ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

DIONISIO TRISCARI

Sull’esistenza di cilindri con frontiera di misura minima

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 4 (1963), p. 387-399
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_4_387_0>

SULL'ESISTENZA DI CILINDRI CON FRONTIERA DI MISURA MINIMA (1)

DIONISIO TRISCARI (Messina)

In questa nota si prosegue lo studio già iniziato in [11] delle eventuali singolarità delle frontiere orientate di misura minima e si dimostra che, se esistono punti di accumulazione dell'insieme dei punti singolari, allora esistono cilindri la cui frontiera è di misura minima (localmente) ed è dotata di punti singolari.

1. Conformemente alle convenzioni usate in [2], [3] e conservando tutte le notazioni introdotte in [4] e in [11] converremo che ogni qualvolta si parlerà di insiemi contenuti in R^n e di funzioni ivi definite, intenderemo riferirci sempre ad insiemi di Borel ed a funzioni di Baire.

Richiamiamo il seguente teorema (cfr. Teor. V, pag. 17, [4]):

TEOREMA I. — *Dati due insiemi di Caccioppoli E, L risulta:*

$$P(E) + P(L) \geq P(E \cup L) + P(E \cap L). \tag{1.1}$$

Da questo teorema segue immediatamente che se l'insieme E ha perimetro finito, per ogni $\varrho > 0$ si ha:

$$P(E \cap C_\varrho) < +\infty. \tag{1.2}$$

Ciò giustifica la seguente:

DEFINIZIONE I. — Un insieme $E \subset R^n$ si dice di *perimetro localmente finito* se per ogni numero positivo ϱ l'insieme

$$E \cap C_\varrho \tag{1.3}$$

ha perimetro finito.

Pervenuto alla redazione il 14 Dicembre 1963.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del CNR, nell'anno accademico 1962-1963.

Dal teorema I segue immediatamente:

TEOREMA II. — *Unioni, intersezioni, differenze di insiemi di perimetro localmente finito hanno perimetro localmente finito.*

È evidente che un insieme limitato di perimetro localmente finito ha addirittura perimetro finito.

È utile richiamare il seguente teorema (cfr. Teor. II, pag. 15, [4]):

TEOREMA III. — *Dati due insiemi di Caccioppoli E, L ed un aperto A dello spazio R^n, se vale la*

$$A \cap E = A \cap L \tag{1.4}$$

allora per ogni insieme $B \subset A$ risulta:

$$\int_B D\varphi(x, E) = \int_B D\varphi(x, L) \tag{1.5}$$

$$\int_B |D\varphi(x, E)| = \int_B |D\varphi(x, L)| \tag{1.6}$$

e quindi:

$$A \cap \mathcal{F}^* E = A \cap \mathcal{F}^* L. \tag{1.7}$$

Possiamo provare i seguenti teoremi:

TEOREMA IV. — *Sia L un insieme limitato ed E un insieme di perimetro localmente finito; siano inoltre ϱ ed r due numeri positivi verificanti la:*

$$L \subset (A_\varrho \cap A_r); \tag{1.8}$$

allora si ha:

$$\int_L D\varphi(x, E \cap C_\varrho) = \int_L D\varphi(x, E \cap C_r) \tag{1.9}$$

$$\int_L |D\varphi(x, E \cap C_\varrho)| = \int_L |D\varphi(x, E \cap C_r)| \tag{1.10}$$

$$A_\varrho \cap A_r \cap \mathcal{F}^*(E \cap C_\varrho) = A_\varrho \cap A_r \cap \mathcal{F}^*(E \cap C_r). \tag{1.11}$$

DIMOSTRAZIONE. — Basta osservare che:

$$(E \cap C_\varrho) \cap (A_\varrho \cap A_r) = (E \cap C_r) \cap (A_\varrho \cap A_r) \tag{1.12}$$

ed applicare il Teorema III. c.v.d.

Il teorema ora dimostrato giustifica la seguente:

DEFINIZIONE II. — Dato un insieme E di perimetro localmente finito, un numero $\varrho > 0$ ed un insieme $L \subset A_\varrho$ porremo:

$$\int_L D\varphi(x, E) = \int_L D\varphi(x, E \cap C_\varrho) \tag{1.13}$$

$$\int_L |D\varphi(x, E)| = \int_L |D\varphi(x, E \cap C_\varrho)|. \tag{1.14}$$

Analogamente porremo per ogni $\varrho > 0$:

$$\mathcal{F}^* E \cap A_\varrho = A_\varrho \cap \mathcal{F}^*(E \cap C_\varrho). \tag{1.15}$$

È evidente che per la arbitrarietà di ϱ e per il teorema precedente, la (1.15) definisce univocamente $\mathcal{F}^* E$.

TEOREMA V. — *Se L è un insieme chiuso e limitato di R^n, ϱ ed r sono due numeri positivi, E è un insieme di perimetro localmente finito ed inoltre L è un insieme contenuto in $A_\varrho \cap A_r$, allora:*

$$\vartheta(E \cap C_\varrho, L) = \vartheta(E \cap C_r, L). \tag{1.16}$$

DIMOSTRAZIONE. — Ricordando la (3.4) di [11] abbiamo:

$$\vartheta(E \cap C_\varrho, L) = \inf.\left\{\int_L |D\varphi(x, B)|\,;\ B \subset R^n,\right.$$
$$\left. P(B) < +\infty, B - L = (E \cap C_\varrho) - L\right\}; \tag{1.17}$$

$$\vartheta(E \cap C_r, L) = \inf.\left\{\int_L |D\varphi(x, B')|\,;\ B' \subset R^n,\right.$$
$$\left. P(B') < +\infty, B' - L = (E \cap C_r) - L\right\}. \tag{1.18}$$

Tra gli insiemi B che intervengono nella (1.17) e gli insiemi B' che intervengono nella (1.18) si può porre una corrispondenza biunivoca data dalle relazioni:

$$B = (B' \cap C_\varrho \cap C_r) \cup [E \cap (C_\varrho - C_r)] \tag{1.19}$$

$$B' = (B \cap C_\varrho \cap C_r) \cup [E \cap (C_r - C_\varrho)]. \tag{1.20}$$

Essendo per ipotesi $L \subset (A_\varrho \cap A_r)$, per il Teorema III, tenendo conto delle (1.19), (1.20) segue:

$$\int_L | D\varphi(x, B') | = \int_L | D\varphi(x, B) | . \tag{1.21}$$

Da questa e dalle (1.17), (1.18), per la (3.4) di [11], segue la tesi. c.v.d.

DEFINIZIONE III. — Sia E un insieme di perimetro finito, ϱ un numero positivo ed inoltre sia L un insieme chiuso e limitato contenuto in A_ϱ; porremo per definizione:

$$\vartheta(E \cap C_\varrho, L) = \vartheta(E, L). \tag{1.22}$$

Questa definizione è giustificata dal teorema precedente il quale ci assicura che, sotto l'ipotesi $L \subset A_\varrho$, il primo termine della (1.22) è indipendente da ϱ.

Per L chiuso e limitato ed E di perimetro localmente finito, si estende subito la definizione della funzione ψ ponendo (cfr. (3.5) di [11]), per $A_\varrho \supset L$;

$$\psi(E, L) = \psi[E \cap C_\varrho, L] = \int_L | D\varphi(x, E) | - \vartheta(E, L). \tag{1.23}$$

La maggior parte dei teoremi relativi agli insiemi di perimetro finito si estendono a quelli di perimetro localmente finito; quando non presenta difficoltà, tale estensione verrà nel seguito sottintesa.

DEFINIZIONE IV. — Se E è un insieme di perimetro localmente finito e per ogni ϱ risulta $\psi(E, C_\varrho) = 0$ allora diremo che E ha *frontiera orientata di misura localmente minima.*

DEFINIZIONE V. — Data una successione di insiemi $\{E_h\}$ diremo che essa *converge localmente in media* verso l'insieme L se per ogni $\varrho > 0$ risulta verificata la relazione :

$$\lim_{h\to\infty} \mathcal{L}\,(E_h' \cap C_\varrho) = L \cap C_\varrho \tag{1.24}$$

ossia :

$$\lim_{h\to\infty} \text{mis}\,[(E_h' \cap C_\varrho) - (L \cap C_\varrho)] = 0 \tag{1.25}$$

$$\lim_{h\to\infty} \text{mis}\,[(L \cap C_\varrho) - (E_h' \cap C_\varrho)] = 0. \tag{1.26}$$

Più brevemente diremo talvolta che la successione $\{E_h\}$ converge $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ verso L e scriveremo in luogo della (1.24) o delle (1.25), (1.26):

$$\lim_{h\to\infty} \mathcal{L}_{\text{loc}}\,\{E_h\} = L. \tag{1.27}$$

TEOREMA VI. — *Sia $\{E_h\}_h$ una successione di insiemi di perimetro localmente finito e si abbia inoltre*

$$\psi\,(E_h\,, C_h) = 0. \tag{1.28}$$

È possibile allora estrarre una successione $\{E_h'\}$ subordinata alla successione $\{E_h\}$ che sia localmente convergente in media.

DIMOSTRAZIONE. — Fissato ad arbitrio un $\varrho > 0$, per h abbastanza grande si ha:

$$A_h \supset C_\varrho\,. \tag{1.29}$$

Per le (1.28) e per le (3.5) di [11] si ha:

$$\psi\,(E_h\,, A_h) = 0. \tag{1.30}$$

Ne segue, per il Teorema XII di [11]:

$$\int_{C_\varrho} |\, D\varphi\,(x, E_h)\,| \leq \frac{n\omega_n\,\varrho^{n-1}}{2} \tag{1.31}$$

e quindi per il Lemma I, n^0 6 di [11]:

$$P\,(E \cap C_\varrho) \leq \frac{3n\;\omega_n\;\varrho^{n-1}}{2}\,. \tag{1.32}$$

Dal Teorema IV di [11] si deduce che dalla successione $\{E_h \cap C_\varrho\}$ si può estrarre una successione subordinata:

$$\{E_h'' \cap C_\varrho\}_h \tag{1.33}$$

che converga in media.

In particolare, per $\varrho = 1$, dalla successione $\{E_h\}$ può estrarsi una successione subordinata $\{E_{1h}\}$ tale che:

$$\{E_{1h} \cap C_1\}_h \tag{1.34}$$

converga in media.

Similmente, per $\varrho = 2$, dalla successione $\{E_{1h}\}$ può estrarsi una successione subordinata $\{E_{2h}\}_h$ tale che:

$$\{E_{2h} \cap C_2\}_h \tag{1.35}$$

converga in media. Così continuando, possiamo costruire infinite successioni:

$$\{E_{1h}\}_h\,,\ \{E_{2h}\}_h\,, \dots ,\ \{E_{kh}\}_h\,, \dots \tag{1.36}$$

ognuna subordinata alla precedente, tale che:

$$\{E_{kh} \cap C_k\}_h \tag{1.37}$$

converga in media.

Si consideri allora la successione $\{E_h'\}_h$ definita dalla:

$$E_h' = E_{hh} \tag{1.38}$$

qualunque sia h. Per ogni intero k, la successione $\{E_h'\}_h$ è subordinata (a meno di un numero finito di termini) alla successione $\{E_{kh}\}_h$, e quindi la successione $\{E_h' \cap C_k\}_h$ converge in media.

Fissato allora in modo arbitrario $\varrho > 0$ esisterà un intero $k > \varrho$ e quindi, convergendo in media $\{E_h' \cap C_k\}_h$, convergerà pure $\{E_h' \cap C_\varrho\}_h$ ed il teorema è dimostrato. c.v.d.

TEOREMA VII. — *Sia $\tau > 0$ e supponiamo che per ogni h si abbia:*

$$\psi(E_h\,, C_\tau) = 0. \tag{1.39}$$

Supponiamo pure che E_h converga $\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}$ ad L. Possiamo allora estrarre dalla successione $\{E_h\}$ una subordinata $\{E_h'\}$ tale che risulti per quasi tutti i numeri *positivi* $t < \tau$:

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\mathcal{F} C_t} | \varphi (x, E_h') - \varphi (x, L) | \, dH_{n-1} = 0 \tag{1.40}$$

$$\lim_{h \to \infty} \psi (E_h', C_t) = \psi (L, C_t) = 0 \tag{1.41}$$

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\dot{C}_t} | D\varphi (x, E_h') | = \int_{\dot{C}_t} | D\varphi (x, L) | \, . \tag{1.42}$$

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del Teorema XV di [11].

TEOREMA VIII. — *Nelle ipotesi del Teorema VII, se per ogni h l'origine è un punto singolare per la frontiera orientata di E_h, cioè se :*

$$0 \in \mathcal{F}_e E_h - \mathcal{F}^* E_h \, ; \quad \forall \, h, \tag{1.43}$$

allora :

$$0 \in \mathcal{F}_e L - \mathcal{F}^* L. \tag{1.44}$$

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del Teorema XVI di [11].

2. Sia ω una rotazione intorno all'origine di R^n, cioè una trasformazione lineare che al generico punto $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$ faccia corrispondere il punto $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$ di coordinate :

$$y_h = \sum_{k=1}^{n} \omega_{hk} \, x_k \tag{2.1}$$

con le condizioni :

$$\det \cdot \omega = 1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{hi} \, \omega_{ki} = \delta_{hk} \tag{2.3}$$

dove δ_{hk} è il simbolo di Kronecker.

Posto, per ogni $E \subset R^n$:

$$\omega E = \{ \omega x \, ; \, x \in E \} \tag{2.4}$$

si verificano immediatamente le relazioni :

$$P(\omega E) = P(E) \tag{2.5}$$

$$Q(\omega E, \omega L) = Q(E, L) \tag{2.6}$$

$$\vartheta(\omega E, \omega L) = \vartheta(E, L) \tag{2.7}$$

$$\psi(\omega E, \omega L) = \psi(E, L) \tag{2.8}$$

$$\int_{\omega B} D\varphi(x, \omega E) = \int_{B} D\varphi(x, E) \tag{2.9}$$

$$\int_{\omega B} | D\varphi(x, \omega E) | = \int_{B} | D\varphi(x, E) | \tag{2.10}$$

$$\omega \mathcal{F}^* E = \mathcal{F}^* \omega E \tag{2.11}$$

$$\omega \mathcal{F}_e E = \mathcal{F}_e \omega E. \tag{2.12}$$

TEOREMA IX. — *Sia A un aperto di R^n contenente l'origine, E un insieme di perimetro localmente finito e supponiamo che l'origine sia punto di accumulazione per :*

$$\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E. \tag{2.13}$$

Inoltre, per ogni compatto $K \subset A$ sia :

$$\psi(E, K) = 0. \tag{2.14}$$

Esistono allora una successione ϱ_h di numeri positivi ed una successione ω_h di rotazioni, tali che :

$$\lim_{h \to \infty} \varrho_h = +\infty \tag{2.15}$$

$$(0, 0, \ldots, 0, 1) \in [\mathcal{F}_e(\omega_h \delta_{\varrho_h} E) - \mathcal{F}^* \omega_h \delta_{\varrho_h} E] \tag{2.16}$$

$$\psi(\omega_h \delta_{\varrho_h} E, C_h) = 0, \tag{2.17}$$

qualunque sia h.

DIMOSTRAZIONE. — Per l'ipotesi (2.14) si troverà un numero positivo τ tale che :

$$\psi(E, C_\tau) = 0. \tag{2.18}$$

Essendo l'origine punto di accumulazione di $\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E$, per ogni intero h possiamo trovare un punto ξ_h tale che:

$$0 < \frac{|\xi_h|}{\tau} < \frac{1}{h}, \tag{2.19}$$

$$\xi_h \in \mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E. \tag{2.20}$$

Si ponga:

$$\varrho_h = \frac{1}{|\xi_h|}; \tag{2.21}$$

avremo ovviamente:

$$|\varrho_h \xi_h| = 1 \tag{2.22}$$

e per le (5.16), (5.17) di [11]:

$$\varrho_h \xi_h \in \mathcal{F} \delta_{\varrho_h} E - \mathcal{F}^* \delta_{\varrho_h} E. \tag{2.23}$$

Fissiamo ora per ogni h una rotazione ω_h tale che:

$$\omega_h \varrho_h \xi_h = (0, 0, \dots, 0, 1); \tag{2.24}$$

allora avremo, per le (2.11), (2.12):

$$(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{F}_e \omega_h \delta_{\varrho_h} E - \mathcal{F}^* \omega_h \delta_{\varrho_h} E \tag{2.25}$$

e quindi la (2.16).

Dalla (2.18), per la (2.8) e per la (5.13) di [11] segue:

$$\psi(\omega_h \delta_{\varrho_h} E, C_{\tau\varrho_h}) = 0 \tag{2.26}$$

e quindi, essendo:

$$\tau\varrho_h > h \tag{2.27}$$

per la (3.5) di [11] vale la (2.17). c.v.d.

TEOREMA X. — *Dalla successione* $\{\omega_h \delta_{\varrho_h} E\}$ *considerata nel teorema precedente può estrarsi una successione subordinata convergente* $\mathcal{L}_{loc}$ *verso un insieme* L *tale che* L *verifichi le seguenti condizioni:*

$$(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{F}_e L - \mathcal{F}^* L \tag{2.28}$$

$$\psi(L, C_\varrho) = 0; \qquad \forall \varrho > 0. \tag{2.29}$$

Inoltre L è equivalente ad un cono di vertice nell'origine, cioè:

$$\text{mis}\,(\delta_\varrho L - L) = 0\,; \qquad \forall\, \varrho > 0. \tag{2.30}$$

DIMOSTRAZIONE. — Per il teorema VI sarà possibile estrarre dalla successione $\{\omega_h\, \delta_{\varrho_h} E\}_h$ una successione subordinata convergente $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ verso un insieme L. Allora, dal Teorema VII e VIII cui ci si può ricondurre con una semplice traslazione, e dalle (2.16), (2.17) seguono la (2.29) e la (2.28).

Per la (1.42) si ha poi, ricordando le (5.15) di [11] e la (2.10):

$$\int_{C_t} |\, D\varphi\,(x, L)\,| = \lim_{z \to 0} z^{-n+1} \int_{C_z} |\, D\varphi\,(x, E)\,| \tag{2.31}$$

per quasi ogni t e quindi, per il Teorema X di [11] si ha per quasi tutti i valori di ϱ, r:

$$\int_{\mathcal{F}C} \left|\, \varphi\left(\frac{r}{\varrho}\, x, L\right) - \varphi\,(x, L) \right| dH_{n-1} = 0. \tag{2.32}$$

Ciò equivale a dire che L è equivalente ad un cono con il vertice nell'origine. c.v.d.

TEOREMA XI. — *Dato un insieme L di perimetro localmente finito verificante le condizioni* (2.28), (2.29), (2.30) *ed una successione di numeri positivi $\{\varrho_h\}_h$ tale che $\varrho_h \to +\infty$, possiamo estrarre dalla successione:*

$$\{\delta_{\varrho_h} \tau_{(0,0,\dots,-1)} L\}_h \tag{2.33}$$

una successione subordinata convergente localmente in media verso un cilindro M avente generatrici parallele all'asse delle x_n, con le condizioni:

$$0 \in \mathcal{F}_e M - \mathcal{F}^* M \tag{2.34}$$

$$\psi\,(M, C_\varrho) = 0, \qquad \forall\, \varrho. \tag{2.35}$$

DIMOSTRAZIONE. — Posto:

$$L_h = \delta_{\varrho_h} \tau_{(0,0,\dots,0,-1)} L, \tag{2.36}$$

le condizioni (2.28) per le (5.8), (5.9) e per le (5.16), (5.17) di [11] si traducono nella:

$$(0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{F}_e L_h - \mathcal{F}^* L_h \tag{2.37}$$

mentre dalla (2.29) segue per la (3.5) di [11]:

$$\psi(L, K) = 0 \tag{2.38}$$

per ogni compatto K e quindi per le (5.5), (5.13) di [11]:

$$\psi(L_h, K) = 0 \tag{2.39}$$

per ogni h e per ogni compatto K.

Per le (2.36), (2.39) e per il Teorema VI, si può estrarre una successione $\{L'_h\}_h$ subordinata alla (2.33) convegente localmente in media verso un insieme M; sarà:

$$L'_h = \{\delta_{\varrho'_h} \tau_{(0, 0, \dots, 0, -1)} L\}_h \tag{2.40}$$

con:

$$\lim_{h \to \infty} \varrho'_h = +\infty. \tag{2.41}$$

Essendo per ipotesi L un cono di vertice nell'origine, per ogni $\alpha > 0$ vale quasi ovunque la

$$\varphi(\alpha x, L) = \varphi(x, L). \tag{2.42}$$

Posto:

$$\eta = (0, 0, \dots, 0, 1) \tag{2.43}$$

avremo:

$$\varphi[\varrho'_h(\alpha x - \eta), \delta_{\varrho'_h} \tau_{(-\eta)} L] = \varphi[\varrho'_h(x - \eta), \delta_{\varrho'_h} \tau_{(-\eta)} L]. \tag{2.44}$$

Se ora poniamo:

$$\varrho'_h(x - \eta) = \xi \tag{2.45}$$

avremo:

$$\varrho'_h(\alpha x - \eta) = \alpha\xi + \varrho'_h(\alpha - 1)\eta. \tag{2.46}$$

Sostituendo nella (2.44) si ottiene:

$$\varphi[(\alpha\xi + \varrho'(\alpha - 1)\eta), L'_h] = \varphi(\xi, L'_h). \tag{2.47}$$

Essendo α un numero positivo arbitrario, fissato $\beta > 0$ si ponga:

$$\varrho_h' (\alpha - 1) = \beta \tag{2.48}$$

cioè:

$$\alpha = \frac{\beta}{\varrho_h'} + 1 . \tag{2.49}$$

Sostituendo questo valore nella (2.47) si ha:

$$\varphi \left(\left[\left(\frac{\beta}{\varrho_h'} + 1 \right) \xi + \beta \eta \right], \ L_h' \right) = \varphi (\xi, \ L_h'). \tag{2.50}$$

Passando al limite nella (2.50) per $h \to \infty$ si ha:

$$\varphi \left[(\xi + \beta \eta), \ M \right] = \varphi (\xi, \ M) \tag{2.51}$$

e questo prova che M è equivalente ad un cilindro con le generatrici parallele all'asse delle x_n.

Per provare le (2.34), (2.35) basta tenere presente le (2.37), (2.38) e ricordare i teoremi VII ed VIII. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] - R. CACCIOPPOLI: *Misura ed integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, VIII, vol. 12, fasc. 1-2, 1952.

[2] - E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.* Annali di Matematica, Serie IV, Vol. 36, (1954).

[3] - E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.* Ricerche di Matematica. Vol. IV, (1955).

[4] - E. DE GIORGI: *Complementi alla teoria della misura $(n-1)$-dimensionale in uno spazio n-dimensionale.* Seminario di Matematica. Scuola Normale Superiore di Pisa (1960-61).

[5] - E. DE GIORGI: *Frontiere orientate di misura minima.* Seminario di Matematica. Scuola Normale Superiore di Pisa (1960-61).

[6] - H. FEDERER: *Measure and area.* Bull. of the Am. Math. Soc. Vol. 58 (1952), pag. 306-378.

[7] - H. FEDERER: *A note on the Gauss-Green Theorem.* Proc. of the Am. Math. Soc. Vol. 9, (1958).

[8] - H. FEDERER-W. H. FLEMING: *Normal and Integral Currents.* Annals of Mathematics, Vol. 72, n^0 3, (1960).

[9] - E. R. REIFENBERG: *The Plateau Problem.* Acta Mathematica, 104: 1, 2-(1960).

[10] - W. H. FLEMING: *On the oriented Plateau Problem.* Amer. Math. Soc. Vol. 8, n^0 3, (1961).

[11] - D. TRISCARI: *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, (1963).