_1, \dots, x_n$ sono algebricamente indipendenti su $K'$.*

DIM. Le $d\,\cdot$ soddisfano la relazione di invarianza per 5.32; per 5.41 vi sono delle $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ tali che $d_i \cdot x_j = \delta_{ij}$, e ciò prova che le $x_1, \ldots, x_n$ sono algebricamente indipendenti. Pertanto $d_1 \cdot, \ldots, d_n \cdot$ formano un insieme libero di generatori dell'$\mathcal{F}\mathcal{R}$-modulo delle derivazioni di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ per le quali ogni elemento di $K'$ è costante. Sia $\delta$ una tale derivazione, e suppongasi che $\delta$ sia invariante; scrivasi $\delta = \Sigma_i y_i d_i \cdot$, con $y_i \in \mathcal{F}\mathcal{R}$. L'invarianza dà

$$\mathbf{P}y_i = \mathbf{P}(\delta x_i) = (1 \otimes \delta)\,\mathbf{P}x_i = (1 \otimes \delta)(1 \otimes x_i + x_i \otimes 1) = 1 \otimes \delta x_i = 1 \otimes y_i\,;$$

applicando $\mu_{\mathcal{R}}(\iota \otimes \varepsilon)$ questa dà, per 3.9: $y_i = \varepsilon y_i \in K'$, onde $\delta = d\,\cdot$ per qualche $d \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$, C. V. D..

Il 5.42 mostra che la $x \longrightarrow d \cdot x$ è l'unica estensione ad $\mathcal{F}\mathcal{R}$, che sia una derivazione, dell'applicazione $x \longrightarrow d \circ x$ di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ su $K'$. La $d \longrightarrow d\,\cdot$ è un'applicazione $K'$-lineare di $\mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ su un $K'$-modulo di endomorfismi del $K'$-modulo $\mathcal{F}\mathcal{R}$; essa è pertanto univocamente estensibile ad un omomorfismo $\delta \longrightarrow \delta\,\cdot$ della $K'$-algebra $\mathcal{F}\mathcal{D}$ sulla sottoalgebra della $K'$-algebra degli endomorfismi di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ generata da tale $K'$-modulo (in questo è contenuta la convenzione che $1 \cdot x = x$). Poichè, nelle notazioni della dimostrazione del 5.42, le $d_1, \ldots, d_n$ sono algebricamente indipendenti su $K'$, tale omomorfismo è un isomorfismo se le $d_1 \cdot, \ldots, d_n \cdot$ sono algebricamente indipendenti su $K'$. Se esse fossero dipendenti, sia $\varphi_m + \ldots + \varphi_0$ un polinomio in $n$ argomenti, a coefficienti in $K'$, con $\varphi_i$ forma di grado $i$, e $\varphi_m \neq 0$, tale che $\varphi_m(d_1 \cdot, \ldots, d_n \cdot) + \ldots + \varphi_0(d_1 \cdot, \ldots, d_n \cdot) = 0$; l'applicazione di questo ad 1 dà $\varphi_0 = 0$; poi, l'applicazione ad $x_j$, per ogni $j$, dà $\varphi_1 = 0$; l'applicazione a $x_j x_h$, per ogni $(j, h)$, dà $\varphi_2 = 0$; ecc., fino a $\varphi_m = 0$, che è falsa. Quindi le $d_1 \cdot, \ldots, d_n \cdot$ sono algebricamente indipendenti su $K'$, e l'applicazione $K'$-lineare che ad un prodotto $d_1^{r_1} \ldots d_n^{r_n}$ fa corrispondere il $(d_1^{r_1} \ldots d_n^{r_n}) \cdot = (d_1 \cdot)^{r_1} \ldots (d_n \cdot)^{r_n}$ è un isomorfismo. In tal modo $\mathcal{F}\mathcal{D}$ diviene un'algebra di applicazioni $K'$-lineari di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ in sè; esse sono le combinazioni lineari, a coefficienti in $K'$, delle iterazioni delle derivazioni invarianti.

Per $d \in \mathcal{F}\mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{F}\mathcal{R}$ pongasi $d \circ x = \varepsilon_{\mathcal{R}}(d \cdot x) \in K'$; intanto, per $d \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ questa coincide col $d \circ x$ definito alla fine del n$^0$ 51; occorre poi verificare che $d \circ x$ sia definito simmetricamente rispetto a $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{R}$, come lo è nel caso ora ricordato; si consideri allora l'altro modo di definirlo: esso consiste nell'estendere la $d \longrightarrow d \circ x$ ($d \in \mathcal{C}'\mathcal{D}^0$, $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}^0$) ad una derivazione $d \longrightarrow \langle d \cdot x \rangle$ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ in sè; poi nell'estendere la $x \longrightarrow \langle\ \cdot x \rangle$ ad un isomorfismo della $K'$-algebra $\mathcal{F}\mathcal{R}$ su una $K'$-algebra di endomorfismi di $\mathcal{F}\mathcal{D}$; e infine nel porre $\langle d \circ x \rangle = \varepsilon_{\mathcal{D}}\langle d \cdot x \rangle$; si vuole dimostrare che $\langle d \circ x \rangle = d \circ x$. Basta verificare questa quando $d$, $x$, sono monomi monici nelle $d_1, \ldots, d_n$ e rispettivamente $x_1, \ldots, x_n$; ma allora essa è certamente vera, perchè si verifica subito che

$$\langle d_1^{r_1} \dots d_n^{r_n} \circ x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} \rangle = \delta_{r_1, s_1} \dots \delta_{r_n, s_n} (r_1 !) \dots (r_n !) = d_1^{r_1} \dots d_n^{r_n} \circ x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} .$$

Si è così anche dimostrata la prima asserzione del

5.43 TEOREMA. *Se $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$ sono bicampi duali l'uno dell'altro, allora $\mathcal{F}\mathcal{D}$ (risp. $\mathcal{F}\mathcal{R}$) è il duale algebrico di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ (risp. di $\mathcal{F}\mathcal{D}$), mediante la dualità $(d, x) \longrightarrow d \circ x$ $(d \in \mathcal{F}\mathcal{D},\ x \in \mathcal{F}\mathcal{R})$. Valgono le :*

$$d \circ xy = \mathbf{P}d \circ (x \otimes y)$$

$$d\delta \circ x = (d \otimes \delta) \circ \mathbf{P}x$$

$$1 \circ x = \varepsilon_{\mathcal{R}}\, x$$

$$d \circ 1 = \varepsilon_{\mathcal{D}}\, d .$$

*Inoltre $d \cdot x$ è univocamente determinato dalle relazioni $\delta \circ (d \cdot x) = \delta d \circ x$ per ogni $\delta \in \mathcal{F}\mathcal{D}$.*

DIM. L'ultima asserzione si dimostra così : $\delta \circ (d \cdot x) = \varepsilon_{\mathcal{R}} (\delta d \cdot x) = \delta d \circ x$. Le varie formule sono conseguenze immediate di 5.31 quando $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, e ne sono conseguenze mediate negli altri casi, C.V.D..

53. Il 5.42 mostra che $\mathcal{F}\mathcal{D}$, $\mathcal{F}\mathcal{R}$ sono iperalgebre finite su $K'$, duali l'una dell'altra, qualora su esse, e su $K'$, si ponga la topologia discreta (si noti che la condizione che $k$ sia di caratteristica $p$ era inessenziale nel n⁰ 19). Sappiamo tuttavia che $K'$ ha anche la topologia $p$ adica, e che $\mathcal{F}\mathcal{R}$ ha la topologia indotta da quella di Biv $\mathcal{R}$; vogliamo investigare quest'ultima topologia. Si consideri dapprima il caso in cui $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{r,s}$, con $r$, $s$ primi fra loro, ovvero $r = 1$ ed $s = 0$ (casi inseparabili), e si ponga $\alpha' = s/r$. Come si è visto nel n⁰ 18, $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ è generato da certi elementi $x$, $t^i x$, $\pi^j x$, ove: $i = 1, 2, \dots, r-1$; $j = 1, 2, \dots, s$ (ciò si ottiene chiamando $x$ l'elemento analogo a quello indicato con $x_r$ all'inizio del n⁰ 18); la $x$ è del tipo $x = (\dots, \xi_r^{p^s}, \dots, \xi_1^{p^s}; \xi_r, \dots, \xi_1, \xi_r^{p^{-s}}, \dots, \xi_1^{p^{-s}}, \dots)$. Il sistema di intorni $U^n(\beta)$ del n⁰ 39 si riduce, in questo caso, ad $U^\infty(\beta)$, che sarà indicato con $U(\beta)$: è l'insieme degli $\zeta \in \mathcal{R}$ tali che $w(\zeta) \geq \beta$. Si vede allora subito che se $w$ è normalizzata in modo da rendere $w(\xi_j) = 1$ per ogni $j$, si ha, per ogni $i$, $x \in U_i(p^{-(1+\alpha')i})$; inoltre $\alpha'$ è l'unico numero reale che gode di questa proprietà. Si ha poi $t^m U_i(\beta) = U_{i+m}(p^{-m}\beta)$, e $\pi^m U_i(\beta) = U_i(p^m \beta)$, cosicchè per ogni elemento $y$ di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ esistono dei reali $\gamma'$ tali che $y \in U_i(p^{\gamma' -(1+\alpha')i})$

per ogni $i$. Per determinare il massimo $\gamma'$ e l'$\alpha'$ che competono ad un $y \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, basta disegnare nel piano avente $i$ come ordinata ed $e$ (esponente di $p$) come ascissa la retta $e = \gamma' - (1 + \alpha')\, i$ che ha il minimo $\gamma'$ fra quelle che contengono infiniti punti $(e, i)$ colla proprietà $p^{-i}\, w(y_i) = p^e$; a sinistra di essa non cade nessun punto di coordinate $(-i + \log_p w(y_i),\ i)$, ma su di essa ne cadono infiniti. È utile cambiare le notazioni, e scrivere la retta sotto la forma $i = \gamma - \alpha e$, cosicchè $\gamma = (1 + \alpha')^{-1} \gamma'$, $\alpha = (1 + \alpha')^{-1}$; l'esponente $\gamma' - (1 + \alpha')\, i$ diviene $(\gamma - i)/\alpha$. Con ciò in mente si dimostra facilmente il criterio seguente:

5.44 Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, e sia $y \neq 0$ un elemento di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ tale che esistano reali $\alpha$, $\gamma$ colla proprietà: $y \in U_i^n\,(p^{(\gamma - i)/\alpha})$ per ogni $i$ ed ogni $n$; allora $\alpha$ è unico, ed è un numero razionale tale che $0 < \alpha \leq 1$. Se lo si pone sotto la forma $\alpha = r/(r + s)$, con $r$, $s$ interi positivi primi fra loro, ovvero con $s = 0$ ed $r = 1$, è vera l'asserzione seguente: esiste un sottobicampo $\mathcal{S} \neq k$ di $\mathcal{R}$ che è prodotto tensoriale completo di bicampi isomorfi ad $\mathcal{R}_{r,s}$; ed $y \in \mathcal{C}' \mathcal{S}^0$. Reciprocamente, ogni $y \in \mathcal{C}' \mathcal{S}^0$ ha la proprietà descritta.*

Per quanto riguarda la componente $\mathcal{R}_{0,1}$, il risultato è assai più semplice:

5.45 Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, e sia $y \neq 0$ un elemento di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ tale che esista un reale $h$ con la proprietà: $y \in U_i^{h-i}(\beta)$ per ogni $i$ ed ogni reale $\beta$; allora è vera l'asserzione seguente: esiste un sottobicampo $\mathcal{S} \neq k$ di $\mathcal{R}$ che è prodotto tensoriale completo di bicampi isomorfi ad $\mathcal{R}_{0,1}$; ed $y \in \mathcal{C}' \mathcal{S}^0$. Reciprocamente, ogni $y \in \mathcal{C}' \mathcal{S}^0$ ha la proprietà descritta.*

Naturalmente, il massimo $h$ con la proprietà detta è un intero.

54. Se $y \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, il numero $\alpha$ dato dal 5.44 (se esiste) sarà detto la *pendenza* di $y$; il massimo $\gamma$ del 5.44 sarà l'*intercetta* di $y$; nel caso del 5.45, il massimo $h$ sarà chiamato l'*altezza* di $y$. Suppongasi che $\mathcal{R}$ sia inseparabile, ossia che $\mathcal{R}_t = k$, e siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ di pendenze $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e intercette $\gamma_1 \dots, \gamma_n$; si ha

$$y = x_1 \dots x_n = \Sigma_i \Sigma' p^i \{x_{1 i_1}^{p^{-i_1}} \dots x_{n i_n}^{p^{-i_n}}\},$$

ove $\Sigma'$ è estesa a tutti gli $i_1, \dots, i_n$ interi la cui somma è $i$. Poichè $w(x_{hl}) \geq \geq p^l\, p^{(\gamma_h - l)/\alpha_h}$, si avrà

$$w(y_i) \geq p^i \min\,[p^{(\gamma_1 - i_1)/\alpha_1} + \dots + p^{(\gamma_n - i_n)/\alpha_n}], \quad \text{per} \quad i_1 + \dots + i_n = i;$$

si tratta di trovare il minimo della funzione in parentesi quadra, non necessariamente ristretto a valori interi delle $i_h$. I soliti metodi dell'analisi danno che tale minimo è $p^{(\gamma-i)/\alpha}$, ove $\alpha=\Sigma_h \alpha_h$ e $\gamma=\alpha \log_p \alpha + \Sigma_h (\gamma_h - \alpha_h \log_p \alpha_h)$; pertanto

5.46 $$x_1 \dots x_n \in U_i(p^{(\gamma-i)/\alpha}) \text{ per ogni } i.$$

Si consideri il caso di un $\mathcal{R}$ separabile, ossia $\mathcal{R}=\mathcal{R}_t$: siano $z_1,\dots,z_m \in \mathcal{C}'\mathcal{R}^0$, e suppongasi che $z_l$ abbia altezza $h_l$; ragionando, come prima, sulle componenti si trova che:

5.47 $$z_1 \dots z_m \in U_i^{(h-i)/m} \text{ per ogni } i,$$

ove $h=\Sigma_l h_l$. Infine, nel caso generale di un $\mathcal{R}$ senza restrizioni, se gli $x_j$ hanno pendenze $\alpha_j$ e intercette $\gamma_j$, e se gli $z_l$ hanno altezze $h_l$, si ha direttamente da 2.2 che

5.48 $$x_1 \dots x_n z_1 \dots z_m \in U_{i+j+1}^{(h-j)/m}(p^{(\gamma-i)/\alpha}) \text{ per ogni } i \text{ ed ogni } j,$$

ove $\alpha$, $\gamma$, $h$ hanno i significati precedenti.

Le 5.46, 5.47, 5.48 servono a dare facilmente delle condizioni di convergenza di serie; esaminiamo ad esempio la serie esponenziale (nn[i] 13, 14, 15), per ritrovare condizioni già note. Se $\mathcal{R}=\mathcal{R}_t$, e se $z$ è elemento di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ di altezza $h$, la 5.47 dà che $z^m \in U_i^{h-m^{-1}i}$ per ogni $i$, onde $(m!)^{-1} z^m \in U_{i-s(m)}^{h-m^{-1}i}$, ove $s(m)=(p-1)^{-1}[m-S(m)]$ (cfr. n$^0$ 1); non vi è nessun modo di assegnare un'applicazione $m \to i = i(m)$ in guisa che $h-m^{-1}i$ ed $i-s(m)$ tendano ad $\infty$ col tendere di $m$ ad $\infty$. Pertanto in questo caso la serie esponenziale non converge, il che è in accordo col 2.7.

Sia invece $\mathcal{R}_t = k$, e sia $x$ un elemento di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ di pendenza $\alpha$ e intercetta $\gamma$; il 5.46 dà che

$$x^n \in U_i(np^{\gamma/\alpha} p^{-i/n\alpha}) \text{ per ogni } i,$$

onde

$$(n!)^{-1} x^n \in U_{i-s(n)}(np^{\gamma/\alpha} p^{-i/n\alpha}).$$

Posto qui $i=2n$, si vede che per $n \to \infty$ tendono ad $\infty$ sia $i-s(n)$ che $np^{\gamma/\alpha} p^{-i/n\alpha}$; pertanto la serie esponenziale converge, come d'altronde assicura il 2.7.

55. La considerazione della serie esponenziale, nei casi in cui converge, serve ad interpretare certi risultati di MC usati nella dimostrazione del 4.3, e certi enti usati nei 3.35 e 3.36. Abbiasi un bicampo $\mathcal{R}$ legato da $\tau$ all'iper-

campo $R$; siano $\mathcal{D}$, $\sigma$, $D$, $N$ costruiti come nel 5.41, e pongasi $M = \mathcal{C}R$, $\mathcal{M} = \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, $\mathcal{N} = \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$; si considerino separatamente i tre casi.

*Caso* 1: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\pi$. In tal caso $\mathcal{D} = \mathcal{D}_t$, e ad ogni $d \in N$ si può fare corrispondere il $\sigma d \in \operatorname{vect} D$ così definito: $(\sigma d)_i = \sigma d_i$ per $i \geq 0$. Poichè $\sigma d_i = 0$ per $i \leq 0$, l'applicazione $d \to \sigma d$ è un omomorfismo di $K$-moduli, che commuta con $\pi$ e $t$; esso è poi un isomorfismo perchè se $\sigma d = 0$ si ha $\sigma t^{-i} d_0 = 0$, $\sigma(p\iota)^{-i} d_0 = 0$ per ogni $i$, onde $d_0 = 0$, $d = 0$. Quindi, in questo caso, gli elementi $\delta$ di vect $D$ che soddisfano la $\mathbf{P}\delta = \delta \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, \delta$ formano un $K$-modulo canonico isomorfo ad $N$, e duale di $M$; è quello usato sistematicamente in MC, ed indicato con $\mathcal{V}D$ nella dimostrazione del 4.3. Il $\sigma$ è un isomorfismo di $N$ su tutto $\mathcal{V}D$, e $\tau$ lo è di $M$ su $\mathcal{M}$; si ha, per $d \in N$ ed $x \in M$, $d \circ \tau x = \sigma d \circ x$, ove il «$\circ$» del secondo membro è essenzialmente quello usato nel 7.2 di MC. D'altra parte, in questo caso exp $d$ non esiste.

*Caso* 2: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_t$. In tal caso $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\pi$, ed $\mathcal{N}$ è generato da elementi $d$ tali che $td = d$; il ragionamento precedente non si può perciò ripetere, perchè se $d \in N$ si ha necessariamente $\sigma d_i = 0$ per ogni valore di $i$; è d'altra parte facile constatare direttamente che vect $D$ non contiene elementi $d \neq 0$ che soddisfano la $\mathbf{P}d = d \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, d$. In questo caso tuttavia esiste $\delta = \exp d$: quando $d = td$, il 2.10 assicura che $\exp d = \{\delta_0\}$ per un opportuno $\delta_0 \in \mathcal{D}$; poiche $\mathbf{P}\{\delta_0\} = (\{\delta_0\} \,\overline{\times}\, 1)(1 \,\overline{\times}\, \{\delta_0\})$, si avrà $\mathbf{P}\delta_0 = \delta_0 \,\overline{\times}\, \delta_0$; la 2 del 4.28 dà allora che $\delta_0(xy) = (\delta_0 x)(\delta_0 y)$ se $x, y \in \mathcal{R}^0$; questa dice che $\delta_0$ è un automorfismo di $\mathcal{R}^0$ come $k$-algebra. D'altra parte, se $U_i$ ha il significato del 4.25, il 4.25 assicura che esiste un $n$, indipendente da $i$, tale che $d_0 U_i \subseteq U_i$ per $i \geq n$; ed allora, l'espressione $\delta_0 = F(d_0)$ data dal 2.10, unita allo sviluppo 2.9 di $F$, comporta che $\delta_0 U_i \subseteq U_i$, ossia che la $z \to \delta_0 z$ è un'applicazione continua di $\mathcal{R}^0$ su $\mathcal{R}^0$; essa può quindi essere interpretata come un automorfismo continuo della $k$ algebra $\mathcal{R}$.

Si definisca l'automorfismo $\zeta_i \in D$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ della $k$-algebra $R$ per mezzo della $\zeta_i = \sigma(p\iota)^{-i-1} \delta_0$; è intanto $\pi\delta = \exp \pi d = \exp p\iota d = p\iota \exp d = p\iota\delta$; quindi $\pi\zeta_i = \sigma(p\iota)^{-i} \delta_0 = \zeta_{i-1}$ se $i > 0$; se poi $d \in N$ si ha anche $\pi\zeta_0 = \sigma\delta_0 = \sigma F(d_0) = F(\sigma d_0) = 1$. Quindi $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots) \in \mathcal{P}_0 D$, nelle notazioni del n$^0$ 26, e ciò permette di interpretare $N$ come il $K$-modulo canonico dei «logaritmi» degli elementi di $\mathcal{P}D$.

È utile mostrare anche che la dualità $\circ$ fra $\mathcal{P}D$ ed $M$ usata nella dimostrazione del 3.36 è la stessa dualità descritta nel 5.41. Intanto, se $x \in \mathcal{F}\mathcal{R}$ si ha $\lim_{n \to \infty} (n!)^{-1} d^n \cdot x = 0$ (cfr. n$^0$ 52), cosicchè è lecito definire $\delta \cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} d^n \cdot x$; se in particolare $x \in \mathcal{M}$ questa si riduce a $\delta \cdot x = x + d \cdot x$;

ricordando che $d \cdot x \in K'$, ciò dice che la $x \longrightarrow \delta \cdot x$ è una traslazione di $\mathcal{M}$. Ne segue anche che $\delta \circ x = \varepsilon_{\mathcal{R}}(\delta \cdot x) = d \circ x = \delta \cdot x - x$.

L'automorfismo $\delta_0$ può essere interpretato come un automorfismo di Biv $\mathcal{R}$, e in particolare di $\mathcal{F}\mathcal{R}$; per darne un'espressione esplicita occorre rifarsi alle definizioni dei nn$^{i}$ 41, ... , 44 ed alla 5.30, applicate al caso presente in cui i $d_i$ sono tutti uguali; ciò faremo brevemente senza cambiare notazioni, e cioè usando gli stessi simboli per elementi di $Q$-algebre ed elementi di $\mathcal{D}$ od $\mathcal{R}$. Si ha simbolicamente (cfr. 2.9 e 2.10):

$$(\delta \cdot x)^{(i)} = \sum_{0}^{\infty}{}_n (n\,!)^{-1} [(d\ \cdot)^n x]^{(i)} = \sum_{0}^{\infty}{}_n (n\,!)^{-1} \{[d * + p^{-1}(d *)^p + \dots]^n x\}^{(i)} =$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n (n\,!)^{-1} [d_0 + p^{-1} d_0^p + \dots]^n x^{(i)} = F(d_0)\, x^{(i)} = \delta_0\, x^{(i)}\ ;$$

perciò, essendo $\delta_0$ automorfismo, $(\delta \cdot x)_i = \delta_0\, x_i$, o infine

$$\delta \cdot x = \delta_0\, x\,.$$

Adesso siamo in grado di interpretare la dualità: nel 3.36 si era posto $[(\zeta_0, \zeta_1, \dots) \circ (\dots, x_{-2}, x_{-1})]_i = \pi^{i+1}(\zeta_i \circ x_{-1})$, che ora si interpreta come

$$= \pi^{i+1}(\sigma(p\iota)^{-i-1}\delta_0 \circ x_{-1}) = \pi^{i+1}(\delta_0 \circ (p\iota)^{-i-1}(\tau x)_{-1}) = \pi^{i+1}(\delta_0 \circ \pi^{-i-1}(\tau x)_i) =$$

$$\pi^{i+1}(\delta \circ \pi^{-i-1}\tau x)_i = (\delta \circ \tau x)$$

per la prima del 5.32. Quindi $(\zeta_0, \zeta_1, \dots) \circ (\dots, x_{-2}, x_{-1}) = \delta \circ \tau x$, il che mostra appunto che le dualità interessate coincidono.

*Caso* 3: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_r$, onde $\mathcal{D} = \mathcal{D}_r$. Questo caso partecipa di alcune proprietà dei due casi precedenti: come nel caso 1, ad ogni $d \in N$ si può far corrispondere il $\sigma d \in \operatorname{vect} D$; tali $\sigma d$ formano il $\mathcal{V}D$, e $\sigma$ risulta essere un isomorfismo; esiste anche $\delta = \exp d$, per 2.7, come nel caso 2, ma esso non è, per 2.10, del tipo $\delta = \{\delta_0\}$; si può di nuovo definire $\delta \cdot x = \sum_{0}^{\infty}{}_n (n\,!)^{-1} d^n \cdot x$ se $x \in \mathcal{F}\mathcal{R}$; e per $x \in \mathcal{M}$ questa dà ancora $\delta \cdot x = x + d \cdot x = x + d \circ x$; ma non esiste nessun automorfismo $\delta'$ di $\mathcal{R}^0$ tale che $(\delta \cdot x)_i = \delta' x_i$ per ogni $i$. Infatti un tale $\delta'$ dovrebbe lasciare invariati gli elementi di un opportuno $R_{-n} = p^n \tau R$, e ciò è impossibile perchè $\mathcal{R}^0$ è puramente inseparabile su ogni $R_{-n}$.

In conclusione:

1. Nel caso di $\mathcal{R}$ logaritmico (e $\mathcal{D}$ separabile), i « vettori canonici » a componenti in $D = \sigma\mathcal{D}$ esistono, e formano $\mathcal{V}D$, che è isomorfo ad un

sotto-$K$-modulo canonico di $\mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ che ne contiene una base, e che è duale di $\tau \mathcal{C} R$; siamo nelle condizioni del 3.7. Benchè per $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$ ed $y = f(x_1, \dots, x_h) \in \mathcal{F}\mathcal{R}$ $(x_1, \dots, x_h$ base di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0)$ valga la formula di Taylor, che asserisce che

$$f(x_1 + d \cdot x_1, \dots, x_h + d \cdot x_h) = \sum_0^{\infty}{}_n (n!)^{-1} d^n \cdot y = (\exp(d \cdot))\, y,$$

non esiste nessun $\delta = \exp d$ che permetta di scrivere $\delta \cdot = \exp(d \cdot)$.

2. Nel caso di $\mathcal{R}$ separabile (e $\mathcal{D}$ logaritmico), i vettori canonici a componenti in $D$ non esistono; esiste però $\mathcal{P} D$, che ha un ruolo analogo. Il $\delta = \exp d$, per $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$, non solo esiste, ma è del tipo $\delta = \{\delta_0\}$, ove $\delta_0$, come applicazione di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{R}$, è un automorfismo continuo che lascia invariato ogni elemento di un opportuno $p^n \tau R$; si ha $\delta \cdot y = \delta_0 y$ per $y \in \mathcal{F}\mathcal{R}$, e $\delta \cdot = \exp(d \cdot)$.

3. Nel caso di $\mathcal{R}$ (e $\mathcal{D}$) radicali, esistono sia $\mathcal{V} D$ che $\delta$; però i $\delta_j$ non sono automorfismi di $\mathcal{R}$; vale la $\delta \cdot = \exp(d \cdot)$.

56. Nel n$^0$ 53 si è investigata la topologia di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ indottavi da quella di Biv $\mathcal{R}$; resta da vedere che $\mathcal{F}\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}\mathcal{D}$ siano duali topologici, e non soltanto algebrici, l'uno dell'altro con tale topologia; che ciò sia vero è conseguenza del risultato seguente:

5.49 Teorema. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, $\mathcal{D}$ il suo duale; allora le applicazioni $d \longrightarrow d \circ x$, $x \longrightarrow d \circ x$, per $x \in \mathcal{F}\mathcal{R}$ e $d \in \mathcal{F}\mathcal{D}$, sono continue.*

Dim. Sia $d \in \mathcal{C}' \mathcal{D}^0$; la restrizione della $x \longrightarrow d \circ x$ all'insieme degli elementi di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ di grado $\leq n$ è continua, per 5.23, perchè coincide con la restrizione di $x \longrightarrow d * x + p^{-1} [(d *)^p x] + \dots + p^{-s} [(d *)^{p^s} x]$, ove $p^s \geq n$. Lo stesso resta quindi valido se $d \in \mathcal{F}\mathcal{D}$. Dato perciò $d \in \mathcal{F}\mathcal{D}$, di grado $n$, e dato l'intorno $p^r K$ dello 0 in $K'$, esiste un intorno $U$ dello 0 in Biv $\mathcal{R}$ tale che $d \circ y \in p^r K$ quando $y$ è elemento di $U \cap \mathcal{F}\mathcal{R}$ di grado $\leq n$; e si può supporre che $p \iota U \subseteq U$.

Sia $x$ un elemento di $\mathcal{F}\mathcal{R}$ appartenente a $Z = p^{n-1} U$, e si scriva $x = x_0 + x_1 + \dots + x_m$, ove $x_i$ è omogeneo di grado $i$; si ha

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_m \in Z \\ (p\,\iota)\, x &= x_0 + p x_1 + p^2 x_2 + \dots + p^m x_m \in Z \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (p^m\,\iota)\, x &= x_0 + p^m x_1 + p^{2m} x_2 + \dots + p^{m^2} x_m \in Z. \end{aligned}$$

Se queste vengono considerate come equazioni lineari nelle $x_0, \dots, x_m$, il loro determinante è il determinante di Vandermonde $\prod_{0}^{m-1}{}_j \prod_{j+1}^{m}{}_i p^j (p^{i-j} - 1)$; la potenza di $p$ che lo divide esattamente è quella di esponente $m(m-1)/2$. Fra i complementi algebrici della colonna dei coefficienti di $x_i$, quello di minimo $v$-valore è ottenuto cancellando, nella matrice dei coefficienti, la colonna $(i+1)$-esima e l'ultima riga; il suo $v$-valore è $(m-1)(m-2)/2 + m - i$. Quindi $x_i$ appartiene a $q_i Z$, ove $q_i$ è la potenza di $p$ di esponente $(m-1)(m-2)/2 + m - i - m(m-1)/2 = 1 - i$; in particolare, le $x_i$ con $i \leq n$ appartengono tutte a $p^{1-n} Z = U$. Poichè $d \circ x_i = 0$ per $i > n$, si conclude che $d \circ x \in p^r K$, C.V.D..

57. Vogliamo dare alcuni complementi sui bicampi autoduali (cfr. 4.29); il seguente primo risultato è ovvio:

5.50 TEOREMA. *Siano* $\mathcal{R}$, $\tilde{\mathcal{R}}$ *come al* 4.29; *le applicazioni* $K'$-*bilineari* $(x, y) \to \langle x, y \rangle \in K'$ *di* $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0 \times \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ *su* $K'$, *che soddisfano la* $\langle \pi x, y \rangle = \pi \langle x, ty \rangle$ *sono tutte e sole quelle ottenute ponendo* $\langle x, y \rangle = x \circ \nu y$, *ove* $\nu$ *è un qualsiasi omomorfismo del* $K'$-*modulo canonico* $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ *sul* $K'$-*modulo canonico* $\mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$; *tale* $\nu$ *è univocamente determinato da* $\langle\ ,\ \rangle$.

Poi:

5.51 TEOREMA. *Siano* $\mathcal{R}$, $\tilde{\mathcal{R}}$ *come al* 4.29, *e siano* $\nu$, $\langle\ ,\ \rangle$ *come al* 5.50; *supponGasi inoltre che* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *per* $x, y \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$. *Allora esiste una unica* $\tilde{z} \in \mathcal{F} \tilde{\mathcal{R}}$, *omogenea di grado* 2, *tale che* $\nu x = x \cdot \tilde{z}$, *e quindi* $\langle x, y \rangle = xy \cdot \tilde{z}$ *per* $x, y \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$; *tale* $\tilde{z}$ *soddisfa la* $t \tilde{z} = \tilde{z}$, *ed è data da* $\tilde{z} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \langle x_i, x_j \rangle \tilde{x}_i \tilde{x}_j$ *se* $\{x_i\}$ *è una* $K'$-*base di* $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, *ed* $\{\tilde{x}_i\}$ *la base duale di* $\mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}^0$. *Ogni* $\tilde{z} \in \mathcal{F} \tilde{\mathcal{R}}$, *omogeneo di grado* 2, *che soddisfa la* $t \tilde{z} = \tilde{z}$ *definisce un* $\nu$ *nel modo detto; ogni tale* $\tilde{z}$ *è elemento di* biv $\tilde{\mathcal{R}}$, *ed è del tipo* $\tilde{z} = \log \{\vartheta\}$ *per un opportuno* $\vartheta \in \tilde{\mathcal{R}}$.

DIM. Che lo $\tilde{z}$ descritto soddisfi la $\nu x = x \cdot \tilde{z}$ è palese; uno $z'$ con la stessa proprietà è tale che $x \cdot (z' - \tilde{z}) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$. Questa dà $z' - \tilde{z} \in K'$, e quindi $z' - \tilde{z} = 0$, dovendo esso altrimenti essere omogeneo di grado 2. La $\pi \nu x = \nu \pi x$ dà $\pi (x \cdot \tilde{z}) = \pi x \cdot \tilde{z}$; l'ultima di 5.32 comporta allora che $t \tilde{z} = \tilde{z}$.

Per dimostrare la penultima asserzione dell'enunciato basta far vedere che se $\langle x_i, x_j \rangle \neq 0$, allora $\tilde{x}_i \tilde{x}_j \in$ biv $\tilde{\mathcal{R}}$; previa decomposizione di $\mathcal{R}$ in fattori tensoriali isomorfi a $\mathcal{R}_{0,1}$, $\mathcal{R}_{1,0}$, $\mathcal{R}_{r,s}$, si può scegliere la base $\{x_i\}$ in modo che, nella nomenclatura del n$^0$ 54, ogni $x_i$ abbia o pendenza $\alpha < 1$ e intercetta $0$; ovvero pendenza $1$ e intercetta $0$; ovvero altezza $0$; nei tre casi, $\tilde{x}_i$ avrà rispettivamente pendenza $1 - \alpha$, o una certa altezza, o infine pendenza 1. La relazione $\langle x_i, x_j \rangle \neq 0$ significa $x_i \cdot \nu x_j \neq 0$, o $x \cdot \nu y \neq 0$ in notazioni più semplici, e può presentarsi a priori solo in uno dei casi seguenti:

1. $x$ ha pendenza $\alpha < 1$ e intercetta $0$; $y$ ha pendenza $1 - \alpha$ e intercetta $0$;
2. $x$ ha pendenza $1$ e intercetta $0$; $y$ ha altezza $0$;
3. $x$ ha altezza $0$; $y$ ha pendenza $1$ e intercetta $0$.

I casi 2 e 3 sono simmetrici, e basta perciò discutere i casi 1 e 2.

*Caso* 1. In tal caso $\tilde{x}$ ha pendenza $1 - \alpha$ e una certa intercetta $\gamma$; $y$ ha pendenza $\alpha$ e una certa intercetta $\delta$. A norma del 5.44, ciò significa che per ogni $c$ ed ogni $i$, $j$ si ha

$$w_c(\tilde{x}_i) \geq p^{\gamma/(1-\alpha)-\alpha i/(1-\alpha)}, \quad w_c(\tilde{y}_j) \geq p^{\delta/\alpha-(1-\alpha)j/\alpha};$$

allora

$$p^{i-j} w_c(\tilde{x}_{-i}) + p^{-i} w_c(\tilde{y}_{i-j}) \geq p^{\gamma/(1-\alpha)-j+i/(1-\alpha)} + p^{\delta/\alpha-i/\alpha+(1-\alpha)j/\alpha}.$$

Se $j \leq i/(1-\alpha)$, il primo addendo è $\geq p^{\gamma/(1-\alpha)}$; se invece $j \geq i/(1-\alpha)$ il secondo addendo è $\geq p^{\delta/\alpha}$; pertanto il 2.3 assicura che $\tilde{x}\tilde{y} \in \operatorname{biv} \tilde{\mathcal{R}}$.

*Caso* 2. In tal caso $\tilde{x}$ ha altezza $h$ e $\tilde{y}$ ha pendenza $1$ e intercetta $\gamma$; quindi $w_c(\tilde{y}_i) \geq p^\gamma$, ed anzi $= p^\gamma$, per ogni $c$ ed ogni $i$, mentre $w_c(\tilde{x}_i) = \infty$ per ogni coppia $(c, i)$ tale che $c_{i-h} = 0$. Fissato allora $n$, per $i \geq n - h$ si ha $-i - h \leq -n$, onde

$$p^{i-j} w_c(\tilde{x}_{-i}) + p^{-i} w_c(\tilde{y}_{i-j}) \geq p^{i-j} w_c(\tilde{x}_{-i}) = \infty \quad \text{se} \quad c_{-n} = 0.$$

L'analogo del 2.3, per la topologia descritta al n$^0$ 39, dà di nuovo che $\tilde{x}\tilde{y} \in \operatorname{biv} \tilde{\mathcal{R}}$.

Resta da dimostrare l'ultima asserzione dell'enunciato; essa discende da 2.10 se si dimostra che $\exp \tilde{z}$ esiste; e questo esiste, per 2.8, se esiste $\exp a\tilde{x}\tilde{y}$, per $a \in K'$, nei casi in cui $\langle x, y \rangle \neq 0$; ossia nei casi 1, 2, 3 descritti. Si ha nei vari casi che se $v(a) = r$, $\pi^s(a\tilde{x}\tilde{y})$ appartiene ai seguenti intorni (cfr. 5.46 e 5.48):

*Caso* 1. $U_i(p^{A-i+s})$, per $i$ arbitrario, e per un opportuno reale $A$;

*Casi* 2 *e* 3. $U_{i+j+r+1}^{h-j}(p^{\gamma-i+s})$, per $i$, $j$ arbitrari.

Fatto $i = 1 - r$ nel primo caso, si vede che per $s$ elevato $\pi^s (a \tilde{x} \tilde{y})$ appartiene a $V_1$, quando $V$ sia un intorno prefissato dello 0 in $\tilde{\mathcal{R}}$; è così soddisfatta la condizione di convergenza 2.7; nel secondo caso, per ottenere lo stesso risultato basta prendere $-j$ elevato, $i = -j - r$, e infine $s$ elevato, C. V. D..

5.52 TEOREMA. *Notazioni come nel* 5.51; *allora* $\{\vartheta\}$ *è differenziabile, e si ha, per* $d \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$: $d \cdot \tilde{z} = \{\vartheta\}^{-1} (d \cdot \{\vartheta\})$.

DIM. Basta dimostrare: (1) che è differenziabile ogni $\zeta = \exp (a \tilde{x} \tilde{y})$ per $a \in K'$ ed $\tilde{x}, \tilde{y}$ tali che $\langle x, y \rangle \neq 0$ (come nella dimostrazione del 5.51, $\tilde{x}, \tilde{y}$ stanno in luogo di $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j$); (2) che $d \cdot (a \tilde{x} \tilde{y}) = \zeta^{-1} (d \cdot \zeta)$ (cfr. 5.29). Osserviamo intanto che se si pone $s(n) = (p-1)^{-1} [n - S(n)]$, dall'ultima parte della dimostrazione del 5.51, e dai 5.46, 5.48, segue che:

*Caso* 1. $(n\,!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^n \in U^{\infty}_{i-s(n)} (np^{A - i/n})$;

*Casi* 2 *e* 3. $(n\,!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^n \in U^{h+r-j/n}_{i+j+1-s(n)} (np^{\gamma - i/n})$.

Sceglieremo nel primo caso $i = 2n$, onde:

*Caso* 1. $(n\,!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^n \in U^{\infty}_{2n-s(n)} (np^{A-2})$;

nel secondo caso sceglieremo $i = (n/2) \log_p n$, $j = -(n/4) \log_p n$, onde:

*Casi* 2 *e* 3. $(n\,!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^n \in U^{h+r+(\log_p n)/4}_{1-s(n)+(n \log_p n)/4} (n^{1/2} p^{\gamma})$.

Con queste premesse intendiamo dimostrare che la successione degli $(n\,!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^n$ è uniformemente differenziabile, dal che seguirà, per 5.36, che $\zeta$ è differenziabile e che ogni sua derivata è la somma delle derivate dei termini della serie. Siano allora $d_1, \ldots, d_l$ elementi di $\mathcal{C}' \mathcal{R}^0$, e sia $\delta$ un qualsiasi monomio ammesso di peso $\leq q \in Q'$ e grado $N$ nei $\pi^j t^i d_g *$ (questo elemento supposto di peso $p^{-i}$). Poichè $d_g d_i d_j \cdot a \tilde{x} \tilde{y} = 0$, si ha intanto che $\delta (m\,!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^m = 0$ quando $m \leq (N-1)/2$. Sia $m = m(N)$ il massimo intero con queste proprietà, e si ricordi che, nelle notazioni del 5.22, vi è un $-L$ (là indicato con $-l$) che ha le proprietà espresse dal 5.22 per ciascuna $d_i$. Ne segue che ciascun termine $(n\,!)^{-1} \delta (a \tilde{x} \tilde{y})^n$, per $n > m(N)$, appartiene a:

*Caso* 1. $U_a^\infty(mp^{A-2} - qp^L)$, ove $a = [(2p-3)m + \min_{n>m} S(n)]/(p-1)$;

*Casi* 2 *e* 3. $U_b^{h+r+(\log_p m)/4}(m^{1/2}p^\gamma - qp^L)$, ove

$$b = 1 + m((\log_p m)/4 - (p-1)^{-1}) + (p-1)^{-1} \min_{n>m} S(n).$$

In ambo i casi, questo intorno tende a 0 quando $N \longrightarrow \infty$; come si è visto, il 5.36 comporta allora che $\zeta$ è differenziabile, e che per $d \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ si ha
$d \cdot \zeta = \sum_{0}^{\infty}{}_n (n!)^{-1} d \cdot (a \tilde{x} \tilde{y})^n = \sum_{0}^{\infty}{}_n (n!)^{-1} (a \tilde{x} \tilde{y})^n (d \cdot (a \tilde{x} \tilde{y})) = \zeta(d \cdot (a \tilde{x} \tilde{y}))$,

C. V. D..

# INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI



## ERRATA

**Cap. 1, p. 14, riga 5 dell'1.14**: leggasi $(\mathrm{vect}\, k) \times (\mathrm{cov}\, A)$ in luogo di $(\mathrm{vect}\, k) \times (cov\, A)$.

**Cap. 3, p. 301, riga 4 della** dimostrazione del 3.37: leggasi $(e_{l_1} \overline{\times} \cdots \overline{\times}\, e_{l_s} \overline{\times}\, x)$ in luogo di $(e_{l_1} \overline{\times} \cdots \overline{\times}\, e_{ls})$.

**Cap. 4, p. 324, riga 8 del n$^0$ 39**: leggasi $R_i$ in luogo di $R$.