ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

C. BAIOCCHI

**Ulteriori osservazioni sull'integrale di Bochner**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 18, nº 3 (1964), p. 283-301

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_3_283_0>

# ULTERIORI OSSERVAZIONI SULL' INTEGRALE DI BOCHNER

di C. BAIOCCHI (Pavia) (*)

## § 1. Introduzione.

Questo lavoro fa seguito alla nota « Osservazioni sulla definizione dell'integrale di Bochner » pubblicata sugli annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, nel 1963, ed è sempre uno sviluppo del lavoro svolto a Pisa col prof. E. De Giorgi per la mia tesi di Laurea; alla predetta nota, che suppongo conosciuta dal lettore, rinvio per le notazioni, le definizioni ed i concetti qui richiamati.

Nel § 2 è data una caratterizzazione delle funzioni misurabili analoga a quella che sfrutta la nozione di misurabilità in forma debole.

Nel § 3 è dimostrata per l'integrale una « proprietà della media » che generalizza il teorema della media per funzioni reali di una variabile reale; ed è dimostrato che tale proprietà, insieme alla additività numerabile, è caratteristica dell'integrale, cioè può essere presa come definizione.

Nel § 4 è trattato il problema della derivazione: essa in generale ha senso solo in forma « globale » cioè alla Radon-Nikodym) mentre se lo spazio di definizione delle funzioni è euclideo ha senso anche in forma « puntuale ». Si è dimostrato che nel caso di spazi euclidei i due concetti di derivata coincidono e si sono trovate condizioni sullo spazio che assicurino la derivabilità di ogni funzione a variazione limitata.

Nel § 5 infine si è ritornati all'integrale di Bochner cioè alle funzioni definite in sottoinsiemi di spazi euclidei, precisamente alle funzioni definite su un segmento; e si è generalizzato un noto teorema relativo all'integrale

---

Pervenuto alla Redazione il 13 Febbraio 1964.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio nazionale delle ricerche.

di Lebesgue, cioè: una funzione è assolutamente continua se e solo se è un integrale; in tal caso è a variazione limitata e la sua variazione è l'integrale della norma della derivata.

## § 2. Funzioni misurabili.

Con le notazioni e le definizioni di [1] sia $(S, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio mensurale completo e $\sigma$ finito, $B$ uno spazio di Banach, $f: S \longrightarrow B$ una funzione misurabile, cioè:

$$(1.2)\quad \begin{cases} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \text{ per } x \in S - N; \quad N \in \mathcal{F}; \quad \mu(N) = 0 \\ f_n(x) = \alpha_{i,n} \qquad \text{per } x \in F_{i,n};\ F_{in} \in \mathcal{F};\ i = 1, 2 \ldots k_n;\ \bigcup\limits_{i=1}^{kn} F_{i,n} = S;\ n = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

LEMMA 1.2. *Con le notazioni* (1.2) *sia* $\mathcal{C}$ *chiuso in* $B$. *Posto* $\mathcal{C}_k = \left\{ p \in B\,;\ \text{distanza } \overline{p\mathcal{C}} < \frac{1}{k} \right\}$ *si ha*:

$$(2.2)\qquad f^{-1}(\mathcal{C}) - N = \bigcap_{k=1}^{\infty} \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f_n^{-1}(\mathcal{C}_k) - N.$$

DIM. Sia $x \in f^{-1}(\mathcal{C}) - N$. Poichè $x \notin N$ è $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Fissato $k$ ad arbitrio, poichè $f(x) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k$ e $\mathcal{C}_k$ è aperto, da un certo $n_k$ in poi $f_n(x) \in \mathcal{C}_k$ cioè $x \in f_n^{-1}(\mathcal{C}_k)$; allora $x \in \operatorname*{maxlim}\limits_{n\to\infty} f_n^{-1}(\mathcal{C}_k)$; tale relazione, valendo per ogni $k$, poichè $x \notin N$ dà nella (2.2) la relazione $\subseteq$.

Viceversa se $x$ appartiene al secondo membro della (2.2) è ancora $x \notin N$ cioè $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; inoltre per ogni $k$ fissato esiste una successione $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ di valori di $n$ tali che $f_{n_i}(x) \in \mathcal{C}_k$; poichè esiste il $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ dovrà essere $f(x) \in \overline{\mathcal{C}}_k$ (chiusura in $B$ di $\mathcal{C}_k$) cioè si avrà: distanza $\overline{f(x), \mathcal{C}} \leq \frac{1}{k}$. Ciò valendo per ogni $k$, poichè $\mathcal{C}$ è chiuso e $x \notin N$, dà $x \in f^{-1}(\mathcal{C}) - N$ c.v.d.

COROLLARIO. *Immagini inverse mediante funzioni misurabili di insiemi chiusi o aperti in* $B$ *sono misurabili* (1).

---

(1) Userò indifferentemente le locuzioni: « insieme misurabile » ed « insieme di $\mathcal{F}$ ».

DIM. Dalla (2.2), essendo $\mathcal{F}$ chiusa rispetto a unioni, intersezioni e complementazioni, poichè $f_n^{-1}(\mathcal{C}_k)$ è ovviamente in $\mathcal{F}$ si ha $f^{-1}(\mathcal{C}) - N \in \mathcal{F}$; per la completezza di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mu$ si ha poi $f^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{F}$ per ogni $\mathcal{C}$ chiuso in $B$. Se $\mathcal{A}$ è aperto è $f^{-1}(\mathcal{A}) = S - f^{-1}(B - \mathcal{A}) \in \mathcal{F}$ essendo $B - \mathcal{A}$ chiuso in $B$. c.v.d.

Fin qui è stata usata una definizione di misurabilità « forte » (cioè che fa uso della topologia indotta in $B$ dalla norma); si può anche dare una definizione di misurabilità « debole », ponendo cioè:

DEF. 1.2. *Una funzione $f : S \longrightarrow B$ si dice debolmente misurabile se per ogni $p' \in B'$ (duale di $B$) è misurabile la funzione reale $x \longrightarrow \langle f(x), p' \rangle$.*

Si può dimostrare (cfr. ad es. [6]) che, perchè una funzione $f : S \longrightarrow B$ sia misurabile occorre e basta che siano verificate le due condizioni:

*a*) Esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ tale che $f(S - N) = \{p \in B\,;\ p = f(x)$ per qualche $x \in S - N\}$ è separabile

*b*) $f : S \longrightarrow B$ è debolmente misurabile.

La condizione *b*), ricordando la definizione di misurabilità per funzioni reali, può anche esprimersi:

*b'*) È misurabile l'immagine inversa dei semispazi (2) di $B$.

Voglio ora sostituire alla *b'*) una condizione analoga; cioè:

TEOR. 1.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f : S \longrightarrow B$ sia misurabile è che siano verificate le due condizioni:*

*a*) *Esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ tale che l'insieme $\{p \in B\,;\ p = f(x)$ per qualche $x \in S - N\}$ è separabile*

*b*) *Immagini inverse mediante $f$ di sfere chiuse (aperte) in $B$ sono misurabili.*

DIM. Sia $f : S \longrightarrow B$ misurabile. Con le notazioni (1.2) $f(S - N)$ è contenuto nella chiusura dell'insieme numerabile $\{\{\alpha_{i,n}\}\ i = 1, 2 \ldots k_n\,;\ n = 1, 2 \ldots\}$. La *b*) è verificata per il corollario al lemma 1.2.

Viceversa sia $f : S \longrightarrow B$ tale da verificare le *a*) e *b*). Pongo:

$f_n(x) = p_i$ dove $i$ è il minimo intero tale che $\| f(x) - p_i \| \leq \dfrac{1}{n}$ (ovvero $\| f(x) - p_i \| < \dfrac{1}{n}$ se conosco la misurabilità delle immagini inverse delle sfere aperte);

$f_{n,k}(x) = f_n(x)$ se $f_n(x) = p_i$ con $i \leq k$; $f_{n,k}(x) = 0$ altrove.

---

(2) Per « semispazio » di $B$ intendo un insieme del tipo:

$$\{ p \in B\,;\ \langle p, p' \rangle > \alpha \quad (\text{ovvero} \geq \alpha\,;\ \leq \alpha\,;\ < \alpha)\,;\ p' \in B',\ \alpha \text{ reale} \}$$

Ovviamente, per $x \notin N$, si ha $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ; $f_n(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n,k}(x)$ e per il teor. 1.2 di [1] basterà dimostrare che $f_{n,k}(x)$ è costante a tratti fortemente misurabile. Pongo allora:

$\mathcal{B}_{i,n} = \left\{ p \in B\,;\ \|p - p_i\| \leq \frac{1}{n} \right.$ (ovvero, se conosco la misurabilità delle immagini inverse delle sfere aperte di $B$, $\left.\|p - p_i\| < \frac{1}{n}\right)\Big\}$

ed avrò che $f_{n,k}(x)$ assume un numero finito di valori e gli insiemi su cui si mantiene costante sono del tipo

$$f_{n,1}^{-1}(p_1) = f^{-1}(\mathcal{B}_{1,n}) \in \mathcal{F};$$

$$f_{n,k}^{-1}(p_i) = f^{-1}(\mathcal{B}_{1,n}) - \bigcup_{h=1}^{i-1} f^{-1}(\mathcal{B}_{h,n}) \in \mathcal{F} \quad \text{per } 1 < i \leq k$$

$$f_{n,k}^{-1}(0) = S - \bigcup_{i=1}^{k} f_{n,k}^{-1}(p_i) \in \mathcal{F}$$

cioè $f_{n,k} : S \to B$ è costante a tratti misurabile, quindi $f_n : S \to B$ è misurabile e $f : S \to B$ è misurabile. c.v.d.

## § 3. Teorema della media. Nuova definizione assiomatica dell'integrale.

Def. 1.3. *Data una funzione $\varphi : \mathcal{F} \to B$ dirò che $\varphi$ gode della proprietà della media generalizzata rispetto alla funzione $f : S \to B$ ed alla misura $\mu$ se, per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < +\infty$ si ha:*

$$\varphi(A) \in \mu(A) \cdot \overline{[f(A)]} \tag{1.3}$$

*dove $f(A) = \{ p \in B\,;\ p = f(x)$ per qualche $x \in A \}$ ; $[\mathcal{C}]$ indica l'inviluppo convesso (3) di $\mathcal{C}$ in $B$ e $\overline{\mathcal{D}}$ indica la chiusura di $\mathcal{D}$ in $B$.*

Teor. 1.3. *Sia $f : S \to B$ una funzione misurabile e sommabile ; $\varphi(A) = \int_A f d\mu$ gode della proprietà della media generalizzata rispetto alla funzione $f$ ed alla misura $\mu$.*

---

(3) Cioè l'intersezione di tutti i convessi contenenti $\mathcal{C}$.

DIM. Il teorema è ovvio se $\mu(A) = 0$ per cui supporrò $0 < \mu(A) < \infty$. Sia dapprima $f$ costante a tratti: $f(x) = \alpha_i$ per $x \in A_i$; $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Posto $\lambda_i = \dfrac{\mu(A_i)}{\mu(A)}$ è $0 \leq \lambda_i \leq 1$; $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ e si ha:

$$\int_A f\, d\mu = \mu(A) \cdot \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \frac{\mu(A_i)}{\mu(A)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{per } x_i \in A_i$$

cioè il teorema è vero per le funzioni costanti a tratti.

Sia ora $f(x)$ limite uniforme di costanti a tratti $\{f_n(x)\}$ dove $f_n(x) = \alpha_{i,n}$ per $x \in A_{i,n}$; $A_{i,n} \in \mathcal{F}$; $\bigcup_{i=1}^{k_n} A_{i,n} = A$ $(n = 1, 2 \dots)$.

Sia $\int_A f_n(x)\, d\mu = \xi_n \mu(A)$ dove $\xi_n = \sum_{i=1}^{k_n} \dfrac{\mu(A_{i,n})}{\mu(A)} \cdot \alpha_{i,n}$.

Scelto ad arbitrio $x_{i,n} \in A_{i,n}$ pongo $\xi'_n = \sum_{i=1}^{k_n} \dfrac{\mu(A_{i,n})}{\mu(A)} f(x_{i,n})$. Ovviamente $\xi'_n \in [f(A)]$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ per ogni $i$ si abbia $\| f_n(x_{i,n}) - f(x_{i,n}) \| = \| \alpha_{i,n} - f(x_{i,n}) \| < \varepsilon$; allora è

$$\| \xi_n - \xi'_n \| \leq \max_{1 \leq i \leq k_n} \| f(x_{i,n}) - \alpha_{i,n} \| \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\mu(A_{i,n})}{\mu(A)} < \varepsilon .$$

Poichè esiste il limite: $\xi = \lim_{n \to \infty} \xi_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\int_A f_n\, d\mu}{\mu(A)} = \dfrac{\int_A f\, d\mu}{\mu(A)}$ deve esistere e coincidere con $\xi$ il limite di $\{\xi'_n\}$; e poichè $\xi'_n \in [f(A)]$ sarà $\int_A f\, d\mu = \mu(A) \cdot \lim_{n \to \infty} \xi_n = \mu(A) \cdot \lim_{n \to \infty} \xi'_n \in \overline{[f(A)]} \cdot \mu(A)$ cioè anche in questo caso vale la (1.3).

Sia ora $f(x)$ una generica funzione misurabile e $\{f_n(x)\}$ sia una successione di costanti a tratti convergente quasi ovunque verso $f(x)$. Essendo per ipotesi $\mu(A) < +\infty$ esiste una successione $I_k$ di insiemi di $\mathcal{F}$ con $\mu(I_k) < \dfrac{1}{k}$ e tali che, in $A - I_k$, $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$.

Essendo $\lim_{k \to \infty} \int_{I_k} f\, d\mu = 0$ si dovrà avere (avendo posto $\xi_k = \dfrac{\int_{A-I_k} f\, d\mu}{\mu(A - I_k)} \in$ $\in \overline{[f(A - I_k)]} \subseteq \overline{[f(A)]}$ ):

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{A-I_k} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \xi_k\,\mu(A-I_k) = \xi\cdot\mu(A)$$

dove $\xi = \lim_{k\to\infty} \xi_k \in \overline{[f(A)]}$ (ed esiste in quanto esiste il limite del prodotto $\xi_k\cdot\mu(A-I_k)\longrightarrow\int_A f\,d\mu$ ed esiste il limite del fattore $\mu(A-I_k)\longrightarrow\mu(A)$). c.v.d.

TEOR. 2.3. *Sia $\varphi : \mathcal{F}\longrightarrow B$ numerabilmente additiva e tale che esiste $f: S\longrightarrow B$ sommabile, rispetto a cui $\varphi$ verifica la proprietà della media generalizzata; si deve avere:*

$$\varphi(A)=\int_A f\,d\mu \qquad \textit{per ogni} \quad A\in\mathcal{F}. \tag{2.3}$$

DIM. A meno di cambiare $f$ su un insieme di misura nulla (cosa che non ne altera l'integrale) posso supporre $f(S)$ separabile; sia $\{p_n\}_{n=1,2\dots}$ un insieme denso in $f(S)$.

Sia $\mathcal{B}(p,r)$ la sfera di centro $p$ e raggio $r$; pongo $S_{1,r}=f^{-1}(\mathcal{B}(p_1,r))\in\mathcal{F}$; $S_{n,r}=f^{-1}\left(\mathcal{B}(p_n,r)-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathcal{B}(p_i,r)\right)\in\mathcal{F}$ (tutto ciò è immediata conseguenza del teor. 1.2).

Si ha $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{B}(p_i,r)\supseteq f(S)$ per ogni $r$ quindi $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_{i,r}=S$ per ogni $r$; inoltre gli insiemi $\{S_{i,r}\}_{i=1,2\dots}$ sono disgiunti.

Sia per ora $\mu(A)<+\infty$; per il teor. 1.3 e per l'ipotesi che $\varphi$ gode della proprietà della media, per ogni $i$ ed ogni $r$ esisteranno due punti $\xi_{i,r}$ e $\xi'_{i,r}\in\mathcal{B}(p_i,r)$ tali che

$$\xi_{i,r}\cdot\mu(S_{i,r}\cap A)=\varphi(S_{i,r}\cap A);\qquad \xi'_{i,r}\cdot\mu(S_{i,r}\cap A)=\int_{A\cap S_{i,r}} f\,d\mu.$$

Si avrà:

$$\left\|\varphi(A)-\int_A f\,d\mu\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A\cap S_{i,r})-\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A\cap S_{i,r}} f\,d\mu\right\|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\varphi(A\cap S_{i,r})-\int_{A\cap S_{i,r}} f\,d\mu\right\| = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap S_{i,r})\left\|\xi_{i,r}-\xi'_{i,r}\right\|\le$$

$$\le 2r\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap S_{i,r}) = 2r\,\mu(A)$$

(essendo $\xi_{i,r}$ e $\xi'_{i,r}$ in una stessa sfera di raggio $r$). Per l'arbitrarietà di $r$ segue che su ogni insieme di misura finita vale la (2.3).

Per la $\sigma$-finitezza di $(S, \mathcal{F}, \mu)$ e la numerabile additività dell'integrale e della $\varphi$ segue il teorema in ogni caso. c.v.d.

TEOR. 3.3. *Data la funzione $f: S \longrightarrow B$ misurabile e sommabile esiste una ed una sola funzione di insieme numerabilmente additiva $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow B$ che verifica la proprietà della media generalizzata rispetto a $f: S \longrightarrow B$.*

DIM. Ovvia per i teor. 1.3 e 2.3 e per il teorema di esistenza e unicità dell'integrale di [1].

Tale teorema può quindi servire a dare una nuova definizione assiomatica dell'integrale.

COROLLARIO. *Sia $f: S \longrightarrow B$ misurabile e sommabile e sia $g \in B'$ (duale di $B$). Si ha, per ogni $F \in \mathcal{F}$:*

$$\left\langle \int_F f\, d\mu, g \right\rangle = \int_F \langle f, g \rangle\, d\mu. \tag{3.3}$$

DIM. Infatti la funzione $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ definita da $\varphi(F) = \left\langle \int_F f\, d\mu, g \right\rangle$ è numerabilmente additiva e, per il teor. 1.3, verifica la proprietà della media generalizzata rispetto alla funzione (misurabile per il teor. 2.1) $\langle f, g \rangle$; per il teor. 3.3 si ha la validità della (3.3).

OSSERVAZIONE. Il precedente Corollario può essere dimostrato direttamente per le funzioni costanti a tratti e, con passaggio al limite, in generale per funzioni misurabili; e per mezzo di esso si potrebbero poi dimostrare i teor. 1.2, 2.3 e 3.3 conoscendo l'analogo del teor. 3.3 per l'integrale di Lebesgue.

## § 4. Derivabilità.

Quando $(S, \mathcal{F}, \mu)$ è un sottoinsieme di uno spazio euclideo con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue si dà la seguente definizione di derivata:

DEF. 1.4. *$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow B$ si dice derivabile nel punto $x \in S$ se esiste il limite $\lim\limits_{\mu(Q) \to 0} \dfrac{\varphi(Q)}{\mu Q}$ dove $Q$ è un qualunque ipercubo (intervallo, quadrato, cubo ecc.)*

*contenente $x$. La funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ si dice puntualmente derivabile se è derivabile in quasi ogni punto $x \in S$; la funzione $f : S \longrightarrow B$ definita da $f(x) = \lim\limits_{\substack{\mu(Q) \to 0 \\ x \in Q}} \dfrac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$ si dice derivata puntuale di $\varphi$.*

La definizione 1.4 non ha senso se lo spazio $S$ non ha struttura di spazio euclideo; anche il tal caso si può dare una definizione di derivata, precisamente una derivata alla Radon-Nikodym. Ho bisogno a tale scopo di alcune definizioni: la definizione di funzione assolutamente continua (cfr. [1] def. 2.3 e Teor. 3.3) e la seguente:

DEF. 2.4. *Una funzione $\chi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ si dice singolare rispetto alla misura $\mu$ se esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ tale che per ogni $F \in \mathcal{F}$ si abbia $\chi(F) = \chi(F \cap N)$.*

Con tali definizioni si può estendere un noto teorema di decomposizione di funzioni numerabilmente additive (teorema di Hahn-Lebesgue; cfr. ad es. [2] per una dimostrazione nel caso di funzioni a valori reali).

TEOR. 1.4. *Data una funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ numerabilmente additiva ed a variazione totale limitata è possibile decomporre $\varphi$ nella somma di due funzioni numerabilmente additive: $\varphi = \psi + \chi$ tali che $\psi$ sia assolutamente continua e $\chi$ sia singolare, rispetto a $\mu$; tale decomposizione è unica.*

DIM. Applicando il teorema di Hahn-Lebesgue alla funzione di insieme $V_\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ si trova un insieme $N \in \mathcal{F}$ di misura nulla tale che $V_\varphi(F - N)$ è assolutamente continua e $V_\varphi(F \cap N)$ è singolare. Ovviamente $\psi(F) = \varphi(F - N)$ è assolutamente continua e $\chi(F) = \chi(F \cap N)$ è singolare. La decomposizione è unica perchè se $\varphi = \psi' + \chi'$ fosse una decomposizione analoga la funzione $\psi - \psi' = \chi' - \chi$ sarebbe contemporaneamente assolutamente continua e singolare, quindi identicamente nulla; cioè $\psi = \psi'$ e $\chi = \chi'$.

Ha senso allora porre la seguente definizione:

DEF. 3.4. *Una funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ a variazione totale limitata si dice globalmente derivabile se esiste una funzione sommabile $f : S \longrightarrow B$ tale che $\int f \, d\mu$ coincida con la parte assolutamente continua di $\varphi$.*

Se $(S, \mathcal{F}, \mu)$ ha struttura di spazio euclideo le due definizioni di derivata sono quasi coincidenti; più precisamente si ha il

TEOR. 2.4. *Sia $S$ uno spazio euclideo* (4) *con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue. Sia $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ a variazione totale limitata ed*

(4) Tutta la dimostrazione del teorema può ripetersi se $S$ è un sottoinsieme di uno spazio euclideo dotato di punti interni e con frontiera di misura nulla.

*assolutamente continua. Allora $\varphi$ è globalmente derivabile se e solo se è puntualmente derivabile; in tal caso le due derivate coincidono.*

DIM. Sia $\varphi(F) = \int_F f\,d\mu$. Se $f$ è costante a tratti si ha ovviamente per quasi ogni $x \in S$ $f(x) = \lim\limits_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \dfrac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$. Per una generica $f$ misurabile sia $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ quasi ovunque con $f_n(x)$ costanti a tratti. Si ha allora per quasi ogni $x$:

$$\lim_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}}{}'' \left\| \frac{\varphi(Q)}{\mu(Q)} - f(x) \right\| \leq \lim_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}}{}'' \left\| \frac{\int_Q f\,d\mu}{\mu(Q)} - \frac{\int_Q f_n\,d\mu}{\mu(Q)} \right\| +$$

$$+ \lim_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}}{}'' \left\| \frac{\int_Q f_n\,d\mu}{Q} - f_n(x) \right\| + \|f_n(x) - f(x)\| \leq$$

$$\leq \lim_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}}{}'' \frac{\int_Q \|f - f_n\|\,d\mu}{\mu(Q)} + \|f_n(x) - f(x)\| = 2\,\|f_n(x) - f(x)\|$$

essendo valido è il teorema nel caso di funzioni reali. Poichè il primo membro è infinitesimo con $n$ ed il primo non dipende da $n$ si ha, per quasi ogni $x \in S$, $\lim\limits_{\mu(Q)\to 0} \dfrac{\varphi(Q)}{\mu(Q)} = f(x)$; cioè se $\varphi$ è globalmente derivabile è puntualmente derivabile e le due derivate coincidono.

Viceversa sia $\varphi : \mathcal{F} \to B$ puntualmente derivabile. Siano $x_1, x_2 \dots x_k$ le coordinate euclidee in $S$.

Se $l \equiv (l_1, l_2 \dots l_k)$ è una $k$-pla di numeri interi pongo $Q_l^n = \{x \in S;\ 2^{-n} l_i < x_i < 2^{-n}(l_i + 1)\}$; $Q^n = S - \bigcup\limits_{l\in L_n} Q_l^n$ dove $L_n = \{l;\ \max\limits_{1\leq i\leq k} |l_i| \leq n\cdot 2^n\}$.

Considero ora le partizioni di $S$ definite da: $P_1 = \{Q^1;\ Q_l^1 (l \in L)\} \dots$ $\dots P_s = \{Q^s;\ Q_l^s (l \in L_s)\} \dots$ e costruisco la successione di costanti a tratti:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in Q^n \\ \dfrac{\varphi(Q_l^n)}{\mu(Q_l^n)} & \text{se } x \in Q_l^n \end{cases}$$

Per l'ipotesi che $f(x) = \lim\limits_{\mu(Q)\to 0} \dfrac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$ esista per quasi ogni $x \in S$, per quasi ogni $x$ è $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ cioè la derivata puntuale di una funzione, se esiste, è misurabile. Sfruttando l'ipotesi che $\varphi$ sia assolutamente continua e a variazione limitata si verifica facilmente che anche $V_\varphi$ è assolutamente continua ed a variazione limitata; ma allora per il teorema di Radon-Nikodym $V_\varphi$ è un integrale si ha ovviamente $\|f(x)\| \leq \left(\frac{d V_\varphi}{d\mu}\right)_x$ cioè $f: S \longrightarrow B$ è misurabile e sommabile. Resta solo da dimostrare che è $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$; e poichè $\varphi$ e $\int f\, d\mu$ sono a variazione limitata (quindi « continue »; cfr. teor. 2.3 e relativa nota (1) di [1]) ed assolutamente continue posso limitarmi a verificare $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ per ogni $F \in P_n$, $F \neq Q^n$ $(n = 1, 2 \ldots)$. E infatti se $F \in P_n$, $F \neq Q^n$ sarà, per ogni $m > n$, $F = \bigcup_{l \in \mathcal{L}^m} Q_l^m$ dove $\mathcal{L}^m = \{l \in L_m;\ Q_l^m \subseteq F\}$. Allora si ha, se $x_l \in Q_l^m$, $\varphi(F) =$

$$= \sum_{l \in \mathcal{L}^m} \varphi(Q_l^m) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} \frac{Q(Q_l^m)}{\mu(Q_l^m)} \mu(Q_l^m) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} f_m(x_l)\, \mu(Q_l^m) = \sum_{l \in \mathcal{L}^m} \int_{Q_l^m} f_m\, d\mu .$$

Tale relazione, valendo per ogni $m > n$ dà $\int_F f\, d\mu = \lim_{m \to \infty} \int_F f_m\, d\mu = \varphi(F)$ c.v.d.

Sono noti esempi di funzioni numerabilmente additive non derivabili. Ad es. (cfr. [3]) si consideri $S = \{x;\ 0 \leq x \leq 1\}$ con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue; $B = L^1(0 \leq y \leq 1)$ (5); $\varphi(F) = \widehat{\chi_F}$ ($\chi_F(y) =$ = funzione caratteristica dell'insieme $F$; $\widehat{\chi_F}$ = classe cui appartiene $\chi_F(y)$; tale notazione sarà adoperata in generale per la classe individuata da un dato rappresentante).

Si ha ovviamente $\|\varphi(F)\| = V_\varphi(F) = \mu(F) \leq 1$ per $F \in \mathcal{F}$.

Fissato $\bar{x} \in (0, 1)$ sia $Q_n = \{x \in (0, 1);\ |\bar{x} - x| < 2/n\}$; si ha:

$$\left\| \frac{\varphi(Q_n)}{\mu(Q_n)} - \frac{\varphi(Q_{2n})}{\mu(Q_{2n})} \right\| = \frac{n}{4} \| \varphi(Q_n) - 2\varphi(Q_{2n}) \| = \frac{n}{4} \int_0^1 | \chi_{Q_n}(y) - 2\chi_{Q_{2n}}(y) |\, dy =$$

$$= \frac{n}{4} \int_{x-\frac{2}{n}}^{x-\frac{1}{n}} dx + \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} dx + \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\frac{2}{n}} dx = \frac{n}{4} \cdot \frac{4}{n} = 1.$$

(5) Cioè lo spazio delle (classi di) funzioni reali misurabili e sommabili in $0 \leq y \leq 1$ con la norma $\|\hat{f}\| = \int_0^1 | f(y) |\, dy$ dove $f(y)$ è un qualunque elemento della classe $\hat{f}$.

Allora $\dfrac{\varphi(Q_n)}{\mu(Q_n)}$ non ha limite cioè $\dfrac{\varphi(Q)}{\mu(Q)}$ non ha limite per $\mu(Q) \to 0$ qualunque sia $x \in (0, 1)$; cioè $\varphi: \mathcal{F} \to L^1$ non è derivabile.

Se si cercano condizioni necessarie di derivabilità si vede subito che una di queste è che, detta $\psi$ la parte assolutamente continua di $\varphi$, sia separabile lo spazio generato da $\{\psi(F); F \in \mathcal{F}\}$. Se infatti è $\psi(F) = \int_F f\, d\mu$ con $f$ limite di costanti a tratti, $f(x) = \lim f_n(x)$, con le notazioni (1.2) l'insieme $\left\{\int_F f_n\, d\mu;\ F \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \dots\right\}$ è denso in $\psi(\mathcal{F})$ e l'insieme (ovviamente numerabile) delle combinazioni lineari e coefficienti razionali degli elementi $\{\alpha_{i,n}\}_{i=1,2,\dots,k_n}$ è denso in $\left\{\int_F f_n\, d\mu;\ F \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots\right\}$ $n = 1, 2, \dots$ quindi in $\psi(\mathcal{F})$.

Tale condizione non è però sufficiente ($L^1(0,1)$ è separabile). Dunford-Morse [4] hanno dimostrato che sono derivabili funzioni a variazione limitata definite su un sottoinsieme di uno spazio euclideo con la struttura mensurale indotta dalla misura di Lebesgue ed a valori in uno spazio di Banach $B$ separabile e che verifichi inoltre il seguente assioma:

*A) Esiste in $B$ almeno una base di Hamel* (6) $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ *tale che* $\sup_n \left\{\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|\right\} < +\infty$ *implica:* $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\}_{n=1,2,\dots}$ *è convergente.*

Tale risultato può estendersi alla derivabilità in forma debole per funzioni di insieme $\varphi: \mathcal{F} \to B$ con $\mathcal{F}$ generica; precisamente si ha il

TEOR. 3.4. *Sia $B$ uno spazio di Banach separabile e verificante l'assioma A); sia $(S, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio mensurale $\sigma$-finito; ogni funzione $\varphi: \mathcal{F} \to B$ numerabilmente additiva ed a variazione limitata è derivabile.*

DIM. Per il teor. 1.4 posso limitarmi a supporre $\varphi: \mathcal{F} \to B$ assolutamente continua e cercare una funzione $f: S \to B$ sommabile tale che $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

---

(6) e cioè una famiglia di vettori di norma 1, $\{l_n\}_{n=1,2,\dots}$ tali che per ogni $x \in B$ si abbia $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n l_n$ dove gli $x_n$ sono univocamente determinati da $x$; è una condizione più restrittiva della separabilità, cfr. anche nota (7).

Inoltre posso supporre verificato il seguente assioma:

*A'*) *Qualunque sia la successione di numeri* $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$ *e per ogni* $n$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| .$$

Infatti (cfr. [4]) lo spazio $B$ è isomorfo allo spazio delle successioni $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ tali che $\left\{ \sum_{u=1}^{k} a_n e_n \right\}_{k=1,2,\dots}$ converge in $B$, con la norma $\| \{a_n\} \| = \sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n e_n \right\|_B$; in questo spazio l'insieme $\{\eta^k\}_{k=1,2,\dots}$ dove $\eta^k \equiv \{\delta_{n,k}\}_{n=1,2,\dots}$ è una base ($\delta_{n,k}$ indice di Kroneker) e questa base verifica sia l'assioma $A$ che l'assioma $A'$; $B$ è isomorfo a questo spazio e se so derivare in questo so derivare anche in $B$.

Sia allora $\varphi(F) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \varphi_i(F)$; $\varphi_i$: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}^1$ è ovviamente numerabilmente additiva, a variazione limitata ed assolutamente continua rispetto a $\mu$; per il teorema di Radon-Nikodym (cfr. p. es. [2]) si può scrivere $\varphi_i(F) = \int_F f_i \, d\mu$ e quindi

$$\varphi(F) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \varphi_i(F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e_i \int_F f_i \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_F \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \, d\mu, \tag{1.4}$$

(l'ultimo passaggio è una ovvia conseguenza della definizione di integrale). La successione $\left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \right\}_{n=1,2,\dots}$ è, per l'assioma $A'$), non decrescente in norma; inoltre

$$\left\| \int_F \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \varphi_i(F) \right\| \leq (\text{per } A')) \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} e_i \varphi_i(F) \right\| = \| \varphi(F) \| \leq V_\varphi(F) < V(S)$$

ne segue

$$\int_F \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \right\| d\mu = V_{\int_F \sum_{i=1}^{n} e_i f_i \, d\mu}(F) \leq V_\varphi(F) = \int_F \left( \frac{dV_\varphi}{d\mu} \right)_x d\mu$$

(il primo passaggio è giustificato dal teor. 2.4 di [1]); e, trattandosi di funzioni positive, $\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x) \right\| < \left( \frac{dV}{d\mu} \right)_x$.

Allora si può applicare il teor. 3.4 di [1] sul passaggio al limite sotto il segno di integrale ed ottenere dalla (1.4)

$$\int_F \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x)\, d\mu = \int_F \sum_{i=1}^{\infty} e_i f_i(x) = \varphi(F)$$

cioè la funzione $\sum_{i=1}^{\infty} e_i f_i(x)$ che abbiamo visto essere sommabile (è misurabile perchè limite quasi ovunque di funzioni misurabili) è precisamente la derivata globale della $\varphi$. c. v. d.

Un'altra condizione sufficiente ad assicurare la derivabilità di funzioni a valori in uno spazio di Banach insieme alla condizione di separabilità è la riflessività; cioè:

TEOR. 4.4. *Sia $B$ uno spazio di Banach riflessivo separabile. Ogni funzione $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow B$ numerabilmente additiva ed a variazione totale limitata è derivabile.*

DIM. Anche qui, come nel teor. 2.4, posso, per il Teor. 1.4, limitarmi a supporre $\varphi$ assolutamente continua e cercare $f: S \longrightarrow B$ sommabile tale che $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

Poichè $B$ è riflessivo $B'$ (duale forte di $B$) ha per duale $B$ che è separabile quindi $B'$ è separabile (cfr. ad es. [6] pag. 34). Valgono le relazioni:

$$V_{<\varphi,\, g>}(F) \leq V_\varphi(F) \cdot \| g \| \tag{2.4}$$

$$\| g \| \cdot \left(\frac{d}{d\mu} V_\varphi\right)_x \geq \left(\frac{d V_{<\varphi,\, g>}}{d\mu}\right)_x = \left| \left(\frac{d_{<\varphi,\, g>}}{d\mu}\right)_x \right| . \tag{3.4}$$

Infatti si ha, se $\{F_i\}$ è una partizione finita di $F$,

$$\Sigma_i \,|< \varphi(F_i), g >| \leq \Sigma_i \,\| \varphi(F_i) \| \cdot \| g \| = \| g \| \cdot \Sigma_i \,\| \varphi(F_i) \| \leq \| g \| \cdot V_\varphi(F)$$

e prendendo il superiore del primo membro si ha la (2.4); trattandosi di funzioni positive si passa immediatamente alla (3.4).

Sia allora $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ una base (7) in $B'$ con $\| g_n \| = 1$. Sia $f_n(x)$ una funzione reale misurabile sommabile tale che $\int_F f_n(x)\, d\mu = <\varphi(F), g_n> (n = 1, 2, \ldots)$

(7) Qui si intende base nel senso usuale del termine, cioè una famiglia di vettori linearmente indipendenti tali che il sottospazio generato da essi sia tutto $B$.

(cosa possibile per il teorema di Radon-Nikodym per le funzioni reali; $<\varphi(F), g_n>$ è ovviamente assolutamente continua se tale è $\varphi$).

Sia $\{a_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ una qualunque $n$-upla di numeri

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{d<\varphi, g_k>}{d\mu}\right)_x\right| = \left|\left(\frac{d\sum_{k=1}^{n} a_k <\varphi, g_k>}{d\mu}\right)_x\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{d\left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\rangle}{d\mu}\right)_x\right| = \left(\frac{d}{d\mu} V_{\left\langle\varphi, \sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\rangle}\right)_x \leq \left(\frac{dV_\varphi}{d\mu}\right)_x \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\|.$$

Per un noto teorena spazi di Banach (cfr. p. es. [6] pag. 31) si deduce l'esistenza di un elemento $f(x)$ del duale forte di $B'$ e cioè $f(x) \in B$ tale che $<f(x), g_n> = f_n(x)$; $\|f(x)\| \leq \left(\frac{dV}{d\mu}\right)_x$.

La funzione $f\colon S \rightarrow B$ così definita è misurabile; infatti essa è scalarmente misurabile ($f_n(x)$ è ovviamente misurabile) e lo spazio $B$ è separabile (cfr. quanto detto al § 2); inoltre $f(x)$ è sommabile e quindi ha senso considerare la funzione di insieme $\int_F f\, d\mu$.

Per ogni $g_n$ si ha (cfr. corollario al Teor. 3.3)

$$\left\langle \int_F f\, d\mu, g_n \right\rangle = \int_F <f, g_n> d\mu = \int_F f_n\, d\mu = <\varphi(F), f_n>$$

relazione che, valendo per ogni $n$, dà $\int_F f\, d\mu = \varphi(F)$ c. v. d.

OSSERVAZIONE. Tra gli spazi che verificano l'assioma $A$ e che quindi rientrano nel teorema 2.4, sono ad esempio gli spazi $l^p$, $L^p$ $(1 < p < +\infty)$ (cf. ad es. [4]) e gli spazi di Hilbert separabili; tra gli spazi riflessivi separabili sono ancora gli spazi $1^p$; $L^p$ $(1 < p < +\infty)$ e gli spazi del tipo di Sobolev derivati dagli spazi $L^p$ (8bis); e gli spazi di Hilbert separabili. Si può tuttavia notare che per gli spazi di Hilbert la condizione di separabilità è superflua; vale infatti il

---

(8bis) come ad es. gli spazi $W^{k,p}(R^n)$ delle funzioni di potenza $p$-esima sommabile insieme alle loro derivate fino all'ordine $k$.

TEOR. 5.4. *Sia* $\varphi : \mathcal{F} \to H$ (*$H$ spazio di Hilbert*) *numerabilmente additiva e a variazione limitata;* $\varphi(\mathcal{F}) = \{\varphi(F)\,;\ F \in \mathcal{F}\}$ *genera un sottospazio* $H_1$ *di* $H$ *separabile.*

DIM. Sia $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una base (cfr. nota (7)) ortonormale per $H_1$. Indicando con $(\,,\,)$ il prodotto scalare in $H_1$ pongo $\varphi_\lambda = (\varphi, e_\lambda)$; $V_\lambda = V_{\varphi_\lambda}$; $\Lambda^h = \left\{\lambda \in \Lambda\,;\ V_\lambda(S) > \frac{1}{h}\right\}$; per l'ipotesi che $\varphi(\mathcal{F})$ genera $H_1$ dovrà aversi $\Lambda = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Lambda^h$. Si dovrà avere, per ogni decomposizione di $S$ in insiemi disgiunti $\{F_i\}_{i=1,2\ldots n}$ e per ogni $k$-upla $\lambda_j \in \Lambda^h$ $(j = 1, 2 \ldots k)$:

$$+\infty > V_\varphi(S) \geq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(F_i)\| \geq \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{k} e_{\lambda_j} \varphi_{\lambda_j}(F_i) \right\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\varphi_{\lambda_j}(F_i))^2} \geq {}^{(8)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)| = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)|.$$

Sia $\{F_i\}_{i=1,2\ldots n}$ tale che $\sum_{j=1}^{n} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)| \geq V_{\lambda_j}(S) - 2^{-j}$ $(j = 1, 2 \ldots k)$. Si dovrà avere, per la relazione precedente,

$$+\infty > V_\varphi(S) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{\lambda_j}(F_i)| \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{V_{\lambda_j}(S) - 2^{-j}}{\sqrt{k}} \geq \frac{k\,\frac{1}{h} - 1}{\sqrt{k}}$$

cioè $\Lambda^h$ è finito per ogni $h$. Allora $\Lambda = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Lambda^h$ è al più numerabile. C. V. D.

## § 5. Funzioni di una variabile reale.

In tutto questo paragrafo lo spazio $S$ sarà il segmento $\overline{a, b}$ cioè l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^1$ con $-\infty < a \leq x \leq b < +\infty$; la famiglia $\mathcal{F}$ sarà la famiglia dei sottoinsiemi di $\overline{a\ b}$ misurabili secondo Lebesgue; $\mu$ sarà la restrizione ad $\mathcal{F}$ della misura di Lebesgue. Premetto alcune definizioni:

---

(8) Il passaggio è giustificato dalla relazione numerica:

$$K \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^{k} |a_i| \right)^2$$

DEF. 1.5. *Si dicono funzioni associate due funzioni* $\Phi$, $\varphi$, *tali che* $\Phi : \overline{a\ b} \longrightarrow B$ *è una funzione di punto e* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ *è una funzione di insieme, e tali che per ogni* $x \in \overline{a\ b}$ *sia* $\Phi(x) = \varphi(\overline{a\ x})$.

DEF. 2 5. *Una funzione di punto* $\Phi : \overline{a\ b} \longrightarrow B$ *si dice assolutamente continua* (9), *se fissato* $\varepsilon > 0$ *ad arbitrio, è possibile determinare un* $\mu_\varepsilon > 0$ *tale che, se* $\overline{x_i,\ x_i + h_i}$ $(i = 1, 2 \dots n)$ *sono intervalli aventi due a due al più un estremo in comune e di lunghezza totale* $\sum_{i=1}^{n} h_i < \mu_\varepsilon$ *si abbia*

$$\sum_{i=1}^{n} \| \Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i) \| < \varepsilon .$$

DEF. 3.5. *Una funzione di punto* $\Phi : S \longrightarrow B$ *si dice a variazione totale limitata* (9) *sull'intervallo* $a'\ b'$ $(a \leq a' < b' \leq b)$ *se si ha*

$$V_\Phi^*(\overline{a'\ b'}) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| \Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i) \| \right\} < +\infty$$

*dove il superiore è calcolato al variare degli intervalli* $\overline{x_i,\ x_i + h_i}$ *nella classe degli intervalli contenuti in* $\overline{a',\ b'}$ *ed aventi due al due al più un estremo comune. Il numero* $V_\Phi^*(\overline{a',\ b'})$ *si dice variazione di* $\Phi$ *sull'intervallo* $\overline{a',\ b'}$.

Si verifica facilmente (10) che, se $\varphi$ e $\Phi$ sono associate è:

$$V_\Phi^*(\overline{a',\ b'}) = V_\varphi(\overline{a',\ b'}) \quad \text{per ogni} \quad \overline{a',\ b'} \subseteq \overline{a,\ b}\,. \tag{1.5}$$

Ovviamente, data una funzione numerabilmente additiva $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$, si può sempre costruire la funzione di punto $\Phi : S \longrightarrow B$ ad essa associata ponendo $\Phi(x) = \varphi(\overline{a\ x})$.

---

(9) Si faccia attenzione a non confondere le definizioni 2.5 e 3.5 (che riguardono funzioni di punto) con le definizioni 1.3 e 2.3 di [1] (che riguardano funzioni di insieme)

(10) Più in generale, se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ è numerabilmente additiva, si ha:

$$V_\varphi(\overline{a',\ b'}) = \sup \sum_{i=1}^{n} \| \varphi(\overline{x_i\,;\ x_i + h_i}) \| . \tag{1.5'}$$

Infatti nella (1.5') si ha ovviamente il $\geq$; se per assurdo valesse il $>$ si dovrebbe poter sostituire il I° membro con $\Sigma \| \varphi(F_k) \|$ con $F_k \in \mathcal{F}$ senza alterare la disuguaglianza; e agli $F_k$ si potrebbe sostituire successivamente, sempre senza alterare la disuguaglianza, degli aperti, degli aperti disgiunti, dei segmenti disgiunti; e così si arriva all'assurdo.

Il viceversa non è sempre vero; tuttavia, se $B = \mathbb{R}^1$ si ha il seguente risultato:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione* $\Phi : \overset{|\!-\!|}{a\ b} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *sia assolutamente continua è che esista una funzione* $f : \overset{|\!-\!|}{a\ b} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *sommabile su* $\overset{|\!-\!|}{a\ b}$ *tale che per ogni* $x$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_{\overset{|\!-\!|}{a\ x}} f\,d\mu. \tag{2.5}$$

*Inoltre in tal caso si ha:*

$$V_\varphi^*(a', b') = \int_{a'}^{b'} |f(t)|\,dt = \sup \sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|\,. \tag{3.5}$$

In particolare se $\Phi : \overset{|\!-\!|}{a\ b} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ è assolutamente continua essa è anche a variazione limitata; ed è associata alla funzione $\varphi(F) = \int_F f\,d\mu$.

Questi risultati non sono in generale estendibili alle funzioni a valori in un generico spazio di Banach; ad es. la funzione associata alla funzione definita a pag. 10 è assolutamente continua ma, come si è visto, non è derivabile quindi (per il teor. 2.4) tale funzione non è un integrale.

Particolarizzando lo spazio $B$ si può tuttavia ancora ottenere la validità della (3.5) (avendo naturalmente sostituito i valori assoluti con le norme): ad es. se $B$ è uno spazio di Banach uniformemente convesso (cfr. [3] per la definizione e per la dimostrazione della proprietà enunciata) si ha che ogni funzione di punto a variazione limitata ed assolutamente continua è derivabile ([11]) e coincide con l'integrale della sua derivata; la (3.5) si può allora ottenere dalla (2,1.02) di pag. 339 di [5] se $B$ è separabile (in tal caso l'integrale di Bochner usato da [3] e quello di Pettis usato da [5] coincidono; cfr. ad es. lo stesso [5]); e più in generale si può ottenere per $B$ generico dal teor. 2.4 di [1]. In ipotesi leggermente diverse su $B$ si può completamente generalizzare il risultato enunciato per le funzioni reali. Precisamente si ha:

---

([11]) Infatti ad essa può associarsi una «funzione di figura elementare» a variazione limitata quindi derivabile, (cfr. [3]).

TEOR. 1.5. *Sia $B$ riflessivo separabile. Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\Phi : S \longrightarrow B$ sia assolutamente continua è che esista una funzione sommabile $f : S \longrightarrow B$ tale che per ogni $x \in S$ si abbia*

$$\Phi(x) = \int\limits_{\substack{\vdash\!\dashv \\ a\ \ b}} f \, d\mu. \tag{4.5}$$

*Inoltre sotto queste ipotesi si ha:*

$$\sup \Sigma \, \| \Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i) \| = \int_a^b \| f(t) \| \, dt. \tag{5.5}$$

DIM. La (5.5) una volta dimostrata la condizione necessaria, segue subito dalla (1.5′) della nota [10] e dal teor. 2.4 di [1].

La condizione sufficiente è ovvia in quanto si verifica facilmente che la funzione di punto associata ad un integrale è assolutamente continua. Resta da dimostrare la derivabilità di una funzione di punto assolutamente continua. Per vedere ciò opero come nella dimostrazione del teorema 4,4: se $\{g_n\}$ è una base (cfr. nota [7]) per $B$ con $\| g_n \| = 1$ le funzioni di punto $\Phi_n : S \longrightarrow \mathbb{R}^1$ definite da $\Phi_n(x) = \langle \Phi(x), g_n \rangle$ sono ovviamente assolutamente continue e cioè $\Phi_n(x) = \int_a^x f_n(t) \, dt = \int\limits_{\substack{\vdash\!\dashv \\ a\ \ x}} f_n \, d\mu$.

Per ogni scelta delle costanti $a_1, a_2 \dots a_k$ si ha inoltre:

$$\left| \sum_{n=1}^{k} a_n f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{k} a_n \left( \frac{d\Phi_n}{d\mu} \right)_x \right| = \left| \left( \frac{d}{d\mu} \sum_{n=1}^{k} a_n \Phi_n \right)_x \right| =$$

$$= \left( \frac{d}{d\mu} V_{\left\langle \varphi, \sum_{n=1}^{k} a_n g_n \right\rangle} \right)_x \leq \left( \frac{dV_\Phi^*}{d\mu} \right)_x \cdot \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n g_n \right\| \text{[12]}.$$

Esattamente come nella dimostrazione del teor. 4.4 si conclude anche qui che esiste una funzione $f : S \longrightarrow B$ sommabile tale che $\Phi(x) = \int\limits_{\substack{\vdash\!\dashv \\ a\ \ x}} f d\mu$. c.v.d.

---

[12] $\left( \dfrac{dV_\Phi^*}{d\mu} \right)_x$ esiste perchè si verifica facilmente che se $\Phi$ è assolutamente continua ed a variazione limitata anche $V_\Phi^*$ è assolutamente continua; ed il passaggio segue dalla relazione analoga (2.4) e cioè $V_{\langle \Phi, g \rangle} \leq V_\Phi^* \cdot \| g \|$.

COROLLARIO. *Sia $B$ riflessivo separabile. Le funzioni di punto assolutamente continue sono tutte e sole le funzioni associate a funzioni di insieme assolutamente continue ed a variazione totale limitata.*

DIM. Ovvia per il teor. 4.4, il Teor. 1.5 e il fatto che la funzione di punto associata ad un integrale è necessariamente assolutamente continua.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BAIOCCHI C., *Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner.* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa) Serie III, Vol. XVII, pag. 239-253.

[2] CAFIERO F., *Misura e integrazione.* Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[3] CLARKSON J. A., *Uniformly convex spaces.* Trans. Am. Math. Soc. 1936 vol. 40 pag. 396-414.

[4] DUNFORD N.-MORSE A. P., *Remarks on the preceding paper of J. A. Clarkson.* Trans. Am. Math. Soc. 1936 vol. 40 pag. 415-420.

[5] DUNFORD N.-PETTIS B. J., *Linear operations on summable functions.* Trans. Am. Math. Soc. 1940 vol. 47 pag. 323-392.

[6] HILLE E.-PHILLIPS R. S., *Functional analysis and semi-groups.* American Mathematical Society Colloquium Publications.