

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO CHIFFI

Correnti quasi normali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 19,
n° 2 (1965), p. 185-205

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_185_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRENTI QUASI NORMALI (*)

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

In questo lavoro vengono studiate le proprietà di una classe di correnti (*correnti quasi normali*) che comprende come caso particolare le correnti normali definite da FEDERER e FLEMING in [2].

Il principale risultato è il teorema 3.11, che, sotto opportune ipotesi, assicura che il limite di una successione di correnti g -rettificabili è ancora una corrente g -rettificabile. Questo teorema estende i risultati di FEDERER-FLEMING che sono alla base di varie moderne ricerche sul problema di PLATEAU e, più in generale, sui problemi di calcolo delle variazioni relativi a varietà k dimensionali generalizzate.

Ringrazio vivamente E. DE GIORGI sotto la cui direzione è stata condotta la presente ricerca.

Premesse.

Richiamiamo sommariamente alcune definizioni e risultati contenuti nel lavoro [2], del quale adottiamo il simbolismo ed al quale rinviamo il lettore per ulteriori riferimenti. Sia R^n lo spazio euclideo a n dimensioni, indichiamo con $x = (x^1, \dots, x^n)$ un generico punto di R^n e sia k un intero con $1 \leq k \leq n$. Sia φ una forma differenziale di grado k , del tipo

$$(1) \quad \varphi = \sum_{(\lambda)} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_k}$$

dove il simbolo (λ) sta ad indicare che la somma è fatta rispetto a tutte le possibili combinazioni degli interi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con $1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_k \leq n$ e dove

Pervenuto alla Redazione il 26 ottobre 1964.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

$a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x)$ sono funzioni reali definite in R^n ; indicheremo con $\|\varphi(x)\|$ la *comassa* ⁽¹⁾ della forma φ nel punto x . La comassa $\|\varphi(x)\|$ verifica le relazioni:

$$p \sum_{(\lambda)} |a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x)|^2 \leq \|\varphi(x)\|^2 \leq \sum_{(\lambda)} |a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x)|^2$$

dove p è una costante dipendente solo da k e n . Definiamo la *comassa* di φ nel modo seguente:

$$(2) \quad M(\varphi) = \sup \{ \|\varphi(x)\| : x \in R^n \}.$$

Indichiamo con $E^k(R^n)$ lo spazio vettoriale delle forme differenziali di grado k e di classe $C^\infty(R^n)$, cioè delle forme differenziali del tipo (1) i cui coefficienti appartengono a $C^\infty(R^n)$; assumeremo come forme di grado zero le funzioni reali f definite in R^n e porremo:

$$\|f(x)\| = |f(x)|,$$

$$M(f) = \sup \{ |f(x)| : x \in R^n \}$$

$$E^0(R^n) = C^\infty(R^n).$$

Indicheremo al solito con $d\varphi$ il differenziale esterno della forma φ , con $\varphi \wedge \omega$ il prodotto esterno delle due forme φ e ω . Diremo che la successione $\{\omega_i\}$ di forme $\omega_i \in E^k(R^n)$ converge a $\omega \in E^k(R^n)$ se le successioni formate dai coefficienti delle forme ω_i e delle loro derivate di qualunque ordine convergono uniformemente ai rispettivi coefficienti di ω e alle rispettive derivate in ogni insieme compatto di R^n . Sia $E_k(R^n)$ lo spazio dei funzionali lineari su $E^k(R^n)$, continui rispetto alla convergenza ora introdotta; diremo *correnti* gli elementi di $E_k(R^n)$. Il valore di $T \in E_k(R^n)$ calcolato su $\varphi \in E^k(R^n)$ verrà indicato con $T(\varphi)$. Il supporto di T risulta un insieme compatto di R^n . Sia $T \in E_k(R^n)$ e $\omega \in E^m(R^n)$, con $m \leq k$; il *prodotto interno* $T \wedge \omega$ si definisce nel modo seguente per ogni $\varphi \in E^{k-m}(R^n)$:

$$(T \wedge \omega)(\varphi) = T(\omega \wedge \varphi).$$

Si dice *bordo* di $T \in E_k(R^n)$ la corrente $\partial T \in E_{k-1}(R^n)$ così definita per ogni $\varphi \in E^{k-1}(R^n)$:

$$(\partial T)(\varphi) = T(d\varphi).$$

(1) Cfr. [5] cap. I n. 13 a pag. 52 e cap. II n. 3 a pag. 62.

Indicheremo con $M(T)$, $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ la massa di T , così definita:

$$M(T) = \sup \{ T(\varphi) : \varphi \in E^k(\mathbb{R}^n), M(\varphi) \leq 1 \}.$$

Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ le cui componenti indichiamo con f^1, \dots, f^n e se la (1) è una forma di $E^k(\mathbb{R}^n)$, indicheremo con $f^\# \varphi$ la forma di $E^k(\mathbb{R}^m)$ così definita:

$$f^\# \varphi = \sum_{(\lambda)} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k} (f(y)) df^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge df^{\lambda_k}.$$

Alla corrente $T \in E_k(\mathbb{R}^m)$ associamo la corrente $f_{\#} T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ così definita per $\varphi \in E^k(\mathbb{R}^n)$:

$$(f_{\#} T)(\varphi) = T(f^\# \varphi).$$

Ricordiamo le seguenti disuguaglianze: se $T \in E_k(\mathbb{R}^m)$ e $\omega \in E^m(\mathbb{R}^m)$ con $m \leq k$ è una forma semplice, si ha:

$$(3) \quad M(T \wedge \omega) \leq M(T) M(\omega).$$

In particolare la (3) ha luogo se ω è il differenziale di una funzione $g \in E^0(\mathbb{R}^m)$ ⁽²⁾ e in tal caso è⁽³⁾:

$$(4) \quad M(\omega) = \sup \{ |\text{grad } g(x)| : x \in \mathbb{R}^m \}.$$

Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ e uniformemente lipschitziana, detto p il suo modulo di LIPSCHITZ si ha:

$$(5) \quad M(f_{\#} T) \leq p^k M(T).$$

Se è $M(T) < \infty$, la definizione di T si può prolungare con i consueti metodi della teoria dell'integrazione alle forme di grado k aventi come coefficienti funzioni di BAIRE localmente limitate in modo che, data una successione di forme $\{\varphi_k\}$ a coefficienti equilimitati sul supporto di T , se esiste una forma φ , verificante la

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \|\varphi_h(x) - \varphi(x)\| = 0$$

⁽²⁾ Cfr. [5], cap. I, n. 9 a pag. 44.

⁽³⁾ Cfr. [5], cap. I, n. 13 a pag. 53.

per ogni $x \in R^n$, vale la relazione

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} T(\varphi_h) = T(\varphi).$$

Tale prolungamento è unico e verrà ancora indicato col simbolo T . In particolare si può definire $T \wedge \omega$ nel caso che ω sia la funzione caratteristica di un insieme di BOREL B ; in tal caso si pone $T \wedge \omega = T \cap B$. Se la successione $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente a $T \in E_k(R^n)$, cioè

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \in E^k(R^n), \text{ si ha:}$$

$$(8) \quad M(T) \leq \min_{h \rightarrow \infty} \lim M(T_h)$$

$$(9) \quad M(\delta T) \leq \min_{h \rightarrow \infty} \lim M(\delta T_h).$$

Se la successione $\{M(T_h)\}$ è limitata si ha inoltre, per ogni forma continua φ di grado k :

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Se $M(T) < \infty$, $T \in E_k(R^n)$, si può definire la *variazione totale* di T ponendo per ogni funzione continua $f \geq 0$ definita in R^n :

$$\|T\|(f) = \sup \{T(\varphi) : \varphi \in E^k(R^n), \|\varphi(x)\| \leq f(x), x \in R^n\}$$

e prolungare poi la sua definizione alle funzioni continue qualunque ed alle funzioni di BAIRE con i consueti procedimenti della teoria dell'integrazione. Se $B \subset R^n$ è un insieme di BOREL porremo

$$\|T\|(B) = \|T\|(\varphi(x, B))$$

ove $\varphi(x, B)$ è la funzione caratteristica di B ; vale la relazione:

$$M(T \cap B) = \|T\|(B).$$

Se la successione $\{T_h\}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente a $T \in E_k(R^n)$ e se $A \subset R^n$ è un insieme aperto, si ha:

$$\|T\|(A) \leq \min_{h \rightarrow \infty} \lim \|T_h\|(A).$$

Se C è un compatto di R^n e p è un numero positivo, l'insieme :

$$E_k(R^n) \cap \{T: \text{supporto } T \subset C, M(T) \leq p\}$$

è debolmente compatto.

§ 1. — Correnti quasi normali.

DEFINIZIONE 1.1. Sia $\sigma \geq 0$ e $T \in E_k(R^n)$. Poniamo :

$$N^*(\sigma, T) = \inf \{M(\partial Q) : Q \in E_k(R^n), M(T - Q) \leq \sigma\}.$$

La funzione $N^*(\sigma, T)$ della variabile reale σ è una funzione reale estesa (risulta cioè: $0 \leq N^*(\sigma, T) \leq +\infty$), definita per ogni $\sigma \geq 0$. Si ha evidentemente :

$$N^*(0, T) = M(\partial T).$$

DEFINIZIONE 1.2. Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ è *quasi normale* se è :

$$M(T) < +\infty$$

$$N^*(\sigma, T) < +\infty \quad \forall \sigma > 0.$$

DEFINIZIONE 1.3. Le correnti di una successione $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$ si diranno *uniformemente quasi normali* se risulta :

$$\sup \{M(T_h) : h = 1, 2, \dots\} < +\infty$$

$$\sup \{N^*(\sigma, T_h) : h = 1, 2, \dots\} < +\infty \quad \forall \sigma > 0.$$

OSSERVAZIONE 1.4. Sia $T \in E_k(R^n)$; la funzione $N^*(\sigma, T)$ (della variabile σ) è non crescente.

OSSERVAZIONE 1.5. Siano T e Q correnti di $E_k(R^n)$; per ogni $\sigma > 0$ si ha :

$$(1) \quad N^*(\sigma + M(T - Q), T) \leq N^*(\sigma, Q).$$

Se infatti $S \in E_k(R^n)$ è tale che :

$$M(Q - S) \leq \sigma$$

si ha pure :

$$M(T - S) \leq \sigma + M(T - Q)$$

e si ottiene subito la (1).

DEFINIZIONE 1.6. Sia $C \subset R^n$ un insieme chiuso e $\varrho > 0$; poniamo :

$$C_\varrho = \{x : x \in R^n, \text{ distanza } (x, C) \leq \varrho\}.$$

LEMMA 1.7. Sia $T \in E_k(R^n)$, e sia C un insieme compatto contenente il supporto di T . Fissati i due numeri $\sigma \geq 0$ e $\varrho > 0$, esiste una corrente $Q \in E_k(R^n)$ verificante le condizioni seguenti :

$$\text{supporto } Q \subset C_{2\varrho}$$

$$M(T - Q) \leq \sigma$$

$$M(\partial Q) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{\sigma}{\varrho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è banale se $N^*(\sigma, T) = +\infty$; altrimenti, fissato il numero reale $\varrho > 0$ e l'intero $h > 0$, esiste una funzione reale $g_{\varrho h} \in C^\infty(R^n)$ verificante le condizioni seguenti :

$$g_{\varrho h}(x) = 1 \quad \text{per } x \in C_\varrho$$

$$g_{\varrho h}(x) = 0 \quad \text{per } x \in R^n - C_{2\varrho}$$

$$(2) \quad \sup \{ |\text{grad } g_{\varrho h}(x)| : x \in R^n \} \leq \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{h}$$

$$(\text{supporto } |\text{grad } g_{\varrho h}|) \cap C = \emptyset$$

Si ha immediatamente, tenuto conto che è $g_{\varrho h} = 1$ in un aperto contenente C :

$$(3) \quad T = T \wedge g_{\varrho h}$$

$$(4) \quad T \wedge dg_{\varrho h} = 0.$$

Fissato il numero reale $\sigma \geq 0$ e l'intero h , esiste, per la definizione di $N^*(\sigma, T)$, una corrente $S_h \in E_k(R^n)$ tale che :

$$(5) \quad M(T - S_h) \leq \sigma$$

$$(6) \quad M(\partial S_h) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{1}{h}.$$

Poniamo :

$$Q_h = S_h \wedge g_{\rho h}.$$

Si ha per le (3) e (5) :

$$(7) \quad M(T - Q_h) = M[(T - S_h) \wedge g_{\rho h}] \leq M(T - S_h) \leq \sigma$$

$$(8) \quad \text{supporto } (T - Q_h) \subset C_{2\rho}.$$

Per la (7) e (8) esiste una successione $\{Q_{h'}\}$, estratta dalla successione $\{Q_h\}$, convergente debolmente a una corrente $Q \in E_k(R^n)$. Si ha, tenuto conto della (7) :

$$(9) \quad M(T - Q) \leq \min_{h' \rightarrow \infty} \lim M(T - Q_{h'}) \leq \sigma$$

$$(10) \quad M(\partial Q) \leq \min_{h' \rightarrow \infty} \lim M(\partial Q_{h'}).$$

Per ogni intero h si ha, tenuto anche conto della (4) :

$$\partial Q_h = \partial(S_h \wedge g_{\rho h}) = (\partial S_h) \wedge g_{\rho h} - S_h \wedge dg_{\rho h} = (\partial S_h) \wedge g_{\rho h} - (S_h - T) \wedge dg_{\rho h}.$$

Segue, tenuto conto delle (3) e (4) della introduzione :

$$M(\partial Q_h) \leq M(\partial S_h) + M(S_h - T) M(dg_{\rho h})$$

e da questa, per le (5), (6) e (2), si ricava :

$$(11) \quad M(\partial Q_h) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{1}{h} + \frac{\sigma}{\rho} + \frac{\sigma}{h}.$$

Dalle (10) e (11) segue :

$$(12) \quad M(\partial Q) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{\sigma}{\rho}.$$

Le (9) e (12), assieme alla osservazione che è :

$$\text{supporto } Q \subset C_{2\rho}$$

dimostrano il presente lemma.

TEOREMA 1.S. *Sia $T \in E_k(R^n)$; si ha :*

$$(13) \quad N^*(\sigma, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T).$$

DIMOSTRAZIONE. Il limite a secondo membro della (13) esiste per l'osservazione 1.4. ed è:

$$(14) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) \leq N^*(\sigma, T).$$

Detto C il supporto di T e fissato il numero $\varrho > 0$, esiste, per il lemma 1.7, per ogni intero $h > 0$ la corrente $Q_h \in E_k(\mathbb{R}^n)$ verificante le condizioni:

$$(15) \quad \text{supporto } Q_h \subset C_{2\varrho}$$

$$(16) \quad M(T - Q_h) \leq \sigma + \frac{1}{h}$$

$$(17) \quad M(\partial Q_h) \leq N^*\left(\sigma + \frac{1}{h}, T\right) + \frac{\sigma}{\varrho} + \frac{1}{h\varrho}.$$

Per le (15) e (16) esiste una successione $\{Q_h\}$ estratta dalla successione $\{Q_h\}$, convergente debolmente a una corrente $Q \in E_k(\mathbb{R}^n)$ e si ha, tenuto conto delle (16) e (17):

$$(18) \quad M(T - Q) \leq \sigma$$

$$(19) \quad M(\partial Q) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) + \frac{\sigma}{\varrho}.$$

Pertanto per le (18) e (19) si ha:

$$(20) \quad N^*(\sigma, T) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) + \frac{\sigma}{\varrho}$$

e, per l'arbitrarietà di ϱ , dalle (20) e (14) segue la (13).

COROLLARIO 1.9. *Sia $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$. Si ha l'uguaglianza:*

$$(21) \quad M(\partial T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N^*(|\varepsilon|, T).$$

TEOREMA 1.10. *Se la successione $\{T_h\}$ di correnti $T_h \in E_k(\mathbb{R}^n)$ converge debolmente alla corrente $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$, si ha, per ogni $\sigma \geq 0$:*

$$(22) \quad N^*(\sigma, T) \leq \min_{h \rightarrow \infty} \lim N^*(\sigma, T_h).$$

DIMOSTRAZIONE. Detto C il supporto di T e fissato il numero $\varrho > 0$, esiste in virtù del lemma 1.7, per ogni intero h , una corrente $Q_h \in E_k(\mathbb{R}^n)$

verificante le condizioni seguenti :

$$(23) \quad \text{supporto } Q_h \subset C_{2\varrho}$$

$$(24) \quad M(T_h - Q_h) \leq \sigma$$

$$(25) \quad M(\partial Q_h) \leq N^*(\sigma, T_h) + \sigma/\varrho.$$

Per le (23) e (24) esiste una successione $\{T_{h'} - Q_{h'}\}$ estratta dalla successione $\{T_h - Q_h\}$, convergente debolmente.

La successione $\{T_{h'}\}$ converge debolmente a T per ipotesi; pertanto la successione $\{Q_{h'}\}$ converge debolmente a una corrente $Q \in E_k(R^n)$ e si ha per le (24) e (25) :

$$(26) \quad M(T - Q) \leq \sigma$$

$$(27) \quad M(\partial Q) \leq \min_{h \rightarrow \infty} \lim N^*(\sigma, T_h) + \sigma/\varrho.$$

Ma, essendo per le (26) e (27) :

$$(28) \quad N^*(\sigma, T) \leq \min_{h \rightarrow \infty} \lim N^*(\sigma, T_h) + \sigma/\varrho$$

per l'arbitrarietà di ϱ dalla (28) segue la (22).

COROLLARIO. 1.11. *Se la successione $\{T_h\}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$, uniformemente quasi normali, converge debolmente alla corrente $T \in E_k(R^n)$, la corrente T è quasi normale.*

Segue dal teorema 1.10 e dalle definizioni 1.2 e 1.3.

§ 2. — Correnti quasi normali e trasformazioni lipschitziane.

TEOREMA. 2.1. *Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale e siano :*

$$f_0, f_1, \dots, f_k; \quad g_0, g_1, \dots, g_k$$

$2k + 2$ funzioni reali definite in R^n e ivi di classe C^∞ . Siano p, ε due numeri, tali che si abbia, per $x \in R^n, i = 0, 1, \dots, k$:

$$|f_i(x)| \leq p; \quad |\text{grad } f_i(x)| \leq p$$

$$|g_i(x)| < p; \quad |\text{grad } g_i(x)| \leq p$$

ed inoltre, detto C il supporto di T , per $x \in C$ sia :

$$|f_i(x) - g_i(x)| \leq \varepsilon.$$

Risulta allora, per ogni $\sigma > 0$, $\varrho > 0$:

$$(1) \quad |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)| \leq \\ \leq (1+k) p^k (\varepsilon + 4p\varrho) \left[M(T) + N^*(\sigma, T) + \sigma + \frac{\sigma}{\varrho} \right] + 2\sigma p^{k+1}.$$

Dimostriamo dapprima che sotto l'ulteriore ipotesi :

$$M(\partial T) < +\infty$$

si ha la disuguaglianza :

$$(2) \quad |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)| \leq (1+k) \varepsilon p^k [M(T) + M(\partial T)].$$

La (2) è verificata per $k=0$. Infatti in tal caso si ha :

$$|T(f_0) - T(g_0)| \leq M(T) \varepsilon.$$

Supponiamo che la (2) valga per un certo valore i di k e dimostriamo che essa vale per $k=i+1$. Si ha infatti :

$$(3) \quad |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{i+1}) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{i+1})| \leq \\ \leq |T([f_0 - g_0] \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{i+1})| + \\ + |T(g_0 \wedge [df_1 \wedge \dots \wedge df_{i+1} - dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{i+1}])| = \\ = |T([f_0 - g_0] \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{i+1})| + \\ + |(\partial [T \wedge g_0])(f_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_{i+1} - g_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_{i+1})|.$$

Si ha :

$$(4) \quad |T([f_0 - g_0] \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{i+1})| \leq \varepsilon p^{i+1} M(T)$$

e, avendo supposto che la (2) valga per $k=i$, si ha pure :

$$(5) \quad |(\partial [T \wedge g_0])(f_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_{i+1} - g_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_{i+1})| \leq (1+i) \varepsilon p^i [pM(\partial T) + pM(T)].$$

Dalle (3), (4) e (5) segue che la (2), se vale per $k=i$, vale anche per $k=i+1$. La (2) vale allora per ogni valore di k .

Passiamo ora alla dimostrazione della (1). Fissati i due numeri $\sigma > 0$ e $\varrho > 0$, e detto C il supporto di T , sia Q la corrente costruita nel lemma 1.7. Si ha subito:

$$(6) \quad \begin{cases} (T - Q)(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) \leq \sigma p^{k+1} \\ (T - Q)(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) \leq \sigma p^{k+1} \end{cases}$$

e, per $x \in C_{2\varrho}$, $i = 0, \dots, k$ si ha pure:

$$(7) \quad |f_i(x) - g_i(x)| \leq \varepsilon + 4p\varrho.$$

Possiamo scrivere per le (6):

$$(8) \quad \begin{aligned} & |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)| \leq \\ & \leq 2\sigma p^{k+1} + |Q(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - Q(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)|. \end{aligned}$$

Scriviamo la (2) per la corrente Q , tenendo conto della (7):

$$(9) \quad \begin{aligned} & |Q(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - Q(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)| \leq \\ & \leq (1+k)p^k(\varepsilon + 4p\varrho) \left[M(T) + \sigma + N^*(\sigma, T) + \frac{\sigma}{\varrho} \right]. \end{aligned}$$

Dalle (8) e (9) segue subito la (1).

COROLLARIO 2.2. *Sia $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ una corrente quasi normale e $\{f_{0h}\}_h$, $\{f_{1h}\}_h, \dots, \{f_{kh}\}_h$ successioni di funzioni reali definite in \mathbb{R}^n e ivi di classe C^∞ , verificanti le condizioni seguenti: esista un numero positivo p tale che si abbia, per $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 0, \dots, k$; $h = 1, 2, \dots$:*

$$|f_{ih}(x)| \leq p, \quad |\text{grad } f_{ih}(x)| \leq p;$$

le successioni $\{f_{0h}\}, \dots, \{f_{kh}\}$ convergano uniformemente sul supporto di T . In tali ipotesi esiste il limite:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissati i numeri $\sigma > 0$, $\varrho > 0$ e gli indici h, s applichiamo il teorema 2.1 alla differenza:

$$|T(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}) - T(f_{0s} \wedge df_{1s} \wedge \dots \wedge df_{ks})|$$

e otteniamo:

$$(10) \quad \max_{(h, \varepsilon) \rightarrow \infty} \lim |T(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}) - T(f_{0s} \wedge df_{1s} \wedge \dots \wedge df_{ks})| \leq \\ \leq (1+k) 4\rho p^{k+1} [M(T) + N^*(\sigma, T) + \sigma] + (1+k) 4 p^{k+1} \sigma + 2\sigma p^{k+1}.$$

Basta ora far tendere prima ρ a zero e poi $\sigma \rightarrow 0$.

COROLLARIO 2.3. *Sia $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$, una successione di correnti uniformemente quasi normali debolmente convergente; sia K un compatto con $\text{supp } T_h \subset K$ ($h = 1, 2, \dots$), le successioni di funzioni reali $\{f_{0h}\}_h, \{f_{1h}\}_h, \dots, \{f_{kh}\}_h$ verifichino le ipotesi del corollario 2.2 e il limite:*

$$\lim_{(h, \varepsilon) \rightarrow \infty} |f_{ih}(x) - f_{is}(x)| = 0 \quad (i = 0, \dots, k)$$

sia uniforme rispetto a $x \in K$; in tali ipotesi esiste il limite doppio:

$$(11) \quad \lim_{(r, h) \rightarrow \infty} T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la convergenza debole della successione $\{T_r\}$ esiste, per ogni fissato indice h , il limite:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}) \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Per dimostrare l'esistenza del limite (11) basterà allora far vedere che il limite

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh})$$

esistente per ogni indice r per il corollario 2.2, è uniforme rispetto a r . Fissato σ , con $0 < \sigma < 1$, poniamo:

$$M(\sigma) = \sup \{[M(T_h) + N^*(\sigma, T_h)]: \quad h = 1, 2, \dots\}$$

e determiniamo un indice N tale che per ogni coppia di indici h e s , entrambi maggiori di N , si abbia, per $x \in K$ e $i = 0, \dots, k$:

$$|f_{ih}(x) - f_{is}(x)| \leq \frac{\sigma}{M(\sigma) + 1}.$$

Fissati i due indici h e s , maggiori di N , applichiamo il teorema 2.1 alla corrente T_r e alle $2k + 2$ funzioni f_{ih}, f_{is} ($i = 0, \dots, k$) ponendovi $\varepsilon = \rho =$

$= \sigma(M(\sigma) + 1)^{-1}$; si ha :

$$(13) |T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}) - T_r(f_{0s} \wedge df_{1s} \wedge \dots \wedge df_{ks})| \leq 2\sigma p^k (1 + 5p + k + 4pk).$$

La (13), valevole per ogni coppia di indici h e s entrambi maggiori di N , dimostra che il limite (12) è uniforme rispetto a r .

DEFINIZIONE 2.4. Sia $T \in E_k(R^n)$ quasi normale, sia $f: R^n \rightarrow R^m$ una funzione uniformemente lipschitziana e sia $\{f_h\}$ una successione di funzioni $f_h: R^n \rightarrow R^m$, di classe $C^\infty(R^n)$ uniformemente lipschitziane, convergente uniformemente a f sul supporto di T ⁽⁴⁾. Definiamo la corrente $f_{\#} T \in E_k(R^m)$ nel modo seguente :

$$(14) \quad f_{\#} T = \lim_{h \rightarrow \infty} f_{h\#} T.$$

Dette (f_h^1, \dots, f_h^m) le componenti della funzione f_h ($h = 1, 2, \dots$), si ha :

$$(f_{h\#} T)(\varphi) = T(f_h^{\#} \varphi) = \sum_{(\lambda)} T(a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(f) \wedge df_h^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge df_h^{\lambda_k})$$

e pertanto il limite a secondo membro della (14) esiste per il corollario 2.2. Inoltre il limite (14) è indipendente dalla particolare successione scelta, perchè se $\{f_{1,h}\}, \{f_{2,h}\}$ verificano le condizioni enunciate, ciò accade anche per la successione $\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{1,2}, f_{2,2}, \dots, f_{1,h}, f_{2,h}, \dots\}$.

OSSERVAZIONE 2.5. Sia $f: R^n \rightarrow R^m$ uniformemente lipschitziana; l'operazione che associa alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ la corrente $f_{\#} T$ è lineare e si ha :

$$\text{supporto } (f_{\#} T) \subset f(\text{supporto } T)$$

$$\partial f_{\#} T = f_{\#} \partial T.$$

Se p è un numero che maggiora il modulo di Lipschitz della f si ha :

$$M(f_{\#} T) \leq p^k M(T)$$

e, se è $M(\partial T) < \infty$, si ha pure :

$$M(\partial f_{\#} T) \leq p^{k-1} M(\partial T).$$

(4) Per il teorema di prolungamento delle funzioni lipschitziane la funzione f potrebbe supporre localmente lipschitziana.

OSSERVAZIONE 2.6. Se $f: R^n \rightarrow R^m$ e $g: R^n \rightarrow R^m$ sono funzioni lipschitziane e $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale; se è $f(x) = g(x)$ per $x \in (\text{supporto } T)$, è pure:

$$(15) \quad f_{\#} T = g_{\#} T.$$

Infatti ogni successione di funzioni $\{f_h\}$ atta a definire, a norma della definizione 2.4, la corrente $f_{\#} T$, definisce pure, nello stesso modo, $g_{\#} T$.

LEMMA 2.7. Sia $T \in E_k(R^n)$ quasi normale, $f: R^n \rightarrow R^m$ una funzione uniformemente lipschitziana e p un numero che maggiore il modulo di Lipschitz di f . Si ha:

$$(16) \quad N^*(p^k \sigma, f_{\#} T) \leq p^{k-1} N^*(\sigma, T).$$

Sia $S \in E_k(R^n)$ una corrente tale che $M(T - S) \leq \sigma$, $M(\partial S) < +\infty$. Si ha, per l'osservazione 2.5:

$$(17) \quad M(f_{\#} T - f_{\#} S) \leq p^k \sigma$$

$$(18) \quad M(\partial f_{\#} S) \leq p^{k-1} M(\partial S).$$

Le (17) e (18) dimostrano la (16).

COROLLARIO 2.8. Se $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale e $f: R^n \rightarrow R^m$ è una funzione uniformemente lipschitziana, la corrente $f_{\#} T$ è quasi normale.

COROLLARIO 2.9. Le correnti della successione $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$, siano uniformemente quasi normali e la funzione $f: R^n \rightarrow R^m$ sia uniformemente lipschitziana. In tali ipotesi le correnti della successione $\{f_{\#} T_h\}$ sono uniformemente quasi normali.

COROLLARIO 2.10. Sia $f: R^n \rightarrow R^m$ uniformemente lipschitziana, la successione $\{T_h\}$ di correnti di $E_k(R^n)$ uniformemente quasi normali converga debolmente a T ed esista un compatto K tale che: $(\text{supporto } T_h) \subset K$ ($h = 1, 2, \dots$). In tali ipotesi si ha:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f_{\#} T_h = f_{\#} T.$$

Segue subito dal corollario 2.3.

§ 3. — Le correnti g -rettificabili.

DEFINIZIONE 3.1. Sia $\sigma \geq 0$, A un aperto di R^n e $T \in E_k(R^n)$; poniamo:

$$M(T; A) = \sup \{T(\omega) : \omega \in E^k(R^n), M(\omega) \leq 1, \text{ supporto } \omega \subset A\}$$

$$N^*(\sigma, T; A) = \inf \{M(\delta Q; A) : Q \in E_k(R^n), M(T - Q; A) \leq \sigma\}.$$

OSSERVAZIONE 3.2. Sia $A \subset R^n$ un insieme aperto e $T \in E_k(R^n)$; si ha:

$$M(T; A) \leq M(T)$$

$$N^*(\sigma, T; A) \leq N^*(\sigma, T) \quad \forall \sigma > 0.$$

DEFINIZIONE 3.3. Sia $C \subset R^n$ un insieme chiuso e $\varrho > 0$; indichiamo con A_ϱ l'insieme aperto così definito:

$$A_\varrho = \{x : x \in R^n, \text{ distanza } (x, C) < \varrho\}.$$

LEMMA 3.4. Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente di massa finita, C un insieme chiuso. Fissati i numeri $\varrho > 0$ e $\sigma \geq 0$, detto A_ϱ l'insieme di cui alla definizione 3.3, ha luogo la disuguaglianza:

$$(1) \quad N^*\{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)], T \cap C\} \leq \\ \leq N^*(\sigma, T; A_\varrho) + \frac{2}{\varrho} \{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)]\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\varrho > 0$ e l'intero $h > 0$, esiste una funzione reale $g_{\varrho h} \in C^\infty(R^n)$ verificante le condizioni seguenti:

$$g_{\varrho h}(x) = 1 \quad \text{per } x \in C$$

$$g_{\varrho h}(x) = 0 \quad \text{per } x \in R^n - A_{\varrho/2}$$

$$\sup \{|\text{grad } g_{\varrho h}(x)| : x \in R^n\} \leq \frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h}.$$

Si ha subito, qualunque sia $S \in E_k(R^n)$:

$$(2) \quad M(S \wedge g_{\varrho h}) \leq M(S; A_\varrho)$$

$$(3) \quad M(S \wedge dg_{\varrho h}) \leq M(S; A_\varrho) \left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h} \right)$$

e si ha pure:

$$(4) \quad M(T \wedge dg_{\varrho h}) \leq M[T \cap (A_{\varrho} - C)] \left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h} \right).$$

Fissato $\sigma \geq 0$ e l'intero $h > 0$, determiniamo, nella ipotesi $N^*(\sigma, T; A_{\varrho}) < +\infty$, una corrente S_h tale che si abbia:

$$(5) \quad M(T - S_h; A_{\varrho}) \leq \sigma$$

$$(6) \quad M(\partial S_h; A_{\varrho}) \leq N^*(\sigma, T; A_{\varrho}) + \frac{1}{h}.$$

Posto:

$$Q_h = S_h \wedge g_{\varrho h}$$

si ha subito, tenendo conto della (2) e della (5);

$$(7) \quad \begin{aligned} M(T \cap C - Q_h) &= M[(T - S_h) \wedge g_{\varrho h}] + M(T \cap C - T \wedge g_{\varrho h}) \leq \\ &\leq M(T - S_h; A_{\varrho}) + M[T \cap (A_{\varrho} - C)] \leq \sigma + M[T \cap (A_{\varrho} - C)] \end{aligned}$$

ed anche, per le (2), (3), (4), (5) e (6):

$$(8) \quad \begin{aligned} M(\partial Q_h) &\leq M(\partial S_h \wedge g_{\varrho h}) + M[(S_h - T) \wedge dg_{\varrho h}] + M(T \wedge dg_{\varrho h}) \leq \\ &\leq M(\partial S_h; A_{\varrho}) + M(S_h - T; A_{\varrho}) \left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h} \right) + M[T \cap (A_{\varrho} - C)] \left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h} \right) \leq \\ &\leq N^*(\sigma, T; A_{\varrho}) + \frac{2}{\varrho} \{ \sigma + M[T \cap (A_{\varrho} - C)] \} + \frac{\sigma + M(T) + 1}{h}. \end{aligned}$$

Dalla (7) e (8) segue:

$$\begin{aligned} N^* \{ \sigma + M[T \cap (A_{\varrho} - C)], T \cap C \} &\leq M(\partial Q_h) \leq \\ &\leq N^*(\sigma, T; A_{\varrho}) + \frac{2}{\varrho} \{ \sigma + M[T \cap (A_{\varrho} - C)] \} + \frac{\sigma + M(T) + 1}{h} \end{aligned}$$

e quindi, passando al limite per $h \rightarrow \infty$, si ottiene la (1).

TEOREMA 3.5. *Sia $\{T_h\}$ una successione di correnti $T_h \in E_k(K^n)$ uniformemente quasi normali (definizione 1.3) e C un insieme chiuso. Le funzioni di ϱ :*

$$M[T_h \cap (A_{\varrho} - C)]$$

convergono a zero per $\varrho \rightarrow 0$, uniformemente rispetto a h ; allora le correnti della successione

$$\{ T_h \cap C \}$$

sono uniformemente quasi normali.

Fissato $\sigma > 0$ determiniamo $\varrho > 0$ in modo che si abbia :

$$M [T_h \cap (A_\varrho - C)] < \frac{\sigma}{2} \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Basta ora scrivere la (1) del lemma 3.4 per la corrente T_h , ponendo $\frac{\sigma}{2}$ al posto di σ e verificare che è :

$$N^*(\sigma, T_h \cap C) \leq N^*\left(\frac{\sigma}{2}, T_h; A_\varrho\right) + \frac{2\sigma}{\varrho} \leq N^*\left(\frac{\sigma}{2}, T_h\right) + \frac{2\sigma}{\varrho}.$$

COROLLARIO. 3.6. Se $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale e $B \subset R^n$ è un insieme di Borel, anche la corrente $T \cap B$ è quasi normale.

Se B è chiuso, $T \cap B$ è quasi normale per il teorema 3.5. Sia B un insieme di BOREL; fissato $\sigma > 0$ esiste un insieme chiuso $C_\sigma \subset B$ tale che :

$$\| T \| (B - C_\sigma) = M [T \cap (B - C_\sigma)] = M [(T \cap B) - (T \cap C_\sigma)] \leq \sigma.$$

Dalla osservazione 1.5 segue subito :

$$N^*(2\sigma, T \cap B) \leq N^*(\sigma, T \cap C_\sigma) < +\infty \quad \forall \sigma > 0.$$

TEOREMA 3.7. Sia $\{ T_h \}$ una successione di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ uniformemente quasi normali e la successione di misure $\{ \| T_h \| \}$ converga debolmente alla misura μ ; allora, per ogni compatto $C \subset R^n$ verificante la relazione

$$(9) \quad \mu(\mathcal{F}C) = 0$$

la successione :

$$\{ T_h \cap C \}$$

è una successione di correnti uniformemente quasi normali.

Fissato il compatto C verificante la (9), si ha⁽⁵⁾ :

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \| T_h \| (C) = \mu(C).$$

⁽⁵⁾ Cfr. [4] pp. 221-224; [1] pp. 194-195.

La misura μ è limitata perchè le misure della successione $\{\|T_h\|\}$ sono equilimitate; pertanto la funzione di $\varrho: \mu(\mathcal{F}A_\varrho)$ è diversa da zero per un insieme al più numerabile di valori di ϱ . Se ϱ non appartiene a tale insieme si ha:

$$(11) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \|T_h\|(A_\varrho) = \mu(A_\varrho)$$

e dalle (10) e (11) segue, per tali valori di ϱ :

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} |T_h|(A_\varrho - C) = \mu(A_\varrho - C).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ determiniamo ϱ' in modo che per esso valga la (12) e si abbia: $\mu(A_{\varrho'} - C) < \varepsilon$. Determiniamo poi l'indice h' tale che per ogni $h > h'$ si abbia:

$$(13) \quad \|T_h\|(A_{\varrho'} - C) < 2\varepsilon.$$

Per la monotonia delle funzioni di $\varrho: |T_h|(A_\varrho - C)$, la (13) ha luogo anche per ogni $\varrho < \varrho'$. Determiniamo poi ϱ'' in modo che per ogni $\varrho < \varrho''$ e per $h = 1, 2, \dots, h'$ si abbia:

$$(14) \quad \|T_h\|(A_\varrho - C) < 2\varepsilon.$$

Pertanto le funzioni di ϱ :

$$\{\|T_h\|(A_\varrho - C)\}$$

convergono a zero per $\varrho \rightarrow 0$, uniformemente rispetto a h e, per il teorema 3.5 e l'uguaglianza:

$$\|T_h\|(A_\varrho - C) = M[T_h \cap (A_\varrho - C)]$$

il presente teorema è dimostrato.

DEFINIZIONE 3.8. Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale e $g: R^n \rightarrow R^k$ una trasformazione localmente lipschitziana. Diremo che la corrente T è *g-rettificabile* se la corrente $g_{\#}(T \cap B)$ è rettificabile per ogni insieme di BOREL $B \subset R^n$; cioè se per ogni insieme di BOREL $B \subset R^n$ esiste una funzione γ a valori interi, definita in R^k e ivi sommabile, tale che per ogni forma $\varphi \in E^k(R^k)$ si abbia:

$$(g_{\#}[T \cap B])(\varphi) = \int_{R^k} \gamma \varphi.$$

La corrente $g_{\#}(T \cap B)$ esiste per il corollario 3.6 e la definizione 2.4.

TEOREMA 3.9. *Sia \mathcal{C} una famiglia di insiemi di R^n tale che la minima famiglia contenente \mathcal{C} e chiusa rispetto all'operazione di limite d'una successione d'insiemi sia la famiglia degli insiemi di Borel di R^n . Detta $g: R^n \rightarrow R^k$ una trasformazione lipschitziana e $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale, la corrente T è g-rettificabile se e solo se $g_{\#}(T \cap C)$ è rettificabile per ogni $C \in \mathcal{C}$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che se B è limite di una successione $\{B_h\}$ di insiemi di BOREL, si ha:

$$0 = \lim_{h \rightarrow \infty} \|T\| (B - B_h) = \lim_{h \rightarrow \infty} M(T \cap B - T \cap B_h)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} M[g_{\#}(T \cap B) - g_{\#}(T \cap B_h)] = 0,$$

e quindi se $g_{\#}(T \cap B_h)$ è rettificabile lo è pure $g_{\#}(T \cap B)$.

LEMMA 3.10. *Sia $\{T_h\}$ una successione di correnti uniformemente quasi normali n-dimensionali dello spazio R^n , convergente debolmente a una corrente $T \in E_n(R^n)$; i supporti delle correnti T_h siano tutti contenuti in uno stesso compatto $C \subset R^n$. In tali ipotesi si ha:*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} M(T_h - T) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\sigma > 0$ esistono le correnti $Q_{h\sigma} \in E_n(R^n)$ e il numero M_σ tale che:

$$(15) \quad M(T_h - Q_{h\sigma}) \leq \sigma$$

$$(16) \quad M(\varepsilon Q_{h\sigma}) \leq M_\sigma, \quad M(Q_{h\sigma}) \leq M_\sigma.$$

Si può inoltre supporre che i supporti delle correnti $Q_{h\sigma}$ siano tutti contenuti in un intorno limitato di C . Dalla (15) segue allora che esiste una corrente $Q_\sigma \in E_n(R^n)$ tale che $\{Q_{h\sigma}\}$ converga debolmente a Q_σ e si abbia:

$$(17) \quad M(T - Q_\sigma) \leq \sigma.$$

Mediante l'isomorfismo di $E_n(R^n)$ su $E_0(R^n)$ (lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto) così definito:

$$T \rightarrow T \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

e tenendo conto delle (16), possiamo applicare alla successione $\{Q_{h\sigma}\}$ un teorema di compattezza riguardante le distribuzioni le cui derivate sono misure ⁽⁶⁾ e scrivere :

$$(18) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} M(Q_{h\sigma} - Q_\sigma) = 0.$$

Tenendo presenti le (15), (17) e (18) si ha ,

$$\max_{h \rightarrow \infty} \lim M(T - T_h) \leq 2\sigma$$

e il presente lemma risulta dimostrato.

TEOREMA 3.11. *Sia $g: R^k \rightarrow R^n$ una trasformazione localmente lipschitziana e $\{T_h\}$ una successione di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ uniformemente quasi normali e g -rettificabili, convergente debolmente a $T \in E_k(R^n)$. In tali ipotesi T è g -rettificabile.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare, a norma del teorema 3.9, la rettificabilità delle correnti $\{T \cap C\}$, per C appartenente ad una opportuna famiglia di insiemi.

Osserviamo dapprima che, essendo le correnti della successione $\{T_h\}$ uniformemente quasi normali, le misure $\|T_h\|$ sono uniformemente limitate. Possiamo allora trovare una successione subordinata $\{T_{h'}\}$ tale che $\{\|T_{h'}\|\}$ converga debolmente ad una misura μ .

La famiglia \mathcal{C} di insiemi compatti di cui al teorema 3.9 si può allora determinare prendendo tutti gli insiemi compatti C tali che :

$$(19) \quad \mu(\mathcal{F} C) = 0.$$

Inoltre dalla (19) si deduce facilmente che la successione $\{T_{h'} \cap C\}$ converge debolmente a $T \cap C$.

Per il teorema 3.7, fissato l'insieme $C \in \mathcal{C}$, la successione :

$$\{T_{h'} \cap C\}$$

è formata da correnti uniformemente quasi normali.

Per il corollario 2.9 lo sono anche le correnti della successione :

$$(20) \quad \{g_{\#}(T_{h'} \cap C)\}.$$

⁽⁶⁾ Cfr. [3] teorema 1.6 a pag. 33.

Le correnti della successione (20) sono k -dimensionali dello spazio R^k , convergono debolmente alla corrente $g_{\#}(T \cap C)$ e verificano tutte le ipotesi del lemma 3.10; pertanto si ha:

$$(21) \quad \lim_{h' \rightarrow \infty} M [g_{\#}(T_{h'} \cap C) - g_{\#}(T \cap C)] = 0.$$

Dalla (21) e dalla g -rettificabilità di ogni corrente $T_{h'} \cap C$ segue la g -rettificabilità di $T \cap C$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura (r - 1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*. Annali di Matematica pura e applicata, vol. 36 (1954), pp. 191-213.
- [2] H. FEDERER and W. H. FLEMING: *Normal and integral currents*. Annals of Mathematics, vol. 72 (1960), pp. 458-520.
- [3] M. MIRANDA: *Distribuzioni aventi derivate misure. Insiemi di perimetro localmente finito*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 18 (1964), pp. 27-56.
- [4] DE LA VALLÉE POUSSIN: *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*. Annales de l'Institut H. Poincaré, vol. 2 (1932), pp. 169-232.
- [5] H. WHITNEY: *Geometric Integration Theory*. Princeton, 1957.