ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. DA PRATO
U. MOSCO

Semigruppi distribuzioni analitici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 3 (1965), p. 367-396
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_367_0>

SEMIGRUPPI DISTRIBUZIONI ANALITICI

G. DA PRATO - U. MOSCO (Pisa) (*)

Introduzione

Un semigruppo distribuzione $\mathfrak{G}$ in uno spazio di Banach X è una rappresentazione uniformemente continua $\mathfrak{G}$ nello spazio X dell'algebra di convoluzione $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ delle funzioni complesse indefinitamente derivabili a supporto compatto contenuto in $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$ munita della usuale topologia. In altre parole $\mathfrak{G}$ è una applicazione lineare continua di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ nello spazio $\mathcal{L}(X, X)$ delle applicazioni lineari continue di X in sè munito della topologia uniforme (cioè $\mathfrak{G}$ è una distribuzione vettoriale appartenente a $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{L}(X, X))$, la quale inoltre verifica la condizione

$$\mathfrak{G}(\varphi * \psi) = \mathfrak{G}(\varphi)\, \mathfrak{G}(\psi), \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}.$$

Tali semigruppi di operatori sono stati introdotti da J. L. LIONS [5] e successivamente considerati anche da J. PEETRE [7] (vedi anche C. FOIAS [1] per i semigruppi distribuzioni in uno spazio di Hilbert e K. YOSHINAGA [16]) in connessione con un problema di Cauchy « astratto » per distribuzioni, dando luogo a una generalizzazione dei semigruppi « ordinari » di operatori e del problema di Cauchy ad essi associato, vedi E. HILLE-R. S. PHILLIPS [3].

J. L. LIONS, loc. cit., ha caratterizzato una particolare classe di semigruppi distribuzioni, verificanti una condizione di regolarità nell'origine e una condizione di crescenza esponenziale per $t \to +\infty$ (cfr. [5] Définition 6.1), dimostrando che un operatore lineare chiuso A con dominio denso in

---

Pervenuto alla Redazione il 16 Febbraio 1965 ed in forma definitiva il 9 Giugno 1965.

(*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 9 nell'anno 1964-65.

X è il generatore infinitesimale di un tale semigruppo distribuzione se e soltanto se lo spettro di A è contenuto in un semipiano $\operatorname{Re} \mu < \xi_0$, ξ_0 reale, e il risolvente $R(\mu, A) = (\mu - A)^{-1}$ di A verifica una maggiorazione del tipo

$$\| R(\mu, A) \| \leq p(|\mu|) \qquad \text{per } \operatorname{Re} \mu > \xi_0$$

con p polinomio opportuno.

Il teorema di LIONS ora citato è una generalizzazione del classico teorema di HILLE-YOSIDA, che caratterizza con una condizione analoga il generatore infinitesimale di un semigruppo « ordinario » fortemente continuo, cfr. E. HILLE-R. S. PHILLIPS, loc. cit., K. YOSIDA [13], etc.

Nell'ambito della teoria dei semigruppi « ordinari » hanno un notevole interesse per le applicazioni, ad esempio per la soluzione delle equazioni di evoluzione in uno spazio di Banach, vedi H. TANABE [12] e T. KATO [4] dove è data una ampia bibliografia sull'argomento, i semigruppi « ordinari » di operatori $G(t)$ prolungabili analiticamente su un settore $S(\theta) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, a un semigruppo analitico $G(\lambda)$ (per tali semigruppi vedi E. HILLE [2], E. HILLE-R. S. PHILLIPS, loc. cit., K. YOSIDA [14] e [15]).

In questo lavoro noi introduciamo la nozione di semigruppo distribuzione *prolungabile analiticamente* sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: un tale semigruppo è un semigruppo distribuzione $\mathfrak{G}$ tale che per ogni fissata $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ l'applicazione

$$s \to \mathfrak{G}_s(\varphi) \text{ di } \mathbb{R}_+ \text{ in } \mathcal{L}(X, X)$$

dove $\mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}(\varphi_s)$ con $\varphi_s(t) = \frac{1}{s}\varphi\left(\frac{t}{s}\right)$, $t \geq 0$, è prolungabile a un'applicazione analitica

$$\lambda \to \mathfrak{G}_\lambda(\varphi) \text{ di } S(\theta) \text{ in } \mathcal{L}(X, X).$$

Questa nozione è una generalizzazione di quella di semigruppo « ordinario » analitico.

Nel § 2 dimostriamo che se $\mathfrak{G}$ è un semigruppo distribuzione con generatore infinitesimale A prolungabile analiticamente su $S(\theta)$, allora per ogni fissato $\lambda \in S(\theta)$ l'applicazione

$$\varphi \to \mathfrak{G}_\lambda(\varphi) \text{ di } \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+} \text{ in } \mathcal{L}(X, X)$$

è un semigruppo distribuzione con generatore infinitesimale λA.

Nel § 3 consideriamo semigruppi distribuzioni regolari esponenziali prolungabili analiticamente su un settore $S(\theta)$, cfr. DEFINIZIONE 3.0.1, e ne caratterizziamo il generatore infinitesimale, generalizzando un noto teorema di E. HILLE e R. S. PHILLIPS, vedi E. HILLE-R. S. PHILLIPS, loc. cit., che caratterizza i semigruppi « ordinari » analitici.

Noi proviamo che un operatore lineare chiuso A con dominio denso in X è il generatore infinitesimale di un semigruppo distribuzione regolare esponenziale prolungabile analiticamente su un settore $S(\theta)$ se e soltanto se esiste un ξ_1 reale tale che lo spettro di A è contenuto nel complementare di un settore

$$S(\xi_1, \alpha) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \xi_1 + \lambda, \ |\arg \lambda| < \alpha\}$$

con $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, e il risolvente $R(\mu, A)$ di A verifica una maggiorazione del tipo

$$\| R(\mu, A) \| < p_\varepsilon(|\mu|)$$

con p_ε polinomio opportuno, su ogni settore $S(\xi_1 + \varepsilon, \alpha - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \alpha$, interno a $S(\xi_1, \alpha)$.

Le notazioni e le definizioni da noi adottate seguono in gran parte (salvo esplicita avvertenza in contrario) il citato lavoro di J. L. LIONS, che supponiamo noto al lettore, e sono raccolte nel § 1, assieme alle principali proprietà dei semigruppi distribuzioni da noi utilizzate nel seguito.

Ringraziamo il Prof. J. L. LIONS, per le utili discussioni avute sull'argomento di questo lavoro.

§ 1. GENERALITÀ SUI SEMIGRUPPI DISTRIBUZIONI

In questo paragrafo riassumiamo le principali proprietà dei semigruppi distribuzioni seguendo l'esposizione di J. L. LIONS, loc. cit.; quando le nostre definizioni si discostano da quelle date in [5] ne è data esplicita avvertenza.

Il contenuto della sez. 1.1 (*d*) è tratto da J. PEETRE, loc. cit., e ci permette di esprimere la condizione di regolarità per un semigruppo distribuzione mediante una condizione equivalente, vedi sez. 1.2 (*b*), che semplificherà in seguito l'esposizione di alcuni risultati.

1.0 Notazioni

Le notazioni da noi usate nel seguito sono le seguenti :

(a) $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{R}_+$, risp. $\bar{\mathbb{R}}_+$) è l'insieme dei numeri reali t (risp. $t > 0$, risp. $t \geq 0$);

$\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri complessi;

(b) $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ è lo spazio delle funzioni su $\mathbb{R}_+$ a valori complessi indefinitamente derivabili e a supporto compatto, con la topologia usuale (cfr. L. SCHWARTZ [8], p. 64); quando sarà necessario considereremo le funzioni di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ definite su tutto $\mathbb{R}$, nulle per $t < 0$;

$\mathcal{D}_-$ è lo spazio delle funzioni su $\mathbb{R}$ a valori complessi indefinitamente derivabili e a supporto limitato a destra, con la topologia usuale (cfr. L. SCHWARTZ [8], p. 28);

$\mathcal{S}$ è lo spazio delle funzioni su $\mathbb{R}$ a valori complessi indefinitamente derivabili e a decrescenza rapida per $|t| \to \infty$, con la topologia usuale (cfr. L. SCHWARTZ [9], p. 89);

$\mathcal{S}^\beta$, per ogni β reale, è lo spazio delle funzioni ψ su $\mathbb{R}$ della forma $\psi(t) = \exp(-\beta t, \varphi(t)$ con $\varphi \in \mathcal{S}$, con la topologia che rende $\varphi \to \exp(-\beta t)\varphi(t)$ un isomorfismo topologico di $\mathcal{S}$ su $\mathcal{S}^\beta$;

(c) $\mathcal{E}'_{\bar{\mathbb{R}}_+}$ è lo spazio delle distribuzioni su $\mathbb{R}$ aventi supporto contenuto in $\bar{\mathbb{R}}_+$, con la usuale topologia (cfr. L. SCHWARTZ [8], 88);

(d) Se Y è uno spazio di Banach (complesso), con

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(Y) \text{ (risp. } \mathcal{D}'_+(Y), \text{ risp. } \mathcal{S}'(Y))$$

indicheremo lo spazio vettoriale complesso

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, Y) \text{ (risp. } \mathcal{L}(\mathcal{D}_-, Y), \text{ risp. } \mathcal{L}(\mathcal{S}, Y))$$

delle applicazioni lineari continue di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ (risp. $\mathcal{D}_-$, risp. S) in Y, con la topologia della convergenza uniforme sui limitati; dunque, $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(Y)$ (risp. $\mathcal{D}'_+(Y)$, risp. $\mathcal{S}'(Y)$) è lo spazio delle distribuzioni vettoriali su $\mathbb{R}_+$ (risp. delle distribuzioni vettoriali su $\mathbb{R}$ a súpporto limitato a sinistra, risp. delle distribuzioni vettoriali temperate su $\mathbb{R}$) a valori in Y (cfr. L. SCHWARTZ [11]);

(e) Indicheremo con X un arbitrario spazio di Banach complesso, con norma $\|\cdot\|$, con X' il duale forte di X, e con $\mathcal{L}(X, X)$ lo spazio di Banach complesso delle applicazioni lineari continue di X in sè, con la definizione usuale di norma di una applicazione che indicheremo ancora con $\|\cdot\|$;

(f) Considereremo su $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ (risp. su $\mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$) la struttura di algebra complessa relativa all'usuale prodotto di convoluzione $*$ di funzioni (risp. di distribuzioni a supporto compatto) e su $\mathcal{L}(X, X)$ l'analoga struttura di algebra relativa all'usuale prodotto di applicazioni.

1.1 Semigruppi distribuzioni (SGD).

(a) Definizione di SGD.

Con le notazioni precedentemente introdotte diamo la seguente definizione di semigruppo distribuzione in uno spazio di Banach

DEFINIZIONE 1.1.1: Un *semigruppo distribuzione in* X (abbr. SGD) è un'applicazione $\mathfrak{G}: \varphi \longrightarrow \mathfrak{G}(\varphi)$ di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ in $\mathcal{L}(X, X)$ tale che

(i) se $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, allora $\mathfrak{G}(\varphi_j) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{L}(X, X)$

(ii) $\mathfrak{G}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\, \mathfrak{G}(\varphi) + \beta\, \mathfrak{G}(\psi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

(iii) $\mathfrak{G}(\varphi * \psi) = \mathfrak{G}(\varphi)\ \mathfrak{G}(\psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

e tale inoltre che sono verificate le seguenti «condizioni ausiliarie»

(iv) $\mathcal{R}(\mathfrak{G}) = \{x : x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i)\, x_i,\ x_i \in X,\ \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}\}$ è denso in X

(v) $\mathcal{K}(\mathfrak{G}) = \{x \in X : \mathfrak{G}(\varphi)\, x = 0\ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}\}$ coincide con $\{0\}$

essendo sottointeso in (iv) che nella somma $\sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i)\, x_i$ soltanto un numero finito di termini è diverso da zero.

È facile verificare che se $G(t)$, $t \geq 0$, è un semigruppo «ordinario» fortemente continuo in X (cfr. E. Hille-R. S. Phillips [3]) e se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ si pone

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, x = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} \varphi(t)\, G(t)\, x\, dt, \quad x \in X$$

l'applicazione $\varphi \longrightarrow \mathfrak{G}(\varphi)$ di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ in $\mathcal{L}(X, X)$ così ottenuta è un SGD.

Per il confronto con la definizione di SGD data in [5] si veda l'osservazione del numero 1.2 sez. (a).

(b) Definizione dell'operatore $\overline{\mathfrak{G}(T)}$, $T \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$.

Per prolungare un SGD $\mathfrak{G}$ sullo spazio $\mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ delle distribuzioni a supporto compatto in $\overline{\mathbb{R}}_+$ consideriamo $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ come un ideale di $\mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ e diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE 1.1.2: Se $\mathfrak{G}$ è un SGD e $T \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ definiamo l'applicazione $\mathfrak{G}(T)$ di $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ in sè ponendo

$$\mathfrak{G}(T)\, x = \sum_i \mathfrak{G}(T * \varphi_i)\, x_i \quad \text{per} \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}) \tag{1.1.1}$$

se risulta $x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i)\, x_i$, $x_i \in X$, $\varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$.

Il vettore $\mathfrak{G}(T)x$ così definito non dipende dalla particolare decomposizione di x considerata; cioè se $\sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i)x_i = 0$ allora anche $\sum_i \mathfrak{G}(T * \varphi_i)x_i = 0$; basta infatti considerare una successione regolarizzante $\{\varrho_\nu\}$: $\varrho_\nu \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, $\varrho_\nu * \varphi \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, e passare al limite nella identità

$$\sum_i \mathfrak{G}(T * \varphi_i * \varrho_\nu)x_i = \sum_i \mathfrak{G}(T * \varrho_\nu)\,\mathfrak{G}(\varphi_i)x_i = 0.$$

Se $T = \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, allora si trova $\mathfrak{G}(T)x = \mathfrak{G}(\varphi)x$ per ogni $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$, e quindi $\mathfrak{G}(T)$ ammette $\mathfrak{G}(\varphi)$ come (unica) estensione continua su tutto X.

Per un arbitrario $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{R}_+}$ $\mathfrak{G}(T)$, come operatore in X con dominio $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$, è pre-chiuso, cioè se $x_n \longrightarrow 0$ in X, $x_n \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$, e $\mathfrak{G}(T)x_n \longrightarrow y$ in X, allora $y = 0$; si ha infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

$$\mathfrak{G}(\varphi)\,\mathfrak{G}(T)x_n \longrightarrow \mathfrak{G}(\varphi)y \quad \text{e} \quad \mathfrak{G}(\varphi)\,\mathfrak{G}(T)x_n = \mathfrak{G}(T * \varphi)x_n \longrightarrow 0$$

e quindi $\mathfrak{G}(\varphi) = 0$ e pertanto, per la condizione (v), è $y = 0$.

Dunque $\mathfrak{G}(T)$, $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{R}_+}$, ammette una minima estensione chiusa in X, che indicheremo con $\overline{\mathfrak{G}(T)}$. A ogni $T \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ abbiamo così associato un operatore lineare chiuso $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ in X, con dominio $D(\overline{\mathfrak{G}(T)})$ contenente $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ e quindi, per la condizione (iv), denso in X.

Conviene notare esplicitamente che si ha

$$\overline{\mathfrak{G}(T)}\,\mathfrak{G}(\varphi) = \mathfrak{G}(T * \varphi) \qquad T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{R}_+} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}. \tag{1.1.2}$$

OSSERVAZIONE: La definizione dell'operatore $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ per $T \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ da noi data si trova in [7], p. 80 ed anche in [16], p. 17 ed è a priori diversa da quella data da J. L. LIONS. loc. cit., p. 143. Tuttavia si prova facilmente, si veda per es. [16], loc. cit., che l'operatore $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ da noi definito coincide con l'operatore $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ introdotto in [5].

(*c*) Definizione del generatore infinitesimale di un SGD.

Indichiamo con $\delta = \delta_0$ la misura di Dirac con supporto nell'origine, con $\delta' = \delta^{(1)}$ la distribuzione derivata di δ e in generale con $\delta^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, la distribuzione derivata di ordine k di δ.

DEFINIZIONE 1.1.3: Il *generatore infinitesimale* di un SDG $\mathfrak{G}$ è l'operatore $A = \overline{\mathfrak{G}(-\delta')}$.

A è dunque un operatore lineare chiuso con dominio $D(A)$ denso in X, $D(A) \supset \mathcal{R}(\mathfrak{G})$. Si verifica facilmente che la DEFINIZIONE 1.1.3 generalizza la usuale definizione di generatore infinitesimale di un semigruppo « ordinario » fortemente continuo, cfr. HILLE-PHILLIPS, loc. cit..

Si ha evidentemente, se $A^k = \mathfrak{G}(-\delta^{(k)})$ e $\mathfrak{G}^{(k)}$ è la derivata di ordine k della distribuzione $\mathfrak{G}$, $k = 1, 2, \ldots$.

(1.1.3) $$\mathfrak{G}^{(k)}(\varphi) = A^k \mathfrak{G}(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

(1.1.4) $$\mathfrak{G}^{(k)}(\varphi)\, x = \mathfrak{G}(\varphi)\, A^k x \qquad \varphi \in \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+} \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$$

(*d*) Semigruppo $G(t)$, $t \geq 0$, associato a un SGD.

Consideriamo ora l'immersione canonica $t \longrightarrow \delta_t$ di $\overline{\mathbb{R}}_+$ in $\mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, essendo δ_t, per $t \geq 0$, la misura di Dirac con supporto $\{t\}$. Osserviamo, in particolare, che $t + s \longrightarrow \delta_t * \delta_s$, $t, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Si può porre

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

e si ottiene così un operatore lineare chiuso con dominio denso in X contenente $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$, per quanto è stato provato nella precedente sez. (*b*).

Le proprietà dell'applicazione $t \longrightarrow G(t)\, x$, $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$, enunciate nella proposizione seguente sono tutte di dimostrazione immediata.

PROPOSIZIONE 1.1.1. : *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGD. *Allora per ogni* $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ *l'applicazione* $t \longrightarrow G(t)\, x$ *di* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *in* X *ha le seguenti proprietà*

(1.1.5) $t \longrightarrow G(t)\, x$ *è continua*

(1.1.6) $G(s)\, x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ *per ogni* $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *e* $G(0)\, x = x$

(1.1.7) $G(t + s)\, x = G(t)\, G(s)\, x, \quad t, s \in R_+$.

Da queste proprietà si deduce facilmente che per ogni $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ la distribuzione $\mathfrak{G}\, x \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(X)$ definita ponendo

$$\mathfrak{G}\, x(\varphi) = \mathfrak{G}(\varphi)\, x \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

è q.o. uguale alla funzione continua $u(t) = G(t)\, x$ su $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Si ha infatti

COROLLARIO 1.1.2 : *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGD. *Allora per ogni* $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ *risulta*

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, x = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} \varphi(t)\, G(t)\, x\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}.$$

1.2 Semigruppi distribuzioni regolari.

Riassumiamo in questo numero alcune definizioni ed alcune proprietà di una classe di SGD verificanti particolari condizioni di regolarità nell'origine. Tale classe di SGD è stata introdotta da J. L. Lions, loc. cit., ed associata a un particolare problema di Cauchy per distribuzioni vettoriali.

(*a*) Definizione di SGD regolare

Definizione 1.2.1: Un SGD *regolare* $\mathfrak{G}$ in X è un SGD $\mathfrak{G}$ in X il quale inoltre verifica le seguenti condizioni

(vi) $\mathfrak{G}$ si prolunga a un'applicazione lineare continua (che indichiamo ancora con $\mathfrak{G}$) di $\mathcal{D}_-$ in $\mathcal{L}(X, X)$, cioè $\mathfrak{G} \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(X, X))$, e la distribuzione $\mathfrak{G}$ ha supporto contenuto in $\overline{\mathbb{R}}_+$;

(vii) Per ogni $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ la distribuzione $\mathfrak{G}x \in \mathcal{D}'_+(X)$, definita ponendo $\mathfrak{G}x(\varphi) = \mathfrak{G}(\varphi)\, x$, $\varphi \in \mathcal{D}_-$, è q.o. uguale a una funzione $u(t)$ continua di $\overline{\mathbb{R}}_+$ in X, nulla per $t < 0$, $u(0) = x$.

Osservazione: Noi chiamiamo SGD regolari ciò che in [5] è chiamato semplicemente SGD, cfr. [5] Définition 1.1 e Nota (1) a p. 142. Si verifica facilmente che la condizione (iii) e le condizioni ausiliarie (iv) e (v) come da noi enunciate sono del tutto equivalenti alle analoghe condizioni (ii), (iv) e (v) della definizione sopra citata, dato che lo spazio $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ è denso nello spazio $\mathcal{D}_0$, considerato in [5], nella topologia di $\mathcal{D}_-$.

(b) Una condizione equivalente alla condizione (vii)

Per ogni $\psi \in \mathcal{D}_-$ indichiamo con ψ_+ la funzione $\psi_+(t) = \psi(t)$ per $t \geq 0$, $\psi_+(t) = 0$ per $t < 0$. Evidentemente $\psi_+ \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$.

Si può provare, cfr. [5], Proposition 3.2 p. 146, che se $\mathfrak{G}$ è un SGD regolare allora risulta

$$\overline{\mathfrak{G}(\psi_+)} = \mathfrak{G}(\psi) \in \mathcal{L}(X, X), \qquad \psi \in \mathcal{D}_- \tag{1.2.1}$$

e quindi, in particolare, in virtù della (1.1.2)

$$\mathfrak{G}(\psi)\, \mathfrak{G}(\varphi) = \mathfrak{G}(\psi_+ * \varphi), \; \psi \in \mathcal{D}_-, \; \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+} \tag{1.2.2}$$

In seguito dovremo utilizzare il fatto che la condizione (1.2.2) è in effetti equivalente alla condizione (vii) della Definizione 1.2.1. Più precisamente

PROPOSIZIONE 1.2.1 : *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGD *verificante la condizione* (vi) *della* DEFINIZIONE 1.2.1. *Allora la* (1.2.2), *oltre che necessaria, è anche sufficiente perchè sussista la condizione* (vii) *della citata definizione e quindi perchè* $\mathfrak{G}$ *sia un* SGD *regolare.*

DIMOSTRAZIONE : Basta provare, in virtù della PROPOSIZIONE 1.1.1, che per ogni $x \in \mathbf{R}(\mathfrak{G})$ risulta

$$\mathfrak{G}(\psi)\, x = \int_{\bar{\mathbf{R}}_+} \psi_+(t)\, G(t)\, x\, dt, \qquad \psi \in \mathcal{D}_-,$$

e quindi, in virtù della condizione (v), basta provare che per ogni $x \in \mathbf{R}(\mathfrak{G})$ e ogni $\psi \in \mathcal{D}_-$ risulta

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, \mathfrak{G}(\psi) = \mathfrak{G}(\varphi) \int_{\bar{\mathbf{R}}_+} \psi_+(t)\, G(t)\, x\, dt, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbf{R}_+}.$$

Si ha infatti, per l'ipotesi (1.2.1) e per il COROLLARIO 1.1.2, tenendo ancora conto della PROPOSIZIONE 1.1.1

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, \mathfrak{G}(\psi)\, x = \mathfrak{G}(\psi_+ * \varphi)\, x = \int_{\bar{\mathbf{R}}_+} \int_{\bar{\mathbf{R}}_+} \psi(t)\, \varphi(s)\, \mathfrak{G}(t+s)\, dt\, ds =$$

$$= \int_{\bar{\mathbf{R}}_+} \psi(t)\, \mathfrak{G}(t)\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x\, dt = \mathfrak{G}(\varphi) \int_{\bar{\mathbf{R}}_+} \psi(t)\, \mathfrak{G}(t)\, x\, dt.$$

Q. E. D.

(*c*) Alcune proprietà dei SGD regolari.

Come abbiamo già accennato all'inizio J. L. LIONS ha provato che $\mathfrak{G}$ è un SGD regolare in X con generatore infinitesimale A se e soltanto se la distribuzione $\mathfrak{G} \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(X, X))$ è soluzione di un particolare problema di Cauchy per l'operatore lineare chiuso A con dominio denso in X, cfr. Theorème 4.1 e Theorème 5.1, [5] p. 147 e p. 149.

In particolare J. L. LIONS ha provato che un SGD regolare è individuato univocamente dal suo generatore infinitesimale: se $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ sono SGD regolari in X con generatori infinitesimali A_1 e A_2 e si ha $A_1 = A_2$, allora $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$.

Ne segue, in particolare, che se $\mathfrak{G}$ è un SGD, allora l'applicazione che prolunga $\mathfrak{G}$ su $\mathcal{D}_-$ e verifica le condizioni (vi) e (vii) della DEFINIZIONE 1.2.1, se esiste è unica.

1.3 Semigruppi distribuzioni regolari a crescenza esponenziale (SGDE).

Per potere caratterizzare il generatore infinitesimale di un SGD regolare $\mathfrak{G}$, conviene imporre a $\mathfrak{G}$ una condizione di crescenza per $t \longrightarrow +\infty$, la quale in sostanza permette di calcolare la trasformata di Laplace di $\mathfrak{G}$.

(*a*) Definizione di SGDE.

Seguendo J. L. LIONS, loc. cit., diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.3.1: Un SGD *regolare a crescenza esponenziale in* X (abbr. SGDE) è un SGD regolare $\mathfrak{G}$ il quale inoltre verifica la seguente condizione

(viii) esiste un ξ_0 reale tale che per ogni $\beta > \xi_0$ risulta $e^{-\beta t}\,\mathfrak{G} \in \mathcal{S}'(\mathcal{L}(X, X))$, cioè $e^{-\beta t}\,\mathfrak{G}$ è una distribuzione temperata a valori in $\mathcal{L}(X, X)$.

Diremo che un SGDE $\mathfrak{G}$ è di *tipo negativo* (risp. di *tipo positivo*) se la (viii) è vera per un $\xi_0 \leq 0$ (risp. $\xi_0 \geq 0$); diremo anche che $\mathfrak{G}$ è *di tipo* ξ_0 se risulta

$$\xi_0 = \inf \{\beta \in \mathbb{R} : e^{-\beta t}\,\mathfrak{G} \in \mathcal{S}'(\mathcal{L}(X, X))\}$$

Un SGDE $\mathfrak{G}$ di tipo ξ_0 è, in particolare, per ogni $\beta > \xi_0$ un'applicazione lineare continua di $\mathcal{S}^\beta$ in $\mathcal{L}(X, X)$: per ogni $\psi \in \mathcal{S}^\beta$ con $\psi = e^{-\beta t}\varphi$ $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\mathfrak{G}(\psi) = e^{-\beta t}\,\mathfrak{G}(e^{\beta t}\psi)$$

cfr. [5], (6.4), p. 155.

(*b*) La trasformata di Laplace di un SGDE.

Se $\mathfrak{G}$ è un SGDE di tipo ξ_0 si può definire $\overline{\mathfrak{G}(T)}$ come operatore lineare chiuso con dominio denso in X non soltanto per distribuzioni $T \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, ma anche per distribuzioni T a supporto qualunque in $\overline{\mathbb{R}}_+$ e opportunamente decrescenti per $t \longrightarrow +\infty$, cfr. [5], p. 155.

In particolare, considerata la funzione

$$\Omega(t) = e^{-\mu t}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.3.1}$$

si può definire, per Re $\mu > \xi_0$, l'operatore $\overline{\mathfrak{G}(\Omega_+)}$, dove è

$$\Omega_+(t) = \Omega(t) \quad \text{se} \quad t \geq 0, \qquad \Omega_+(t) = 0 \quad \text{se} \quad t > 0\,.$$

Generalizzando la (1.2.1) si prova d'altra parte, cfr. [5], Proposition 6.1, p. 156, che per tale Ω risulta

$$\overline{\mathfrak{G}(\Omega_+)} = \mathfrak{G}(\Omega) \in \mathcal{L}(X, X) \tag{1.3.2}$$

dove $\mathfrak{G}(\Omega)$ è definito considerando una qualunque funzione indefinitamente derivabile su $\mathbb{R}$ a supporto limitato a sinistra, con $\theta(t) = 1$ per $t \geq -\eta$, per un fissato $\eta > 0$, e ponendo

$$(1.3.3) \qquad \mathfrak{G}(\Omega) = \mathfrak{G}(\theta\,\Omega), \qquad \mathrm{Re}\ \mu > \xi_0$$

(si osservi che $\theta\Omega \in \mathcal{S}^\beta$ per Re $\mu > \beta > \xi_0$ e che $\mathfrak{G}(\theta\Omega)$ non dipende dalla particolare funzione θ soddisfacente alle condizioni richieste).

$\mathfrak{G}(\Omega)$ come funzione della variabile $\mu \in \mathbb{C}$ sul semipiano Re $\mu > \xi_0$ è la trasformata di Laplace della distribuzione $\mathfrak{G}$, cfr. L. SCHWARTZ [10] e J. L. LIONS [6].

Si prova infine che $\overline{\mathfrak{G}(\Omega_+)} = \mathfrak{G}(\Omega)$ coincide, ancora per Re $\mu > \xi_0$, con l'operatore risolvente $R(\mu, A) = (\mu - A)^{-1}$ del generatore infinitesimale A del SGDE $\mathfrak{G}$ (*). Dunque $R(\mu, A)$ coincide, per Re $\mu > \xi_0$, con la trasformata di Laplace di $\mathfrak{G}$

$$(1.3.4) \qquad R(\mu, A) = \mathfrak{G}(e^{-\mu t}) \quad \text{per} \quad \mathrm{Re}\,\mu > \xi_0$$

cfr. [5], parte 2) della dimostrazione del Theorème 7.1, p. 158.

(*c*) Il teorema di LIONS.

Il teorema di J. L. LIONS che caratterizza il generatore infinitesimale di un SGDE è il seguente, cfr. [5] Theorème 6.1, p. 157.

TEOREMA 1.3.1 : *Un operatore lineare chiuso A con dominio denso in uno spazio di Banach X è il generatore infinitesimale di un* SGDE $\mathfrak{G}$ *in X se e soltanto se sono verificate le seguenti condizioni*

(*j*) *lo spettro $\sigma(A)$ di A è contenuto in un semipiano* Re $\mu \leq \xi_0$ *per un opportuno ξ_0 reale*

(*jj*) *il risolvente $R(\mu, A)$ di A verifica una maggiorazione*

$$\| R(\mu, A) \| \leq p(|\mu|) \quad \text{per} \quad \mathrm{Re}\,\mu > \xi_0$$

con $p(\mu)$ opportuno polinomio a coefficienti positivi.

(*) Ricordiamo che il risolvente $R(\mu, A) = (\mu - A)^{-1}$ di un operatore lineare chiuso A con dominio $D(A)$ in X è per ogni $\mu \in \mathbb{C}$, se esiste, l'operatore (unico) $R(\mu, A) \in \mathcal{L}(X, X)$ tale che

(i) per ogni $x \in X$ si ha $R(\mu, A)\, x \in D(A)$ e $(\mu - A)\; R(\mu, A)\, x = x$

(ii) per ogni $x \in D(A)$ si ha $R(\mu, A)\,(\mu - A)\, x = x.$

L'insieme dei $\mu \in \mathbb{C}$ tali che non esiste un operatore di $\mathcal{L}(X, X)$ verificante la suddetta condizione è detto lo spettro $\sigma(A)$ di A. ($\sigma(A)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{C}$.)

§ 2. SGD prolungabili analiticamente su un settore

2.0 Sommario.

Sia $\mathfrak{G}$ un SGD in X. Poniamo

$$\mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}(\varphi_s) \tag{2.0.1}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ e ogni $s \in R_+$ dove φ_s è la funzione

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{s}\,\varphi\left(\frac{t}{s}\right), \qquad t \geq 0\,. \tag{2.0.2}$$

Proveremo dapprima che, per ogni fissato $s \in R_+$, l'applicazione

$$\mathfrak{G}_s : \varphi \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\varphi) \text{ di } \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+} \text{ in } \mathcal{L}(X, X)$$

così ottenuta è un SGD e che, per ogni fissata $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, l'applicazione

$$s \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\varphi) \text{ di } \mathbb{R}_+ \text{ in } \mathcal{L}(X, X)$$

è indefinitamente derivabile.

Per ogni θ con $0 < \theta < 2\pi$ porremo

$$S(\theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0,\ |\arg \lambda| < \theta\}\,. \tag{2.0.3}$$

Diamo la seguente definizione

Definizione 2.0.1: Un SGD $\mathfrak{G}$ in X è *prolungabile analiticamente* (abbr. SGDA) sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ l'applicazione

$$s \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\varphi) \text{ di } \mathbb{R}_+ \text{ in } \mathcal{L}(X, X),$$

con $\mathfrak{G}_s(\varphi)$ dato da (2.0.1), è prolungabile a un'applicazione analitica

$$\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi) \text{ di } S(\theta) \text{ in } \mathcal{L}(X, X)\,.$$

Diremo anche che $\mathfrak{G}_\lambda$, $\lambda \in S(\theta)$, è un *prolungamento analitico* di $\mathfrak{G}$ su $S(\theta)$.

Dimostreremo che se $\mathfrak{G}$ è un SGDA su $S(\theta)$, allora per ogni fissato $\lambda \in S(\theta)$, l'applicazione

$$\mathfrak{G}_\lambda : \varphi \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi) \text{ di } \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+} \text{ in } \mathcal{L}(X, X)$$

è un SGD. Proveremo inoltre che se A è il generatore infinitesimale di $\mathfrak{G}$, allora il generatore infinitesimale del SGD $\mathfrak{G}_\lambda$ è l'operatore λA.

2.1 Il SGD $\mathfrak{G}_s$.

Proviamo dapprima la seguente proposizione

PROPOSIZIONE 2.1.1: *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGD *con generatore infinitesimale* A. *Allora per ogni* $s \in R_+$ *l'applicazione* $\mathfrak{G}_s : \varphi \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, *con* $\mathfrak{G}_s(\varphi)$ *dato da* (2.0.1), *è un* SGD *con generatore infinitesimale* sA. *Inoltre se* $\mathfrak{G}$ *è un* SGD *regolare* (*risp. un* SGDE *di tipo* ξ_0), *allora anche* $\mathfrak{G}_s$, $s \in \mathbb{R}_+$, *è un* SGD *regolare* (*risp. un* SGDE *di tipo* $\xi_0 s$).

DIMOSTRAZIONE: Per provare che per ogni fissato $s \in \mathbb{R}_+$ $\mathfrak{G}_s(\varphi)$ è un SGD basta osservare che $\varphi \longrightarrow \varphi_s$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, è un isomorfismo topologico dell'algebra $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ su $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$.

Proviamo ora che il generatore infinitesimale $A_s = \mathfrak{G}_s(-\delta')$ del SGD $\mathfrak{G}_s$, $s \in \mathbb{R}_+$, è l'operatore sA. Per quanto abbiamo sopra osservato risulta $\mathbb{R}(\mathfrak{G}_s) = \mathbb{R}(\mathfrak{G})$, dove $\mathbb{R}(\mathfrak{G})$ è definito nella (iv) della DEFINIZIONE 1.1.1 e $\mathbb{R}(\mathfrak{G}_s)$ è dato da

$$\mathbb{R}(\mathfrak{G}_s) = \{x : x = \sum_i \mathfrak{G}_s(\varphi_i)\, x_i \,,\ \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+},\ x_i \in X\}.$$

Dunque $D(\mathfrak{G}_s(-\delta')) = D(\mathfrak{G}(-\delta'))$. Basta quindi provare che se $y \in \mathbb{R}(\mathfrak{G})$, allora $\mathfrak{G}_s(-\delta')\, y = s\, \mathfrak{G}(-\delta')\, y$. Si ha infatti se $y = \mathfrak{G}(\varphi)\, x$, con $x \in X$ e $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

$$\mathfrak{G}_s(-\delta')\, y = \mathfrak{G}_s(-\delta' * \varphi_{s-1})\, x = \mathfrak{G}(-s\delta' * \varphi)\, x = s\, \mathfrak{G}(-\delta')\, y\,.$$

Dimostriamo ora che se $\mathfrak{G}$ è un SGD regolare allora anche il SGD $\mathfrak{G}_s$, $s \in \mathbb{R}_+$ è regolare. Basta porre per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_-$ $\mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}(\varphi_s)$, con la φ_s ancora data da (2.0.2). Si verifica facilmente che $\mathfrak{G}_s \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}(X, X))$, $\mathfrak{G}_s$ nulla per $t < 0$, e che per ogni $y \in \mathbb{R}(\mathfrak{G}_s)$ la distribuzione $\mathfrak{G}_s x \in \mathcal{D}'_+(X)$, definita ponendo $\mathfrak{G}_s x(\varphi) = \mathfrak{G}_s(\varphi)\, x$, $\varphi \in \mathcal{D}_-$, è q.o. uguale alla funzione continua $u_s(t) = u(st)$, $t \in \mathbb{R}_+$, dove $u(t)$ è la funzione verificante la condizione (vii). Dunque, per la DEFINIZIONE 1.2.1, anche $\mathfrak{G}_s$, $s \in \mathbb{R}_+$, è un SGD regolare.

Infine se $\mathfrak{G}$ è un SGDE di tipo ξ_0, tenuto conto che per ogni $\beta > \xi_0 s$, $s \in \mathbb{R}_+$, si può porre $e^{-\beta t} \mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}(e^{-\frac{\beta}{s} t} \varphi_s)$, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, se ne deduce che $\mathfrak{G}_s$ è un SGDE di tipo $\xi_0 s$. Q.E.D.

Indicheremo con $\mathfrak{G}_s^{(k)}$, per $s \in \mathbb{R}_+$ e $k = 1, 2, \dots$, la distribuzione vettoriale su $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ derivata di ordine k della distribuzione $\mathfrak{G}_s \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{L}(X, X))$.

PROPOSIZIONE 2.1.2: *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGD. *Per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ *l'applicazione* $s \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\varphi)$ *di* $\mathbb{R}_+$ *in* $\mathcal{L}(X, X)$ *è indefinitamente derivabile e qualunque sia* $s \in \mathbb{R}_+$ *si ha*

$$\frac{d^k}{ds^k} \mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}^{(k)}((t^k \varphi)_s) = \frac{1}{s^k} \mathfrak{G}_s^{(k)}(t^k \varphi), \qquad k = 1, 2, \dots \tag{2.1.1}$$

DIMOSTRAZIONE: Proviamo dapprima (2.1.1) per $k = 1$. Proviamo cioè che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ si ha qualunque sia $s \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{d}{ds} \mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}^{(1)}((t\varphi)_s) = \frac{1}{s} \mathfrak{G}_s^{(1)}(t\varphi).$$

Basta evidentemente osservare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ e ogni $s \in \mathbb{R}_+$ sussistono le seguenti relazioni

$$\frac{d}{ds} \mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}\left(\frac{\partial}{\partial s} \varphi_s\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi_s = -\frac{\partial}{\partial t}(t\varphi)_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_s = \frac{1}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi\right)_s$$

nelle quali φ_s è considerata come una funzione $\eta(s, t) = \varphi_s(t)$ definita su $\mathbb{R}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ e, per ogni fissato $s \in \mathbb{R}_+$, $\frac{\partial}{\partial s} \varphi_s$ e $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_s$ sono funzioni di $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$.

Infine, per provare (2.1.1) per ogni $k = 1, 2, \dots$ basta provare che per ogni $k = 1, 2, \dots$ sussistono le relazioni

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathfrak{G}_s(\varphi) = \mathfrak{G}_s\left(\frac{\partial^k}{\partial s^k}\varphi_s\right)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k}\varphi_s \quad = (-1)^k\frac{\partial^k}{\partial t^k}(t^k\varphi)_s$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi_s \quad = \frac{1}{s^k}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\right)_s$$

qualunque siano $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, $s \in \mathbb{R}_+$. Queste relazioni si provano facilmente per induzione a partire da quelle già considerate per $k = 1$. Q.E.D.

2.2. Il SGD $\mathfrak{G}_\lambda$.

Il seguente lemma è un corollario della PROPOSIZIONE 2.1.2

LEMMA 2.2.1: *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGDA *sul settore* $S(\theta)$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. *Allora per ogni* $k = 1, 2, \ldots$ *si ha qualunque sia* $\lambda \in S(\theta)$

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathfrak{G}_\lambda(\varphi) = \frac{(-1)^k}{\lambda^k}\mathfrak{G}_\lambda((t^k\varphi)^{(k)}), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}. \tag{2.2.1}$$

DIMOSTRAZIONE: Dalla PROPOSIZIONE 2.1.2 si trae che (2.2.1) è vera se $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$. D'altra parte, qualunque sia $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ le applicazioni $\lambda \longrightarrow \dfrac{d^k}{d\lambda^k}\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$ e $\lambda \longrightarrow \dfrac{(-1)^k}{\lambda^k}\mathfrak{G}_\lambda((t^k\varphi)^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, di $S(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$ sono analitiche. Ne segue allora che le (2.2.1) sono vere per ogni $\lambda \in S(\theta)$. Q.E.D.

PROPOSIZIONE 2.2.1: *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGDA *su* $S(\theta)$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. *Allora per ogni* $\lambda \in S(\theta)$ *l'applicazione* $\mathfrak{G}_\lambda : \varphi \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$ *di* $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ in $\mathcal{L}(X, X)$ *è un* SGD.

DIMOSTRAZIONE: Le applicazioni

$$\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\alpha\varphi + \beta\psi) - \alpha\,\mathfrak{G}_\lambda(\varphi) - \beta\,\mathfrak{G}_\lambda(\psi)$$

$$\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi * \psi) - \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,\mathfrak{G}_\lambda(\psi)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, di $S(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$ sono analitiche e nulle su $\mathbb{R}_+$ in virtù della PROPOSIZIONE 2.1.1. Dunque esse sono nulle su $S(\theta)$ e ne segue che, per ogni $\lambda \in S(\theta)$, $\mathfrak{G}_\lambda$ verifica le condizioni (ii) e (iii) della DEFINIZIONE 1.1.1.

Proviamo ora che, per ogni $\lambda \in S(\theta)$, $\mathfrak{G}_\lambda : \varphi \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$ è un'applicazione continua di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ in $\mathcal{L}(X, X)$. Qualunque siano $x \in X$ e $x' \in X'$ poniamo

$$T_{\lambda, x, x'}(\varphi) = \langle \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x, x' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, \quad \lambda \in S(\theta).$$

Risulta allora

$$T_{\lambda, x, x'}(\varphi) = \lim_{n \to \infty} T_{\lambda, x, x', n}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+},$$

avendo posto per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$T_{\lambda, x, x', n}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda - s)^k}{k\,!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \langle \mathfrak{G}_s(\varphi)\, x, x' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

con $s \in \mathbb{R}_+$ opportuno. Ne segue che $T_{\lambda, x, x'} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{C})$, dato che $T_{\lambda, x, x', n} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{C})$ per ogni n come è evidente in base alla (2.2.1). Sia ora Γ un arbitrario sottoinsieme chiuso e limitato di $S(\theta)$. Poichè per ogni fissato $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ l'insieme $\{ \mid T_{\lambda, x, x'}(\varphi) \mid : \lambda \in \Gamma \}$ è limitato ne segue che $\{ T_{\lambda, x, x'} : \lambda \in \Gamma \}$ è limitato in $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{C})$. Allora, in virtù del teorema di Banach-Steinhaus, per ogni limitato B di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ esiste una costante $M(\Gamma, B) > 0$ tale che

$$(2.2.2) \qquad \| \mathfrak{G}_\lambda(\varphi) \| \leq M(\Gamma, B) \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in \Gamma \quad \text{e ogni} \quad \varphi \in B\,.$$

Sia ora $\Gamma(s)$ un arbitrario cerchio chiuso di centro $s \in \mathbb{R}_+$ contenuto in $S(\theta)$ e proviamo che per ogni $\lambda \in \Gamma(s)$ l'applicazione $\mathfrak{G}_\lambda$ è continua su $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$; ne seguirà allora la tesi voluta, data l'arbitrarietà di $\Gamma(s)$. Si abbia dunque $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$. Per ogni j le applicazioni $\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi_j)$ sono analitiche su $S(\theta)$ ed equilimitate in $\mathcal{L}(X, X)$ su $\Gamma(s)$ in virtù di quanto provato con la (2.2.2); inoltre per ogni $r \in \mathbb{R}_+$ si ha $\mathfrak{G}_r(\varphi_j) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{L}(X, X)$ in virtù della PROPOSIZIONE 2.1.1. Ne segue allora, per il teorema di VITALI, che $\mathfrak{G}_\lambda(\varphi_j) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{L}(X, X)$, qualunque sia $\lambda \in \Gamma(s)$.

Resta ora da provare che sono verificate le condizioni ausiliarie (iv) e (v) della DEFINIZIONE 1.1.1 e cioè che, per ogni fissato $\lambda \in S(\theta)$

$$\mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda) = \{ x : x = \Sigma\, \mathfrak{G}_\lambda(\varphi_i)\, x_i\,, \ \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, \ x_i \in X \}$$

è denso in X e

$$\mathcal{K}(\mathfrak{G}_\lambda) = \{ x \in X : \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x = 0 \qquad \text{per ogni} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+} \}$$

è costituito dal solo 0.

Per la PROPOSIZIONE 2.1.1 sappiamo già che se $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$ allora $\overline{\mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda)} = X$ e $\mathcal{K}(\mathfrak{G}_\lambda) = \{0\}$. Sia dunque $\lambda_0 \in S(\theta)$ tale che $\overline{\mathbb{R}(\mathfrak{G}_{\lambda_0})} = X$ e $\mathcal{K}(\mathfrak{G}_{\lambda_0}) = \{0\}$ e sia $\Omega(\lambda_0)$ un intorno di λ_0 contenuto in $S(\theta)$ tale che, per ogni fissato $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$, converga in λ_0 lo sviluppo di Taylor di $\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, con punto iniziale λ. Posto allora per ogni $x \in X$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^k}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

si ha $x_n \longrightarrow \mathfrak{G}_{\lambda_0}(\varphi)\, x$ in X e in virtù del LEMMA 2.2.1 risulta $x_n \in \mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda)$. Ne segue che $\overline{\mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda)}$ contiene $\mathbb{R}(\mathfrak{G}_{\lambda_0})$ e dunque che $\overline{\mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda)} = X$ per ogni $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$.

In modo analogo si prova che $\mathcal{K}(\mathfrak{G}_\lambda) = \{0\}$, $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$. Se infatti $x \in \mathcal{K}(\mathfrak{G})$ ancora per il LEMMA 2.2.1 risulta $\dfrac{d^k}{d\lambda^k} \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, e quindi si ha $\mathfrak{G}_{\lambda_0}(\varphi)\, x = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, cioè $x \in \mathcal{K}(\mathfrak{G}_{\lambda_0})$ e dunque $x = 0$.

Sia ora λ arbitrario in $S(\theta)$. Evidentemente esistono un numero finito $m + 1$ di punti $\lambda_i \in S(\theta)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ e $m + 1$ intorni $\Omega(\lambda_i)$ di ciascuno di essi contenuti in $S(\theta)$, tali che $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \in \Omega(\lambda_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda \in \Omega(\lambda_m)$, e tali che per ogni fissato $\mu \in \Omega(\lambda_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, converge in λ_i per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ lo sviluppo di Taylor di $\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$ con punto iniziale μ. Tenuto conto di quanto si è finora dimostrato si prova, per induzione finita sull'indice i, che $\overline{\mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda)} = X$ e $\mathcal{K}(\mathfrak{G}_\lambda) = 0$. Q.E.D.

2.3. Il generatore infinitesimale del SGD $\mathfrak{G}_\lambda$.

Prima di dimostrare che, se $\mathfrak{G}_\lambda$ è un prolungamento analitico su $S(\theta)$ di un SGD $\mathfrak{G}$ avente generatore infinitesimale A, allora per ogni $\lambda \in S(\theta)$ il generatore infinitesimale del SGD $\mathfrak{G}_\lambda$ è l'operatore λA, conviene provare direttamente la seguente proposizione

PROPOSIZIONE 2.3.1: *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGDA *sul settore* $S(\theta)$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. *Se* A *è il generatore infinitesimale di* $\mathfrak{G}$ *si ha qualunque sia* $\lambda \in S(\theta)$ *per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

(2.3.1) $\qquad \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x \in D(A) \quad$ se $\quad x \in X$

(2.3.2) $\qquad \mathfrak{G}_\lambda^{(1)}(\varphi) = \lambda A\, \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$

e inoltre

$$A\,\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x = \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,Ax \qquad se \quad x \in D(A). \tag{2.3.3}$$

DIMOSTRAZIONE: Proviamo dapprima che qualunque sia $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ per ogni $\lambda \in S(\theta)$ risulta

$$\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x \in D(A) \qquad \text{se} \quad x \in D(A) \tag{2.3.4}$$

e sussiste la (2.3.3).

Osserviamo che (2.3.4) e (2.3.3) sono vere, per la PROPOSIZIONE 2.1.1, se $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$. Sia allora $\lambda_0 \in S(\theta)$ tale che per $\lambda = \lambda_0$ sono verificate (2.3.4) e (2.3.3) e sia $\Omega(\lambda_0)$ un intorno di λ_0 contenuto in $S(\theta)$ tale che su $\Omega(\lambda_0)$ converga lo sviluppo di Taylor di $\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$ di punto iniziale λ_0. Posto qualunque siano $x \in D(A)$ e $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{k\,!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \mathfrak{G}_{\lambda_0}(\varphi)\,x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

si ha dunque $x_n \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x$ in X e d'altra parte, per il LEMMA 2.2.1, poichè supponiamo (2.3.4) vera per $\lambda = \lambda_0$, risulta $x_n \in D(A)$. Ancora per il lemma citato e per la (2.3.3), che supponiamo vera per $\lambda = \lambda_0$, si ha

$$Ax_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{k\,!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \mathfrak{G}_{\lambda_0}(\varphi)\,Ax$$

e dunque $Ax_n \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,Ax$ in X. Ne segue, poichè A è chiuso, che $\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x \in D(A)$ e $A\,\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x = \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,Ax$. Dunque (2.3.4) e (2.3.3) sono vere per ogni $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$.

Sia ora λ arbitrario in $S(\theta)$. Evidentemente esistono un numero finito $m + 1$ di punti $\lambda_i \in S(\theta)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ e $m + 1$ intorni $\Omega(\lambda_i)$ di ciascuno di essi contenuti in $S(\theta)$, tali che $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \in \Omega(\lambda_{i-1})$ per $i = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda \in \Omega(\lambda_m)$ e tali che su $\Omega(\lambda_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, converge lo sviluppo di Taylor di $\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, di punto iniziale λ_i. Tenuto conto di quanto si è già dimostrato, per induzione finita sull'indice i si prova che (2.3.4) e (2.3.3) sono vere per ogni $\lambda \in S(\theta)$.

Consideriamo ora l'applicazione di $S(\theta)$ in X

$$\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\,x - \lambda\,A\,\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x, \quad x \in D(A), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}.$$

Tale applicazione è analitica su $S(\theta)$ e nulla su $\mathbb{R}_+$ per la PROPOSIZIONE 2.1.1 e la (1,1.3); dunque essa è nulla su $S(\theta)$. Si ha così, qualunque sia $\lambda \in S(\theta)$

$$\mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\,x = \lambda\,A\,\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\,x \qquad \text{se} \quad x \in D(A). \tag{2.3.5}$$

Possiamo ora dimostrare che (2.3.1) e (2.3.2) sono vere per ogni $\lambda \in S(\theta)$. Sia $x \in X$. Poichè $D(A)$ è denso in X esiste una successione $x_n \in D(A)$ tale che $x_n \to x$ in X. Posto, per ogni $\lambda \in S(\theta)$, $y_n = \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x_n$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, si ha, per la (2.3.4), $y_n \in D(A)$ e $y_n \to \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x$ in X. D'altra parte per la (2.3.5) si ha

$$\mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\, x_n = \lambda\, A\, \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x_n$$

e quindi $\lambda A y_n \to \mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\, x$. Ne segue, poichè A è chiuso, che $\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x \in D(A)$ e $\mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\, x = \lambda A\, \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x$. Dunque (2.3.1) e (2.3.2) sono dimostrate, qualunque sia $\lambda \in S(\theta)$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$. Q.E.D.

LEMMA 2.3.1 : *Sia* $\mathfrak{G}$ *un* SGDA *su* $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, *con generatore infinitesimale* A. *Allora per ogni* $\lambda \in S(\theta)$ *l'operatore* λA *è una estensione del generatore infinitesimale* A_λ *del* SGD $\mathfrak{G}_\lambda$.

DIMOSTRAZIONE: Se A_λ è il generatore infinitesimale del SGD $\mathfrak{G}_\lambda$, allora per ogni $x \in X$ risulta $\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x \in D(A_\lambda)$ e si ha

$$\mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\, x = A_\lambda\, \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$.

D'altra parte, per la PROPOSIZIONE 2.3.1 risulta anche $\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x \in D(A)$ e si ha

$$\mathfrak{G}_\lambda(-\varphi')\, x = \lambda A\, \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$.

Dunque A_λ coincide con λA su $\mathbb{R}(\mathfrak{G}_\lambda)$ e cioè su $D(\mathfrak{G}_\lambda(-\delta'))$. Ne segue poichè A è chiuso e $A_\lambda = \overline{\mathfrak{G}_\lambda(-\delta')}$), che $D(A_\lambda) \subset D(A)$ e $A_\lambda x = \lambda A x$ se $x \in D(A_\lambda)$. Dunque λA, $\lambda \in S(\theta)$, è una estensione di A_λ. Q.E.D.

LEMMA 2.3.2. : *Nelle stesse ipotesi del* LEMMA 2.3.1, *se* A_λ *è il generatore infinitesimale del* SGD $\mathfrak{G}_\lambda$, $\lambda \in S(\theta)$, *allora si ha qualunque sia* $\lambda \in S(\theta)$ *per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, x \in D(A_\lambda) \quad \textit{se} \quad x \in X \tag{2.3.6}$$

$$\lambda\, \mathfrak{G}^{(1)}(\varphi)\, x = A_\lambda\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x, \quad x \in X \tag{2.3.7}$$

e inoltre

$$A_\lambda\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x = \mathfrak{G}(\varphi)\, A_\lambda\, x, \quad x \in X. \tag{2.3.8}$$

DIMOSTRAZIONE: Proviamo dapprima che qualunque sia $\lambda \in S(\theta)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ si ha

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, x \in D(A_\lambda), \quad x \in D(A_\lambda) \tag{2.3.9}$$

e sussiste la (2.3.8).

Siano $\lambda_i \in S(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, m$, con $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_m = \lambda$, tali che risulti convergente lo sviluppo

$$\mathfrak{G}_{\lambda_0}(\varphi)\, x = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)^{k_1}}{k_1\,!} \dots \frac{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{k_m}}{k_m\,!} \frac{d^{k_1+\dots+k_m}}{d\lambda^{k_1+\dots+k_m}} \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbf{R}_+}$ e ogni $x \in X$.

Posto allora

$$x_n = \sum_{k_1=0}^{n} \dots \sum_{k_m=0}^{n} \frac{(1 - \lambda_1)^{k_1}}{k_1\,!} \dots \frac{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{k_m}}{k_m\,!} \frac{d^{k_1+\dots+k_m}}{d\lambda^{k_1+\dots+k_m}} \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, x \qquad n = 1, 2, \dots,$$

per ogni $x \in D(A_\lambda)$ risulta, per il LEMMA 2.2.1, $x_n \in D(A_\lambda)$ e si ha $x_n \longrightarrow \mathfrak{G}(\varphi)x$ in X. D'altra parte, ancora per il lemma citato, si ha

$$A_\lambda\, x_n = \sum_{k_1=0}^{n} \dots \sum_{k_m=0}^{n} \frac{(1 - \lambda_1)^{k_1}}{k_1\,!} \dots \frac{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{k_m}}{k_m\,!} \frac{d^{k_1+\dots+k_m}}{d\lambda^{k_1+\dots+k_m}} \mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\, A_\lambda\, x$$

$n = 1, 2, \dots$, e dunque $A_\lambda\, x_n \longrightarrow \mathfrak{G}(\varphi)\, A_\lambda\, x$. Ne segue, poichè A_λ è chiuso, che $\mathfrak{G}(\varphi)\, x \in D(A_\lambda)$ e $A_\lambda\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x = \mathfrak{G}(\varphi)\, A_\lambda\, x$. Abbiamo così provato che (2.3.9) e (2.3.8) sono vere qualunque sia $x \in S(\theta)$. Come conseguenza della (2.3.9) e del LEMMA 2.3.1 si ha allora qualunque sia $\lambda \in S(\theta)$

$$A_\lambda\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x = \lambda\, A\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x, \quad x \in D(A_\lambda). \tag{2.3.10}$$

Siamo ora in grado di provare (2.3.6) e (2.3.7). Sia $x \in X$ e $\lambda \in S(\theta)$. Poichè $D(A_\lambda)$ è denso in X esiste una successione $x_n \in D(A_\lambda)$, $x_n \longrightarrow x$ in X. Sia $y_n = \mathfrak{G}(\varphi)\, x_n$; per la (2.3.9) si ha $y_n \in D(A_\lambda)$ e $y_n \longrightarrow \mathfrak{G}(\varphi)\, x$ in X. D'altra parte, per la (2.3.10) si ha

$$A_\lambda\, y_n = \lambda\, A\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x_n = \lambda\, \mathfrak{G}^{(1)}(\varphi)\, x_n$$

e dunque $A_\lambda\, y_n \longrightarrow \lambda\, \mathfrak{G}^{(1)}(\varphi)\, x$. Poichè A_λ è chiuso ne segue che $\mathfrak{G}(\varphi)\, x \in D(A_\lambda)$ e $\lambda\, \mathfrak{G}^{(1)}(\varphi)\, x = A_\lambda\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x$. Q.E.D.

Possiamo ora provare la seguente proposizione

PROPOSIZIONE 2.3.2. : *Sia* $\mathfrak{G}$ un SGDA *sul settore* $S(\theta)$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, *e sia* A *il generatore infinitesimale di* $\mathfrak{G}$. *Allora per ogni* $\lambda \in S(\theta)$ *il generatore infinitesimale del* SGD $\mathfrak{G}_\lambda$ *è l'operatore* λA.

DIMOSTRAZIONE: Poichè in virtù del LEMMA 2.3.1 sappiamo già che λA è una estensione di A_λ, $\lambda \in S(\theta)$, basterà provare che a sua volta l'operatore A_λ è una estensione dell'operatore λA. Ciò si prova in base al LEMMA 2.3.2 in modo del tutto analogo a come si è dimostrato il LEMMA 2.3.1. Infatti, per ogni $x \in X$ si ha $\mathfrak{G}(\varphi)\, x \in D(A)$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, e risulta, qualunque sia $\lambda \in S(\theta)$

$$\lambda\, \mathfrak{G}^{(1)}(\varphi)\, x = \lambda\, A\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x.$$

D'altra parte, per il LEMMA 2.3.2., si ha anche $\mathfrak{G}(\varphi) \in D(A_\lambda)$ e inoltre

$$\lambda\, \mathfrak{G}^{(1)}(\varphi)\, x = A_\lambda\, \mathfrak{G}(\varphi)\, x$$

per ogni $\lambda \in S(\theta)$. Dunque λA coincide con A_λ su $\mathbb{R}(\mathfrak{G}) = D(\mathfrak{G}(-\delta'))$; ne segue, poichè A_λ è chiuso e $A = \overline{\mathfrak{G}(-\delta')}$, che $D(A) \subset D(A_\lambda)$ e $\lambda A x = A_\lambda x$ se $x \in D(A)$. Dunque A_λ, per ogni $\lambda \in S(\theta)$, è una estensione di λA. Q.E.D.

§ 3. SGDE PROLUNGABILI ANALITICAMENTE SU UN SETTORE

3.0. Sommario.

In questo paragrafo studiamo la prolungabilità analitica su un settore di un SGDE.

Per ogni $\varrho > 0$ porremo

$$\mathbb{R}_\varrho^+ = \{s:\ 0 < s < \varrho\} \qquad \mathbb{R}_\varrho^- = \{s:\ s > \varrho\};$$

inoltre per ogni θ con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ se $S(\theta)$ è il settore definito con la (2.0.3) porremo qualunque sia $\varrho > 0$:

$$S_\varrho^+(\theta) = \{\mu:\ \mu \in S(\theta),\ |\mu| < \varrho\} \qquad S_\varrho^-(\theta) = \{\mu:\ \mu \in S(\theta),\ |\mu| > \varrho\}.$$

In analogia con la definizione di SGDA data nel § 2 diamo ora la seguente definizione di SGDE prolungabile analiticamente su un settore.

DEFINIZIONE 3.0.1: Un SGDE $\mathfrak{G}$ in X è prolungabile analiticamente sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se esiste un ξ_0 reale tale che per ogni $\varrho > 0$ qualunque sia $\psi \in \mathcal{S}^\beta$ con $\beta > \xi_0\, \varrho$ l'applicazione

$$s \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\psi) \quad \text{di} \quad \mathbb{R}_\varrho \quad \text{in} \quad \mathcal{L}(X, X)$$

è prolungabile a un'applicazione analitica

$$\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\psi) \quad \text{di} \quad S_\varrho(\theta) \quad \text{in } \mathcal{L}(X, X),$$

dove si intende $\mathbf{R}_\varrho = \mathbf{R}_\varrho^{\mp}$, $S_\varrho(\theta) = S_\varrho^{\mp}(\theta)$ secondo che sia rispettivamente $\operatorname{sign} \xi_0 = \dfrac{\xi_0}{|\xi_0|} = \mp 1$, $\xi_0 \neq 0$ e $\mathbf{R}_\varrho = \mathbf{R}_\varrho^{-}$, $S_\varrho(\theta) = S_\varrho^{-}(\theta)$ se $\xi_0 = 0$.

Se $\mathfrak{G}$ è un SGDE prolungabile analiticamente su $S(\theta)$ diremo anche che $\mathfrak{G}$ è un SGDEA su $S(\theta)$. Diremo inoltre che un SGDEA $\mathfrak{G}$ è di tipo ξ, $\xi \in \mathbf{R}$, se ξ è l'estremo inferiore dei ξ_0 soddisfacenti alla condizione della DEFINIZIONE 3.0.1.

Dimostreremo che se $\mathfrak{G}$ è un SGDEA su $S(\theta)$ di tipo ξ_0, allora per ogni $\lambda \in S(\theta)$ l'applicazione $\mathfrak{G}_\lambda : \psi \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\psi)$ è un SGDE di tipo $\xi_0(\lambda) \leq \xi_0 |\lambda|$.

Dimostreremo infine il teorema che caratterizza il generatore infinitesimale di un SGDEA, già illustrato nell'introduzione.

3.1 Il SGDE $\mathfrak{G}_\lambda$.

In questo numero proviamo che $\mathfrak{G}_\lambda$, $\lambda \in S(\theta)$, è un SGDE e ricaviamo una maggiorazione per la trasformata di Laplace di $\mathfrak{G}_\lambda$, uniforme rispetto a λ se $|\lambda| = 1$ e $|\arg \lambda| \leq \theta - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

PROPOSIZIONE 3.1.1 : *Sia $\mathfrak{G}$ un SGDEA su $S(\theta)$ di tipo ξ_0 in X, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Allora per ogni $\lambda \in S(\theta)$ l'applicazione $\mathfrak{G}_\lambda : \psi \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\psi)$ di $\mathcal{S}^\beta$ in $\mathcal{L}(X,X)$, $\beta > \xi_0 \varrho$, ϱ tale che $\lambda \in S_\varrho(\theta)$, $\varrho > 0$, è un SGDE di tipo $\xi_0(\lambda) \leq \xi_0 |\lambda|$. Inoltre, per ogni $\sigma > 0$ e per ogni τ con $0 < \tau < \theta$, esiste un polinomio $p_{\sigma,\tau}(\mu)$ a coefficienti non negativi tale che*

$$\|\mathfrak{G}_\lambda(e^{-\mu t})\| \leq p_{\sigma,\tau}(|\mu|) \quad \text{per } \operatorname{Re} \mu \geq \xi_0 + \sigma \tag{3.1.1}$$

qualunque sia $\lambda \in S(\theta - \tau)$ con $|\lambda| = 1$.

DIMOSTRAZIONE : Per la DEFINIZIONE 3.0.1 esiste un ξ_0 reale tale che per ogni $\varrho > 0$ l'applicazione $(s, \psi) \longrightarrow \mathfrak{G}_s(\psi)$ di $\mathbf{R}_\varrho \times \delta^\beta$ in $\mathcal{L}(X, X)$, qualunque sia $\beta > \xi_0 \varrho$, è prolungabile a un'applicazione $(\lambda, \psi) \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\psi)$ di $S_\varrho \times \mathcal{S}^\beta$ in $\mathcal{L}(X, X)$ la quale, per ogni fissata $\psi \in \mathcal{S}_\beta$ è analitica su $S_\varrho(\theta)$.

Vogliamo ora provare che, per ogni fissato $\lambda \in S_\varrho(\theta)$, con $0 < \varrho < |\lambda|$ se $S_\varrho(\theta) = S_\varrho^{-}(\theta)$ ovvero con $\varrho > |\lambda| > 0$ se $S_\varrho(\theta) = S_\varrho^{+}(\theta)$, l'applicazione suddetta è lineare continua su $\mathcal{S}^{\beta}$, qualunque sia $\beta > \xi_0 \varrho$. La dimostrazione di questo fatto è analoga a quella della PROPOSIZIONE 2.2.1 e la esponiamo perciò soltanto per sommi capi.

La relazione

$$\mathfrak{G}_{\lambda}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\, \mathfrak{G}_{\lambda}(\varphi) + \beta\, \mathfrak{G}_{\lambda}(\psi), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathcal{S}^{\beta}$$

si prova osservando che essa è vera, fissate φ e ψ, per ogni $\lambda = s \in \mathbb{R}_{\varrho}$ in virtù della PROPOSIZIONE 2.1.1 e dunque resta vera per prolungamento analitico su tutto $S_{\varrho}(\theta)$.

Per provare, per ogni fissato $\lambda \in S_{\varrho}(\theta)$, la continuità dell'applicazione $\mathfrak{G}_{\lambda}$ su $\mathcal{S}^{\beta}, \beta > \xi_0 \varrho$, si dimostra dapprima che l'insieme $\{\mathfrak{G}_{\lambda} : \lambda \in \Gamma\}$, dove Γ è un arbitrario compatto contenuto in $S_{\varrho}(\theta)$, è limitato in $\mathcal{L}(\mathcal{S}^{\beta}, \mathcal{L}(X, X))$ (2); si dimostra cioè che per ogni Γ e per ogni limitato B di $\mathcal{S}^{\beta}$ esiste una costante $M(\Gamma, B) > 0$ tale che

$$\text{(3.1.2)} \qquad \|\mathfrak{G}_{\lambda}(\psi)\| \leq M(\Gamma, B) \text{ per ogni } \lambda \in \Gamma \text{ e ogni } \psi \in B.$$

Di qui si deduce, applicando il teorema di VITALI, che se $\psi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}^{\beta}$, allora, per ogni $\lambda \in \Gamma_r$, dove Γ_r è un arbitrario cerchio chiuso di centro $r \in \mathbb{R}_+$ contenuto in $S_{\varrho}(\theta)$, risulta $\mathfrak{G}_{\lambda}(\psi_j) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{L}(X, X)$.

Abbiamo così provato che per ogni fissato $\lambda \in S(\theta)$, per ogni $\varrho > 0$ tale che $\lambda \in S_{\varrho}(\theta)$, risulta $e^{-\beta t}\, \mathfrak{G} \in \mathcal{S}'$ qualunque sia $\beta > \xi_0 \varrho$.

Ne segue, data l'arbitrarietà di ϱ, che risulta $e^{-\beta t}\, \mathfrak{G}_{\lambda} \in \mathcal{S}'$ per ogni $\beta > \xi_0 |\lambda|$.

In particolare, risulta $\mathfrak{G}_{\lambda} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{L}(X, X))$ ed anzi, in virtù della PROPOSIZIONE 2.2.1, si ha che $\mathfrak{G}_{\lambda}$ è un SGD, $\lambda \in S(\theta)$.

Per provare la prima parte della proposizione, e cioè che $\mathfrak{G}_{\lambda}, \lambda \in S(\theta)$, è un SGDE di tipo $\xi_0(\lambda) \leq \xi_0 |\lambda|$ resta soltanto da provare che $\mathfrak{G}_{\lambda}$ è un SGD regolare.

Sia θ la funzione introdotta nel n. 1.3 e poniamo, qualunque sia $\lambda \in S(\theta)$

$$\mathfrak{G}_{\lambda}(\psi) = \mathfrak{G}_{\lambda}(\theta\psi), \qquad \psi \in \mathcal{D}_{-}.$$

Si verifica facilmente che $\mathfrak{G}_{\lambda}(\theta\psi)$ non dipende dalla particolare θ considerata e che $\mathfrak{G}_{\lambda} \in \mathcal{D}'_{+}(\mathcal{L}(X,X))$, $\mathfrak{G}_{\lambda}$ nulla per $t < 0$. Dunque il SGD $\mathfrak{G}_{\lambda}$ verifica anche la condizione (vi) della DEFINIZIONE 1.2.1. Resta da provare che $\mathfrak{G}_{\lambda}$ verifica la condizione (vii) della definizione citata e quindi, in virtù della

(2) Si ricordi che $\mathcal{S}^{\beta}$ è isomorfo a $\mathcal{S}$ e quindi, in particolare, $\mathcal{S}^{\beta}$ è uno spazio tonnelé e di Montel.

PROPOSIZIONE 1.2.1, basta provare che risulta

$$\mathfrak{G}_\lambda(\psi)\,\mathfrak{G}_\lambda(\varphi) = \mathfrak{G}_\lambda(\psi_+ * \varphi),\ \psi \in \mathcal{D}_-,\ \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}.$$

Ora questa relazione, fissate $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ e $\psi \in \mathcal{D}_-$, è vera su $\mathbb{R}_+$ per la PROPOSIZIONE 2.1.1 e ancora per la PROPOSIZIONE 1.2.1, e dunque resta vera per prolungamento analitico su $S_\varrho(\theta)$, qualunque sia $\varrho > 0$, e quindi su tutto $S(\theta)$.

Resta ora da provare la maggiorazione (3.1.1). Indichiamo con $\Gamma(\tau)$, $0 < \tau < \theta$, il sottoinsieme di $S(\theta - \tau)$ dei λ con $|\lambda| = 1$:

$$\Gamma(\tau) = \{\lambda : \lambda = e^{i\alpha},\ -\theta + \tau \leq \alpha \leq \theta - \tau\}, \qquad 0 < \tau < \theta. \tag{3.1.3}$$

Dalla (3.1.2) per $\Gamma = \Gamma(\tau)$ si deduce allora che l'insieme $\{\mathfrak{G}_\lambda : \lambda \in \Gamma(\tau)\}$ è limitato quindi equicontinuo [3] in $\mathcal{L}(\mathcal{S}^\beta, \mathcal{L}(X, X))$ qualunque sia $\beta > \xi_0$. Esistono dunque degli interi non negativi i e j e una costante $c_0 > 0$, dipendenti da β ma non da $\lambda \in \Gamma(\tau)$, tali che sussiste la maggiorazione

$$\|\mathfrak{G}_\lambda(\psi)\| \leq c_0 \sup\{|t^l (e^{\beta t}\psi(t))^{(m)}| : \ 0 \leq l \leq i,\ \ 0 \leq m \leq j,\ \ l, m \text{ interi},\ t \in \mathbb{R}\} \tag{3.1.4}$$

qualunque sia $\psi \in \delta^\beta$ e per ogni $\lambda \in \Gamma(\tau)$.

Consideriamo ora in particolare la funzione

$$\Omega(t) = e^{-\mu t},\ \mu \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.5}$$

cfr. (1.3.1). Poichè per ogni $\lambda \in \Gamma(\tau)$ $\mathfrak{G}_\lambda$ è un SGDE di tipo ξ_0, possiamo considerare per $\operatorname{Re}\mu > \xi_0$ la trasformata di Laplace $\mathfrak{G}_\lambda(\Omega)$ di $\mathfrak{G}_\lambda$, cfr. n. 1.3 sez. (b), in particolare (1.3.3).

Sia ora, per ogni $\varepsilon > 0$, θ_ε una funzione indefinitamente derivabile su $\mathbb{R}$ tale che $\theta_\varepsilon(t) = 0$ per $t < -2\varepsilon$, $\theta_\varepsilon(t) = 1$ per $t > -\varepsilon$ e tale inoltre che si abbia

$$\sup_{\mathbb{R}} |\theta^{(k)}(t)| \leq \frac{d_p}{\varepsilon^k}, \qquad k = 1, 2, \dots, p, \qquad p = 1, 2, \dots, \qquad d_p > 0.$$

Dalla (3.1.4) si ottiene allora con un calcolo diretto, ponendo $\varepsilon = 2^{-1}(\operatorname{Re}\mu - \beta)^{-1}$:

$$\|\mathfrak{G}_\lambda(e^{-\mu t})\| \leq \sum_{m=0}^{j} M_m (|\mu| - \beta)^m$$

(3) Cfr. la nota (2) a pag. 23.

dove

$$M_m = c_0 \, L d_m \, 3^m$$

$$L = \sup_{l \leq i} \max \left\{ \left(\frac{1}{\sigma}\right)^l e, \left(\frac{l}{e\sigma}\right)^l \right\},$$

con $0 < \sigma \leq \operatorname{Re} \mu - \beta$.

Dunque, il polinomio

$$p_{\sigma, \tau} = \sum_{m=0}^{j} M_m (|\mu| + |\beta|)^m$$

verifica la maggiorazione 3.1.1 e la proposizione è dimostrata.

Q. E. D.

3.2. Il generatore infinitesimale di un SGDEA.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema che caratterizza il generatore infinitesimale di un SGDEA.

Per semplificare l'esposizione useremo le seguenti notazioni, dove $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon > 0$:

$S^0(\theta)$ è il settore polare di $S(\theta)$, cioè

(3.2.1) $$S^0(\theta) = \left\{ \mu : \frac{\pi}{2} + \theta \leq |\arg \mu| \leq \pi \right\};$$

(3.2.2) $\Sigma(\xi_0, \theta) = \Sigma^{\mp}(\xi_0, \theta)$ secondo che sia sign $\xi_0 = \mp 1$, (4)

con

$$\Sigma^-(\xi_0, \theta) = \xi_1 + S^0(\theta), \quad \xi_1 = \frac{\xi_0}{\cos \theta}$$

$$\Sigma^+(\xi_0, \theta) = \Sigma^-(\xi_0, \theta) \cap \{\mu : \operatorname{Re} \mu \leq \xi_0\};$$

(3.2.3) $\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta) = \Omega_\varepsilon^{\mp}(\xi_0, \theta)$ secondo che sia sign $\xi_0 = \mp 1$,

con

$$\Omega_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) = \mathbb{C} - \Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta)$$

$$\Omega_\varepsilon^+(\xi_0, \theta) = \mathbb{C} - \Sigma_\varepsilon^+(\xi_0, \theta),$$

---

(4) Se S è un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ indichiamo con $\alpha + S$ l'insieme $\{\mu : \mu = \alpha + \lambda, \ \lambda \in S\}$.

dove

$$\Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) = \xi_1 + \varepsilon + S^0(\theta - \varepsilon)$$

$$\Sigma_\varepsilon^+(\xi_0, \theta) = \Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) \cap \{\mu : \operatorname{Re}\mu \leq \xi_0 + \varepsilon\}$$

Osserviamo che se $\xi_0 = 0$ allora si ha

$$\Sigma(\xi_0, \theta) = \Sigma^-(\xi_0, \theta) = \Sigma^+(\xi_0, \theta) = S^0(\theta)$$

$$\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta) = \Omega_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) = \Omega_\varepsilon^+(\xi_0, \theta) = \mathbb{C} - \{\varepsilon + S^0(\theta - \varepsilon)\}.$$

TEOREMA 3.2.1: *Un operatore lineare chiuso A con dominio denso in X è il generatore infinitesimale di un* SGDEA *sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, di tipo $\leq \xi_0$, se e soltanto se esiste un ξ_0 reale tale che*

(i) *lo spettro $\sigma(A)$ di A è contenuto nell'insieme $\Sigma(\xi_0, \theta)$;*

(ii) *il risolvente $R(\mu, A)$ di A, per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$, verifica una maggiorazione del tipo*

$$\| R(\mu, A) \| \leq p_\varepsilon(|\mu|) \tag{3.2.4}$$

sull'insieme $\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta)$, con p_ε opportuno polinomio a coefficienti non negativi.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathfrak{G}$ un SGDEA di tipo ξ_0, $\xi_0 \in R$, sul settore $S(\theta)$ e sia A il generatore infinitesimale di $\mathfrak{G}$.

In virtù della PROPOSIZIONE 3.1.1, per ogni $\lambda \in S(\theta)$ l'applicazione $\mathfrak{G}_\lambda : \psi \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\psi)$ di $\mathcal{S}^\beta$ in $\mathcal{L}(X, X)$, $\beta > \xi_0 |\lambda|$, è un SGDE di tipo $\xi_0(\lambda) \leq \xi_0 |\lambda|$ e il generatore infinitesimale di $\mathfrak{G}_\lambda$, ancora per la PROPOSIZIONE 3.1.1, cfr. (1.3.4), è λA; per ogni $\sigma > 0$ e ogni τ con $0 < \tau < \theta$, qualunque sia $\lambda \in \Gamma(\tau)$, $\Gamma(\tau)$ essendo il sottoinsieme (3.1.3) di $S(\theta)$, risulta definito sul semipiano $\operatorname{Re}\mu \geq \geq \xi_0 + \sigma$ il risolvente

$$R(\mu, \lambda A) = \mathfrak{G}_\lambda(e^{-\mu t})$$

di λA ed è verificata la maggiorazione

$$\| R(\mu, \lambda A) \| \leq p_{\sigma,\tau}(|\mu|), \quad \text{per} \quad \operatorname{Re}\mu \geq \xi_0' + \sigma$$

con $p_{\sigma,\tau}$ opportuno polinomio a coefficienti non negativi.

Ne segue che qualunque sia $\lambda \in \Gamma(\tau)$ il risolvente $R(\mu, A)$ di A esiste sul semipiano $\{\mu : \operatorname{Re}(\lambda\mu) \geq \xi_0 + \sigma\}$ ed è dato da

$$R(\mu, A) = \lambda R(\lambda\mu, \lambda A)$$

e dalla (3.1.1) si deduce inoltre la maggiorazione

$$\| R(\mu, A) \| \leq p_{\sigma,\tau}(|\mu|) \quad \text{per} \quad \operatorname{Re}(\lambda\mu) \geq \xi_0 + \sigma,$$

qualunque sia $\lambda \in I(\tau)$.

È facile allora dedurre, con semplici considerazioni, le condizioni (i) e (ii) del teorema.

Viceversa, supponiamo che A sia un operatore lineare chiuso con dominio denso di X verificante le condizioni (i) e (ii) dell'enunciato.

In virtù di (ii) si ha che, per ogni τ con $0 < \tau < \theta$, qualunque sia $\lambda \in \Gamma(\tau)$ esiste il risolvente $R(\mu, \lambda A)$ dell'operatore λA per ogni μ del semipiano $\operatorname{Re}\mu \geq \xi_0 + \sigma$, $\sigma > 0$, e risulta

$$R(\mu, \lambda A) = \frac{1}{\lambda} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right) \tag{3.2.5}$$

e quindi, per la (3.1.1) è verificata una maggiorazione

$$\| R(\mu, \lambda A) \| \leq p_{\sigma,\tau}(|\mu|), \quad \text{per} \quad \operatorname{Re}\mu \geq \xi_0 + \sigma,$$

qualunque sia $\lambda \in \Gamma(\tau)$.

Ne segue che per ogni $\lambda \in S(\theta)$ il risolvente $R(\mu, \lambda A)$ di λA esiste sul semipiano $\operatorname{Re}\mu \geq \xi_0 |\lambda|$ e verifica la maggiorazione

$$\| R(\mu, \lambda A) \| \leq \frac{1}{|\lambda|} p_{\sigma,\tau}\left(\frac{|\mu|}{|\lambda|}\right) \quad \text{per} \quad \operatorname{Re}\mu \geq (\xi_0 + \sigma)|\lambda|.$$

Per il teorema di Lions, Teorema 1.2.1, λA risulta allora essere il generatore infinitesimale di un SGDE $\mathfrak{G}_\lambda$ di tipo $\xi_0(\lambda) \leq \xi_0 |\lambda|$.

Il SGDE $\mathfrak{G}_\lambda$ è dato dalla antitrasformata di Laplace di $R(\mu, \lambda A)$ e si ha dunque per ogni $\lambda \in S(\theta)$

$$e^{-\beta t} \mathfrak{G}_\lambda = \overline{\mathcal{F}}_\eta (R(\mu, \lambda A)), \quad \mu = \beta + i\eta, \quad \beta > \xi_0 |\lambda|$$

dove $\overline{\mathcal{F}}_\eta (R(\mu, \lambda A))$ è l'antitrasformata di Fourier della funzione $R(\mu, \lambda A)$ di η.

Sia ora $\varrho > 0$ arbitrario. Per ogni $\psi \in \mathcal{S}^\beta$, con $\beta > \xi_0 \varrho$, qualunque sia $\lambda \in S_\varrho(\theta)$ è definito l'operatore $\mathfrak{G}(\psi)$. Proviamo che l'applicazione $\lambda \longrightarrow \mathfrak{G}_\lambda(\psi)$ di $S_\varrho(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$ è analitica. In tal modo si sarà provato che $\mathfrak{G}$ è prolungabile analiticamente su $S(\theta)$, tenuto conto che per $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$ risulta $\mathfrak{G}_\lambda(\psi) = \mathfrak{G}(\psi_s)$ per ogni $\psi \in \mathcal{S}^\beta$.

Per ogni $\psi \in \mathcal{S}^\beta$ $\beta > \xi_0 \varrho$, ϱ tale che $\lambda \in S_\varrho(\theta)$, si ha allora

$$\mathfrak{G}_\lambda(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu, \lambda A)_\eta \, \overline{\mathcal{F}}(e^{\beta t}\psi)_\eta \, d_\eta, \quad \mu = \beta + i\eta$$

e quindi tenuto conto dell'identità (3.2.5)

$$\mathfrak{G}_\lambda(\psi) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)_\eta \chi(\eta)\, d\eta, \quad \mu = \beta + i\eta$$

dove si è posto $\chi(\eta) = \overline{\mathcal{F}}(e^{\beta t}\psi)_\eta$, gli integrali essendo intesi nel senso di Bochner.

Dimostreremo ora che l'applicazione $\lambda \to \mathfrak{G}_\lambda(\psi)$ di $S_\varrho(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$ è analitica, facendo vedere che l'applicazione a valori in $\mathcal{L}(X, X)$

$$\lambda \to F(\lambda), \qquad F(\lambda) = \lambda\, \mathfrak{G}_\lambda(\psi) \qquad \lambda \in S_\varrho(\theta),$$

è derivabile con

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)_\eta \chi(\eta)\, d\eta\,. \tag{3.2.6}$$

Infatti, posto per $h > 0$ sufficientemente piccolo

$$\Delta_h R(\eta) = \frac{1}{h}\left[R\left(\frac{\mu}{\lambda + h}, A\right) - R\left(\frac{\mu}{\lambda}. A\right)\right], \quad \mu = \beta + i\eta,$$

tenuto conto che per ogni $\lambda \in S(\theta)$ $R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)$ è derivabile in λ e si ha

$$\frac{d}{d\lambda} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right) = \frac{\mu}{\lambda^2}\left[R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)\right]^2,$$

con successive applicazioni dell'identità del risolvente si ottiene

$$\frac{d}{d\lambda} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right) - \Delta_h R(\eta) = -\frac{h\mu}{\lambda^2(\lambda + h)}\left[R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)\right]^2 \left[\frac{\mu}{\lambda + h} R\left(\frac{\mu}{\lambda + h}, A\right) - 1\right].$$

Supponiamo ora ε tale che $\{\mu : |\mu - \lambda| < \varepsilon\} \subset S_\varrho(\theta - \varepsilon)$, Per ogni h con $|h| < \varepsilon$ risulta allora, per la ipotesi (ii)

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)_\eta - \Delta_h R(\eta) \right\| \leq |h| \, q(|\mu|)$$

dove

$$q(|\mu|) = \frac{|\mu|}{|\lambda|^2 (|\lambda| - \varepsilon)} p_\varepsilon^2 \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \left[\frac{|\mu|}{|\lambda| - \varepsilon} p_\varepsilon \left(\frac{|\mu|}{|\lambda| - \varepsilon} + 1 \right) \right].$$

Si ha dunque

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} R\left(\frac{\mu}{\lambda}, A\right)_\eta \chi(\eta)\, d\eta - \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_h R(\eta) \chi(\eta)\, d\eta \right\| < |h| \int_{-\infty}^{+\infty} q(|\mu|) \chi(\eta)\, d\eta$$

e poichè $\chi \in \mathcal{S}$ risulta $\int_{-\infty}^{+\infty} q(|\mu|) \chi(\eta)\, d\eta < +\infty$.

La (3.2.6) è così dimostrata. Q.E.D.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] C. FOIAS, *Remarques sur les semi-groupes distributions d'opérateurs normaux*, Portugaliae Math., **19** (1960), 227-243.

[2] E. HILLE, *On the differentiability of semi-groups of operators*, Acta Sci. Math. Szeged, **12 B** (1950), 19-24.

[3] E. HILLE, R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., **31** (1957).

[4] T. KATO, *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces*, Nagoya Math. Jour., **19** (1961).

[5] J. L. LIONS, *Les semi-groupes distributions*, Portugaliae Math , **19** (1960), 141-164.

[6] J. L. LIONS, *Supports dans la transformation de Laplace*, Journal d'Analyse Math. Israel, **2** (1952-53), 369-380.

[7] J. PEETRE, *Sur la théorie de semi-groupes distributions*, Sém. sur les équations aux dérivées partielles, Coll. de France, Nov. 1963-Mai 1964, 76-98.

[8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Tome 1, Hermann Paris (1957).

[9] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Tome 2, Hermann Paris (1959).

[10] L. SCHWARTZ, *Transformation de Laplace de distributions*, Comm. Sém. Math. de l'Univ. de Lund (1952), 196-206.

[11] L. SCHWARTZ, *Theorie de distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), 1-141; **8** (1958), 1-207.

[12] H. TANABE, *On the equations of evolution in a Banach space*, Osaka Math. J. **12** (1960) 365 613.

[13] K. YOSIDA, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators*, J. Math. Soc. Japan **1** (1948), 15-21.

[14] K. YOSIDA, *On the differentiability of semi-groups of linear operators*, Proc. Japan Acad., **34** (1958), 337-340.

[15] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer-Verlag (1965).

[16] K. YOSHINAGA, *Ultra distributions and semi-groups distributions*, Bull. Kyushu Inst. Tech., **10** (1963), 1-24.