ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIORGIO TALENTI

Osservazioni sulla nota : un problema di Cauchy

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 2 (1965), p. 179-184

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_179_0>

OSSERVAZIONI SULLA NOTA: UN PROBLEMA DI CAUCHY

GIORGIO TALENTI (a Genova) (0)

Riprendo brevemente l'argomento della mia nota: *Un problema di Cauchy* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, serie III, vol. XVIII, fasc. II, 1964 — pagg. 165-186) per mettere in evidenza come, con la stessa tecnica là utilizzata, si possano conseguire ulteriori nuovi teoremi di esistenza-unicità, in classi di GEVREY, per il problema di CAUCHY. Tali teoremi possono, fra l'altro, servire in certe questioni relative ad operatori parabolici, recentemente studiate da J. L. LIONS ed E. MAGENES (cfr. Sur certains aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques, in corso di stampa su Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa; in particolare cfr. i nn. 7, 8); gli stessi LIONS e MAGENES hanno attirato la mia attenzione sopra tali questioni, ponendomi un quesito che, nella sua forma più semplice, si può enunciare così.

Consideriamo l'equazione parabolica in tre variabili:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

supponiamo che i coefficienti siano funzioni analitiche reali delle variabili x, y, di classe 2 secondo GEVREY rispetto a z, definite in un intorno della superficie cilindrica $x = f(y)$, $-\infty \leq z \leq +\infty$, con f funzione analitica. Assegnamo le condizioni iniziali:

$$u(f(y), y, z) = g(y, z), \qquad u_x(f(y), y, z) = h(y, z),$$

Pervenuto alla Redazione il 5 ottobre 1964.

(0) Questo lavoro fa parte dell'attività del gruppo di ricerca matematica n. 23 del C. N. R.

dove g, h sono funzioni analitiche reali di g, e di classe 2 secondo GEVREY rispetto a z. Esiste una soluzione di questo problema di CAUCHY che sia funzione analitica delle variabili x, y, e di classe 2 secondo GEVREY rispetto a z?

I teoremi VI, VII della mia nota citata danno risposta affermativa nel caso che i coefficienti siano costanti, e $f(y) = 0$. Se invece a, b, c dipendono esplicitamente da tutte le variabili, i teoremi della mia nota provano solamente l'esistenza di una soluzione analitica in y di classe 2 secondo GEVREY rispetto a z, derivabile due volte rispetto a x. Tuttavia, il quesito di LIONS e MAGENES ha in ogni caso risposta affermativa, come risulta dai teoremi esposti nelle righe che seguono.

1. Consideriamo l'equazione:

$$\sum_{<p,\,h>+i\leq n} a_{hi}(x, t)\, D^h \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + g(x, t) = 0, \tag{1}$$

dove: $x = (x_1, \dots, x_N)$; p è una N-pla di numeri $p_1 \geq 1, \dots, p_N \geq 1$; h è una Npla di numeri interi $h_1 \geq 0, \dots, h_N \geq 0$ (un N-indice); $\langle p, h \rangle = p_1 h_1 + \dots + p_N h_N$; $D^h = \partial^{|h|} / \partial x_1^{h_1} \dots \partial x_N^{h_N}$, $|h| = h_1 + \dots + h_N$; $n \geq 1$ è l'ordine dell'equazione.

TEOREMA I. *Si abbiano le condizioni iniziali:*

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x, 0) = u_i(x) \tag{2}$$

$$(i = 0, \dots, n-1\ ;\ x \in E \subset \{(x, t) : (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1},\ t = 0\})$$

e sia $a_{0\dots 0n} \neq 0$. *Se* a_{hi}, g *appartengono a* $G^{(p_1, \dots, p_N, 1)}$ [1] *in un intorno su* $\mathbb{R}^{N+1}$ *dell'insieme* E, *se* u_i *appartiene a* G^p *in* E, *esiste una ed una sola soluzione del problema* (1)-(2), *appartenente a* $G^{(p_1, \dots, p_N, 1)}$ *in un intorno su* $\mathbb{R}^{N+1}$ *dell'insieme* E.

TEOREMA II. *Si abbiano le condizioni iniziali:*

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x, \varphi(x)) = u_i(x) \qquad (i = 0, \dots, n-1) \tag{3}$$

e sia:

$$\sum_{\substack{<p,\,h>+i\leq n \\ |h|+i=n}} a_{hi}(x, \varphi(x)) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^{h_1} \dots \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\right)^{h_N} \neq 0.$$

---

[1] Per la definizione di questo spazio funzionale, cfr. la nota citata nella introduzione, pagg 166-167.

Se a_{hi}, g *appartengono a* $G^{(p_1,\dots,p_N,1)}$ *in un intorno su* $\mathbb{R}^{N+1}$ *della ipersuperficie* $t=\varphi(x)$*; se* φ, u_i *appartengono a* G^p*, allora esiste una ed una sola soluzione del problema* (1)-(3)*, appartenente a* $G^{(p_1,\dots,p_N,1)}$ *in un intorno su* $\mathbb{R}^{N+1}$ *della ipersuperficie* $t=\varphi(x)$.

Il teor. I è un immediato corollario del teor. III (n° 2); il teor. II si deduce dal teor. I nel modo seguente.

Se si fa il cambiamento di variabili: $x'=x$, $t'=t-\varphi(x)$ e si pone:

$$a'_{hi}(x',t')=a_{hi}(x',t'+\varphi(x')),\qquad g'(x',t')=g(x',t'+\varphi(x')),$$

$$v(x',t')=u(x',t'+\varphi(x')),$$

(1)-(3) si scrive:

$$\sum_{\langle p,h\rangle+i\le n} a'_{hi}(x',t')\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x'_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{h_j}\frac{\partial^i v}{\partial t'^i}+g'(x',t')=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial t'^i}(x',0)=u_i(x')\qquad (i=0,\dots,n-1)$$

e si presta all'applicazione del teor. I. Infatti, l'operatore differenziale che compare in (4) è del tipo:

$$\sum b_{hilm}\frac{\partial^{|l|}}{\partial x_1'^{l_1}\dots\partial x_N'^{l_N}}\frac{\partial^{i+|m|}}{\partial t'^{i+|m|}} \tag{5}$$

$$(l_1+m_1\le h_1,\dots,l_N+m_N\le h_N,\ \langle p,h\rangle+i\le n)$$

e in (5) risulta $\langle p,l\rangle+|m|+i\le\langle p,h\rangle+m_1(1-p_1)+\dots+m_N(1-p_N)+$ $+i\le\langle p,h\rangle+i\le n$.

2. Sia g^* una funzione della variabile x e del parametro complesso z. Diremo che g^* è di classe $G^{p,\omega}$ se g^* appartiene a G^p_x ed è olomorfa rispetto a z.

Osserviamo che: *a*) ogni funzione g di classe $G^{(p_1,\dots,p_N,1)}$ si prolunga con una funzione g^* di classe $G^{p,\omega}$; *b*) se g^* è di classe $G^{p,\omega}$ nell'insieme $E\times\{z:|z|<T\}$ ($E\subset\mathbb{R}^N$), la restrizione g di g^* all'insieme $E\times\{t:-T<t<+T\}$ appartiene a $G^{(p_1,\dots,p_N,1)}$.

Per dimostrare *a*) indichiamo con K un compatto contenuto nel dominio di g e con l, L dei numeri tali che:

$$\max_{(x,t)\in K}\left|D^m\frac{\partial^j g}{\partial t^j}(x,t)\right|\le Ll^{-|m|-j}\,\Gamma(\langle m,p\rangle+j+1)\ \text{per ogni m.}$$

Per ogni m e per (x, t) in K, la serie di potenze in z:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} D^m \frac{\partial^j g}{\partial t^j}(x, t)$$

converge per $|z| < l$; anzi, se $|z| \leq l' < l$:

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} D^m \frac{\partial^j g}{\partial t^j}(x, t) \right| \leq L l^{-|m|} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\langle m, p \rangle + j + 1)}{j!} \left(\frac{l'}{l}\right)^j =$$

$$= L l^{-|m|} \left(1 - \frac{l'}{l}\right)^{-\langle m, p \rangle - 1} \Gamma(\langle m, p \rangle + 1).$$

La funzione:

$$g^*(x, t + it') = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it')^j}{j!} \frac{\partial^j g}{\partial t^j}(x, t)$$

è dunque il prolungamento richiesto.

Per dimostrare *b*) prendiamo arbitrariamente due numeri T_0 , T_1 $(0 < T_0 < T_1 < T)$ ed osserviamo che:

$$g(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g^*(x, T_1 e^{i\vartheta})}{T_1 e^{i\vartheta} - t} T_1 e^{i\vartheta} \, d\vartheta \qquad (|t| < T_1),$$

dunque:

$$\left| D^m \frac{\partial^j g}{\partial t^j}(x, t) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{j!}{|T_1 e^{i\vartheta} - t|^{j+1}} \, |D^m g^*(x, T_1 e^{i\vartheta})| \, T_1 \, d\vartheta \leq$$

$$\leq \frac{T_1 \, j!}{(T_1 - T_0)^{j+1}} \max_{0 \leq \vartheta \leq 2\pi} |D^m g^*(x, T_1 e^{i\vartheta})| \qquad (|t| \leq T_0).$$

TEOREMA III. *Considériamo il problema* (1) - (2), *supponendo E compatto,* $a_{0 \ldots 0n} = -1$.

Ipotesi:

1) *le funzioni a_{hi} e*

$$f(x, t) = g(x, t) + \sum_{\substack{\langle p, h \rangle + i \leq n \\ 0 \leq i < n}} a_{hi}(x, t) \sum_{j=i}^{n-1} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} D^h u_i(x) \tag{7}$$

si prolungano nell'insieme $E \times \{t + it' : |t + it'| \leq T\}$ con delle funzioni a^*_{hi}, f^* di classe $G^{p, \omega}$;

2) *esistono un numero positivo l e un numero ε, $0 < \varepsilon < 1$, tali che:*

$$A_{hi} = \sup_m \frac{\max |D^m a^*_{hi}(x, t + it')|}{l^{|m|}\,\Gamma(\langle m, p\rangle + 1)} < +\infty,$$

$$\sup_m \frac{\max |D^m f^*(x, t + it')|}{l^{|m|}\,\Gamma(\langle m, p\rangle + 1)} < +\infty,$$

$$\sum_{\substack{<p,h>+i\leq n \\ 0\leq i<n}} A_{hi}\, l^{|h|}\,(T\varepsilon^{-1})^{n-i} < 1 - \varepsilon.$$

Conclusione: il problema (1) - (2) *ammette una ed una sola soluzione che si prolunga in $E \times \{t + it' : |t + it'| \leq T\}$ con una funzione u^* tale che:*

$$u^*(x, t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!}\, u_j(x) \textit{ appartiene a } G^{p,\omega}.$$

Il teor. III si dimostra con la tecnica della nota citata nell'introduzione, estendendo a valori complessi di t il lemma del n^0 17.

3. Riguardo al problema (1) - (2) si può dimostrare un teorema analogo al teor. I, sull'esistenza di un numero finito di derivate rispetto a t della soluzione.

Sia g una funzione della variabile x e di un parametro t. Diremo che g è di classe $G^{p,j}$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ se $\partial^i g / \partial t^i (i = 0, \dots, j)$ è di classe G^p_x.

Teorema IV. *Sia $a_{0\dots0n} \neq 0$. Se a_{hi}, g appartengono a $G^{p,j}$ in un intorno su $\mathbb{R}^{N+1}$ dell'insieme E, e se u_i appartiene a G^p, allora la soluzione u del problema* (1) - (2), *appartenente a G^p_x, appartiene a $G^{p,j+n}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $a_{0\dots0n} = -1$. La funzione $v = \partial^n u / \partial t^n$ è la (sola) soluzione, appartenente a G^p_x in un intorno su $\mathbb{R}^{N+1}$ dell'insieme E, della equazione integrodifferenziale:

$$v(x, t) = f(x, t) + \sum_{\substack{<p,h>+i\leq n \\ 0\leq i<n}} a_{hi}(x, t)\, D^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\, v(x, \tau)\, d\tau, \tag{8}$$

dove f è espressa da (7); poichè:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}\, u_i(x) + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\, v(x, \tau)\, d\tau, \tag{9}$$

certamente u è di classe $G^{p,n}$.

Supponiamo che u appartenga a $G^{p,\,n+k-1}$ $(k = 1, \dots, j)$. Allora v appartiene a $G^{p,\,k-1}$ e $\int_0^t (t-\tau)^{n-i-1}\, v(x, \tau)\, d\tau$ $(i = 0, \dots n-1)$ appartiene a $G^{p\,k}$; dunque se a_{hi}, g appartengono a $G^{p\,i}$ e u_i appartiene a G^{p}, la funzione:

$$f(x, t) + \sum_{\substack{<p,h> + i \leq n \\ 0 \leq i < n}} a_{hi}(x, t)\, D^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\, v(x, \tau)\, d\tau$$

appartiene a $G^{p,\,k}$. Pertanto, a causa di (8), v appartiene a $G^{p,\,k}$; stante (9), u appartiene a $G^{p,\,n+k}$.

4. Il teorema II consente di provare, con la tecnica di HOLMGREN, il seguente teorema di unicità:

TEOREMA V. *Se a_{hi} appartiene a $G^{(p_1, \dots p_N, 1)}$ in un intorno su $\mathbb{R}^{N+1}$ della ipersuperficie $t = \varphi(x)$, se φ appartiene a G^p ed è:*

$$\sum_{\substack{<p,h> + i \leq n \\ |h| + i = n}} a_{hi}(x, \varphi(x)) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^{h_1} \dots \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\right)^{h_N} \neq 0,$$

allora il problema (1) - (3) *ammette al più una soluzione di classe C^n* (2).

---

(2) Nel caso $N = 1$, $p = p_1 > 1$, $\varphi = 0$, il teor. V è contenuto in un teorema di de GIORGI; cfr. *E.* de GIORGI, Un teorema di unicità per il problema di CAUCHY, Ann. Mat. 1955.