

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

V. AVANISSIAN

**Sur l'extension à  $\mathcal{C}^n$  d'un théorème de Lindwart-Polya**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série*, tome 19,  
n° 3 (1965), p. 407-413

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1965\\_3\\_19\\_3\\_407\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_407_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR L'EXTENSION À $\mathbb{C}^n$ D'UN THÉORÈME DE LINDWART-POLYA

par V. AVANISSIAN

On se propose essentiellement de donner une démonstration de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. Soit dans  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 2$ ) une suite de polynomes .

$$(1) \quad P_m(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad P_m(0) \neq 0$$

de degré  $m = 1, 2, \dots$ , uniformément convergente sur tout compact  $K$  contenu dans un ouvert  $\Omega$  contenant 0. Si l'aire  $\sigma_m$  de l'ensemble analytique  $P_m = 0$  vérifie

$$(2) \quad \int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\sigma_m(a)}{\|a\|^{2n-2+\alpha}} \leq M$$

où  $\alpha > 0$ ,  $M > 0$  sont des constantes, alors la suite  $P_m$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}^n$  vers une fonction entière d'ordre au plus  $\alpha$  si celui-ci est entier, et d'ordre au plus  $E(\alpha) + 1$ , si  $\alpha$  n'est pas entier ( $E(\alpha)$  étant la partie entière de  $\alpha$ ).

Dans  $\mathbb{C}^1$  le théorème est dû à Jentzsch-Lindwart-Polya [6], [7]. Dans [1] il a été établi pour  $n \geq 2$  et  $0 < \alpha < 1$ . Le cas général s'obtient par la même méthode que dans [1] et grâce à une représentation intégrale des fonctions entières d'ordre fini de P. Lelong [2].

## 1. Rappel de définitions.

On renvoie le lecteur aux mémoires [3] [4] où sont établies les propriétés ci-dessous dont nous faisons usage. On note  $z = (z_1, \dots, z_n)$  un point

courant de  $\mathbb{C}^n$  et par  $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i\right)^{\frac{1}{2}}$ , la norme euclidienne.  $B(z; r)$  est la boule de centre  $z$  et de rayon  $r > 0$ , portée par  $\mathbb{C}^n$ .

1.1. Soit  $f(z_1, \dots, z_n)$  une fonction holomorphe,  $V = \text{Log} |f|$ . Le courant (au sens de G. Rham)

$$T = \frac{i}{\pi} d' d'' V = \frac{i}{\pi} \sum \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

est l'opérateur d'intégration sur le diviseur  $f = 0$ ; la mesure de Radon positive

$$\sigma = T \wedge \beta_{n-1}$$

où

$$\beta_1 = \frac{i}{2} \sum dz_p \wedge d\bar{z}_p, \quad \beta_{n-1} = \frac{\beta_1^{n-1}}{(n-1)!},$$

est l'aire de l'ensemble analytique  $f = 0$ . L'aire  $\sigma(\overset{\circ}{z}; R)$  contenue dans la boule  $B(\overset{\circ}{z}; R)$ , est pour  $\overset{\circ}{z}$  fixé, fonction croissante de  $R$ . Si  $f(\overset{\circ}{z}) = 0$ , on a

$$(3) \quad \sigma(\overset{\circ}{z}; R) \geq \tau_{2n-2}(1) R^{2n-2}$$

où  $\tau_{2n-2}(1)$  est le volume de la boule unité portée par  $\mathbb{C}^{n-1}$ . Dans le cas  $n = 1$ ,  $\sigma(0; R)$  est le nombre des zéros de  $f(z)$  de module inférieur à  $R$  comptés avec leur multiplicité. Rappelons que  $\sigma(z; R)$  s'exprime en fonction de la moyenne  $\lambda[\text{Log} |f|; z; R]$  de  $\text{Log} |f|$  sur la frontière de la boule  $B(z; R)$ :

$$(4) \quad \sigma(\overset{\circ}{z}; R) = \tau_{2n-2}(1) \nu(z; R) R^{2n-2}$$

où  $\nu(z; R) = \frac{\partial}{\partial \text{Log} R} \lambda[\text{Log} |f|; z; R]$  est positive et croissante de  $R$ .

1.2. *Noyau canonique de genre  $q$ , [5].*

Par analogie avec les facteurs primaires de Weierstrass (dans le cas  $n = 1$ ) on introduit dans  $\mathbb{C}^n$  le noyau  $e_n(a; z; q)$ .

Soit pour  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\frac{1}{\|z-a\|^{2n-2}} = \frac{1}{\|a\|^{2n-2}} + P_1(a; z_i; \bar{z}_j) + \dots + P_s(a; z_i; \bar{z}_j) + \dots$$

le développement au voisinage de  $z = 0$ , du noyau de la théorie du potentiel newtonien. Par définition le noyau primaire de genre l'entier  $q \geq 0$  est la fonction

$$e_n(a; z; q) = - \frac{1}{\|z - a\|^{2n-2}} + \frac{1}{\|a\|^{2n-2}} + P_1(a; z_i; \bar{z}_j) + \dots + P_q(a; z_i; \bar{z}_j).$$

On a la majoration pour tout  $z \in \mathbb{C}^n$  :

$$(5) \quad e_n(a; z; q) \leq c(n, q) \frac{\|z\|^{q+1}}{\|a\|^{2n-2+q} (\|z\| + \|a\|)} \leq c(n, q) \frac{\|z\|^{q+1}}{\|a\|^{2n-1+q}}$$

où  $c(n, q)$  est une constante.

THÉORÈME [2]. Soit  $F(z_1, \dots, z_n)$  une fonction entière,

$$F(0) \neq 0, \nu(t) = \frac{\partial}{\partial \text{Log } t} \lambda[\text{Log } |F|; 0; t], \text{Log}^+ |F| = \text{Sup}(\text{Log } |F|; 0)$$

si

$$\lambda[\text{Log}^+ |F|; 0; t] = o(t^{q+1}) (t \rightarrow \infty)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(t)}{t^{q+1}} < \infty$$

pour l'entier  $q \geq 0$ , on a uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}^n$  (Re désigne une partie réelle),

$$(6) \quad V = \text{Log } |F| = \text{Re} \left[ V(0) + 2 \sum z_i \frac{\partial V}{\partial z_i}(0) + \dots + \frac{2}{q!} \left( \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^q V \right] + \frac{1}{\omega_{2n-2}(1)} \int d\sigma(a) e_n(a; z; q)$$

$\omega_{2n-2}(1)$  étant la mesure-aire de la sphère unité de  $\mathbb{C}^{n-1}$ .

En particulier (6) est valable pour un polynôme  $P_m$  de degré  $m$ ,  $P_m(0) \neq 0$ , avec  $q$  entier  $\geq 0$  quelconque. Rappelons que dans ce dernière cas on a, pour tout  $r \geq 0$  et  $m$  :

$$(7) \quad \frac{1}{m} \sigma_m(r) \leq \tau_{2n-2}(1) r^{2n-2}$$

Inégalité qui résulte de (4) et du fait que pour un polynôme  $P_m$  de degré  $m$ ,  $\frac{\partial}{\partial \text{Log } R} \lambda \left[ \frac{1}{m} \text{Log} |P_m| ; 0 ; R \right] \leq 1$ , quel que soit  $R \geq 0$ .

## 2. Démonstration du théorème 1.

LEMME 1.  $\sigma_m(r)$  étant l'aire de l'ensemble analytique  $P_m = 0$  contenue dans la boule  $B(0; r)$ , on a pour tout  $m$  et  $r \geq 0$

$$(8) \quad \sigma_m(r) \leq Mr^{2n-2+\alpha}.$$

En effet  $m$  étant fixé, on déduit de (2)

$$(9) \quad [\sigma_m(t) t^{-(2n-2+\alpha)}]_0^\infty + (2n-2+\alpha) \int_0^\infty \frac{\sigma_m(t)}{t^{2n-1+\alpha}} dt \leq M.$$

A cause de (7) et du fait que  $\sigma_m(t)$  est nulle au voisinage de  $t=0$ , le premier terme de (9) disparaît. En remarquant que  $\sigma_m(t)$  est fonction croissante de  $t$  on obtient en particulier pour tout  $r \geq 0$ ,

$$(2n-2+\alpha) \sigma_m(r) \int_r^\infty \frac{dt}{t^{2n-1+\alpha}} = \frac{\sigma_m(r)}{r^{2n-2+\alpha}} \leq M.$$

LEMME 2. Soit  $F_m(z_1, \dots, z_n)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) une suite de fonctions entières dont les zéros vérifient pour tout  $m$  et  $r > 0$ ,

$$(10) \quad \sigma_m(r) \leq Mr^{2n-2+\alpha}$$

$\alpha > 0$ ,  $M > 0$  étant des constantes. Alors il n'existe aucun zéro des  $F_m$  dans la boule de centre 0 et de rayon

$$\delta = \alpha \left[ \frac{\tau_{2n-2}(1)}{M} \cdot \frac{(2n-2)^{2n-2}}{(2n-2+\alpha)^{2n-2+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

En effet, l'hypothèse (10) montre que  $F_m(0) \neq 0$  pour tout  $m$ . Soit  $\overset{\circ}{z}$  un point de l'ensemble défini par  $F_m = 0$  ( $m$  fixé). Si  $r > r_0 = \|\overset{\circ}{z}\|$ , écrivons que l'aire  $\sigma_m$  contenue dans la boule  $B(\overset{\circ}{z}; r - r_0)$  est au plus égale à celle

portée par la boule  $B(0; r)$ . Tenant compte de (3) et de (10), on obtient

$$\tau_{2n-2}(1)(r - r_0)^{2n-2} \leq \sigma_m(z; r - r_0) \leq \sigma_m(r) \leq Mr^{2n-2+\alpha}$$

où

$$(11) \quad r - r_0 \leq M' r^{1 + \frac{\alpha}{2n-2}} \quad M' = [M \tau_{2n-2}^{-1}(1)]^{\frac{1}{2n-2}}$$

Considérons la courbe convexe croissante

$$g(r) = M' r^{1 + \frac{\alpha}{2n-2}} \quad (r \geq 0).$$

Menons la tangente de pente 1 (qui existe et est unique). Elle coupe l'axe des  $r$  en un point d'abscisse  $\delta > 0$ . Alors on n'aura (11) pour tout  $r > r_0$  que si la droite  $y = r - r_0$  est au dessous de la tangente en question. Le calcul de  $\delta$  donne l'expression figurant dans l'énoncé.

Revenons au théorème 1. D'après les lemmes 1 et 2, il n'existe aucun zéro des  $P_m$  dans la boule  $B(0; \delta)$ . La convergence uniforme des  $P_m$  dans  $\Omega$  entraîne la convergence des aires  $\sigma_m(t)$  portées par des boules contenues dans  $\Omega$ , vers celle de la fonction limite (d'après (4) et le Th. 6 de [3]). Il en résulte que dans  $\Omega \cap B(0; \delta)$ , la fonction  $F$  limite de  $P_m$  n'a aucun zéro. Pour  $m$  fixé, les conditions de la représentation (6) sont vérifiées pour tout  $q \geq 0$ . En effet, les polynomes sont d'ordre zéro, d'où la première condition. La seconde est aussi vérifiée car pour un polynome de degré  $m$ ,

$$\nu_m(t) = \frac{\partial}{\partial \text{Log } t} \lambda [\text{Log } |P_m|; 0; t] \leq m.$$

Dans la représentation (6) on peut donc prendre  $q \geq 0$  arbitraire. Soit

$$q = \begin{cases} E(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ n'est pas entier} \\ \alpha - 1 & \text{si } \alpha \text{ est entier} \end{cases}$$

Tenant compte de (5), l'intégrale figurant dans (6) est majorée pour tout  $z \in \mathbb{C}^n$ , par

$$(12) \quad c(n, q) \int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\sigma_m(a)}{\|a\|^{2n-1+q}} \|z\|^{q+1}$$

si  $z$  est entier,  $q = \alpha - 1$ , et la dernière expression est majorée d'après (2)

par

$$c(n, \alpha - 1) M \|z\|^\alpha \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Si  $\alpha$  n'est pas entier, une intégration par parties montre que (12) est majorée par

$$c(n, q) (2n - 1 + q) \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt}{t^{2+q-\alpha}} \|z\|^{q+1} = K(\alpha, n, \delta) \|z\|^{E(\alpha)+1} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

D'autre part la convergence uniforme de  $P_m$  dans  $\Omega \cap B(0; \delta)$  vers  $F$  (nécessairement holomorphe) entraîne la convergence uniforme d'une dérivée quelconque de  $P_m$  vers la dérivée correspondante de  $F$ . Or  $F$  ne peut s'annuler dans  $\Omega \cap B(0; \delta)$  comme on a remarqué plus haut. Il en résulte que les coefficients du polynôme de degré  $q$

$$V_m(0) + 2 \sum z_i \frac{\partial V_m(0)}{\partial z_i} + \dots + \frac{2}{q!} \left( \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^q V_m$$

( $V_m = \text{Log} |P_m|$ ) sont uniformément bornés en module par une constante  $K_1$  ne dépendant que de  $q$ . Ceci équivaut à une majoration en module de ce polynôme en tout point  $z \in \mathbb{C}^n$ , par une expression de la forme  $K_2(q) \|z\|^q$  ( $K_2(q) = cte$ ). Ce qui entraîne la même majoration pour sa partie réelle.

Finalement on constate que les polynômes  $P_m$  sont majorés en module uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}^n$  par des expressions de la forme

$$(13) \quad K_2 \|z\|^{\alpha-1} + c(n, \alpha - 1) \omega_{2n-2}^{-1}(1) M \|z\|^\alpha$$

$$(14) \quad K_2 \|z\|^{E(\alpha)} + K(\alpha, n, \delta) \omega_{2n-2}^{-1}(1) \|z\|^{E(\alpha)+1}$$

suivant que  $\alpha$  est entier ou non. Il en résulte d'après le théorème de Stieltjes la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{C}^n$  de la suite  $P_m$ , vers une fonction, entière dont le module est nécessairement majoré par (13) ou (14) suivant que  $\alpha$  est entier ou non. D'où le théorème. Remarquons que les zéros de la fonction limite doivent aussi vérifier (2).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. AVANISSIAN, *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques*. Ann. E.N.S. 1961.
- [2] P. LELONG, *Sur l'extension aux fonctions entières de  $n$  variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstras*. C. R. 237, 1953.
- [3] P. LELONG, *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation*. Ann. E.N.S. 1950.
- [4] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*. Colloque du Sémin. d'été de Varenna Italie, 1963.
- [5] P. LELONG, *Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans  $\mathbb{C}^n$* . Journal d'Analyse Math., Jérusalem. t. 9. 1964.
- [6] R. JENTZSCH, *Sur l'extension d'un théorème de Laguerre*. C.R. 158, 1914.
- [7] E. LINDWART und G. POLYA, *Über einen Zusammenhang zwischen der konvergenz von polynomfolgen...* Rend. cir. mat. di Palermo, 37, 1914.

*Université de Strasburg  
Département de Mathématique.  
Palais de l'Université*