

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. CAPRIZ

## **Sulle vibrazioni di aste rotanti**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 17, n° 1-2 (1963), p. 31-42*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1963\\_3\\_17\\_1-2\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_1-2_31_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE VIBRAZIONI DI ASTE ROTANTI

G. CAPRIZ (Pisa) (\*)

## 1. — Introduzione.

Alcuni aspetti della dinamica di un albero ruotante su rapporti lubrificati sono stati discussi in un precedente lavoro dallo stesso titolo <sup>(1)</sup>. Ivi s'erano considerate proprietà sia delle vibrazioni forzate (dovute a imperfetto bilanciamento) sia delle vibrazioni autoeccitate (nelle quali il lubrificante è l'agente a cui è dovuto il trasferimento d'energia dal moto di rotazione a quello di vibrazione).

Il caso cui s'era maggiormente prestata attenzione era quello di un albero ad asse verticale, ma naturalmente in pratica ha maggiore interesse il caso in cui l'asse è orizzontale. Nel primo caso si presenta la seguente circostanza semplificatrice: in una rotazione stazionaria di regime perni e cuscinetti si possono pensare coassiali.

Tale condizione geometrica non può sussistere nel secondo caso; il peso dell'albero deve essere equilibrato da una opportuna distribuzione di pressioni nel lubrificante, distribuzione che può essere generata solo quando la posizione del perno sia eccentrica. Da un punto di vista analitico la complessità del problema è accresciuta allora perchè in genere non si può ritenere che la pellicola di lubrificante riempia tutto il gioco tra perno e cuscinetto; intervengono fenomeni di cavitazione.

Per ottenere alcuni risultati di massima tale intervento era stato escluso nel lavoro citato, § 6. Ma le conclusioni così raggiunte non si possono ritenere completamente soddisfacenti.

Qui la questione è ripresa, per il caso di un albero con perni corti. È il caso in cui si può indicare senza ambiguità una soluzione asintotica

---

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi Calcolatrici Elettroniche.

(1) On the Vibrations of Shafts Rotating on Lubricated Bearings, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 50 (1960), 223-248, e anche *Mechanika* 4, 68 (1961), 47-66.

per l'equazione di Reynolds della teoria della lubrificazione, assumendo l'ipotesi di cavitazione completa, e quindi si possono ricavare delle espressioni esplicite per le forze  $\mathbf{F}$  che agiscono sui perni e sono dovute alla pressione esistente nel lubrificante.

Il risultato che si vuole ottenere è una regola di stabilità che indichi le velocità massime di rotazione permesse ad un albero quando si vogliono evitare autooscillazioni di tipo assegnato. Come spesso accade nello studio di problemi concreti, la complessità delle espressioni analitiche in gioco impedisce una completa discussione esplicita.

Però condizioni necessarie per la stabilità si possono ottenere partendo da un'osservazione, che ci pare chiarisca anche il modo di operazione del sistema sotto condizioni critiche (condizioni cioè che separano la regione di stabilità da quella di instabilità).

In quelle condizioni è da presumere che esistano moti naturali durante i quali l'energia totale dell'albero rimane costante e quindi il sistema di forze agenti sull'albero simula un sistema di forze conservativo. La ricerca di moti del tipo detto è elementare quando (nell'intento di studiare solo le oscillazioni incipienti) si linearizzano le espressioni delle componenti di  $\mathbf{F}$  nell'intorno delle condizioni di regime.

## 2. Alcune osservazioni sul comportamento del lubrificante nei cuscinetti.

### a) *Condizioni di regime.*

La distribuzione della pressione  $p$  nel lubrificante dei cuscinetti soddisfa all'equazione di Reynolds (cfr., ad es., lavoro citato in <sup>(1)</sup>, § 2). Qui non ci attardiamo a riscrivere quell'equazione in generale perchè ci vogliamo interessare esclusivamente del caso asintotico di cuscinetti molto corti; in quel caso  $p$  è soluzione dell'equazione ordinaria

$$(2.1) \quad \frac{d}{dz} \left[ h^3 \frac{dp}{dz} \right] = 6\eta [2 \dot{e} \cos \alpha + (2 \dot{\psi} - \omega) e \sin \alpha],$$

colle condizioni al contorno

$$(2.2) \quad [p(\alpha, z)]_{z = \pm \frac{b}{2}} = 0.$$

Qui le notazioni sono quelle del lavoro citato:  $O$  centro,  $R$  raggio,  $b$  lunghezza,  $c$  gioco radicale,  $e$  eccentricità,  $\omega$  velocità angolare del perno;  $\eta$  viscosità del lubrificante;  $(\Omega, \varrho, \alpha, z)$  sistema di coordinate cilindriche con l'origine  $\Omega$  nel centro del cuscinetto, l'asse  $z$  lungo l'asse del cuscinetto e l'anomalia  $\alpha$  contata nel senso di rotazione in modo tale che lo spessore  $h$  della pellicola di lubrificante sia espresso da  $h = c + e \cos \alpha$ ;  $\psi$  angolo (in  $0, 2\pi$ ) formato da  $\Omega O$  con una direzione fissa (ad es. la verticale discendente passante per  $\Omega$ ).

Le (2.1), (2.2) hanno per soluzione

$$(2.3) \quad p = 3\eta \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right) \frac{(\omega - 2\dot{\psi}) e \operatorname{sen} \alpha - 2\dot{e} \cos \alpha}{(c + e \cos \alpha)^3}.$$

Cominciamo col discutere questa espressione nel caso  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\dot{e} = 0$ , cioè in condizioni di regime quando la posizione del centro  $O$  del perno rimane fissa (ma, in genere, non coincide con  $\Omega$ :  $e \neq 0$ ). Allora l'espressione di  $p$  si semplifica in

$$(2.4) \quad p = 3\eta \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right) \frac{\overline{\omega e \operatorname{sen} \alpha}}{(c + \overline{e \cos \alpha})^3}$$

[ $\overline{e}$ , valore costante dell'eccentricità]. Questa formula non può applicarsi per tutti i valori di  $\alpha$ , perchè essa predice valori negativi per la pressione (esattamente valori di  $p$  più bassi del valore ambiente) per  $\pi < \alpha < 2\pi$ . Tali valori non sono mai stati trovati sperimentalmente; si è osservato invece che la pellicola di lubrificante presenta cavità particolarmente estese in cuscinetti corti.

Difficoltà si possono evitare ammettendo che la (2.4) sia valida nell'intervallo ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ), e che la pressione si possa ritenere nulla in ( $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ ). L'ipotesi conduce alla seguente specificazione del risultante della pressione agente sul perno:

(1) componente nella orientazione di  $\Omega O$

$$(2.5) \quad F_e = \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_0^\pi p \cos \alpha d\alpha = -Rb^3 \omega \eta \frac{\overline{e^2}}{(c^2 - \overline{e^2})^2};$$

(2) componente nella orientazione normale ad  $\Omega O$

$$(2.6) \quad F_n = \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_0^\pi p \operatorname{sen} \alpha d\alpha = \frac{\pi R b^3 \omega \eta}{4} \frac{\overline{e}}{(c^2 - \overline{e^2})^{3/2}}.$$

La forza  $\mathbf{F}$  ( $F_e, F_n$ ) deve essere tale da equilibrare il carico  $W$  sorretto dal perno (una porzione del peso dell'albero);  $W$  essendo orientato come la verticale discendente si hanno le relazioni

$$(2.7) \quad W = \frac{\pi}{4} R b^3 \omega \eta \frac{\bar{e} \sqrt{c^2 - \bar{e}^2 + \frac{16}{\pi^2} \bar{e}^2}}{(c^2 - \bar{e}^2)^2}, \quad \text{tg } \bar{\psi} = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{e}^2}}{\bar{e}}.$$

La seconda formula rende chiaro che il luogo descritto da  $O$  in condizioni di regime al crescere del carico ha la forma di una semicirconferenza un po' schiacciata, tracciata nel piano medio del cuscinetto con estremi sul « diametro » di lunghezza  $c$ , « diametro » spiccato verticalmente da  $\Omega$ . Questo risultato trova numerose conferme qualitative sperimentali.

(b) *Caso generale.*

I risultati richiamati nel § 2 (a) servono da opportuna introduzione allo studio del caso generale, caso nel quale  $p$  è espressa dalla formula (2.3). Anche tale formula (2.3), se fosse intesa valida per tutti i valori di  $\alpha$ , predirebbe l'intervento di valori negativi per  $p$ . Ma la difficoltà si può evitare assumendo, parallelamente a quanto si è detto nel § 2 (a), che la pellicola di lubrificante si estenda solamente in quella parte del gioco tra perno e cuscinetto ove la (2.3) predice valori non negativi per  $p$ . Se si pone

$$(2.8) \quad \alpha_1 = \arctan \frac{2 \dot{e}}{(\omega - 2\dot{\psi})e} \quad (2)$$

la regione in questione è individuata dalle disuguaglianze

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \pi + \alpha_1.$$

Ciò indica che la pellicola s'inizia a monte o a valle (nel senso della corrente) del punto ove lo spessore è massimo a seconda che  $\alpha_1$  è negativa o positiva.

Le componenti della forza agente sul perno sono espresse dagli integrali

$$(2.9) \quad F_e = \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} p \cos \alpha R d\alpha, \quad F_n = \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} p \sin \alpha R d\alpha;$$

(<sup>2</sup>) Precisamente  $\alpha_1$  va scelto in modo che

$$\cos \alpha_1 = \frac{e(\omega - 2\dot{\psi})}{[(\omega - 2\dot{\psi})^2 e^2 + 4\dot{e}^2]^{1/2}}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{2\dot{e}}{[(\omega - 2\dot{\psi})^2 e^2 + 4\dot{e}^2]^{1/2}}.$$

ossia da

$$F_e = \frac{\eta R b^3}{2c^3} \{(\omega - 2\dot{\psi}) e g_1 - 2 \dot{e} g_2\}, \quad (2.10)$$

$$F_n = \frac{\eta R b^3}{2c^3} \{(\omega - 2\dot{\psi}) e g_3 - 2 \dot{e} g_4\},$$

con

$$g_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} \frac{\text{sen } \alpha \cos \alpha d\alpha}{(1 + a \cos \alpha)^3} = \frac{-2a \cos^3 \alpha_1}{[1 - a^2 \cos^2 \alpha_1]^2}, \quad (2.11)$$

$$g_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{(1 + a \cos \alpha)^3} = \frac{a \text{sen } \alpha_1 [3 + (2 - 5a^2) \cos^2 \alpha_1]}{(1 - a^2)^2 (1 - a^2 \cos^2 \alpha_1)^2} +$$

$$+ \frac{1 + 2a^2}{(1 - a^2)^{5/2}} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a \cdot \text{sen } \alpha_1}{\sqrt{1 - a^2}} \right),$$

$$g_3 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} \frac{\text{sen}^2 \alpha d\alpha}{(1 + a \cos \alpha)^3} = \frac{a \text{sen } \alpha_1 (1 - 2 \cos^2 \alpha_1 + a^2 \cos^2 \alpha_1)}{(1 - a^2) (1 - a^2 \cos^2 \alpha_1)^2} +$$

$$+ (1 - a^2)^{-3/2} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a \cdot \text{sen } \alpha_1}{\sqrt{1 - a^2}} \right);$$

qui si è posto  $a = e/c$ .

Espressioni esplicite di  $F_e$ ,  $F_n$  si possono ottenere introducendo, ovunque appare  $\alpha_1$ , la definizione (2.8) in termini di  $e$ ,  $\dot{e}$ ,  $\omega$ ,  $\dot{\psi}$ . Ad esempio

$$g_1 = \frac{-2c^3 e^4 (\omega - 2\dot{\psi})^3 [(\omega - 2\dot{\psi})^2 e^2 + 4\dot{e}^2]^{1/2}}{[(c^2 - e^2) e^2 (\omega - 2\dot{\psi})^2 + 4\dot{e}^2 c^2]^2}.$$

Ma tali espressioni sono piuttosto complesse e non si intende di usarle in questo lavoro. Come già si è accennato nell'introduzione si vogliono qui solo studiare oscillazioni dell'albero durante le quali il centro del perno rimane così vicino alla sua posizione di regime da giustificare la linearizzazione degli incrementi di  $F_e$ ,  $F_n$  sopra i loro valori di regime.

Più precisamente, posto  $A = \frac{\bar{e}}{c}$ ,  $\psi = \bar{\psi} + \varphi$ ,  $a = \frac{e}{c} = A + \varepsilon$ ,  $\tau = \omega t$ , e indicando con un apice la derivazione rispetto a  $\tau$ , ci si propone di esaminare casi nei quali, nelle formule (2.10), si possono trascurare infinitesimi

del secondo ordine rispetto ad  $\varepsilon, \varepsilon', \varphi, \varphi'$ , presi come infinitesimi del primo ordine. Del primo ordine risulta essere  $\alpha_1$  e di più gli integrali (2.9) differiscono per infinitesimi del secondo ordine dagli analoghi in cui si pongono 0 e  $\pi$  anzichè  $\alpha_1$  e  $\pi + \alpha_1$  come limiti per la variabile di integrazione  $\alpha$ .

Si tratta dunque di linearizzare in termini di  $\varepsilon, \varepsilon', \varphi'$  le espressioni

$$-\frac{Rb^3 \eta \omega}{c^2} \left\{ \frac{a^2}{(1-a^2)} \left( 1 - \frac{2\dot{\psi}}{\omega} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{\dot{a}(1+2a^2)}{\omega(1-a^2)^{5/2}} \right\} + \frac{Rb^3 \eta \omega}{c^2} \frac{A^2}{(1-A^2)^2},$$

$$\frac{Rb^3 \eta \omega}{2c^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{2\dot{\psi}}{\omega} \right) \frac{a}{(1-a^2)^{3/2}} + \frac{4a\dot{a}}{\omega(1-a^2)^2} \right\} - \frac{\pi Rb^3 \eta \omega}{4c^2} \frac{A}{(1-A^2)^{3/2}}.$$

Anzi, conviene linearizzare esplicitamente, piuttosto che  $F_e, F_n$ , le componenti  $F_1, F_2$  di  $\mathbf{F}$  su un sistema di riferimento fisso  $\mathcal{C}: (\Omega, x_1, x_2)$  con l'origine nella posizione  $\bar{\Omega}$  di regime per  $O$  e l'asse  $x_1$  uscente da  $\bar{\Omega}$  nello orientamento di  $\Omega\bar{\Omega}$ :

$$F_1 = F_e - F_n \varphi, \quad F_2 = F_e \varphi + F_n,$$

a parte infinitesimi d'ordine superiore.

Il risultato è il seguente

$$(2.12) \quad F_1 = -W_1 - H(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_1' - a_4 \xi_2'),$$

$$F_2 = -W_2 - H \left( -\frac{a_3}{2} \xi_1 + \frac{a_4}{2} \xi_2 - a_4 \xi_1' + 2a_2 \xi_2' \right),$$

ove

$$(2.13) \quad W_1 = \frac{Rb^3 \omega \eta}{c^2} \frac{A^2}{(1-A^2)^2}, \quad W_2 = -\frac{\pi}{4} \frac{Rb^3 \omega \eta}{c^2} \frac{A}{(1-A^2)^{3/2}}$$

sono le componenti del carico agente sul perno,

$$H = \frac{Rb^3 \omega \eta}{c^2}$$

è una costante colle dimensioni di una forza,

$$\xi_1 = \frac{x_1}{c}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{c}$$

sono coordinate non dimensionali rispetto a  $\mathcal{C}$ , ed  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sono le costanti

$$(2.14) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2A(1+A^2)}{(1-A^2)^3}, & a_2 &= \frac{\pi}{4} (1-A^2)^{-3/2}, \\ a_3 &= \frac{\pi}{2} \frac{1+2A^2}{(1-A^2)^{5/2}}, & a_4 &= 2A(1-A^2)^{-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. Alcune proprietà speciali della forza $F$ .

Per aprire la strada ai ragionamenti sulla stabilità di un albero ruotante annunciati nell'introduzione, in questo paragrafo ci soffermiamo ad indicare alcune proprietà delle porzioni linearizzate  $f_1, f_2$  di  $F_1, F_2$ .

Precisamente facciamo vedere che esistono delle traiettorie ellittiche  $\mathcal{C}$  per  $O$  attorno ad  $\bar{\Omega}$ , tali che lungo esse la forza  $f \equiv (f_1, f_2)$  si può simulare con una forza di richiamo elastica sicchè, con una opportuna scelta della costante  $K$ , valgono sulle  $\mathcal{C}$  le identità

$$(3.1) \quad \begin{aligned} -cK \xi_1 &= -H(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_1' - a_4 \xi_2'), \\ -cK \xi_2 &= -H\left(-\frac{a_3}{2} \xi_1 + \frac{a_4}{2} \xi_2 - a_4 \xi_1' + 2a_2 \xi_2'\right). \end{aligned}$$

La classe delle  $\mathcal{C}$  che si prende in considerazione è quella individuata dalle equazioni parametriche:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= c_1 \cos \nu\tau + c_2 \sin \nu\tau, \\ \xi_2 &= c_3 \cos \nu\tau + c_4 \sin \nu\tau, \end{aligned}$$

ove  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $\nu$  sono costanti opportune. Introducendo le (3.2) nella (3.1) si riconosce che quelle identità sussistono allora soltanto che  $c_1, c_2, c_3, c_4$  sono la soluzione di un sistema di equazioni lineari omogenee la cui matrice dei coefficienti è

$$(3.3) \quad \begin{vmatrix} z - a_1 & -a_3 \nu & -a_2 & a_4 \nu \\ a_3 \nu & z - a_1 & -a_4 \nu & -a_2 \\ a_3/2 & a_4 \nu & z - (a_4/2) & -2a_2 \nu \\ -a_4 \nu & a_3/2 & 2a_2 \nu & z - (a_4/2) \end{vmatrix}$$

ove, per brevità, si è posto  $z = cK/H$ .

(3) Si veda il lavoro: R. HOLMES « *The vibration of a rigid shaft on short sleeve bearings* ». J. mech. enging Sci., 2 (1960), 337-341, ed anche *Discussion on five papers on bearing stability* nei Proc. Inst. Mech. Engrs 176 (1962), 591-593.



Affinchè la classe delle  $\mathcal{C}$  non sia vuota è necessario e sufficiente che si possan trovare dei valori di  $z$  e  $\nu$  che annullino il determinante  $\Delta$  della matrice (3.3). Lo sviluppo di  $\Delta$  sembra a prima vista voluminoso; ma alcune trasformazioni elementari consentono di ridurlo alla somma di due quadrati

$$\Delta = 4\nu^2 [(2a_2 + a_3)z - a_2(2a_1 + a_4)]^2 + \\ + [(z - a_1)(2z - a_4) + a_2 a_3 - 2\nu^2(2a_2 a_3 - a_4^2)]^2.$$

Se si trascura la circostanza banale  $\nu = 0$  se ne deduce che  $z, \nu^2$  devono essere scelte così

$$z = \frac{a_2(2a_1 + a_4)}{2a_2 + a_3}, \quad \nu^2 = \frac{(z - a_1)(2z - a_4) + a_2 a_3}{2(2a_2 a_3 - a_4^2)};$$

più esplicitamente devono valere le condizioni

$$(3.4) \quad K = \frac{H}{c} \frac{A(3 + A^2)}{(1 - A^2)^2(2 + A^2)}, \\ \nu^2 = \frac{\frac{\pi^2}{4}(1 + 2A^2)(1 - A^2)(2 + A^2)^2 - 4A^2(1 + 8A^2 + 3A^4)}{(1 - A^2)(2 + A^2)^2(\pi^2 + 2\pi^2 A^2 - 16A^2)}.$$

La prima delle (3.4) definisce per ogni  $A$  in  $(0,1)$  un valore (positivo) di  $K$  e  $K$  è crescente con  $A$  (da 0 a  $+\infty$  per  $A$  tra 0 ed 1) perchè si può anche scrivere

$$K = \frac{H}{c} \frac{A}{1 - A^2} \left[ \frac{1}{1 - A^2} + \frac{1}{2 - A^2 - A^4} \right];$$

invece non è affatto assicurato che il membro destro della seconda della (3.4) sia ovunque non negativo, come è richiesto perchè  $\nu^2$  sia reale. Anzi si riconosce subito che tale membro è negativo in un intorno di 1; è facile d'altra parte controllare anche che  $\nu^2$  assume il valore 1/4 per  $A = 0$  e valori leggermente maggiori di 1/4 in un intorno dello zero [ove  $\nu^2 \sim \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{12}{\pi^2} A^2 \right)$ ]. Un grafico di  $\nu(A)$  è tracciato in Fig. 1, facendo uso di una tabellazione numerica di quella funzione.

Se ne conclude che orbite ellittiche del tipo desiderato esistono quando il valore del rapporto di eccentricità  $A$  in condizioni di regime sia compreso in un intervallo appropriato  $(0, A_*)$  con  $A_* \sim 0,755_5$ .

Come apparirà dai paragrafi seguenti noi interpreteremo l'esistenza di valori reali di  $K, \nu$  come un indice della esistenza di condizioni di transizione tra stabilità ed instabilità. Reciprocamente il fatto che la seconda delle (3.4) non fornisca un valore reale per  $\nu$  quando  $A > A_*$  sarà invece preso come un indice della permanenza della stabilità.

#### 4. Dinamica di un albero orizzontale rotante su cuscinetti lubrificati.

Per semplicità consideriamo, come nel lavoro citato, solo il caso di un albero di sezione circolare, uniforme, tutto contenuto tra i perni; di quel lavoro manteniamo anche le notazioni:  $A_c$  area della sezione normale dell'albero,  $(\mu/g) A_c$  densità per unità di lunghezza della direttrice,  $EI$  rigidità a flessione. I due supporti sono considerati identici, tali che la retta che congiunge i loro centri  $\Omega_1, \Omega_2$  è orizzontale. Orizzontale risulterà anche essere la retta congiungente i centri  $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$  dei perni in condizioni di regime.

Converrà ora assumere un sistema di riferimento fisso  $\mathcal{S}$  con l'asse  $x_3$  lungo  $\bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2$  e gli assi  $x_1, x_2$  definiti relativamente al primo cuscinetto come nel § 2. Rispetto ad  $\mathcal{S}$  le equazioni dinamiche per l'albero sono

$$(4.1) \quad \frac{\mu A_c}{g} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_3^4} = n_i \mu A_c \quad (i = 1, 2),$$

$$[n_1 = \cos \bar{\psi}, n_2 = -\sin \bar{\psi}] \quad \text{per } 0 \leq x_3 \leq L,$$

( $u_i$ , componenti dello spostamento;  $L$ , lunghezza dell'albero:  $L = |\Omega_1 \Omega_2|$ ),  
colle condizioni al contorno:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} = 0; \quad \text{per } x_3 = 0 \text{ e } x_3 = L;$$

$$(4.2) \quad EI \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_3^3} = F_i \quad \text{per } x_3 = 0,$$

$$EI \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_3^3} = -F_i \quad \text{per } x_3 = L.$$

Lo spostamento  $u_i^*$  dei punti della direttrice dell'albero dovuto al peso si può separare nelle (4.1), (4.2) giungendo così ad equazioni delle quali la soluzione nulla rappresenta condizioni di regime; posto  $v_i = u_i - u_i^*$ , le

equazioni (4.1), (4.2) danno per  $v_i$  le condizioni

$$(4.3) \quad \frac{A_c}{gEI} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v_i}{\partial x_3^4} = 0, \quad \text{per } 0 \leq x_3 \leq L;$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} = 0, \quad \text{per } x_3 = 0, x_3 = L;$$

$$(4.4) \quad EI \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_3^3} = F_i + W_i, \quad \text{per } x_3 = 0;$$

$$EI \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_3^3} = -(F_i + W_i) \quad \text{per } x_3 = L.$$

Nelle ultime due condizioni, le  $W_i$  sono le componenti del vettore che rappresenta metà del peso dell'albero (cioè il carico su ciascun cuscinetto):

$$(W_1^2 + W_2^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \mu A_c L.$$

Le (4.3), (4.4) ammettono, naturalmente, una soluzione banale  $v_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2$ ), perchè le somme  $F_i + W_i$  si annullano quando i due punti  $O_i$  coincidano rispettivamente cogli  $\bar{Q}_i$ . La stabilità di tale soluzione di regime dipende dal carattere delle soluzioni non banali.

Ha particolare importanza in proposito lo studio di moti conseguenti circostanze iniziali differenti di molto poco dalle circostanze di regime. Si può presumere che tale studio si possa eseguire usando nelle (4.4) le espressioni linearizzate  $f_i + W_i$  ricavabili dalle (2.12). Entro queste circostanze la soluzione delle (4.3), (4.4) va pensata in generale come una somma di termini del tipo

$$v_{i,n} = e^{\mu_n \tau} [c_{in}(x_3) \cos \nu_n \tau + d_{in}(x_3) \sin \nu_n \tau], \quad i = 1, 2;$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

ove  $c_{in}$ ,  $d_{in}$  sono somme di funzioni trigonometriche ed iperboliche e  $\mu_n + i\nu_n$  è una delle soluzioni di una opportuna equazione trascendente che non occorre qui scrivere esplicitamente, ma in riguardo alle quale è importante di fare la seguente osservazione: nell'equazione interviene, assieme a vari altri, il parametro  $\omega$  (attraverso  $H$ , anzi attraverso  $\beta = \frac{HL^2}{EI}$ ). A noi interessa il modo di variare di  $\mu_n(\beta)$ ,  $\nu_n(\beta)$  ed in particolare interessa di stabilire le condizioni sotto le quali  $\mu_n$  può diventare positivo; sotto tali condizioni nell'albero si possono sviluppare autoscillazioni di ampiezza crescente, secondo l'ennesimo modo.

Condizioni critiche (cioè rappresentanti il limite di stabilità) per l' $n$ -esimo modo sono quelle nelle quali  $\mu_n$  risulta esattamente nullo. Allora l'albero può muoversi in tale modo secondo oscillazioni di ampiezza costante durante le quali ciascun punto della direttrice (ed in particolare i centri dei perni) descrive un'ellisse; dunque l'albero simula il comportamento di un sistema conservativo.

D'altra parte tale simulazione si può presentare, ad esempio, quando siano verificate le (3.1); allora l'albero si comporta come se fosse sostenuto su supporti flessibili di rigidità  $K$  e vibrasse con velocità uguale a  $\nu$  volte la velocità di rotazione. Detta  $\omega_n^{(K)}$  la velocità critica sull' $n$ -esimo modo di un albero ruotante su cuscinetti di rigidità  $K$  la simulazione in questione può avvenire quando la velocità di rotazione soddisfi alla relazione

$$\omega = \frac{\omega_n^{(K)}}{\nu}.$$

Ne concludiamo che: *condizione necessaria affinché l'albero non presenti autoscillazioni è che la velocità di rotazione non ecceda  $\omega_1^{(K)}/\nu$ , ove  $K$  e  $\nu$  sono dati in funzione del rapporto di eccentricità  $A$  dalle (3.4).*

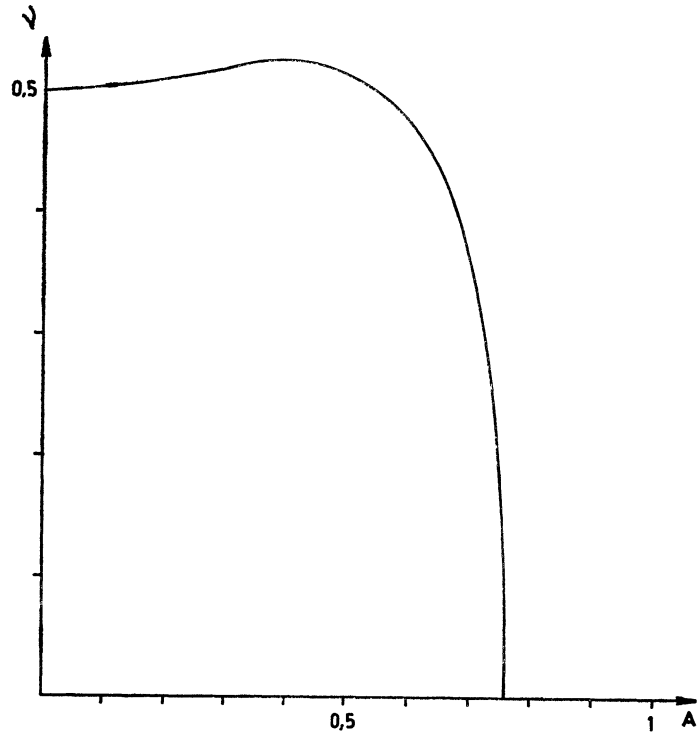
Val la pena di ricordare che la prima velocità critica  $\omega_1^{(K)}$  cresce da zero a  $\frac{\pi^2}{L^2} \left( \frac{gEI}{\mu A_c} \right)^{1/2}$  al crescere di  $K$  da 0 a  $+\infty$ . Quando si tenga conto del modo di variare di  $K$  e  $\nu$  con  $A$  si conclude che l'albero è instabile già a velocità molto basse se il suo peso è piccolo [e quindi  $A$  vicino a zero; si confronti la prima delle (2.7)] e che invece le caratteristiche di stabilità migliorano rapidamente al crescere del carico. Anzi è da presumere che per assi molto pesanti la stabilità sia assicurata entro un intervallo molto largo di velocità: si noti che la transizione qui a lungo discussa non può avere luogo se  $A$  eccede il valore  $A_*$  citato alla fine del numero 3.

Insistiamo infine sulla circostanza che la condizione trovata è solo necessaria per la stabilità. Infatti l'albero può simulare un sistema conservativo anche quando siano soddisfatte condizioni più larghe di quelle sotto le quali sono valide le (3.1); basta che  $f_1, f_2$  siano del tipo

$$b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 - c \xi_2'; \quad b_2 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c \xi_1'$$

(forza elastica più forza giroscopica).

Qui si è preferito limitarsi al caso (3.1) per dare un risultato semplice ed espressivo anche se parziale.



## SUMMARY

An earlier study [see footnote (1)] had shown that transition between stable and unstable behaviour for a heavy horizontal shaft (rotating on lubricated bearings) occurred when conditions were realized which permitted elliptical whirls of the shaft such that there was no increase of the value of the force due to the lubricant and acting on the journal, over the steady state value: in a sense the shaft was then floating freely on the bearing with no interference from the supports (except in so far as they provided the force equilibrating the weight); as a consequence rules of transition involved the natural frequencies of the free shaft.

These results were obtained under the assumption of complete lubrication; if cavitation occurs in the bearings, conditions change. In the present paper it is argued that at transition the excess of the value of the lubricant forces over the steady state value is then such that the excess force simulates an elastic restraining force; as a consequence rules of transition involve the natural frequencies of the shaft resting on elastic supports of appropriate rigidity.