Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

S. Campanato

Proprietà di una famiglia di spazi funzionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 1 (1964), p. 137-160

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_1_137_0>

PROPRIETÀ DI UNA FAMIGLIA DI SPAZI FUNZIONALI

S. CAMPANATO (a Pisa) (*)

In questo lavoro introduco certe classi di funzioni definite in un aperto Ω di R^n, classi che indico con $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$, e ne studio le proprietà al variare dei parametri k, q, λ.

I risultati che ottengo da un lato contengono una nuova caratterizzazione degli spazi delle funzioni hölderiane, o delle funzioni che hanno le derivate di un certo ordine hölderiane, attraverso norme di tipo integrale dall'altro fanno vedere come in un'unica famiglia di spazi $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ rientrino, al variare dei parametri, lo spazio $L^q(\Omega)$, gli spazi di Morrey (cfr. ad es. [2]) (¹), gli spazi delle funzioni hölderiane e via, via gli spazi delle funzioni che hanno le derivate di un certo ordine hölderiane.

Il caso di $k=0$, $q \geq 1$, $n < \lambda \leq n+q$ è già stato studiato in [1] e indipendentemente da G. N. Meyers in [4]; esso rientra comunque come caso particolare nella trattazione svolta in questo lavoro.

Il caso di $k=0$, $q \geq 1$, $\lambda = n$ era stato precedentemente studiato da F. John e L. Nirenberg in [5]; l'interessante risultato ottenuto da questi Autori è qui richiamato nel n. 7 e non rientra nei risultati di questo lavoro.

Questi casi particolari relativi a $k=0$ sono stati sfruttati da G. Stampacchia per ottenere un interessante teorema di interpolazione ([6]).

I risultati di questa nota dovrebbero condurre a più generali teoremi di interpolazione, ma ciò esula dai limiti di questo lavoro.

Ringranzio E. De Giorgi, che mi ha suggerito lo studio di questi spazi, e inoltre G. Stampacchia e V. K. Murthy per le utili discussioni sull'ar-

---

Pervenuto alla Redazione il 15 Novembre 1963.

(*) Ha parzialmente contribuito finanziariamente alla preparazione di questo lavoro il Air force office of Scientific Research OAR con il grant AF EOAR 63-29.

(¹) I numeri fra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

gomento che mi hanno permesso di migliorare in vari punti una precedente stesura di questi risultati.

1. Sia Ω un aperto limitato è connesso dello spazio euclideo R^n di diametro $d(\Omega)$. Con $\partial\Omega$ indichiamo la frontiera di Ω e con $\overline{\Omega}$ la chiusura di Ω.

Se $x_0 \in R^n$ e ϱ è un numero reale positivo, poniamo

$$I(x_0, \varrho) = \{x\,;\, x \in R^n, |x - x_0| \leq \varrho\}$$

$$\Omega(x_0, \varrho) = I(x_0, \varrho) \cap \Omega$$

DEF. [1.I]. *Diremo che Ω verifica la condizione* (I) *se esiste una costante positiva A tale che $\forall\, x_0 \in \overline{\Omega}$ e $\forall\, \varrho \in [0, d(\Omega)]$ si abbia* (²)

$$\text{mis}\, \Omega(x_0, \varrho) \geq A\varrho^n. \tag{1.1}$$

Osserviamo che questa condizione è di carattere assai generale. Ad esempio tutti gli aperti che sono dotati della proprietà di cono di Sobolev (³). godono necessariamente della proprietà (I).

Con $P(x)$ indichiamo un generico polinomio in x a coefficienti reali e con $\mathcal{P}_k$, k intero ≥ 0, la classe di tutti i polinomi $P(x)$ di grado $\leq k$.

Con $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, indichiamo lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni $u(x)$ misurabili in Ω e di potenza q sommabili, normalizzato nel modo abituale:

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^q\, dx\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2}$$

Le funzioni che considereremo saranno da intendersi sempre a valori reali, useremo inoltre le seguenti notazioni ormai abituali:

Se $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ è una n-pla di interi non negativi e $u(x)$ una funzione di x allora

$$p\,! = p_1\,!\, p_2\,! \dots p_n\,!$$

$$|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

(²) Qui e nel seguito la misura e gli integrali si intenderanno sempre nel senso di Lebesgue.

(³) Cioè tali che esista un cono C di vertice l'origine, apertura e altezza assegnati, tale che ad ogni $x \in \Omega$ sia possibile associare un cono di vertice x, congruente a C, contenuto in Ω.

$$x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}$$

$$D^p u(x) = \frac{\partial^{|p|} u(x)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \qquad \text{se } |p| > 0$$

$$D^p u(x) = u(x) \qquad \text{se } |p| = 0.$$

Con $C^k(\bar{\Omega})$, k intero ≥ 0, indichiamo la classe delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$ insieme con le loro derivate fino a quelle di ordine k.

Con $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, k intero ≥ 0, $0 < \alpha \leq 1$, indichiamo la sottoclasse di $C^k(\bar{\Omega})$ delle funzioni le cui derivate di ordine k sono hölderiane in $\bar{\Omega}$ con esponente α.

È noto che $C^k(\bar{\Omega})$ è uno spazio di Banach (completo) se si assume come norma la seguente

$$|u|_{k,\bar{\Omega}} = \sum_{|p| \leq k} \sup_{\bar{\Omega}} |D^p u| \tag{1.3}$$

mentre $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ è uno spazio di Banach (completo) rispetto alla norma

$$|u|_{k,\alpha,\bar{\Omega}} = |u|_{k,\bar{\Omega}} + \sup_{|p|=k} \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|D^p u(x) - D^p u(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{1.4}$$

Se $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ indicheremo con $[u]_{k,\alpha,\bar{\Omega}}$ il modulo di hölderianità delle derivate k-esime, cioè

$$[u]_{k,\alpha,\bar{\Omega}} = \sup_{|p|=k} \sup_{x,y \in \bar{\Omega};\, x \neq y} \frac{|D^p u(x) - D^p u(y)|}{|x-y|^\alpha} \tag{1.5}$$

La (1.5) è una seminorma in $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Sia k un intero ≥ 0, q e λ due numeri reali con $q \geq 1$ e $\lambda \geq 0$; diamo la seguente definizione:

DEF. [1.II]. *Diciamo che una funzione $u(x) \in L^q(\Omega)$ appartiene alla classe $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ se*

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \varrho \leq d(\Omega)}} \left[\varrho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - P(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty \tag{1.6}$$

Indichiamo con $|||u|||_{k,q,\lambda}$ la quantità a primo membro in (1.6); essa costituisce una seminorma in $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ (4). Come norma in $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ assumeremo la seguente

$$\| u \|_{k,q,\lambda} = \{\| u \|_{L^q(\Omega)}^q + ||| u |||_{k,q,\lambda}^q\}^{\frac{1}{q}} \tag{1.7}$$

Dai risultati che daremo nei numeri successivi risulterà che $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio (di Banach) completo con la norma (1.7).

Nei numeri che seguono studieremo le proprietà di regolarità di questi spazi di funzioni in rapporto ai valori di k, q, λ.

2. Dimostriamo innanzitutto un lemma preliminare dovuto a De Giorgi di cui faremo largo uso nel seguito del lavoro.

LEMMA [2.I]. *Sia $P(x) \in \mathcal{P}_k$, q un numero ≥ 1, E un sottoinsieme misurabile della sfera $I(x_0, \varrho)$ verificante la relazione* (5)

$$\text{mis } E \geq A \varrho^n \tag{2.1}$$

esiste allora una costante $c_1(k, q, n, A)$ tale che per ogni n-pla di interi non negativi p

$$|[D^p P(x)]_{x=x_0}|^q \leq \frac{c_1}{\varrho^{n+|p|q}} \int_E |P(x)|^q dx \tag{2.2}$$

Indichiamo con $\mathcal{C}_k$ il sottoinsieme di $\mathcal{P}_k$ costituito dai polinomi $P(x)$

$$P(x) = \sum_{|p| \leq k} a_p x^p$$

verificanti la relazione

$$\sum_{|p| \leq k} |a_p|^2 = 1. \tag{2.3}$$

(4) Infatti $\{|||u|||_{k,q,\lambda} = 0\} \Longrightarrow u \in \mathcal{P}_k$. La $|||u|||_{k,q,\lambda}$ è una norma nello spazio quoziente $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)/\mathcal{P}_k$.

(5) A è ovviamente una costante positiva e non superiore alla misura dell'insieme $\{x : x \in R^n, |x| = 1\}$. Nel seguito con c_1, c_2, ... indicheremo sempre costanti positive indipendenti dalle funzioni cui le varie maggiorazioni si riferiscono. Quando sarà opportuno indicheremo esplicitamente fra ( ) le quantità dalle quali esse dipendono.

Sia $\mathcal{F}$ la classe delle funzioni $f(x)$ misurabili su R^n a supporto in $I(0, 1)$ e tali che

$$0 \leq f(x) \leq 1 \tag{2.4}$$

$$\int_{R^n} f(x)\, dx \geq A. \tag{2.5}$$

Poniamo

$$\gamma(A) = \inf_{P \in \mathcal{T}_k,\, f \in \mathcal{F}} \int_{I(0,1)} | P(x) |^q f(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Dimostriamo che

$$\gamma(A) = \min_{P \in \mathcal{T}_k,\, f \in \mathcal{F}} \int_{I(0,1)} | P(x) |^q f(x)\, dx. \tag{2.7}$$

In virtù della (2.6), per ogni intero n esistono un polinomio $P_n(x) \in \mathcal{T}_k$ e una funzione $f_n(x) \in \mathcal{F}$ tali che

$$\gamma(A) \leq \int_{I(0,1)} | P_n(x) |^q f_n(x)\, dx < \gamma(A) + \frac{1}{n} \tag{2.8}$$

Poichè i polinomi di $\mathcal{T}_k$ verificano la condizione (2.3) da $\{P_n(x)\}$ è possibile estrarre una successione $\{P_\nu(x)\}$ convergente, uniformemente su ogni compatto di R^n, ad un polinomio $P^*(x) \in \mathcal{T}_k$.

Similmente, in virtù della (2.4), dalla successione $\{f_\nu(x)\}$ è possibile estrarre una successione $\{f_\mu(x)\}$ che converge debolmente in $L^2(I(0, 1))$ verso una funzione $f^*(x) \in \mathcal{F}$ (6).

(6) In virtù della (2.4) le funzioni $f_\nu(x)$ hanno norme equilimitate ad es. in $L^2(R^n)$. Allora da $\{f_\nu\}$ si può estrarre una successione $\{f_\mu\}$ che converge debolmente in $L^2(R^n)$ ad una $f^*(x) \in L^2(R^n)$; $f^* \in \mathcal{F}$ infatti: se $\varphi \in C^\infty(R^n)$ e ha supporto $\subset R^n - I(0, 1)$ si ha

$$0 = \int_{I(0,1)} f_\mu \varphi\, dx \longrightarrow \int_{I(0,1)} f^* \varphi\, dx$$

e quindi supp. $f^* \subset I(0, 1)$; se $\varphi \in C^\infty(R^n)$ con supp. $\varphi \subset I(0, 1)$ e $\varphi \geq 0$ si ha

$$0 \leq \int_{I(0,1)} f_\mu \varphi\, dx \longrightarrow \int_{I(0,1)} f^* \varphi\, dx$$

e quindi $f^* \geq 0$ in $I(0, 1)$;

D'altra parte, per la (2.8),

$$\gamma(A) \leq \int_{I(0,1)} |P_\mu(x)|^q f_\mu(x)\, dx < \gamma(A) + \frac{1}{\mu}$$

Al limite per $\mu \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\gamma(A) = \int_{I(0,1)} |P^*(x)|^q f^*(x)\, dx.$$

E ciò prova la tesi. Di conseguenza è $\gamma(A) > 0$ e se E è un qualunque sottoinsieme misurabile di $I(0,1)$ verificante la relazione

$$\text{(2.9)} \qquad \text{mis}\, E \geq A$$

e $P(x) \in \mathcal{T}_k$ si avrà che [7]

$$\text{(2.10)} \qquad \int_E |P(x)|^q\, dx \geq \gamma(A)$$

Sia $P(x) \in \mathcal{P}_k$ allora $P(x) \cdot \{\sum_{|p| \leq k} |a_p|^2\}^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{T}_k$ e quindi dalla (2.10) segue che per ogni $E \subset I(0,1)$ verificante la (2.9) si ha

$$[\sum_{|p| \leq k} |a_p|^2]^{\frac{q}{2}} \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_E |P(x)|^q\, dx$$

od anche

$$\text{(2.11)} \qquad |a_p|^q \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_E |P(x)|^q\, dx \qquad \forall\, |p| \leq k$$

$$0 \leq \int_{I(0,1)} (1 - f_\mu)\, \varphi\, dx \rightarrow \int_{I(0,1)} (1 - f^*)\, \varphi\, dx$$

e quindi $f^* \leq 1$ in $I(0,1)$. Infine

$$A \leq \int_{I(0,1)} f_\mu\, dx \rightarrow \int_{I(0,1)} f^*\, dx$$

(7) Si assume come $f(x)$ la funzione caratteristica di E e si tiene conto della (2.7).

Sia infine $P(x) \in \mathcal{P}_k$ ed E un sottoinsieme misurabile di $I(x_0, \varrho)$ verificante la relazione (2.1). Indichiamo con $y = T(x)$ la trasformazione

$$y = \frac{x - x_0}{\varrho}$$

si ha allora

$$\int_E |P(x)|^q \, dx = \varrho^n \int_{T(E)} |P(x_0 + \varrho y)|^q \, dy. \tag{2.12}$$

D'altra parte

$$T(E) \subset I(0,1)$$

$$\text{mis}\, T(E) = \frac{1}{\varrho^n} \int_E dx \geq A$$

$$P(x_0 + \varrho y) = \sum_{|p| \leq k} \frac{\varrho^{|p|} [D^p P(x)]_{x=x_0}}{p!} y^p.$$

Tenuto conto di queste relazioni dalle (2.11), (2.12) segue che

$$|[D^p P(x)]_{x=x_0}|^q \leq \frac{(p!)^q}{\varrho^{n+|p|q} \gamma(A)} \int_E |P(x)|^q \, dx. \qquad \forall p$$

E il lemma è completamente dimostrato.

3. Sia $u(x) \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$; si dimostra facilmente che $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \varrho \in [0, d(\Omega)]$ esiste uno ed un solo polinomio $P_k(x, x_0, \varrho, u)$ tale che

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P(x)|^q \, dx = \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \varrho, u)|^q \, dx. \tag{3.1}$$

Sia $P(x)$ un generico polinomio di $\mathcal{P}_k$ che, per fissare le idee, conveniamo di scrivere nella forma

$$P(x) = \sum_{|p| \leq k} \frac{a_p}{p!} (x - x_0)^p.$$

Ad ogni $P(x)$ siffatto resta associato un punto di un certo spazio euclideo R^m avente per coordinate i coefficienti a_p di $P(x)$ opportunamente ordinati. La quantità $\| u - P(x) \|^q_{L^q(\Omega(x_0, \varrho))}$ è una funzione continua dei coefficienti di $P(x)$, quindi una funzione reale, positiva e continua definita su R^m; indichiamo tale funzione con $f(\{a_p\})$. L'estremo inferiore di tale funzione va ricercato in un compatto contenente l'origine; infatti quando $|\{a_p\}| = \{\sum_{|p|\leq p} |a_p|^2\}^{\frac{1}{2}} \to +\infty$, per il lemma di De Giorgi anche $\|P(x)\|_{L^q(\Omega(x_0,\varrho))} \to +\infty$ e quindi anche $f(\{a_p\}) \to +\infty$ come segue dalla relazione

$$f(\{a_p\}) \geq \left| \| u \|_{L^q(\Omega(x_0,\varrho))} - \| P(x) \|_{L^q(\Omega(x_0,\varrho))} \right|^q$$

L'esistenza di almeno un polinomio $P_k(x, x_0, \varrho, u)$ verificante la (3.1) segue allora da un noto teorema di analisi elementare.

L'unicità di tale polinomio segue poi dalla convessità uniforme degli spazi L^q (cfr. ad es. [3]).

Nel seguito quando non ci sarà pericolo di equivoco si scriverà più semplicemente $P_k(x, x_0, \varrho)$ anzichè $P_k(x, x_0, \varrho, u)$ e si porrà

$$a_p(x_0, \varrho) = [D^p P_k(x, x_0, \varrho)]_{x=x_0} \tag{3.2}$$

inoltre con k, q, λ indicherò rispettivamente un intero ≥ 0, un numero reale ≥ 1 e un numero reale ≥ 0 per cui ometterò in generale tale precisazione nell'enunciato dei lemmi e nel corso delle dimostrazioni.

LEMMA [3.I]. *Se $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ esiste una costante $c_2(q, \lambda)$ tale che per qualunque $x_0 \in \overline{\Omega}$, $0 < \varrho \leq d(\Omega)$ e h intero non negativo*

$$\int_{\Omega(x_0, \varrho 2^{-h-1})} | P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1}) |^q \, dx \leq c_2 \, ||| u |||^q_{k,q,\lambda} \, 2^{-h\lambda} \varrho^\lambda . \tag{3.3}$$

Sia $x_0 \in \overline{\Omega}$, $0 < \varrho \leq d(\Omega)$, h un intero non negativo; per quasi tutti gli $x \in \Omega(x_0, \varrho 2^{-h-1})$ (8) si ha

$$| P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1}) |^q \leq 2^q \, | P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - u(x) |^q + \\ + 2^q \, | P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1}) - u(x) |^q$$

da cui

$$\int_{\Omega(x_0, \varrho 2^{-h-1})} | P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1}) |^q \, dx \leq 2^q \int_{\Omega(x_0, \varrho 2^{-h})} | P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - u(x) |^q \, dx +$$

---

(8) Cioè per tutti gli $x \in \Omega\left(x_0, \frac{\varrho}{2^{h+1}}\right)$ tranne al più i punti di un sottoinsieme di misura nulla.

$$+ 2^q \int\limits_{\Omega(x_0,\, \varrho 2^{-h-1})} | P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1}) - u(x) |^q \, dx \leq 2^q \, |||u|||^q_{k,q,\lambda} \, 2^{-h\lambda} \varrho^\lambda +$$

$$+ 2^q \, |||u|||^q_{k,q,\lambda} \, 2^{-(h+1)\lambda} \varrho^\lambda = 2^q (1 + 2^{-\lambda}) \, |||u|||^q_{k,q,\lambda} 2^{-h\lambda} \varrho^\lambda$$

ossia la (3.3).

LEMMA [3.II]. *Se Ω gode la proprietà (I) e $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ allora per ogni coppia di punti $x_0, y_0, \in \bar{\Omega}$ e per ogni n-pla di interi p con $|p| = k$ si ha la relazione*

$$|a_p(x_0, 2|x_0 - y_0|) - a_p(y_0, 2|x_0 - y_0|)|^q \leq \tag{3.4}$$

$$\leq c_1 \, 2^{q+1+\lambda} \, |||u|||^q_{k,q,\lambda} |x_0 - y_0|^{\lambda - n - kq}.$$

Siano $x_0, y_0 \in \bar{\Omega}$. Posto $\varrho = |x_0 - y_0|$ e $I_\varrho = \Omega(x_0, 2\varrho) \cap \Omega(y_0, 2\varrho)$ per quasi tutti gli $x \in I_\varrho$ si ha

$$|P_k(x, x_0, 2\varrho) - P_k(x, y_0, 2\varrho)|^q \leq 2^q |P_k(x, x_0, 2\varrho) - u(x)|^q +$$

$$+ 2^q |P_k(x, y_0, 2\varrho) - u(x)|^q.$$

Integrando su $\Omega(x_0, \varrho) \subset I_\varrho$ si ottiene (9)

$$\int\limits_{\Omega(x_0,\varrho)} |P_k(x, x_0, 2\varrho) - P_k(x, y_0, 2\varrho)|^q \, dx \leq 2^q \int\limits_{\Omega(x_0, 2\varrho)} |P_k(x, x_0, 2\varrho) - u(x)|^q \, dx +$$

(3.5)

$$+ 2^q \int\limits_{\Omega(y_0, 2\varrho)} |P_k(x, y_0, 2\varrho) - u(x)|^q \, dx \leq 2^{q+\lambda+1} \, |||u|||^q_{k,q,\lambda} \, \varrho^\lambda$$

D'altra parte tenuto conto della (3.2), del lemma [2.I] applicato al polinomio $P(x) = P_k(x, x_0, 2\varrho) - P_k(x, y_0, 2\varrho)$, e dell'osservazione banale che le derivate k-esime di un polinomio di grado k sono costanti e quindi il loro valore non dipende dal particolare punto in cui si calcolano, si ha che

$$|a_p(x_0, 2\varrho) - a_p(y_0, 2\varrho)|^q \leq \frac{c_1}{\varrho^{n+kq}} \int\limits_{\Omega(x_0,\varrho)} |P_k(x, x_0, 2\varrho) - P_k(x, y_0, 2\varrho)|^q \, dx \tag{3.6}$$

Dalle (3.5), (3.6) segue la tesi.

---

(9) Si osservi che $\Omega(x_0, \varrho) \subset \Omega(x_0, 2\varrho)$ e $\Omega(x_0, \varrho) \subset \Omega(y_0, 2\varrho)$.

LEMMA [3.III]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e* $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ *esiste una costante* $c_3(k, q, \lambda, n, A)$ *tale che* $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}$, $0 < \varrho \leq d(\Omega)$, *i intero non negativo*, $|p| \leq k$ *si ha*

$$(3.7) \qquad |a_p(x_0, \varrho) - a_p(x_0, \varrho\, 2^{-i})| \leq c_3\, |||u|||_{k,q,\lambda} \sum_{h=0}^{i-1} 2^{h\left(\frac{n+|p|q-\lambda}{q}\right)} \varrho^{\frac{\lambda-n-|p|q}{q}} .$$

Scelti x_0, ϱ, i, p come è precisato nel lemma si ha che

$$(3.8) \qquad |a_p(x_0, \varrho) - a_p(x_0, \varrho 2^{-i})| \leq \sum_{h=0}^{i-1} |a_p(x_0, \varrho 2^{-h}) - a_p(x_0, \varrho 2^{-h-1})| =$$

$$= \sum_{h=0}^{i-1} |\{D^p[P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1})]\}_{x=x_0}| .$$

Applicando il lemma [2.I] al polinomio $P(x) = P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1})$ dalla (3.8) segue che

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} &|a_p(x_0, \varrho) - a_p(x_0, \varrho 2^{-i})| \leq \\ &\leq [c_1]^{\frac{1}{q}} \varrho^{-\frac{n}{q}-|p|} \sum_{h=0}^{i-1} \left[\int_{\Omega(x_0, \varrho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \varrho 2^{-h-1})|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \cdot 2^{(h+1)\left(\frac{n}{q}+|p|\right)}. \end{aligned}$$

Di qui, applicando a ognuno degli integrali che figurano a secondo membro il lemma [3.I], si ottiene la (3.7).

Siamo allora in grado di dimostrare il seguente lemma che è di importanza fondamentale per quanto diremo nel seguito

LEMMA [3.IV]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e* $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ *con* $n + rq < \lambda \leq n + (r+1)q$, *dove r è un intero non negativo* $\leq k$, *esiste un sistema di funzioni* $\{v_p(x_0)\}$, $|p| \leq r$, *definite in* $\bar{\Omega}$ *tali che* $\forall\, 0 < \varrho \leq d(\bar{\Omega})$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $|p| \leq r$

$$(3.10) \qquad |a_p(x_0, \varrho) - v_p(x_0)| \leq c_4(\lambda, q, k, n, A)\, |||u|||_{k,q,\lambda}\, \varrho^{\frac{\lambda-n-|p|q}{q}}$$

e di conseguenza

$$(3.11) \qquad \lim_{\varrho \to 0} a_p(x_0, \varrho) = v_p(x_0)$$

uniformemente rispetto a x_0.

Fissati p, ϱ, x_0, con $|p| \leq r$, $0 < \varrho \leq d(\Omega)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, dimostriamo che la successione $\{a_p(x_0, \varrho 2^{-i})\}$ converge per $i \to \infty$. Infatti se i e j sono due interi non negativi, ad esempio $j > i$, applicando il lemma [3.III] si ottiene ([10])

$$
\begin{aligned}
& | a_p(x_0, \varrho 2^{-j}) - a_p(x_0, \varrho 2^{-i}) | \leq \\
(3.12) \qquad & \leq c_3 ||| u |||_{k,q,\lambda} \sum_{h=i}^{j-1} 2^{h \frac{n+|p|q-\lambda}{q}} \varrho^{\frac{\lambda-n-|p|q}{q}} .
\end{aligned}
$$

Nell'ipotesi che $|p| \leq r$ e $\lambda > n + rq$, la serie $\sum_{h=0}^{\infty} 2^{h \frac{n+|p|q-\lambda}{q}}$ è convergente. Tenuto conto di questo fatto, la relazione (3.12) assicura che la successione $\{a_p(x_0, \varrho 2^{-i})\}$ verifica la condizione di Cauchy e quindi converge per $i \to \infty$.

Dimostriamo ora che questo limite non dipende dalla scelta di ϱ in $[0, d(\Omega)]$.

Siano ϱ_1 e ϱ_2 due numeri reali verificanti la relazione $0 < \varrho_1 \leq \varrho_2 \leq d(\Omega)$. Applicando il lemma [2.I] e la definizione delle classi $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
& | a_p(x_0, \varrho_1 2^{-i}) - a_p(x_0, \varrho_2 2^{-i}) |^q \leq \\
& \leq \frac{c_1 2^{i(n+|p|q)}}{\varrho_1^{n+|p|q}} \int_{\Omega(x_0, \varrho_1 2^{-i})} | P_k(x, x_0, \varrho_1 2^{-i}) - P_k(x, x_0, \varrho_2 2^{-i}) |^q dx \leq \\
(3.13) \qquad & \leq \frac{c_1 2^{i(n+|p|q)+q}}{\varrho_1^{n+|p|q}} \left[\int_{\Omega(x_0, \varrho_1 2^{-i})} | P_k(x, x_0, \varrho_1 2^{-i}) - u(x) |^q dx + \right. \\
& \left. + \int_{\Omega(x_0, \varrho_2 2^{-i})} | P_k(x, x_0, \varrho_2 2^{-i}) - u(x) |^q dx \right] \leq c_1 2^q ||| u |||_{k,q,\lambda}^q \frac{\varrho_1^\lambda + \varrho_2^\lambda}{\varrho_1^{n+|p|q}} 2^{-i(\lambda-n-|p|q)}
\end{aligned}
$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per $i \to \infty$ in quanto, nelle ipotesi del lemma, $\lambda - n - |p| q > 0$.

([10]) Nel lemma [3. III] si assume come ϱ la quantità $\varrho 2^{-i}$.

Poniamo allora per $x_0 \in \bar{\Omega}$, $0 < \varrho \leq d(\Omega)$ e $|p| \leq r$

$$v_p(x_0) = \lim_{i \to \infty} a_p(x_0, \varrho\, 2^{-i}) \tag{3.14}$$

Le $v_p(x_0)$ sono definite in tutto $\bar{\Omega}$.

Abbiamo già osservato che, nelle ipotesi del lemma, la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} 2^{h \frac{n+|p|q-\lambda}{q}}$ è convergente; la sua somma si maggiora facilmente con una costante che dipende solo da λ, q, k, n. Dalla (3.7) del lemma [3.III] si deduce allora che $\forall\ |p| \leq r$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $0 < \varrho \leq d(\Omega)$, $i \geq 0$

$$|a_p(x_0, \varrho) - a_p(x_0, \varrho\, 2^{-i})| \leq c_4(\lambda, q, k, n, A)\, |||u|||_{k, q, \lambda}\, \varrho^{\frac{\lambda - n - |p|q}{q}}. \tag{3.15}$$

Dalle (3.14), (3.15) seguono allora facilmente la (3.10) e, di conseguenza, la (3.11).

4. In questo numero studieremo il legame intercorrente tra le funzioni $v_p(x_0)$, definite nel numero precedente, e la loro regolarità.

Un primo teorema è il seguente

TEOREMA [4.1]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e* $u \in \mathcal{L}_k^{(q, \lambda)}(\Omega)$ *con* $\lambda > n + kq$ *le funzioni* $v_p(x)$, *con* $|p| = k$, *sono hölderiane in* $\bar{\Omega}$ *e per ogni coppia di punti* $x, y \in \bar{\Omega}$ *si ha la maggiorazione*

$$|v_p(x) - v_p(y)| \leq c_5\, |||u|||_{k, q, \lambda}\, |x - y|^{\frac{\lambda - n - kq}{q}}. \tag{4.1}$$

Fissiamo la n-pla di interi $p = (p_1, \dots, p_n)$ con $|p| = k$ e sia x, y una coppia di punti di $\bar{\Omega}$ tali che $\varrho = |x - y| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$. Si ha banalmente

$$\begin{aligned} |v_p(x) - v_p(y)| \leq{}& |v_p(x) - a_p(x, 2\varrho)| + \\ &+ |v_p(y) - a_p(y, 2\varrho)| + |a_p(x, 2\varrho) - a_p(y, 2\varrho)|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

D'altra parte dalla (3.10) del lemma [3.IV] si ha che

$$|v_p(x) - a_p(x, 2\varrho)| \leq c_4 2^{\frac{\lambda - n - kq}{q}}\, |||u|||_{k, q, \lambda}\, \varrho^{\frac{\lambda - n - kq}{q}} \tag{4.3}$$

$$|v_p(y) - a_p(y, 2\varrho)| \leq c_4 2^{\frac{\lambda - n - kq}{q}}\, |||u|||_{k, q, \lambda}\, \varrho^{\frac{\lambda - n - kq}{q}} \tag{4.4}$$

mentre dalla (3.4) segue

$$(4.5) \qquad | a_p(x, 2\varrho) - a_p(y, 2\varrho) | \leq [c_1]^{\frac{1}{q}} \, 2^{\frac{q+1+\lambda}{q}} \, ||| u |||_{k, q, \lambda} \, \varrho^{\frac{\lambda-n-kq}{q}} .$$

Dalle (4.2) ... (4.5) segue la (4.1) per tutte le coppie di punti x, y verificanti la relazione $| x - y | \leq \frac{d(\Omega)}{2}$.

Se $| x - y | > \frac{d(\Omega)}{2}$, poichè Ω è connesso, si può costruire una poligonale i cui vertici sono contenuti in $\bar{\Omega}$, di estremi x e y e i cui lati abbiano lunghezza $\leq \frac{d(\Omega)}{2}$; il numero dei lati di queste poligonali si può limitare uniformemente rispetto x e y in funzione solo di $d(\Omega)$. Basterà allora applicare la (4.1) alle coppie di punti che costituiscono i vertici dei lati di una poligonale del tipo ora detto, congiungente i punti x e y, per avere la tesi.

Per semplificare l'enunciazione e la dimostrazione dei teoremi che seguono facciamo le seguenti convenzioni:

i) (0) è la n-pla $(0, \dots, 0)$

ii) e_i è il punto di R^n avente la i-esima coordinata uguale a 1 e tutte le altre nulle.

TEOREMA [4.II]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e* $u \in \mathcal{L}_k^{(q, \lambda)}(\Omega)$ *con* $k \geq 1$ *e* $\lambda > n + kq$ *allora per ogni n-pla di interi p con* $| p | \leq k - 1$ *la funzione* $v_p(x)$ *ha le derivate parziali prime in Ω e per ogni* $x \in \Omega$ *si ha*

$$(4.6) \qquad \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_i} = v_{(p+e_i)}(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nel teorema [4.I] abbiamo provato che le funzioni $v_p(x)$, con $| p | = k$, sono hölderiane, e quindi in particolare continue, in $\bar{\Omega}$. Il teorema [4.II] resterà allora dimostrato, per induzione, se dimostreremo la (4.6) nell'ipotesi aggiuntiva che le $v_{(p+e_i\delta)}(x)$ siano continue in $\bar{\Omega}$ per $\delta = 1, 2, \dots, k - | p |$.

Sia allora p una n-pla di interi tale che $| p | \leq k - 1$, i un intero fissato tra 1 e n, e supponiamo che le $v_{(p+e_i\delta)}(x)$ siano continue in $\bar{\Omega}$ per $\delta = 1, 2, \dots, k - | p |$.

Sia x_0 un punto di Ω e ϱ un numero reale sufficientemente piccolo, tale che $I(x_0, | \varrho |) \subset \Omega$. Tenuto conto della posizione (3.2) si deduce facilmente che

$$\frac{a_p(x_0+e_i\varrho, 2\,|\,\varrho\,|)-a_p(x_0\,,\,2\,|\,\varrho\,|)}{\varrho}=$$

$$(4.7)\qquad =\frac{\{D^p\,[P_k(x,x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)-P_k(x,x_0\,,\,2\,|\,\varrho\,|)]\}_{x=x_0}}{\varrho}-$$

$$-\sum_{1}^{k-|p|}{}_{\delta}\,\frac{(-1)^{\delta}}{\delta\,!}\,\varrho^{\delta-1}\,a_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|).$$

Applicando il lemma [2.I] e tenendo conto della (3.5) si ottiene

$$\left|\frac{\{D^p\,[P_k(x,x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)-P_k(x,x_0\,,\,2\,|\,\varrho\,|)]\}_{x=x_0}}{\varrho}\right|^q\leq$$

$$(4.8)\qquad \leq\frac{c_1}{\varrho^{n+|p|q}}\int_{\Omega(x_0,|\varrho|)}|\,P_k(x,x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)-P_k(x,x_0\,,\,2\,|\,\varrho\,|)\,|^q\,dx\leq$$

$$\leq c_1\,2^{q+\lambda+1}\,|||\,u\,|||^q_{k,\,q,\,\lambda}\,|\,\varrho\,|^{\lambda-n-|p|q}.$$

Inoltre per ogni $1\leq\delta\leq k-|\,p\,|$ si ha

$$|\,a_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)-v_{(p+\delta e_i)}(x_0)\,|\leq$$

$$(4.9)\qquad \leq|\,a_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)-v_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho)\,|+$$

$$+\,|\,v_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho)-v_{(p+\delta e_i)}(x_0)\,|\,.$$

D'altra parte, applicando la (3.10), si ottiene che

$$(4.10)\qquad |\,a_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)-v_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho)\,|\leq$$

$$\leq c_4\,2^{\frac{\lambda-n-|p|-\delta}{q}}\,|||\,u\,|||_{k,\,q,\,\lambda}\,|\,\varrho\,|^{\frac{\lambda-n-|p|-\delta}{q}}.$$

Dalle (4.9), (4.10) e dalla continuità delle $v_{(p+e_i\delta)}(x)$ per $\delta=1,2,\dots,k-|p|$ segue che

$$(4.11)\qquad \lim_{\varrho\to0}a_{(p+\delta e_i)}(x_0+e_i\varrho,2\,|\,\varrho\,|)=v_{(p+\delta e_i)}(x_0)\qquad \delta=1,2,\dots,k-|\,p\,|\,.$$

Dalle (4.7), (4.8), (4.11) segue allora che esiste finito il

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{a_p(x_0 + e_i \varrho, 2 | \varrho |) - a_p(x_0, 2 | \varrho |)}{\varrho}$$

e si ha, uniformemente rispetto a x_0,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{a_p(x_0 + e_i \varrho, 2 | \varrho |) - a_p(x_0, 2 | \varrho |)}{\varrho} = v_{(p+e_i)}(x_0). \tag{4.12}$$

Avremo allora dimostrato la (4.6) se faremo vedere che

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{v_p(x_0 + e_i \varrho) - v_p(x_0)}{\varrho} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{a_p(x_0 + e_i \varrho, 2 | \varrho |) - a_p(x_0, 2 | \varrho |)}{\varrho}. \tag{4.13}$$

Osserviamo a tal fine che dalla (3.10) segue che

$$\left| \frac{v_p(x_0 + e_i \varrho) - a_p(x_0 + e_i \varrho, 2 | \varrho |)}{\varrho} \right| \leq \tag{4.14}$$

$$\leq c_4\, 2^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}} ||| u |||_{k, q, \lambda} \, | \varrho |^{\frac{\lambda - n}{q} - |p| - 1}$$

$$\left| \frac{v_p(x_0) - a_p(x_0, 2 | \varrho |)}{\varrho} \right| \leq \tag{4.15}$$

$$\leq c_4\, 2^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}} ||| u |||_{k, q, \lambda} \, | \varrho |^{\frac{\lambda - n}{q} - |p| - 1}$$

e quindi le quantità a primo membro sono infinitesime con ϱ. Dalle (4.14), (4.15) e dalla relazione evidente

$$\frac{v_p(x_0 + e_i \varrho) - v_p(x_0)}{\varrho} = \frac{v_p(x_0 + e_i \varrho) - a_p(x_0 + e_i \varrho, 2 | \varrho |)}{\varrho} +$$

$$+ \frac{a_p(x_0, 2 | \varrho |) - v_p(x_0)}{\varrho} + \frac{a_p(x_0 + e_i \varrho, 2 | \varrho |) - a_p(x_0, 2 | \varrho |)}{\varrho}$$

segue allora la (4.13) e quindi la (4.6).

Possiamo allora enunciare il seguente teorema

TEOREMA [4.III]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e* $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ *con* $\lambda > n + kq$ *la funzione* $v_{(0)}(x) \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ *dove* $\alpha = \dfrac{\lambda - n - kq}{q}$ *e si ha la relazione*

$$D^p v_{(0)}(x) = v_p(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall |p| \leq k.$$

Questo teorema è semplice corollario dei teoremi [4.I] e [4.II].

Concludiamo questo numero con alcune osservazioni:

OSS. [4.I]. Supponiamo al solito che Ω goda la proprietà (I) e $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con $k \geq 1$ e supponiamo che esista un intero r, $0 \leq r \leq k-1$, tale che il grado di $P_k(x, x_0, \varrho)$ sia $\leq r$ $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \varrho \in [0, d(\Omega)]$; possiamo allora concludere che $v_{(0)}(x)$ è un polinomio di grado al più r.

Infatti le $a_p(x_0, \varrho)$ con $|p| > r$ sono nulle $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\forall \varrho \in [0, d(\Omega)]$ quindi sono identicamente nulle in $\bar{\Omega}$ le funzioni $v_p(x)$ con $|p| > r$ e questo per il teorema [4.III] prova quanto volevamo.

OSS. [4.II]. Se $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ e $\lambda > n + (k+1)q$ dalla (4.1) si deduce che le $v_p(x)$ con $|p| = k$ sono costanti e quindi, per il teorema [4.III], $v_{(0)}(x)$ si riduce a un polinomio di grado, al più, k.

5. Come conseguenza dei risultati dei numeri precedenti daremo ora un primo teorema di regolarità per le classi di funzioni $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$. Tale risultato verrà ripreso e meglio precisato nel successivo n. 6.

TEOREMA [5.I]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e* $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ *con* $n + kq < \lambda \leq n + (k+1)q$ *allora* $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, *dove* $\alpha = \dfrac{\lambda - n - kq}{q}$, *e si ha la maggiorazione*

$$[u]_{k,\alpha} \leq c_6 \, |||u|||_{k,q,\lambda}. \tag{5.1}$$

Se $\lambda > n + (k+1)q$ *u coincide in Ω con un polinomio di grado al più k.*

Se teniamo conto dei risultati stabiliti nel n. 4 (teor. [4.III] e oss. [4.II]) basterà dimostrare che, nelle ipotesi del teorema, $u(x)$ coincide quasi ovunque in Ω con la funzione $v_{(0)}(x)$ ossia con il $\lim\limits_{\varrho \to 0} a_{(0)}(x, \varrho)$.

A tal fine osserviamo che, poichè $u \in L^q(\Omega)$, per quasi tutti gli $x_0 \in \Omega$, si ha che

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\operatorname{mis} \Omega(x_0, \varrho)} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - u(x_0)|^q \, dx = 0. \tag{5.2}$$

Sia x_0 un punto di Ω in cui vale la (5.2); per quasi tutti gli $x \in \Omega$ si ha allora

$$| a_{(0)}(x_0, \varrho) - u(x_0)|^q \leq c_6(q) \{ | P_k(x, x_0, \varrho) - a_{(0)}(x_0, \varrho)|^q + \\ + | P_k(x, x_0, \varrho) - u(x)|^q + | u(x) - u(x_0)|^q \}.$$

Di qui, integrando su $\Omega(x_0, \varrho)$, si ottiene

$$\begin{aligned} | a_{(0)}(x_0, \varrho) - u(x_0)|^q \leq & \frac{c_6(q)}{A\varrho^n} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} | P_k(x, x_0, \varrho) - a_{(0)}(x_0, \varrho)|^q \, dx + \\ & + \frac{c_6(q)}{A\varrho^n} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} | P_k(x, x_0, \varrho) - u(x)|^q \, dx + \\ & + \frac{c_6(q)}{\text{mis}\, \Omega(x_0, \varrho)} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} | u(x) - u(x_0)|^q \, dx. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Per la definizione di classi $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ si ha d'altra parte

$$\frac{c_6(q)}{A\varrho^n} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} | P_k(x, x_0, \varrho) - u(x)|^q \, dx \leq \frac{c_6(q) \, ||| u |||^q_{k, q, \lambda}}{A} \varrho^{\lambda - n} \tag{5.4}$$

e quindi il primo integrale a secondo membro è infinitesimo con ϱ. L'ultimo integrale a secondo membro nella (5.3) è infinitesimo con ϱ in virtù della (5.2). Esaminiamo l'integrale

$$\frac{c_6(q)}{A\varrho^n} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} | P_k(x, x_0, \varrho) - a_{(0)}(x_0, \varrho)|^q \, dx. \tag{5.5}$$

Si ha

$$\frac{c_6(q)}{A\varrho^n} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} | P_k(x, x_0, \varrho) - a_{(0)}(x_0, \varrho)|^q \, dx \leq c_7(A, n, q, k) \sum_{1 \leq |p| \leq k} |a_p(x_0, \varrho)|^q \varrho^{|p| q}.$$

Da questa relazione, tenuto conto della (3.11), si deduce che anche l'integrale (5.5) è infinitesimo con ϱ. Dalla (5.3) si ha allora che per quasi tutti gli $x_0 \in \Omega$

$$\lim_{\varrho \to 0} a_{(0)}(x_0, \varrho) = u(x_0).$$

E ciò è quanto necessitava provare. Osserviamo che la maggiorazione (5.1) segue dal fatto ora provato che $u(x) = v_{(0)}(x)$ quasi ovunque in Ω e dalla (4.1) del teorema [4.I].

6. In questo numero completeremo, precisandolo, il risultato contenuto nel teorema [5.I].

Dimostriamo il seguente lemma:

Lemma [6.1]. *Ω goda la proprietà (I); sia h un intero verificante la relazione $0 \leq h \leq k-1$, q e λ due numeri reali con $q \geq 1$ e $0 \leq \lambda < n + (h+1)q$, allora $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo* (11) *allo spazio $\mathcal{L}_h^{(q,\lambda)}(\Omega)$.*

È immediato verificare che se $k > h$ allora

$$\mathcal{L}_h^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) \tag{6.1}$$

l'immersione di $\mathcal{L}_h^{(q,\lambda)}(\Omega)$ in $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ essendo continua. Infatti se $k > h$, $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_h$ e quindi $\forall\, u \in \mathcal{L}_h^{(q,\lambda)}(\Omega)$, $\forall\, x_0 \in \overline{\Omega}$, $\forall\, \varrho \in [0, d(\Omega)]$ si ha che

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u - P|^q\, dx \leq \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u - P|^q\, dx \leq |||u|||^q_{h,q,\lambda}\, \varrho^\lambda .$$

Di qui si deduce che

$$|||u|||_{k,q,\lambda} \leq |||u|||_{h,q,\lambda} \tag{6.2}$$

e quindi la (6.1).

Resta allora da dimostrare l'inclusione (algebrica e topologica)

$$\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_h^{(q,\lambda)}(\Omega). \tag{6.3}$$

Sia $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$, p una n-pla di interi non negativi tale che $h < |p| \leq k$ e $a_p(x_0, \varrho)$ le funzioni di x_0 e ϱ definite dalla (3.2).

Dalla (3.7) segue che $\forall\, x_0 \in \overline{\Omega}$ e per ogni intero non negativo i

$$|a_p(x_0, d(\Omega)) - a_p(x_0, d(\Omega)\, 2^{-i})| \leq c_3\, |||u|||_{k,q,\lambda} \sum_{s=0}^{i-1} 2^{s\frac{n+|p|q-\lambda}{q}}\, d(\Omega)^{\frac{\lambda-n-|p|q}{q}} \leq$$

$$\leq c_3\, |||u|||_{k,q,\lambda} \left(\frac{d(\Omega)}{2^i}\right)^{\frac{\lambda-n-|p|q}{q}} \frac{1}{2^{\frac{n+|p|q-\lambda}{q}} - 1} \leq \tag{6.4}$$

$$\leq c_8\, |||u|||_{k,q,\lambda} \left(\frac{d(\Omega)}{2^i}\right)^{\frac{\lambda-n-|p|q}{q}}$$

(11) Isomorfismo algebrico e topologico.

Sia allora ϱ un numero positivo $\leq d(\Omega)$; esisterà un intero i per cui

$$\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} \leq \varrho < \frac{d(\Omega)}{2^i}. \tag{6.5}$$

Per un i siffatto, tenuto conto che $n + |p| q - \lambda > 0$ se $|p| > h$, dalla (6.4) si ricava che $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$

$$| a_p(x_0, d(\Omega)) - a_p(x_0, d(\Omega) 2^{-i}) | \leq c_8 ||| u |||_{k, q, \lambda} \varrho^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}}. \tag{6.6}$$

D'altra parte con un calcolo del tutto analogo a quello svolto per dimostrare la (3.13) si ottiene che

$$\begin{aligned} | a_p(x_0, \varrho) - a_p(x_0, d(\Omega) 2^{-i}) |^q &\leq c_9 \frac{||| u |||^q_{k, q, \lambda}}{\varrho^{n+|p| q}} \left[\varrho^\lambda + \left(\frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^\lambda \right] \leq \\ &\leq c_9 [1 + 2^\lambda] ||| u |||^q_{k, q, \lambda} \varrho^{\lambda - n - |p| q}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dalle (6.6), (6.7) si ha in definitiva che $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$, $\forall 0 < \varrho \leq d(\Omega)$, $\forall p$ con $|p| > h$

$$| a_p(x_0, \varrho) | \leq c_{10} ||| u |||_{k, q, \lambda} \varrho^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}} + | a_p(x_0, d(\Omega)) |. \tag{6.8}$$

Osserviamo a questo punto che le funzioni $\{a_p(x_0, d(\Omega))\}$, $|p| > h$, sono limitate al variare di x_0 in $\bar{\Omega}$; si ha infatti

$$\begin{aligned} | a_p(x_0, d(\Omega)) |^q &\leq \frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|p| q}} \int_\Omega | P_k(x, x_0, d(\Omega)) |^q dx \leq \\ &\leq \frac{c_1 2^q}{d(\Omega)^{n+|p| q}} \left\{ \int_\Omega | P_k(x, x_0, d(\Omega)) - u(x) |^q dx + \int_\Omega | u(x) |^q dx \right\} \leq \\ &\leq \frac{c_1 2^q}{d(\Omega)^{n+|p| q}} \left[||| u |||^q_{k, q, \lambda} [d(\Omega)]^\lambda + \| u \|^q_{L^q(\Omega)} \right] \leq \\ &\leq c_{11}(A, q, \lambda, p, d(\Omega)) \| u \|^q_{k, q, \lambda}. \end{aligned}$$

Esisterà pertanto un $\bar{\varrho} \leq d(\Omega)$, $\bar{\varrho}$ che dipende dalle stesse quantità da cui dipende c_{11}, tale che $\forall \varrho \leq \bar{\varrho}$, $\forall x_0 \in \bar{\Omega}$, $\forall p$ con $|p| > h$

$$| a_p(x_0, d(\Omega)) | \leq c_{10} \| u \|_{k, q, \lambda} \varrho^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}}. \tag{6.9}$$

Quindi dalle (6.8), (6.9) si ha che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}$, $\forall\, 0 < \varrho \leq \bar{\varrho}$, $\forall\, p$ con $|p| > h$

$$|a_p(x_0, \varrho)| \leq 2\, c_{10}\, \| u \|_{k,q,\lambda}\, \varrho^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}} . \tag{6.10}$$

Sia allora $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $0 < \varrho \leq \bar{\varrho}$; si avrà

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P(x)|^q\, dx \leq \int_{\Omega(x_0, \varrho)} \left| u(x) - \sum_{|p| \leq h} \frac{a_p(x_0, \varrho)}{p!} (x - x_0)^p \right|^q dx \leq$$

$$\leq 2^q \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \varrho)|^q\, dx +$$

$$+ 2^q \sum_{h < |p| \leq k} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} \left(\frac{|a_p(x_0, \varrho)|}{p!} |x - x_0|^{|p|} \right)^q dx$$

Di qui tenuto conto della (6.10) si deduce che

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P(x)|^q\, dx \leq c_{12}\, \| u \|^q_{k,q,\lambda}\, \varrho^{\lambda}. \tag{6.11}$$

È chiaro che pur di modificare la costante c_{12} si può supporre che la maggiorazione (6.11) valga per tutti i ϱ dell'intervallo $[0, d(\Omega)]$.

Dalla (6.11) segue allora la maggiorazione

$$||| u |||_{h,q,\lambda} \leq c_{13}\, \| u \|_{k,q,\lambda}$$

e quindi la (6.3).

Dal lemma ora dimostrato e dal teorema [5.I] si deduce immediatamente il seguente risultato che completa quello contenuto nel teorema [5.I]:

TEOREMA [6.I]. *Se Ω gode la proprietà* (I) *e $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ con k intero > 0 e $n + hq < \lambda < n + (h+1) q$, dove h è un intero verificante la relazione $0 \leq h \leq k$, allora $u \in C^{h,\alpha}(\Omega)$ con $\alpha = \dfrac{\lambda - n - hq}{q}$ e si ha la maggiorazione*

$$[u]_{h,\alpha} \leq c_{13}\, ||| u |||_{h,q,\lambda} . \tag{6.12}$$

Richiamo, brevemente, a questo punto la definizione di spazi di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ (cfr. ad es. [2]).

Siano q e λ due numeri reali con $q \geq 1$ e $0 \leq \lambda \leq n$; si dice che una funzione $u \in L^q(\Omega)$ appartiene alla classe $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ se

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \varrho \leq d(\Omega)}} \left[\varrho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty \tag{6.13}$$

Se indichiamo con $\| u \|_{q,\lambda}$ la quantità a primo membro in (6.13) si dimostra che $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio di Banach (completo) rispetto alla norma $\| u \|_{q,\lambda}$. In particolare per $\lambda = 0$ tale spazio è isomorfo con $L^q(\Omega)$.

Si ha allora il seguente

TEOREMA [6.II]. *Se Ω gode la proprietà* (I), *k è un numero intero ≥ 0, q e λ sono due numeri reali con $q \geq 1$ e $0 \leq \lambda < n$, allora $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$.*

La dimostrazione di questo teorema è del tutto analoga a quella del lemma [6.I]. Innanzi tutto è immediato verificare che $L^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$; ciò segue dal fatto che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\forall\, \varrho \in [0, d(\Omega)]$

$$\inf_{P \in \mathscr{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P(x)|^q \, dx \leq \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x)|^q \, dx \,.$$

Per dimostrare l'inclusione inversa

$$\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset L^{(q,\lambda)}(\Omega) \tag{6.14}$$

si procede esattamente come si è fatto nel lemma [6.I].

Sia $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ e $a_p(x_0, \varrho)$ le funzioni di x_0 e ϱ definite dalla (3.2). Si dimostra allora che per ogni n-pla di interi p con $0 \leq |p| \leq k$, per ogni $x_0 \in \bar{\Omega}$ e per ogni $\varrho \in [0, d(\Omega)]$ si ha la maggiorazione (6.9), cioè

$$|a_p(x_0, \varrho)| \leq c_{14} \| u \|_{k,q,\lambda} \, \varrho^{\frac{\lambda - n - |p| q}{q}} . \tag{6.15}$$

Di qui segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x)|^q \, dx &\leq 2^q \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \varrho)|^q \, dx + 2^q \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |P_k(x, x_0, \varrho)|^q \, dx \leq \\ &\leq 2^q ||| u |||_{k,q,\lambda}^q \varrho^\lambda + 2^q \sum_{|p| \leq k} |a_p(x_0, \varrho)|^q \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |x - x_0|^{|p| q} \, dx \leq \\ &\leq c_{15} \| u \|_{k,q,\lambda}^q \varrho^\lambda \end{aligned}$$

e quindi la (6.14).

7. Concludiamo questo lavoro con alcune osservazioni.

Nel teorema [6.I] abbiamo stabilito che se Ω gode la proprietà (I), $k \geq 0$, $q \geq 1$, $n + hq < \lambda < n + (h+1)q$ dove h è un intero non negativo e $\leq k$ allora $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset C^{h,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha = \dfrac{\lambda - n - hq}{q}$.

Ebbene, se su Ω facciamo qualche ulteriore ipotesi oltre a quella che goda della proprietà (I), ad esempio se supponiamo che Ω sia convesso ([12]), allora $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ risulta isomorfo con lo spazio $C^{h,\frac{\lambda-n-hq}{q}}(\overline{\Omega})$.

Supponiamo infatti che $u \in C^{h,\frac{\lambda-n-hq}{q}}(\overline{\Omega})$; sia x_0 un punto di $\overline{\Omega}$, ϱ un numero positivo verificante la relazione $0 < \varrho \leq d(\Omega)$, x un generico punto di $\Omega(x_0, \varrho)$. Dalla formula di Taylor, di punto iniziale x_0 ([13]), si ottiene, tenuto conto dell'hölderianità delle derivate h-esime della u

$$\left| u(x) - \sum_{|p| \leq h} \frac{D^p u(x_0)}{p!}(x - x_0)^p \right| = \left| \sum_{|p| = h} \frac{D^p u(\xi) - D^p u(x_0)}{p!}(x - x_0)^p \right| \leq$$

$$\leq [u]_{h,\frac{\lambda-n-hq}{q}} \cdot \sum_{|p|=h} \frac{1}{p!} \, | x - x_0 |^{\frac{\lambda-n}{q}} \tag{7.1}$$

Dalla (7.1), integrando su $\Omega(x_0, \varrho)$, si ha

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} | u(x) - P(x) |^q \, dx \leq c_{16} \, [u]^q_{h,\frac{\lambda-n-hq}{q}} \, \varrho^\lambda .$$

Da questa relazione e dalla (6.2) segue che

$$||| u |||^q_{k,q,\lambda} \leq c_{16} \, [u]^q_{h,\frac{\lambda-n-hq}{q}} . \tag{7.2}$$

Ora è noto che nella norma $| u |_{h,\alpha}$ la quantità $| u |_h = \sum_{|p| \leq h} \sup_{\overline{\Omega}} | D^p u |$ si può sostituire ad esempio con $\sum_{|p| \leq h} \| D^p u \|_{L^q(\Omega)}$. Da questa osservazione e

---

([12]) Tale condizione si può sostituire con altre atte ad assicurare lo sviluppo di Taylor nell'intorno di ogni punto di $\overline{\Omega}$ per una funzione che sia continua in $\overline{\Omega}$ con le derivate fino a un certo ordine.

([13]) Si può applicare tale formula in virtù delle ipotesi fatte su Ω. In tale formula ξ è un opportuno punto del segmento di estremi x_0, x.

dalla (7.2) segue appunto che

$$\| u \|_{k,q,\lambda} \leq c_{17} \, | u |_{h,\, \frac{\lambda-n-hq}{q}} \, .$$

Si ottiene così una nuova caratterizzazione per gli spazi $C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$ particolarmente comoda per trattare taluni problemi in quanto in un'unica famiglia di spazi $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ si fanno rientrare, al variare dei parametri, lo spazio $L^q(\Omega)$, gli spazi di Morrey $L^{(q,\lambda)}(\Omega)$, gli spazi delle funzioni hölderiane, e via via gli spazi delle funzioni che hanno le derivate di un certo ordine hölderiane.

Si veda in proposito il lavoro [6] di G. Stampacchia dove attraverso l'uso degli spazi $\mathcal{L}_0^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è data una interessante generalizzazione del teorema di Marcinkiewicz.

Un altro fatto che voglio segnalare è il seguente:

Dai risultati che abbiamo stabilito nei numeri precedenti segue che se $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$, Ω al solito gode della proprietà (I), e se $\lambda > n + (k+1)q$ allora $u \in \mathcal{P}_k$, se $\lambda = n + (k+1)q$ u ha le derivate k-esime lipsitziane in $\bar{\Omega}$. Nulla invece si è potuto dire nel caso che $\lambda = n + hq$ con $h = 1, 2, \dots, k$. È certo che se $\lambda = n + hq$ con $h = 1, 2, \dots, k$ non si può dire che u abbia le derivate di ordine $(h-1)$ lipsitziane come è provato dal seguente esempio:

Si assuma come Ω l'intervallo aperto $]0, 1[$ della retta e si consideri la funzione

$$u(x) = x \, | \log x | \, .$$

Si verifica abbastanza facilmente che $u \in \mathcal{L}_k^{(2,3)}\,]0,1[\ \forall\, k \geq 1$; si verifica anche facilmente, in accordo a quanto detto prima, che u non è lipsitziana in $\bar{\Omega}$ ma solo hölderiana con ogni esponente $\alpha < 1$.

Similmente se $\lambda = n$ non si può dire che u appartenga allo spazio di Morrey $L^{(q,n)}(\Omega)$ il che equivarrebbe a dire, come è noto, che u è limitata in $\bar{\Omega}$. Anche qui un esempio si dà facilmente: si assuma come Ω l'intervallo aperto $]0, 1[$ della retta e come $u(x)$ la funzione $| \log x |$. Si verifica facilmente che $u \in \mathcal{L}_k^{(2,1)}\,]0, 1[$ per qualunque intero $k \geq 0$ ma u non è limitata.

Sarebbe utile esaminare più compiutamente questi casi eccezionali e ciò potrebbe essere fatto da vari punti di vista sui quali non voglio qui soffermarmi.

Mi limito a ricordare che per gli spazi $\mathcal{L}_0^{(1,n)}(\Omega)$, almeno per quanto riguarda il caso che Ω sia un cubo, una interessante caratterizzazione è stata data in [5] da F. Jonh e L. Nirenberg:

Indichiamo con u_Ω il valor medio di u in Ω; allora se $u \in \mathcal{L}_0^{(1,n)}(\Omega)$ e $\| u \|_{0,1,n} \leq K$ esistono tre costanti positive $H, \beta, l\ (< 1)$ tali che

$$\text{mis}\, \{ | u - u_\Omega | > \eta \text{ in } \Omega \} \leq H e^{-\beta \eta K^{-1}} \, \text{mis}\, \{ | u - u_\Omega | > l\eta \text{ in } \Omega \}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO, « *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni* » Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. XVII (1963).

[2] S. CAMPANATO, « *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey* », Ricerche di Matem. vol. XII (1963).

[3] J. CLARKSON, « *Uniformly convex spaces* », Trans. Ann. Math. Soc., vol. 40 (1936).

[4] G. N. MEYERS, « *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity* » In corso di stampa.

[5] F. JOHN - L. NIRENBERG, « *On functions of bounded mean oscillation* », Comm. Pure and Applied Math., vol. XIV (1961).

[6] G. STAMPACCHIA, « $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ *spaces and interpolation* », In corso di stampa su Comm. Pure and Applied Math.