

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. CAMPANATO

Proprietà di taluni spazi di Banach connessi con la teoria dell'elasticità

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16, n° 2 (1962), p. 121-142

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_2_121_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETÀ DI TALUNI SPAZI DI BANACH CONNESSI CON LA TEORIA DELL'ELASTICITÀ

di S. CAMPANATO (a Pisa) (*)

In questa nota prendo in esame, sotto una forma un pò più generale, taluni spazi di Banach introdotti in precedenti lavori (cfr. [2] parte I e II e il n. 1) ⁽¹⁾ costituiti da vettori definiti su un aperto limitato Ω di R^n ed ivi sommabili con una certa potenza insieme ad opportune combinazioni lineari delle loro derivate prime. Questi spazi intervengono nello studio dei problemi al contorno relativi ad una classe di operatori differenziali che, nei lavori citati, ho chiamato « del tipo dell'elasticità »-

In opportune ipotesi per l'aperto Ω (ipotesi di cono usuale o di cono generalizzata) dimostro la validità di certe maggiorazioni puntuali per i vettori degli spazi sopra detti mediante opportuni potenziali (lemmi [I.2] [I.3]) dalle quali si possono dedurre, ad esempio, delle proprietà di inclusione per gli spazi medesimi.

La tecnica usata per dimostrare quelle maggiorazioni si rivela utile anche per studiare altre proprietà di quegli spazi e per dimostrare talune maggiorazioni integrali che interessano i problemi al contorno cui ho sopra accennato.

1. — Sia Ω un aperto limitato dello spazio euclideo R^n ($n \geq 2$) di frontiera $\partial\Omega$ e chiusura $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$). Indichiamo con $C^1(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$ con le loro derivate prime, e con $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ l'insieme dei vettori $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ad n componenti tali che $u_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

$L^q(\Omega)$ è lo spazio delle classi di funzioni (misurabili) di potenza q -esima sommabile in Ω e $\| \cdot \|_{L^q(\Omega)}$ l'usuale norma in $L^q(\Omega)$. Con $[L^q(\Omega)]^n$ indi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N. 9 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1961-62.

(1) I numeri fra [] si riferiscono alla bibliografia finale.

cheremo lo spazio dei vettori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tali che $u_i \in L^q(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

In $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ consideriamo gli operatori differenziali lineari del primo ordine $s_{ik}(\mathbf{u})$ così definiti :

$$s_{ik}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Nel seguito useremo le seguenti notazioni :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \left\{ \sum_1^n |u_i|^2 \right\}^{1/2} \\ \|\mathbf{u}\|_{0,q,\Omega} &= \left\{ \sum_1^n \|u_i\|_{L^q(\Omega)}^q \right\}^{1/q} \\ \|\mathbf{u}\|_{1,q,\Omega} &= \left\{ \sum_1^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\|_{L^q(\Omega)}^q \right\}^{1/q} \\ \|\|\mathbf{u}\|\|_{q,\Omega} &= \left\{ \sum_1^n \|s_{ik}(\mathbf{u})\|_{L^q(\Omega)}^q \right\}^{1/q} \end{aligned}$$

Se $q=2$ scriveremo più semplicemente $\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}$, $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}$, $\|\|\mathbf{u}\|\|_{\Omega}$, e, dove non sia necessario, trascureremo anche di indicare esplicitamente l'aperto Ω .

In $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ consideriamo la norma

$$(1.1) \quad \{ \|\mathbf{u}\|_{0,q}^q + \|\|\mathbf{u}\|\|_q^q \}^{1/q}.$$

Rispetto a questa norma $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ non è completo. Indichiamo allora con $E^q(\Omega)$ ($q > 1$) lo spazio lineare di vettori ottenuto come completamento (funzionale) ⁽²⁾ di $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ rispetto alla norma (1.1). Assumendo questa come norma in $E^q(\Omega)$ tale spazio risulta di Banach. Indichiamo con $\|\|\cdot\|\|_{E^q(\Omega)}$ la norma in $E^q(\Omega)$.

Indichiamo infine con $[H^{1,q}(\Omega)]^n$ ($q > 1$) lo spazio di Banach ottenuto come completamento di $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ rispetto alla norma

$$\{ \|\mathbf{u}\|_{0,q}^q + \|\mathbf{u}\|_{1,q}^q \}^{1/q}.$$

⁽²⁾ Per usare la terminologia di Aronszajn.

Fissati due numeri reali e positivi a e r sia Q l'insieme $\{x \in R^n : x_n = 0; 0 \leq x_i \leq 2a \ (i = 1, 2, \dots, n-1)\}$ e C il cono chiuso che proietta Q dal punto $(a, a, \dots, a, r) \in R^n$.

Diremo che un aperto Ω di R^n gode della proprietà di cono se esistono due numeri reali e positivi a e r (dipendenti da Ω) tali che ad ogni $x \in \Omega$ si possa associare un cono $C(x)$, di vertice x , congruente a \dot{C} e contenuto in Ω .⁽³⁾

2. — Dimostriamo il seguente lemma:

LEMMA [I.2]. — Se Ω gode della proprietà di cono e $u \in E^q(\Omega)$ ($q > 1$) per quasi tutti i punti $x \in \Omega$ si ha la maggiorazione

$$(2.1) \quad |u(x)| \leq c_1 \int_{C(x)} \frac{\sum_1^n |u_i| + \sum_{ik}^n |s_{ik}(u)|}{|x-y|^{n-1}} dy \quad dy = dy_1 \dots dy_n$$

con $c_1 > 0$ indipendente da u .⁽⁴⁾

Riferendoci alla nomenclatura introdotta nel numero precedente, fissati i numeri a e r in rapporto all'aperto Ω , dividiamo l'insieme Q mediante gli iperpiani $x_i = a$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Indichiamo quindi con Q_0 l'ipercubo $\{x \in Q : 0 \leq x_i \leq a \ (i = 1, 2, \dots, n-1)\}$ e con Q_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) l'ipercubo ottenuto da Q_0 mediante una traslazione di ampiezza a nel verso dell'asse x_k , in altri termini $Q_k \equiv \{x \in Q : a \leq x_k \leq 2a; 0 \leq x_i \leq a \ (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1)\}$. Poichè $\bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k \subset Q$ il cono C^* che proietta $\bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k$ dal punto $z^{(0)} \equiv (a, a, \dots, a, r) \in R^n$ è contenuto in C .

Ad ogni punto $x^{(0)} \in Q_0$ di coordinate $(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, 0)$ associamo in Q_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) il punto $x^{(k)}$ di coordinate $(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + a, \dots, x_{n-1}^{(0)}, 0)$. Ogni punto $x^{(0)} \in Q_0$ individuata in tal modo una n -pla di versori, versori delle semirette che proiettano da $z^{(0)}$ i punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$, fra di loro linearmente indipendenti.

(3) Questa definizione equivalente a quella usuale: per ogni x esiste un cono circolare di vertice x , di apertura e altezza indipendenti da x , contenuto in Ω — è più comoda per la tecnica che useremo in seguito. Quando parleremo di cono associato a un punto x di Ω intenderemo sempre un cono definito come nel testo.

(4) Nel seguito indicheremo con c_1, c_2, \dots costanti positive indipendenti dai vettori cui le varie maggiorazioni si riferiscono. Quando sarà opportuno indicheremo esplicitamente gli elementi dai quali le costanti dipendono.

$|x-y|$ indica la distanza euclidea dei punti x, y .

Sia $x \in \Omega$, $C(x)$ il cono di vertice x congruente a C , y un punto generico in $C(x)$, z un punto generico in C , $y = \mathcal{C}_x(z)$ la congruenza che muta C in $C(x)$. Siano $C^*(x)$, $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, ... i trasformati di C^* , Q_0 , Q_1 , ... mediante la congruenza \mathcal{C}_x .

Come conseguenza della corrispondenza stabilita tra Q_0 e ognuno dei Q_k , ad ogni punto $y^{(0)} \in Q_0(x)$ restano associati univocamente $(n-1)$ punti $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n-1)}$, con $y^{(k)} \in Q_k(x)$, e di conseguenza n versori fra loro linearmente indipendenti $l^{(i)} \equiv \{l_1^{(i)}, \dots, l_n^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), versori delle semirette che proiettano da x i punti $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, ..., $y^{(n-1)}$.⁽⁵⁾

La i -esima di queste semirette ha come equazione

$$y = x + t(y^{(i-1)} - x) \quad t \geq 0.$$

Sia $\varphi(t)$ una funzione continua con la derivata prima nell'intervallo $[0, +\infty]$ e tale che

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{r}{3} \\ 0 & \text{per } \frac{2}{3}r \leq t < +\infty \end{cases}$$

u un vettore di $[C^1(\bar{\Omega})]^n$.

Fissato $y^{(0)} \in Q_0(x)$ e fissato l'indice i , si può allora scrivere⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} u(x) \cdot l^{(i)} &= - \int_0^1 \left\{ \frac{d(\varphi(t) u(y) \cdot l^{(i)})}{dt} \right\}_{y=x+t(y^{(i-1)}-x)} dt = \\ (2.2) \quad & \int_0^1 \left\{ \frac{d\varphi}{dt} u(y) \cdot l^{(i)} + \varphi \sum_{hk}^n \frac{\partial u_k(y)}{\partial x_h} (y_h^{(i-1)} - x_h) l_k^{(i)} \right\}_{y=x+t(y^{(i-1)}-x)} dt = \\ & = \int_0^1 \left\{ \frac{d\varphi}{dt} u(y) \cdot l^{(i)} + \varphi |y^{(i-1)} - x| \sum_{hk}^n s_{hk} (u(y)) l_h^{(i)} l_k^{(i)} \right\}_{y=x+t(y^{(i-1)}-x)} dt. \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ Se indichiamo con $e^{(i)}$ il versore dell'asse x_i , fissato $y^{(0)} \in Q_0(x)$ i punti $y^{(k)}$ sono dati da

$$y^{(k)} = y^{(0)} + a \mathcal{C}_x(e^{(k)}).$$

⁽⁶⁾ Se u e v sono due vettori, con $u \cdot v$ indichiamo il loro prodotto scalare.

⁽⁷⁾
$$l_k^{(i)} = \frac{y_k^{(i-1)} - x_k}{|y^{(i-1)} - x|}.$$

Dalla (2.2) segue che

$$|\mathbf{u}(x) \cdot l^{(i)}| \leq \max_{t,i} \left\{ \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| + |\varphi| |y^{(i-1)} - x| \right\} \int_0^1 \left\{ |\mathbf{u}(y)| + \sum_1^n |s_{hk}(\mathbf{u}(y))| \right\}_{y=x+t(y^{(i-1)}-x)} dt.$$

Ed anche ⁽⁸⁾

$$(2.3) \left\{ \sum_1^n |\mathbf{u}(x) \cdot l^{(i)}|^2 \right\}^{1/2} \leq \max_{t,i} \left\{ \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| + |\varphi| |y^{(i)} - x| \right\} \sum_1^{n-1} \int_0^1 \left\{ |\mathbf{u}(y)| + \sum_1^n |s_{hk}(\mathbf{u}(y))| \right\}_{y=x+t(y^{(i)}-x)} dt.$$

Per ogni fissato $y^{(0)} \in Q_0(x)$, risultando i vettori $l^{(i)}$ linearmente indipendenti, l'espressione $\sum_1^n |\mathbf{u} \cdot l^{(i)}|^2$ è una forma quadratica definita positiva nelle variabili u_1, u_2, \dots, u_n . Posto allora

$$a_{rs} = \sum_1^n l_r^{(i)} l_s^{(i)}$$

si ottiene, con procedimento ben noto, la maggiorazione

$$(2.4) \quad \sum_1^n |\mathbf{u}(x) \cdot l^{(i)}|^2 \geq c_2(n) \det |a_{rs}| |\mathbf{u}(x)|^2.$$

Tenendo presente il significato geometrico del $\det |a_{rs}|$ si prova facilmente che $\det |a_{rs}|$ non dipende dal punto x e che, come funzione di $y^{(0)}$, ha in $Q_0(x)$ un minimo positivo funzione solo delle quantità n, a e r . ⁽⁹⁾

Tenuto conto di ciò, dalle (2.3) e (2.4) segue

$$(2.5) \quad |\mathbf{u}(x)| \leq c_3(\varphi, n, a, r) \sum_1^{n-1} \int_0^1 \left\{ |\mathbf{u}(y)| + \sum_1^n |s_{hk}(\mathbf{u}(y))| \right\}_{y=x+t(y^{(i)}-x)} dt.$$

⁽⁸⁾ Sommando rispetto ad i e sfruttando la maggiorazione evidente

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

⁽⁹⁾ $\det |a_{rs}| = \left| \begin{matrix} l_1^{(1)} & \dots & l_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_1^{(n)} & \dots & l_n^{(n)} \end{matrix} \right|^2 = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} |y^{(i)} - x|^2} \left| \begin{matrix} (y_1^{(0)} - x_1) & \dots & (y_n^{(0)} - x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (y_1^{(n-1)} - x_1) & \dots & (y_n^{(n-1)} - x_n) \end{matrix} \right|^2 \geq$

$$\geq c_2^*(n) \frac{a^{2(n-1)} r^2}{\{a^2(n-1) + r^2\}^n}.$$

Integrando rispetto a $y^{(0)}$ su $Q_0(x)$, con evidenti cambiamenti di variabili ⁽¹⁰⁾, dalla (2.5) si ottiene

$$(2.6) \quad |u(x)| \leq \frac{c_3}{a^{n-1}} \sum_0^{n-1} \int_{Q_i(x)} dy^{(i)} \int_0^1 \left\{ |u(y)| + \sum_1^n s_{hk}(u(y)) \right\} \Big|_{y=x+t(y^{(i)}-x)} dt =$$

$$= c_4 \int_{O^*(x)} \frac{\sum_1^n |u_i(y)| + \sum_1^n |s_{hk}(u(y))|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Poichè $O^*(x) \subset C(x)$ e $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ è denso in $E^q(\Omega)$, il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE. Indichiamo con $g(y)$ la funzione

$$(2.7) \quad g(y) = \begin{cases} \sum_1^n |u_i(y)| + \sum_1^n |s_{ik}(u(y))| & \text{per } y \in \Omega \\ 0 & \text{per } y \in R^n - \Omega \end{cases}$$

L'integrale a secondo membro nella (2.1) si maggiora con il potenziale

$$U^g(x) = \int_{R^n} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy$$

dove $g(y)$ è una funzione non negativa, appartenente a $L^q(R^n)$ se $u \in E^q(\Omega)$, e a supporto compatto $\bar{\Omega}$. Se $1 < q < n$ un noto teorema di Sobolev (cfr.

[6] [5] [1]) assicura che su ogni compatto $K \supset \Omega$, $U^g(x) \in L^{\frac{nq}{n-q}}(K)$ e si ha la maggiorazione

$$(2.8) \quad \|U^g(x)\|_{L^{\frac{nq}{n-q}}(K)} \leq c_5(K, \Omega, q) \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Come conseguenza del lemma [I.2] e dell'osservazione ora fatta si può ad esempio dimostrare per gli spazi $E^q(\Omega)$, nell'ipotesi che Ω goda della

⁽¹⁰⁾ Si tenga presente che $Q_k(x)$ è ottenuto da $Q_0(x)$ mediante la traslazione a $\mathcal{T}_x(e^{(k)})$ (cfr. ⁽⁵⁾) e che $\text{mis } Q_0(x) = a^{n-1}$.

proprietà di cono, un teorema di inclusione del tutto analogo a quello di Sobolev per gli spazi $[H^{1,q}(\Omega)]^n$ ([6]). In proposito si osservi che dall'inclusione evidente

$$[H^{1,q}(\Omega)]^n \subset E^q(\Omega)$$

e dalla

$$(2.8') \quad E^q(\Omega) \subset [H^{1,q}(\Omega)]^n$$

seguirebbe senz'altro l'isomorfismo tra $[H^{1,q}(\Omega)]^n$ ed $E^q(\Omega)$ e quindi la validità del teorema di Sobolev in $E^q(\Omega)$ come conseguenza della sua validità in $[H^{1,q}(\Omega)]^n$. Ora l'inclusione (2.8'), nell'ipotesi che Ω goda la proprietà di cono, è stata provata recentemente [(9)] nel caso $q = 2$. Per $q \neq 2$ l'inclusione è probabilmente ancora vera. Diamo ugualmente una dimostrazione diretta del teorema.

TEOREMA [I.2]. — *Se Ω gode della proprietà di cono i vettori $\mathbf{u} \in E^q(\Omega)$ ($q > 1$) godono le seguenti proprietà:*

i) *Se $q < n$, $\mathbf{u} \in [L^{\frac{qn}{n-q}}(\Omega)]^n$ e sussiste la maggiorazione*

$$\|\mathbf{u}\|_{0, \frac{qn}{n-q}} \leq c_6 \|\mathbf{u}\|_{E^q(\Omega)}.$$

ii) *Se $q = n$, $\mathbf{u} \in [L^p(\Omega)]^n$ qualunque sia $p > 0$, finito.*

iii) *Se $q > n$, \mathbf{u} coincide quasi ovunque con un vettore continuo in $\bar{\Omega}$ ⁽¹¹⁾ soddisfacente alla maggiorazione*

$$(2.9) \quad \sup_{\bar{\Omega}} |\mathbf{u}| \leq c_7 \|\mathbf{u}\|_{E^q(\Omega)}.$$

Consideriamo innanzitutto il caso: $1 < q < n$.

Sia $\mathbf{u} \in E^q(\Omega)$. Prolunghiamo \mathbf{u} in tutto R^n definendolo nullo fuori di Ω . Fissiamo un compatto $K \supset \Omega$. Dalla (2.1) e (2.8), tenuto conto dell'osservazione fatta precedentemente, segue che, fissato l'intero i ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_i|^{\frac{qn}{n-q}} dx &= \int_K |u_i|^{\frac{qn}{n-q}} dx \leq c_1 \int_K [U^g(x)]^{\frac{ng}{n-q}} dx = \\ &= c_1 \left\| U^g(x) \right\|_{L^{\frac{ng}{n-q}}(\Omega)}^{\frac{ng}{n-q}} \leq c_1 c_5 \|g\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{ng}{n-q}} \leq c_8 \|\mathbf{u}\|_{E^q(\Omega)}^{\frac{ng}{n-q}}. \end{aligned} \quad (12)$$

E quindi, sommando rispetto ad i , la tesi.

⁽¹¹⁾ Cioè tale che tutte le componenti sono funzioni continue.

⁽¹²⁾ Applicando la disuguaglianza di Minkowski.

Per quanto riguarda il caso di $q = n$, basta osservare che se $u \in E^n(\Omega)$ allora $u \in E^{n-\varepsilon}(\Omega)$ qualunque sia $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < n$); applicando il risultato precedente si ottiene che $u \in [L^{\frac{(n-\varepsilon)n}{\varepsilon}}(\Omega)]^n$ qualunque sia $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < n$). Quindi anche la proprietà ii) è dimostrata.

Esaminiamo infine il caso $q > n$. Se $u(x)$ è un vettore di $[C^1(\bar{\Omega})]^n$, dalla dimostrazione del lemma [1.2] si deduce che per tutti i punti $x \in \bar{\Omega}$ sussiste la maggiorazione (2.1). Applicando allora a secondo membro la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|u(x)| \leq c_1 \int_{C(x)} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \leq c_1 \|g\|_{L^q(\Omega)} \left[\int_{C(x)} \frac{dy}{|x-y|^{\frac{(n-1)q}{q-1}}} \right]^{1-\frac{1}{q}}.$$

Il valore dell'integrale

$$\int_{C(x)} \frac{dy}{|x-y|^{\frac{(n-1)q}{q-1}}}$$

non dipende da x ed è finito se $q > n$, quindi

$$|u(x)| \leq c_8 \|u\|_{E^q(\Omega)}$$

per tutti i punti $x \in \bar{\Omega}$ e di conseguenza

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq c_8 \|u\|_{E^q(\Omega)}.$$

Di qui segue, con ragionamento abituale, che se $u \in E^q(\Omega)$ e $\{u^{(n)}\}$ è una successione di vettori di $[C^1(\bar{\Omega})]^n$ convergente ad u nella norma $\|\cdot\|_{E^q(\Omega)}$, la successione $\{u^{(n)}\}$ converge uniformemente in $\bar{\Omega}$ ⁽¹³⁾, e quindi u , modificato al più su un insieme di misura nulla, è continuo in $\bar{\Omega}$ e verifica la (2.9).

Il teorema è così completamente dimostrato.

3. — Studieremo in questo numero una estensione del teorema [1.2] considerando il caso che l'aperto Ω non sia dotato della proprietà di cono nel senso usuale ma verifichi una proprietà di cono generalizzata di cui

⁽¹³⁾ Cioè le successioni $\{u_i^{(n)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) convergono uniformemente in $\bar{\Omega}$.

daremo la definizione più avanti. La cosa ha particolare interesse perché se Ω gode una proprietà di cono generalizzata in generale non si ha più l'isomorfismo tra $E^q(\Omega)$ e $[H^{1,q}(\Omega)]^n$ (cfr. il n. 4).

Uno studio analogo per gli spazi $H^{1,q}(\Omega)$ è contenuto in una mia recente nota ([4]); precedentemente la questione è stata considerata anche da G. Stampacchia ([7]) che ne ha sottolineato l'interesse.

Premettiamo innanzitutto una osservazione relativa al lemma [I.2]. Sia $x \in R^n$, indichiamo con $\omega_n(x)$ l'insieme $\{y \in R^n : |x - y| = 1\}$. Indichiamo con σ l'apertura del cono C cioè la misura $n - 1$ -dimensionale dell'insieme $\omega_n(z^{(0)}) \cap C$. Dalla relazione

$$\sigma = r \int_Q \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{|z^{(0)} - x|^n}$$

segue che

$$(3.1) \quad \sigma \leq \left(\frac{2a}{r}\right)^{n-1}.$$

D'altra parte dalla dimostrazione del lemma [1.2] e in particolare dalla (9) si deduce che alla costante c_1 che interviene nella formula (2.1) si può imporre la seguente limitazione:

$$(3.2) \quad c_1 \leq c_1^*(n) \frac{\max_t \left\{ \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| + |\varphi| [a^2(n-1) + r^2]^{1/2} \right\} \{a^2(n-1) + r^2\}^{n/2}}{ra^{2(n-1)}}.$$

Dalle (3.1), (3.2), tenuto conto che $a \leq \text{diam. } \Omega$, si ottiene allora

$$(3.3) \quad c_1 \leq c_{10}(\varphi, n, r, \text{diam } \Omega) \frac{1}{\sigma^2}.$$

Sia Ω un aperto limitato di R^n . Supponiamo che ad ogni $x \in \Omega$ si possa associare un cono chiuso $C(x) \subset \Omega$ di altezza costante r e di apertura $\sigma(x)$ variabile con x ⁽¹⁴⁾; ad ogni x si potrà allora associare tutta una famiglia $\mathcal{F}(x)$ di coni del tipo ora detto. Poniamo

$$\Sigma(x) = \sup_{\mathcal{F}} \sigma(x).$$

⁽¹⁴⁾ $\sigma(x)$ è uguale alla misura $(n - 1)$ -dimensionale dell'insieme $\omega_n(x) \cap C(x)$.

Diremo che Ω soddisfa ad una condizione di cono generalizzata di ordine p ($p \geq 1$) se ⁽¹⁵⁾

$$\frac{1}{\Sigma(x)} \in L^p(\Omega).$$

La condizione di cono usuale corrisponde al caso in cui $\frac{1}{\Sigma(x)}$ è limitata in Ω e quindi $p = +\infty$ ⁽¹⁶⁾.

Possiamo enunciare il seguente lemma, dove con $C_\Sigma(x)$ indichiamo un cono di vertice x , altezza r ed apertura $\Sigma(x)$, contenuto in $\bar{\Omega}$.

LEMMA [I.3]. — Se Ω soddisfa ad una condizione di cono generalizzata di ordine p ($p \geq 1$) e $u \in E^q(\Omega)$ ($q > 1$) per quasi tutti i punti $x \in \Omega$ si ha la maggiorazione

$$(3.4) \quad |u(x)| \leq \frac{c_{10}}{\Sigma^2(x)} \int_{C_\Sigma(x)} \frac{\sum_i^n |u_i| + \sum_{ik}^n |s_{ik}(u)|}{|y-x|^{n-1}} dy.$$

Basta ripetere la dimostrazione fatta per il lemma [I.2] e ricordare la (3.3).

Sfruttando il lemma ora enunciato, possiamo dimostrare alcune proprietà di inclusione per gli spazi $E^q(\Omega)$ analoghe a quelle contenute nel teorema [I.2], anche nel caso che Ω soddisfi ad una proprietà di cono generalizzata.

Supponiamo dapprima $q < n$. Sia $g(y)$ la funzione definita dalla (2.7), β ed ε due numeri reali tali che

$$(3.5) \quad \frac{1}{\beta} > \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \quad \varepsilon > 0$$

x un punto fissato di Ω . Possiamo scrivere

$$\int_{C_\Sigma(x)} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy = \int_{C_\Sigma(x)} \frac{g^{\frac{q}{\beta}}(y)}{|x-y|^{\frac{n}{q} + \varepsilon - 1}} \cdot g(y)^{\left(1 - \frac{q}{\beta}\right)} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n - \frac{n}{q} - \varepsilon}} dy \leq^{(17)}$$

⁽¹⁵⁾ Per questa definizione cfr. [7].

⁽¹⁶⁾ $L^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni misurabili in Ω e ivi sommabili con qualunque esponente $p > 0$, finito.

⁽¹⁷⁾ Applicando la disuguaglianza di Hölder per il prodotto di tre funzioni.

$$\leq \left[\int_{C_{\Sigma(x)}} \frac{g^q(y)}{|x-y|^{\left(\frac{n}{q}+\varepsilon-1\right)\beta}} dy \right]^{\frac{1}{\beta}} \left[\int_{C_{\Sigma(x)}} g^q(y) dy \right]^{\frac{1}{q}\left(1-\frac{q}{\beta}\right)} \left[\int_{C_{\Sigma(x)}} \frac{dy}{|x-y|^{\left(n-\frac{n}{q}-\varepsilon\right)\frac{q}{q-1}}} \right]^{\frac{q-1}{q}} =$$

(3.6)

$$= \left[\int_{\omega_n(x) \cap C_{\Sigma(x)}} d\xi \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{1-\frac{q}{q-1}}} \right]^{\frac{q-1}{q}} \|g\|_{L^q(\Omega)}^{1-\frac{q}{\beta}} \left[\int_{C_{\Sigma(x)}} \frac{g^q(y)}{|x-y|^{\left(\frac{n}{q}+\varepsilon-1\right)\beta}} dy \right] =$$

$$= c_{11}(r, \varepsilon, q) \Sigma(x)^{\frac{q-1}{q}} \|g\|_{L^q(\Omega)}^{1-\frac{q}{\beta}} \cdot \left[\int_{\Omega} \frac{g^q(y)}{|x-y|^{\left(\frac{n}{q}+\varepsilon-1\right)\beta}} dy \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Dalle (3.4), (3.6) segue

$$(3.7) \quad \int_{\Omega} \left\{ \Sigma(x)^{1+\frac{1}{q}} |u(x)| \right\}^{\beta} dx \leq c_{12} \|g\|_{L^q(\Omega)}^{\beta-q} \int_{\Omega} g^q(y) dy \int_{\Omega} \frac{dx}{|x-y|^{\left(\frac{n}{q}+\varepsilon-1\right)\beta}}.$$

Ora fissato β come in (3.5), pur di scegliere ε sufficientemente piccolo, $\left(\frac{n}{q} + \varepsilon - 1\right)\beta < n$ e dalla (3.7) segue

$$\int_{\Omega} \left\{ \Sigma(x)^{1+\frac{1}{q}} |u(x)| \right\}^{\beta} dx \leq c_{13} \|u\|_{E^q(\Omega)}^{\beta}.$$

Di qui, tenuto conto che $\frac{1}{\Sigma(x)} \in L^p(\Omega)$, scelto α tale che

$$(3.8) \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{p} + \frac{1}{pq} > \frac{1}{p} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$$

si ottiene

$$\|u\|_{0,\alpha} = \left[\int_{\Omega} \left(\Sigma(x)^{1+\frac{1}{q}} |u(x)| \cdot \frac{1}{\Sigma(x)^{1+\frac{1}{q}}} \right)^{\alpha} dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq$$

$$\leq \left[\int_{\Omega} \left(\Sigma(x)^{1+\frac{1}{q}} |u(x)| \right)^{\beta} dx \right]^{\frac{1}{\beta}} \left[\int_{\Omega} \frac{dx}{\Sigma(x)^p} \right]^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} \leq c_{14} \|u\|_{E^q(\Omega)}.$$

La (3.8) non è significativa, nel senso che α risulta $< q$, se $p < \frac{nq}{q+1}$.
 Precisiamo allora il risultato ottenuto in questo modo: se $q < n$, $u \in [L^\alpha(\Omega)]^n$ per ogni α tale che

$$\frac{1}{\alpha} > \min \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}; \frac{1}{q} \right\}.$$

Il caso $q = n$ si riconduce al precedente in quanto se $u \in E^n(\Omega)$ allora $u \in E^{n-\varepsilon}(\Omega)$ qualunque sia $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < n$).

Se infine $q > n$, sfruttando il lemma [1.3], possiamo scrivere per quasi tutti gli $x \in \Omega$,

$$(3.9) \quad |u(x)| \leq \frac{c_{10}}{\Sigma^2(x)} \int_{\mathcal{C}_{\Sigma(x)}} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \leq c_{15} \frac{1}{\Sigma(x)^{1+\frac{1}{q}}} \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (18).$$

La (3.9) assicura che $u(x) \in [L^{\frac{pq}{q+1}}(\Omega)]^n$ e che sussiste la maggiorazione

$$\|u\|_{0, \frac{pq}{q+1}} \leq c_{16} \|u\|_{E^q(\Omega)}.$$

Possiamo riassumere quanto abbiamo dimostrato nel seguente teorema: (19)

TEOREMA [1.3] — *Se Ω è un aperto limitato di R^n soddisfacente una condizione di cono generalizzata di ordine p ($p \geq 1$) i vettori $u \in E^q(\Omega)$ ($q > 1$) godono le seguenti proprietà:*

i) *Se $q \leq n$, $u \in [L^\alpha(\Omega)]^n$ per ogni α tale che*

$$\frac{1}{\alpha} > \min \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}; \frac{1}{q} \right]$$

(18) Applicando la disuguaglianza di Hölder, tenuto conto che $(n-1)\frac{q}{q-1} < n$ per $q > n$.

(19) È probabile che i risultati contenuti in questo teorema si possano ulteriormente migliorare.

Un risultato analogo per gli spazi $H^{1,q}(\Omega)$ è dato in [7]. Osserviamo che la tecnica seguita nel testo, applicata agli spazi $H^{1,q}(\Omega)$, per i quali si può dare una maggiorazione analoga alla (3.4) (cfr. [7]) darebbe come risultato:

$$q \leq n, u \in H^{1,q}(\Omega) \implies u \in L^\alpha(\Omega) \text{ con ogni } \alpha \text{ tale che } \frac{1}{\alpha} > \min \left[\frac{1}{pq} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}; \frac{1}{q} \right]$$

$$q > n, u \in H^{1,q}(\Omega) \implies u \in L^{pq}(\Omega)$$

che migliora leggermente quello contenuto in [7] teor. (3.4).

ii) Se $q > n$, $\mathbf{u} \in [L^\alpha(\Omega)]^n$ con $\alpha = \frac{pq}{q+1}$.

In entrambi i casi sussiste la maggiorazione:

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\alpha} \leq c_{17} \|\mathbf{u}\|_{E^q(\Omega)}.$$

4. — La tecnica usata per la dimostrazione del lemma [1.2] è utile anche per risolvere alcune questioni relative agli spazi $E^q(\Omega)$ delle quali ho già parlato in un precedente lavoro (cfr. [2] n. 2) e che sono connesse con lo studio dei problemi al contorno per una classe di operatori differenziali lineari del secondo ordine. Colgo così l'occasione per rimediare ad una svista contenuta nel numero 2 del lavoro citato (form. (2.12)) che infirma in parte la validità di due esempi particolarmente interessanti per le questioni ivi trattate.

Per limitarci al caso considerato in [2] fissiamo $q = 2$.

Indichiamo con $\partial_1 \Omega$ un sottoinsieme di $\partial\Omega$ di misura $(n-1)$ -dimensionale positiva, con $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ il sottoinsieme di $C^\infty(\bar{\Omega})$ delle funzioni che si annullano con tutte le derivate su $\partial_1 \Omega$, con $V^2(\Omega)$ e $W^2(\Omega)$ i completamenti di $[C_0^\infty(\Omega)]^n$ relativi alle norme $\|\cdot\|_{E^2(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{[H^{1,2}(\Omega)]^n}$ rispettivamente⁽²⁰⁾.

Se $\partial_1 \Omega \equiv \partial\Omega$ ho già dimostrato in [2] che $V^2(\Omega) = W^2(\Omega)$ ⁽²¹⁾. Supponiamo $\partial_1 \Omega \not\equiv \partial\Omega$. In tal caso $W^2(\Omega) \subset V^2(\Omega)$ ⁽²²⁾, si tratta di far vedere che, in generale, $W^2(\Omega) \not\equiv V^2(\Omega)$.

Di più, supponiamo che $\partial_1 \Omega$ sia tale che in $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ (e quindi in $V^2(\Omega)$) sussista la maggiorazione

$$(4.1) \quad \|\mathbf{u}\|_0 \leq c_{18} \|\mathbf{u}\|$$

anche in tal caso, in generale, $W^2(\Omega) \not\equiv V^2(\Omega)$; in altri termini in $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ può valere la (4.1) e non la maggiorazione

$$(4.2) \quad \|\mathbf{u}\|_1 \leq c_{19} \|\mathbf{u}\|.$$

Proveremo questi fatti riferendoci, per semplicità, ad un aperto opportuno di R^2 .

⁽²⁰⁾ Si potrebbero considerare anzichè i completamenti di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ quelli di $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R^n)$ (restrizioni a $\bar{\Omega}$ dei vettori di $\mathcal{D}(R^n)$ che si annullano in un intorno di $\partial_1 \Omega$) come è fatto in [2]. Preciso, del resto, che anche in [2] gli spazi $V(\Omega)^n$ e $W(\Omega)^n$ si potevano definire, senza nulla cambiare, come completamento di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$.

⁽²¹⁾ Cioè tra V^2 e W^2 c'è un isomorfismo algebrico e topologico.

⁽²²⁾ Inclusione algebrica e topologica.

Fissato il numero reale β positivo e tale che $\frac{5}{3} < \beta < 2$, consideriamo l'insieme di R^2 $\Omega^* \equiv \{x \in R^2 : -x_2^\beta < x_1 < x_2^\beta, 0 < x_2 < \beta^{\frac{1}{1-\beta}}\}$, e indichiamo con Ω l'aperto che si ottiene da Ω^* applicando agli assi una rotazione, nel verso positivo, di ampiezza $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Indicate con a e b le quantità:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^{\frac{1}{1-\beta}} (1 - \beta^{-1}); \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^{\frac{1}{1-\beta}} (1 + \beta^{-1})$$

assumiamo come $\partial_1 \Omega$ il segmento di estremi (a, b) e (b, a) .

Consideriamo in Ω il vettore $u = (u_1, u_2)$ così definito:

$$(4.3) \quad u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega \cap \left\{ x : x_2 \geq \frac{a}{2} \right\} = \Omega_1 \\ \frac{1}{x_2} - \frac{2}{a} & \text{in } \Omega \cap \left\{ x : x_2 < \frac{a}{2} \right\} \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega \cap \left\{ x : x_1 \geq \frac{a}{2} \right\} = \Omega_2 \\ -\frac{1}{x_1} + \frac{2}{a} & \text{in } \Omega \cap \left\{ x : x_1 < \frac{a}{2} \right\} \end{cases}$$

Verifichiamo che $u \in V^2(\Omega)$ ma non appartiene a $W^2(\Omega)$.

Innanzitutto si ha che

i) u_1 e $u_2 \in L^2(\Omega)$.

Infatti, applicando un evidente cambiamento di variabili, si ottiene per u_1

$$\int_{\Omega} u_1^2 dx \leq \int_{\Omega^*} \left(\frac{\sqrt{2}}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{2}{a} \right)^2 d\xi = \frac{4}{a^2} \text{mis } \Omega^* +$$

$$+ \frac{4\sqrt{2}}{a} \int_0^{\beta^{\frac{1}{1-\beta}}} \log \left| \frac{\xi_2^{1-\beta} - 1}{\xi_2^{1-\beta} + 1} \right| d\xi_2 + 4 \int_0^{\beta^{\frac{1}{1-\beta}}} \frac{d\xi_2}{\xi_2^{2-\beta} - \xi_2^\beta} < +\infty$$

e analogamente per u_2 . Inoltre u_1 e u_2 hanno derivate, in senso usuale, continue in Ω se si eccettuano i punti situati sulla retta $x_2 = \frac{a}{2}$ per u_1 e

sulla retta $x_1 = \frac{a}{2}$ per u_2 ; tali derivate, definite arbitrariamente, per esempio nulle, nei punti ora detti, coincidono con le derivate intese nel senso delle distribuzioni e si hanno le seguenti relazioni:

$$\text{ii)} \quad s_{11}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0; \quad s_{22}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\text{iii)} \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 dx \geq 4 \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}} d\xi_2 \int_{-\xi_2^\beta}^{\xi_2^\beta} \frac{d\xi_1}{(\xi_2 - \xi_1)^4} \geq 24 \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}} \frac{d\xi_2}{\xi_2^{4-\beta}}$$

e l'ultimo integrale non ha valore finito perchè $\beta < 2$.

Analogamente si ragiona per $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Infine:

$$\text{iii)} \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 dx < \int_{\Omega_2} \frac{1}{x_2^4} dx + \int_{\Omega_1} \frac{1}{x_1^4} dx + \int_{\Omega - \Omega_1 \cap \Omega_2} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right)^2 dx$$

I primi due integrali sono evidentemente convergenti; esaminiamo il terzo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - \Omega_1 \cup \Omega_2} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right)^2 dx &\leq 64 \int_{\Omega^* \cap \{\xi_2 \leq a\}} \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^4} d\xi = 128 \int_0^a \xi_2^2 d\xi_2 \int_0^{\xi_2^\beta} \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^4} d\xi_1 \leq \\ &\leq \frac{128}{3} \int_0^a \frac{\xi_2^{2+3\beta}}{(\xi_2^2 - \xi_2^{2\beta})^4} d\xi_2 \leq \\ &\leq \frac{128}{3 [1 - a^{2(\beta-1)}]^4} \int_0^a \frac{d\xi_2}{\xi_2^{6-3\beta}} < +\infty \quad \text{in quanto } \beta > \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Da i) ii) iii) iiiii) segue che \mathbf{u} non appartiene a $W^2(\Omega)^{(23)}$, mentre u_1, u_2 e le distribuzioni $s_{11}(\mathbf{u}), s_{22}(\mathbf{u}), s_{12}(\mathbf{u})$ appartengono a $L^2(\Omega)$.

(23) Osserviamo che i vettori $\mathbf{u} \in W^2(\Omega)$ appartengono a $[L^2(\Omega)]^n$ insieme alle loro derivate prime intese nel senso delle distribuzioni su Ω .

In un precedente lavoro (cfr. [3] ⁽²⁴⁾) abbiamo dimostrato che i vettori di questo tipo si possono approssimare nella norma $\| \cdot \|_{E^2(\Omega)}$ mediante vettori di $[C^\infty(\bar{\Omega})]^2$ se $\bar{\Omega}$ si può ricoprire con un numero finito di sfere aperte S_1, S_2, \dots, S_N tali che le intersezioni $\bar{\Omega} \cap \bar{S}_k$ o sono interne ad Ω o possono essere trasformate in regioni interne a Ω mediante traslazioni di ampiezza non superiore di un assegnato numero δ ⁽²⁵⁾.

È immediato constatare che questa proprietà è goduta dall'aperto Ω da noi scelto, di più, poiché il vettore u definito dalle (4.3) si annulla in tutto un intorno di $\partial_1 \Omega$, pur di scegliere δ e i raggi delle sfere sufficientemente piccoli, la successione $\{u^n\}$ di vettori approssimanti u non solo appartiene a $[C^\infty(\bar{\Omega})]^2$ ma anche a $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$. Quindi $u \in V^2(\Omega)$.

Con ciò resta provato che in generale $W^2(\Omega)$ non coincide con $V^2(\Omega)$.

Riferendoci sempre all'aperto Ω e alla scelta di $\partial_1 \Omega$ precedentemente fissati, osserviamo che non può valere per i vettori di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$ la maggiorazione (4.2); in tal caso infatti si avrebbe per i vettori $\{u^{(n)}\}$ della successione approssimante il vettore u definito dalle (4.3)

$$\| u^{(n)} - u^{(m)} \|_1 \leq c_{19} \| \| u^{(n)} - u^{(m)} \| \|$$

da cui, essendo $\{u^{(n)}\}$ convergente ad u in $E^2(\Omega)$, si dedurrebbe che $\{u^{(n)}\}$ converge ad u anche in $[H^{1,2}(\Omega)]^2$ e quindi u apparterebbe a $W^2(\Omega)$.

Dimostriamo invece che in $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$ (e quindi in $V^2(\Omega)$) sussiste la maggiorazione (4.1).

Osserviamo che poichè le quantità $\| u \|_0$ e $\| \| u \| \|$ sono invarianti per rotazioni è sufficiente dimostrare la maggiorazione (4.1) in $[C_0^\infty(\bar{\Omega}^*)]^2$ assumendo naturalmente come $\partial_1 \Omega^*$ il trasformato di $\partial_1 \Omega$ nella rotazione che porta Ω in Ω^* cioè il segmento $\{x_2 = \beta^{1-\beta}, -\frac{\beta}{\beta^{1-\beta}} < x_1 < \frac{\beta}{\beta^{1-\beta}}\}$.

Sia $u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega}^*)]^2$. Per ogni $x \in \Omega^*$ indichiamo con $C(x)$ il cono avente vertice in x , la base su $\partial_1 \Omega^*$ ed è delimitato dalle due semirette

$$\xi_1 = x_1 \pm \beta x_2^{\beta-1} (\xi_2 - x_2) \quad \text{con} \quad \xi_2 \geq x_2,$$

⁽²⁴⁾ Nel lavoro citato (cfr. teor. [2.II]) il teorema è esplicitamente dimostrato per vettori u tali che

$$u_1, u_2, s_{11}, s_{22}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \in L^2(\Omega).$$

Risulta però evidente dalla dimostrazione, anche se la cosa non è esplicitamente osservata in quella sede, che il teorema sussiste inalterato anche per i vettori che qui interessano.

⁽²⁵⁾ Questa ipotesi è verificata ad esempio se $\partial \Omega$ è localmente lipschitziana; il teorema (2.II) di [3] è dimostrato appunto supponendo questa condizione per $\partial \Omega$.

le quali intersecano $\partial_1 \Omega$ rispettivamente nei punti $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$. Poniamo ancora

$$x^{(0)} \equiv (x_1, \beta^{\frac{1}{1-\beta}}), \quad a = |x^{(1)} - x^{(0)}| = |x^{(2)} - x^{(0)}|.$$

Ad ogni punto y del segmento $[x^{(2)}, x^{(0)}]$ associamo il punto $y^{(1)}$ del segmento $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ di ascissa $y_1 + a$. Siano $l^{(1)}, l^{(2)}$ i versori delle semirette che proiettano $y, y^{(1)}$ da x . Fissato y , tenuto conto che u si annulla su $\partial_1 \Omega^*$, possiamo scrivere

$$u(x) \cdot l^{(1)} = - \int_0^1 \left[\frac{d u(z) \cdot l^{(1)}}{dt} \right]_{z=x+t(y-x)} dt$$

$$u(x) \cdot l^{(2)} = - \int_0^1 \left[\frac{d u(z) \cdot l^{(2)}}{dt} \right]_{z=x+t(y^{(1)}-x)} dt.$$

Di qui, con calcolo analogo a quello svolto nella dimostrazione del lemma [1.2],

$$(4.4) \quad \sqrt{\sum_1^2 |u(x) \cdot l^{(i)}|^2} \leq$$

$$\leq \max [|y^{(1)} - x|, |y - x|] \int_0^1 \left[\left\{ \sum_1^2 s_{hk} |s_{hk}(u(z))| \right\}_{z=x+t(y-x)} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_1^2 s_{hk} |s_{hk}(u(z))| \right\}_{z=x+t(y^{(1)}-x)} \right] dt$$

$\sum_1^2 |u(x) \cdot l^{(i)}|^2$ è una forma quadratica definita positiva nelle variabili u_1 e u_2 e si ha la maggiorazione

$$(4.5) \quad \sum_1^2 |u(x) \cdot l^{(i)}|^2 \geq \frac{1}{4} \{ \det |l_s^{(r)}| \}^2 |u|^2 \geq \frac{1}{4} \frac{a^2 (\beta^{\frac{1}{1-\beta}} - x_2)^2}{\{ (\beta^{\frac{1}{1-\beta}} - x_2)^2 + a^2 \}^2} |u|^2 \quad (26).$$

Dalle (4.4), (4.5), tenuto conto che $a = \beta x_2^{\beta-1} (\beta^{\frac{1}{1-\beta}} - x_2)$ si ottiene

$$|u(x)| \leq \frac{2^{5/2} (\beta^{\frac{1}{1-\beta}} - x_2)}{\beta x_2^{\beta-1}} \int_0^1 \left[\left\{ \sum_1^2 s_{hk} |s_{hk}(u(z))| \right\}_{z=x+t(y-x)} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_1^2 s_{hk} |s_{hk}(u(z))| \right\}_{z=x+t(y^{(1)}-x)} \right] dt.$$

(26) Cfr. la nota (9).

Integrando rispetto ad y_1 tra gli estremi $x_1^{(2)}$ e x_1 e applicando il cambiamento di variabili $(y_1, t) \rightarrow z$ si ha

$$(4.6) \quad |u(x)| \leq \frac{c_{20}(\beta)}{x_2^{2(\beta-1)}} \int_{C(x)}^2 \frac{\sum_{hk} |s_{hk}(u(z))|}{|x-z|} dz.$$

Posto ora $g(z) = \sum_{hk} |s_{hk}(u(z))|$ per $z \in \Omega^*$ e fissato un numero ε , $0 < \varepsilon < 1$, dalla (4.6) segue

$$(4.7) \quad |u(x)|^2 \leq \frac{c_{20}^2(\beta)}{x_2^{4(\beta-1)}} \left[\int_{C(x)} \frac{g(z)}{|x-z|^{\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \frac{1}{|x-z|^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} dz \right]^2 \leq \\ \leq \frac{c_{20}^2(\beta)}{x_2^{4(\beta-1)}} \int_{C(x)} \frac{dz}{|x-z|^{2-\varepsilon}} \cdot \int_{C(x)} \frac{g^2(z)}{|x-z|^\varepsilon} dz.$$

E poichè

$$\int_{C(x)} \frac{dz}{|x-z|^{2-\varepsilon}} = 2 \int_{x_2}^{\frac{1}{\beta^{1-\beta}} x_1 + \beta x_2^{\beta-1}(z_2 - x_2)} dz_2 \int_{x_1} \frac{dz_1}{|x-z|^{2-\varepsilon}} \leq \\ \leq \beta x_2^{\beta-1} \int_{x_2}^{\frac{1}{\beta^{1-\beta}}} \frac{dz_2}{(z_2 - x_2)^{1-\varepsilon}} \leq \frac{\beta^{\frac{\varepsilon}{1-\beta}} + 1}{\varepsilon} x_2^{\beta-1}$$

dalla (4.7), integrando su Ω^* , si ottiene

$$(4.8) \quad \int_{\Omega^*} |u(x)|^2 dx \leq c_{21}(\beta, \varepsilon) \int_{\Omega^*} g^2(z) dz \int_{\Omega^*} \frac{dx}{x_2^{3(\beta-1)} |x-z|^\varepsilon}.$$

Consideriamo a secondo membro l'integrale fatto rispetto ad x . Si ha

$$\int_{\Omega^*} \frac{dx}{x_2^{3(\beta-1)} |x-z|^\varepsilon} \leq 2 \int_0^{\frac{1}{\beta^{1-\beta}}} \frac{dx_2}{x_2^{2\beta-2} |x_2 - z_2|^\varepsilon} \leq \\ \leq \left[\int_0^{\frac{1}{\beta^{1-\beta}}} \frac{dx_2}{x_2^{1-\varepsilon}} \right]^{\frac{2\beta-3}{1-\varepsilon}} \left[\int_0^{\frac{1}{\beta^{1-\beta}}} \frac{dx_2}{|x_2 - z_2|^{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{4-\varepsilon-2\beta}}} \right]^{\frac{4-\varepsilon-2\beta}{1-\varepsilon}}.$$

Gli ultimi due integrali esistono entrambi finiti pur di scegliere ε sufficientemente piccolo (in modo che $\varepsilon(2 - \varepsilon) < 4 - 2\beta$) e il secondo è una funzione di z limitata in Ω^* .

Dalla (4.8) segue in definitiva

$$\| \mathbf{u} \|_{0, \Omega^*}^2 \leq c_{22}(\beta, \varepsilon) \| \mathbf{g} \|_{L^2(\Omega^*)}^2 \leq c_{23} \| \mathbf{u} \|_{\Omega^*}^2.$$

Con ciò resta provato che in $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$ vale la maggiorazione (4.1) mentre non sussiste la (4.2). E questo è quanto ci eravamo proposto di dimostrare.

5. — Nel numero precedente abbiamo dimostrato la validità della maggiorazione (4.1) per i vettori di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ relativamente a una particolare scelta dell'aperto Ω e dell'insieme $\partial_1\Omega$. La tecnica usata non è però legata a quel caso particolare ma permette di dimostrare alcuni teoremi di carattere generale che è utile enunciare data l'importanza della maggiorazione (4.1).

Usiamo la nomenclatura introdotta nel numero precedente: Ω è un aperto, limitato, di R^n , $\partial_1\Omega$ un sottoinsieme, fissato, di $\partial\Omega$, $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ la classe dei vettori di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ nulli su $\partial_1\Omega$, $V^q(\Omega)$ la chiusura di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_{E^q(\Omega)}$. Per ogni punto $x \in \Omega$ indichiamo con $S(x)$ un cono illimitato di vertice x e apertura $\sigma(x)$ tale che le semirette uscenti da x e interne a $S(x)$ incontrino $\partial\Omega$ in un sol punto e $S(x) \cap \partial\Omega$ sia interno a $\partial_1\Omega$.

Enunciamo i seguenti teoremi accennando appena alle dimostrazioni che sono analoghe a quelle di teoremi dati precedentemente.

TEOREMA [I.5]. — *Se ad ogni punto $x \in \Omega$ si può associare un cono $S(x)$ del tipo sopra detto in modo tale che*

$$\inf_x \sigma(x) = \sigma > 0$$

in $V^q(\Omega)$ sussiste la maggiorazione

$$(5.1) \quad \| \mathbf{u} \|_{0, q} \leq c_{24} \| \mathbf{u} \|_q.$$

Sia $\mathbf{u} \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$, x un punto fissato di Ω . Prolunghiamo $\mathbf{u}(x)$ in tutto $S(x)$ ponendolo nullo in $S(x) - \Omega$. Indichiamo con $C(x)$ il cono ottenuto troncando $S(x)$ con un piano normale all'asse di $S(x)$ e avente distanza $r = \text{diam} \cdot \Omega$ da x .

Usando lo stesso procedimento con cui abbiamo stabilito la (2.1), tenuto conto della (3.3) e del fatto che \mathbf{u} (prolungato) si annulla sulla base di

$C(x)$ con tutte le derivate, possiamo scrivere la maggiorazione

$$|u(x)| \leq c_{25} \frac{1}{\sigma^2(x)} \int_{O(x)}^n \frac{\sum_{hk} |s_{hk}(u(y))|}{|x-y|^{n-1}} dy \leq \frac{c_{25}}{\sigma^2} \int_{\Omega}^n \frac{\sum_{hk} |s_{hk}(u(y))|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

dove $\sum_1^n |s_{hk}(u(y))| \in L^q(\Omega)$. Posto allora

$$g(y) = \begin{cases} \sum_1^n |s_{hk}(u(y))| & \text{per } y \in \Omega \\ 0 & \text{per } y \in R^n - \Omega \end{cases}$$

si ottiene:

$$|u(x)| \leq \frac{c_{25}}{\sigma^2} U^g(x).$$

Di qui, applicando il teorema di Sobolev richiamato nel n. 2, segue la (5.1) in $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ e quindi in $V^q(\Omega)$.

Indicata con $\mathcal{F}(x)$ la famiglia dei coni $S(x)$ che si possono associare al punto x di Ω , poniamo

$$(5.2) \quad \Sigma(x) = \sup_{\mathcal{F}} \sigma(x).$$

L'ipotesi che $\Sigma(x)$ abbia in Ω estremo inferiore positivo si può sostituire, più in generale, con quella che $\frac{1}{\Sigma(x)} \in L^p(\Omega)$ per un certo $p \geq 1$. Vale infatti il seguente teorema:

TEOREMA [II.5]. — Se Ω e $\partial_1\Omega$ sono tali che

$$\frac{1}{\Sigma(x)} \in L^p(\Omega)$$

per un certo $p \geq 1$, allora in $V^q(\Omega)$ sussiste la maggiorazione

$$(5.3) \quad \|u\|_{0,q} \leq c_{26} \|u\|_q.$$

Fissato x in Ω indichiamo con $S_\Sigma(x)$ un cono illimitato di vertice x , apertura $\Sigma(x)$, tale che ogni semiretta uscente da x e interna a $S_\Sigma(x)$ incontri

$\partial\Omega$ in un sol punto appartenente a $\partial_1\Omega$ ⁽²⁷⁾, e indichiamo con $C_\Sigma(x)$ il cono di vertice x ottenuto troncando $S_\Sigma(x)$ con un piano perpendicolare all'asse di $S_\Sigma(x)$ a distanza $r = \text{diam} \cdot \Omega$ da x .

Sia $\mathbf{u} \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$. Prolunghiamo \mathbf{u} in tutto $S_\Sigma(x)$ ponendolo nullo in $S_\Sigma(x) - \Omega$. Sempre sfruttando la tecnica usata per dimostrare la (2.1) tenuto conto della (3.3), della posizione (5.2) e del fatto che \mathbf{u} (prolungato) si annulla sulla base di $C_\Sigma(x)$ con tutte le derivate, possiamo scrivere la maggiorazione

$$(5.4) \quad |\mathbf{u}(x)| \leq \frac{c_{27}}{\Sigma^2(x)} \int_{C_\Sigma(x)} \frac{\sum_{hk}^n |s_{hk}(\mathbf{u}(y))|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

analoga alla (3.4) del lemma [I.3]. Di qui, con procedimento uguale a quello seguito per stabilire il teorema [I.3] si ricava la validità della maggiorazione (5.3) per i vettori di $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ e quindi per i vettori di $V^q(\Omega)$.

Questi teoremi estendono agli spazi $E^q(\Omega)$ un risultato di G. Stampacchia relativo agli spazi $H^{1,q}(\Omega)$, e di conseguenza $[H^{1,q}(\Omega)]^n$ (cfr. [7], [8]) e generalizzano notevolmente un criterio da me dato in [2] (cfr. teor. (2.1)) per lo spazio $E^2(\Omega)$.

(27) Un cono siffatto esiste per la posizione (5.2).

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. ARONSZAJN-K. T. SMITH - « *Theory of Bessel potentials-part I* » - Technical Report 22 - Univ. of Kansas (1959).
- [2] S. CAMPANATO - « *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità* » - Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. XIII, (1959).
- [3] S. CAMPANATO - « *Proprietà di alcuni spazi di distribuzioni e loro applicazione* » - Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. XIV, (1960).
- [4] S. CAMPANATO - « *Il teorema di inclusione di Sobolev per una classe di aperti non dotati della proprietà di cono* » - In corso di stampa su Ricerche di Matematica - Napoli.
- [5] L. SCHWARTZ - « *Théorie des distributions* » - Ed. Hermann, Paris.
- [6] S. L. SOBOLEV - « *Su un teorema di analisi funzionale* » - Matematicheskij Sbornik, 4, (46), (1938).
- [7] G. STAMPACCHIA - « *Sur des espaces de fonctions qui interviennent dans les problèmes aux limites elliptiques* » - Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Lauvain, (1960).
- [8] G. STAMPACCHIA - « *Problemi al contorno ellittici con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane* » - Annali di Matem. pura e appl. (IV), vol. LI, (1960).
- [9] J. GOBERT - « *Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité* » - Bull. Soc. Royale des Sciences de Liège - n. 3-4, (1962).