ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. LIONS
E. MAGENES

Problemi ai limiti non omogenei (V)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 1 (1962), p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_1_1_0>

PROBLEMI AI LIMITI NON OMOGENEI. (V)

di J. L. LIONS (Nancy) e E. MAGENES (Pavia)

In questo lavoro continuiamo lo studio dei problemi ai limiti non omogenei per le equazioni lineari ellittiche:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ B_j u = g_j & \text{su } \Gamma, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato e regolare dello spazio R^n, Γ è la sua frontiera, A è un operatore lineare ellittico d'ordine $2m$ a coefficienti sufficientemente regolari, e i B_j sono operatori di frontiera di ordine $m_j < 2m$, costituenti un sistema « normale » e verificanti inoltre la cosidetta « condizione complementare » rispetto ad A, nel senso ad es. di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3] (i numeri [ ] si riferiscono alla bibliografia finale).

Lo studio viene fatto cercando la soluzione u negli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ del tipo di SOBOLEV, con $p > 1$ e *s reale*, $0 \leq s \leq 2m$ (per s intero si ha notoriamente lo spazio delle u appartenenti a $L^p(\Omega)$ insieme a tutte le loro derivate, nel senso delle distribuzioni su Ω, d'ordine $\leq s$).

Secondo lo spirito informatore dei lavori precedenti, in particolare di [21], dove è studiato il caso $p = 2$, e di [22], dove è studiato solo il problema di DIRICHLET per $p > 1$, si cercano le condizioni migliori sui dati g_j perchè la soluzione di (I) sia in $W^{s,p}(\Omega)$, arrivando infatti non solo a teoremi di esistenza e di unicità, ma nella maggior parte dei casi addirittura a teoremi di *isomorfismo* per l'operatore $\{A\,;\, B_0, \ldots, B_{m-1}\}$; uno dei risultati principali di questo lavoro (un quadro riassuntivo dei risultati ottenuti qui e nei precedenti lavori [21], [22] e [23] è stato messo nell'ultimo numero per comodità del lettore e ad esso rinviamo per maggiori precisazioni) stabilisce infatti che *in ipotesi opportune di unicità, per ogni* $p > 1$ *e s reale tale che sia* $0 \leq s \leq 2m$ *e* $s - \dfrac{1}{p}$ *non sia intero, l'applicazione* $u \to \{Au\,;\, B_0 u, \ldots, B_{m-1} u\}$ *è un isomorfismo di* $D_A^{s,p}(\Omega)$ (spazio delle $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tali che $Au \in L^p(\Omega)$)

su $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$; il che assicura in particolare che (I) è risolubile per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e ogni $g_j \in W^{s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ e la soluzione u appartiene a $W^{s,p}(\Omega)$ ed è unica.

Desideriamo mettere in evidenza il fatto che è $0 \leq s \leq 2m$ e l'idea che ci ha permesso di ottenere i nostri risultati. I lavori recenti di BROWDER [7], [8], AGMON-DOUGLIS-NIREBNERG [3], SCHECTER [27], [28] e [29], PEETRE [25] hanno studiato a fondo il problema per $s \geq 2m$ e in alcuni casi per $s > \max\{m_j\} + \dfrac{1}{p}$; si tratta dunque di risultati in classi di funzioni *più regolari* di quelle da noi prese qui in considerazione.

Per dualità da questi risultati *più regolari* si ottengono poi risultati in classi *più ampie*, per es. in $W^{s,p}_{\overline{\Omega}}$ con s negativo (sottospazio delle $u \in W^{s,p}(R^n)$ con supporto in $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$), classi che sono *meno regolari* di quelle qui considerate; tali sono ad es. i risultati ottenuti col metodo di VISIK-SOBOLEV [32] da LIONS [16], da MAGENES-STAMPACCHIA [24] e più recentemente da SCHECTER [30 bis]; in essi è però da osservare in ogni caso che l'equazione $Au = f$ e le condizioni ai limiti $B_j u = g_j$ vengono in un certo senso « mescolate » e unificate nel senso delle distribuzioni su R^n e non più su Ω e su Γ separatamente (*).

Ebbene anche noi abbiamo utilizzato i risultati *più regolari* (precisamente in $W^{2m,p}(\Omega)$) e per dualità siamo passati a risultati *meno regolari* (nello spazio $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$); ma abbiamo poi fatto uso anche di una terza idea, cioè di *interpolare* tra i risultati così ottenuti, e in questo modo siamo riusciti a studiare il problema anche negli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ con *s reale* compreso tra 0 e $2m$.

Naturalmente l'idea di utilizzare la teoria dell'interpolazione ha presentato difficoltà di vario genere non tutte facilmente superabili: così se nel caso hilbertiano, $p = 2$, è stato possibile interpolare direttamente (v. [21]) tra i due risultati estremi ($s = 0$, $s = 2m$), nel caso $p \neq 2$ si è dovuto procedere in modo diverso, sia utilizzando alternativamente due diverse teorie d'interpolazione sia sfruttando, con procedimenti di tipo « misto », i risultati già stabiliti per gli stessi problemi ai limiti e quelli sulle tracce delle funzioni di $W^{s,p}(\Omega)$ per *s reale*, unitamente sempre alle teorie dell'interpolazione.

(*) Recentemente PEETRE [26] per $p = 2$ ha ottenuto *direttamente* risultati di questo tipo, cioè in classi *meno regolari*, arrivando successivamente per dualità ai risultati *più regolari*.

Nel n. 6 infine dimostriamo, come applicazione dei risultati ottenuti sul problema di NEUMANN, il *teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui nello spazio* $W^{s,p}(\Omega)$, che avevamo già annunciato nel n. 13 di [22] e che estende quello ben noto di F. RIESZ relativo allo spazio $L^p(\Omega)$.

Per i simboli, la nomenclatura usata e una bibliografia più completa rinviamo a [22], che supponiamo noto al lettore.

Ottobre 1961.

n. 1. Un risultato relativo agli spazi $W^{s,p}(\Gamma)$.

1.1. Nello spazio euclideo R^n, il cui punto indicheremo con $x = (x_1, \dots, x_n)$, sia Ω un insieme aperto e limitato di classe C^∞, cioè tale che la sua frontiera Γ sia una varietà $(n-1)$-dimensionale, indefinitamente differenziabile e che Ω sia tutto da una stessa parte di Γ (1).

Utilizzeremo nel seguito gli spazi $W^{s,p}(R^n)$, $W^{s,p}(\Omega)$, $W^{s,p}(\Gamma)$, $H^{s,p}(R^n)$, $H^{s,p}(\Omega)$, $H^{s,p}(\Gamma)$ per p reale >1 e s reale qualunque; per la loro definizione e le loro proprietà rinviamo al cap. I di [22].

Ricordiamo in particolare che tra i risultati ottenuti con procedimento di tipo « misto », utilizzando cioè sia la teoria dei problemi ai limiti ellittici sia le teorie dell'interpolazione, si ha il seguente (Prop. 8.1 di [22]):

$$[W^{r-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+s\theta-1/p,p}(\Gamma) \tag{1.1}$$

dove è: $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$, r e s interi tali che $s \geq 1$, $r \geq 2s$ e $\theta(r-s)$ è intero, e $[\dots]$ è lo spazio « intermedio » secondo la teoria dell'interpolazione « complessa » di CALDERON [9] e di LIONS [19], richiamata anche nel n. 3.2 di [22].

Vogliamo ora estendere questo risultato al caso di r e s *interi* con la sola condizione che $\theta(r-s)$ *sia intero* e precisamente dimostrare il

TEOR. 1.1: *Nelle ipotesi fatte su Ω, se $1 < p < +\infty$, $0 < \theta < 1$, r e s sono interi di segno qualunque tali che $\theta(r-s)$ sia intero, allora è (algebricamente e topologicamente)*

$$[W^{r-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(\Gamma).$$

DIMOSTRAZIONE: *a*) Osserviamo anzitutto che la Prop. 8.1 di [22] vale anche se si sostituisce a Γ lo spazio R^{n-1} delle $(x_1, \dots, x_{n-1})$; basta infatti nei ragionamenti svolti per la Prop. 8.1 di [22] sostituire Ω con il semispazio R^n_+ degli x per cui è $x_n > 0$ e prendere ad es. come operatore A l'operatore $(-\Delta + 1)^m$, m intero ≥ 1, Δ laplaciano. Dunque si ha in particolare

$$[W^{2m-j-1/p,p}(R^{n-1}), W^{m-j-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)] = W^{2m-\theta m-j-1/p,p}(R^{n-1}) \tag{1.2}$$

per m intero ≥ 1, $j = 0, \dots, m-1$, $0 < \theta < 1$, θm intero.

---

(1) Queste ipotesi su Ω sono fatte per semplicità; esse potrebbero essere generalizzate in ognuno dei risultati che daremo nel presente lavoro; non ci preoccupiamo di ricercare le ipotesi minime su Ω, per ogni singolo risultato, nelle quali valgono i nostri ragionamenti.

b) Si introduca ora l'operatore $\mathcal{G}^{(m)}$, m intero ≥ 1, già definito e utilizzato in [22], n. 1.3:

$$\mathcal{G}^{(m)} = \mathcal{F}^{-1} (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathcal{F} \qquad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

dove $\mathcal{F}$ è la trasformata di Fourier nello spazio R^{n-1} e $\mathcal{F}^{-1}$ la antitrasformata relativa.

Come si è in sostanza già visto in [22] n. 1.3, applicando il teorema di MIHLIN sui moltiplicatori nello spazio $\mathcal{F} L^p (R^{n-1})$, ivi ricordato, si ha che $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di $W^{s,p} (R^{n-1})$ su $W^{s-m,p} (R^{n-1})$ per ogni s intero.

Applicando allora il teorema di interpolazione della teoria di interpolazione «reale» ricordata nel n. 1.1 di [22] (v. teor. 1.1 di [22]) ai casi $s = k$ e $s = k - 1$, con k intero qualunque, si ha che $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di

$$T(p, 0; W^{k,p} (R^{n-1}), W^{k-1,p} (R^{n-1})) \text{ su } T(p, 0; W^{k-m,p} (R^{n-1}), W^{k-1-m,p}(R^{n-1})).$$

Ma questi ultimi spazi in virtù della Prop. 1.4 di [22] «coincidono», cioè sono isomorfi algebricamente e topologicamente, rispettivamente con gli spazi $W^{k-1/p,p} (R^{n-1})$ e $W^{k-m-1/p,p} (R^{n-1})$ e quindi possiamo concludere con il

LEMMA 1.1.: *$\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di $W^{k-1/p,p} (R^{n-1})$ su $W^{k-m-1/p,p}(R^{n-1})$ per ogni k intero.*

c) Dimostriamo ora il

LEMMA 1.2: *Per m intero $\geq 1, j = 0, \dots, m-1$, $0 < \theta < 1$ e θm intero si ha*

$$[W^{m-j-1/p,p} (R^{n-1}), W^{-j-1/p,p} (R^{n-1}) ; \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)m-j-1/p,p} (R^{n-1}).$$

Infatti, tenuto conto del lemma 1.1, enunciato per i casi $k = 2m - j$ e $k = m - j$, e del teorema di interpolazione «complessa» di CALDERON e LIONS (v. ad es. teor. 3.1 di [22]) si ha che $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di

$$[W^{2m-j-1/p,p} (R^{n-1}), W^{m-j-1/p,p} (R^{n-1}); \delta(\theta)] \text{ su }$$

$$[W^{m-j-1/p,p} (R^{n-1}), W^{-j-1/p/p} (R^{n-1}); \delta(\theta)].$$

In virtù della (1.2) e ancora del lemma 1.1, si ha il lemma 1.2.

d) Dimostriamo ora il teor. 1.1 per $\Gamma = R^{n-1}$, cioè dimostriamo

LEMMA 1.3: *Per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, r e s interi tali che $\theta(r - s)$ sia intero è*

$$[W^{r-1/p,p} (R^{n-1}), W^{s-1/p,p} (R^{n-1}); \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p} (R^{n-1}).$$

Anzitutto osserviamo che, poichè $[A_0, A_1; \delta(\theta)] = [A_1, A_0; \delta(1-\theta)]$, potremo sempre supporre $r > s$, il caso $r = s$ essendo banale. Se allora r è > 0 e $s \leq 0$, basta applicare il lemma 1.2 ponendo $r = m - j$ e $j = -s$.

Nel caso $r > s > 0$ riprendiamo con maggior generalità il metodo usato in [22] per il caso $r \geq 2s > 0$ (Prop. 8.1 di (22]) e applichiamolo, come è possibile e come è già stato osservato in a), al caso $\Omega = R^n_+$ e $A = (-\Delta + 1)^m$.

Allora, in virtù del teor. 8.2 di [22], l'operatore $\{A, \vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di $W^{m+l,p}(R^n_+)$ su $W^{-m+l,p}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{m+l-j-1/p,p}(R^{n-1})$, per $l=0,1,...,m$.

Interpolando col metodo «complesso» tra i casi l e 0, tenuto conto della definizione degli spazi $H^{s,p}(R^n_+)$ (n. 4 di [22]) del fatto che $H^{s,p}(R^n_+) = W^{s,p}(R^n_+)$ per s intero, delle Prop. 3.4 e 4.1 di [22], valida anche per $\Omega = R^n_+$, e del théor. 3 di [19], si ha che per $(1-\theta)l$ intero $\{A, \vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di $W^{m+(1-\theta)l,p}(R^n_+)$ su

$$W^{-m+(1-\theta)l,p}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} [W^{m+l-j-1/p,p}(R^{n-1}), W^{m-j-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)]$$

e di qui, confrontando con lo stesso teor. 8.2 di [22] ora richiamato si ottiene

$$[W^{m+l-j-1/p,p}(R^{n-1}), W^{m-j-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)] = W^{m+(1-\theta)l-j-1/p,p}(R^{n-1})$$

per $(1-\theta)l$ intero, $j = 0, 1, ..., m-1$, $l = 0, 1, ..., m$, $0 < \theta < 1$.

Prendendo allora $m + l - j = r$ e $m - j = s$ si ottiene il lemma 1.3 anche nel caso $r > s > 0$.

Infine nel caso $0 > r > s$, scegliamo m intero positivo in modo che sia $\varrho = r + m > 0$, $\sigma = s + m > 0$. Allora per quanto si è visto è $[W^{\varrho-1/p,p}(R^{n-1}), W^{\sigma-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)\varrho+\theta\sigma-1/p\,p}(R^{n-1})$. D'altra parte per il lemma 1.1 $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di $W^{\varrho-1/p,p}(R^{n-1})$ su $W^{r-1/p,p}(R^{n-1})$ e di $W^{\sigma-1/p,p}(R^{n-1})$ su $W^{s-1/p,p}(R^{n-1})$; dunque, per interpolazione, lo è da $W^{(1-\theta)\varrho+\theta\sigma-1/p,p}(R^{n-1}) = W^{(1-\theta)r+\theta s+m-1/p,p}(R^{n-1})$ su $[W^{r-1/p,p}(R^{n-1}), W^{s-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)]$, da cui riapplicando il lemma 1.1, si ha $[W^{r-1/p,p}(R^{n-1}), W^{s-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(R^{n-1})$ c. v. d.

e) Passiamo ora sulla frontiera Γ di Ω e dimostriamo così il teor. 1.1.

Anzitutto si ha, ricordando la definizione degli spazi $W^{\sigma,p}(\Gamma)$ data nel n. 2.5 e gli operatori Φ_i ivi introdotti, che per ogni i fissato Φ_i è un operatore lineare continuo da $W^{\sigma,p}(\Gamma)$ in $W^{\sigma,p}(R^{n-1})$ per ogni σ reale, e in particolare quindi per $r - \frac{1}{p}$ e $s - \frac{1}{p}$, sicchè per il teorema di interpolazione «complessa» Φ_i è lineare e continuo da

$$[W^{r-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)] \text{ in } [W^{r-1/p,p}(R^{n-1}), W^{s-1/p,p}(R^{n-1}); \delta(\theta)];$$

e questo ultimo spazio, per il lemma 1.2, coincide con $W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(R^{n-1})$. Dunque per la definizione stessa degli spazi $W^{\sigma,p}(\Gamma)$ si ha

$$[W^{r-1/p,p}(\Gamma),\ W^{s-1/p,p}(\Gamma);\ \delta(\theta)] \subset W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(\Gamma)$$

l'inclusione essendo da intendere « algebricamente e topologicamente » (con questa nomenclatura intendiamo dire, come abbiamo fatto nei lavori precedenti, che l'inclusione è algebrica e che l'iniezione del primo spazio nel secondo è anche continua).

Dimostriamo ora l'inclusione inversa. Sia perciò $u \in W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(\Gamma)$ e si consideri il trasformato $\Phi_i u$ di u mediante Φ_i. Si riprendano poi gli omeomorfismi θ_i, il ricoprimento di Γ mediante il sistema dei Γ_i e la relativa « partizione dell'unità » mediante le funzioni β_i, introdotti nel n. 2.5 di [22]; e facendo sempre uso delle notazioni introdotte in [22], n. 2.5, detta α_i una funzione appartenente a $\mathcal{D}(R^{n-1})$ e uguale ad 1 sull'insieme trasformato del supporto di β_i attraverso θ_i, si consideri l'operatore $v \to \chi_i v$ di $\mathcal{D}(R^{n-1})$ in $\mathcal{D}(\Gamma)$, definito per $v \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ nel seguente modo

$$\chi_i v(x) = \begin{cases} (\alpha_i v)(\theta_i(x)) & \text{per } x \in \Gamma_i \\ 0 & \text{per } x \in \Gamma - \Gamma_i . \end{cases}$$

Esso è ovviamente lineare da $\mathcal{D}(R^{n-1})$ in $\mathcal{D}(\Gamma)$ e con ragionamento analogo a quello usato in [22] per gli operatori Φ_i e Ψ_i ivi introdotti, si vede subito che può prolungarsi per continuità in un operatore, ancora indicato con χ_i, lineare e continuo da $W^{\sigma,p}(R^{n-1})$ in $W^{\sigma,p}(\Gamma)$ per ogni σ reale, e dunque un particolare per $\sigma = r - \dfrac{1}{p}$ e $\sigma = s - \dfrac{1}{p}$. Applicando allora il teorema di interpolazione complessa e il lemma 1.3, si ha che χ_i è lineare e continuo da $W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(R^{n-1})$ in $[W^{r-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$. Operando quindi con χ_i su $\Phi_i u \in W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(R^{n-1})$, si ha che $\chi_i(\Phi_i u) = \beta_i u \in [W^{r-1/p,p}(\Gamma); W^{s-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$ e quindi per la stessa definizione degli spazi $W^{\sigma,p}(\Gamma)$:

$$[W^{r-1/p,p}(\Gamma),\ W^{s-1/p,p}(\Gamma);\ \delta(\theta)] \supset W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(\Gamma), \qquad \text{c. v. d.}$$

Osservazione 1.1: È naturale porsi il problema: per quali valori di ξ, $0 < \xi < 1$, varrà la

$$[W^{r-\xi,p}(\Gamma),\ W^{s-\xi,p}(\Gamma);\ \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s-\xi,p}(\Gamma)$$

con r, s interi e $\theta(r-s)$ intero?. Il teor. 1.1 risolve il problema solo per $\xi = \dfrac{1}{p}$.

OSSERVAZIONE 1.2: Il teor. 1.1, se si ricordano le Prop. 2.11 e 3.4 e il n. 4.3 di [22], si può anche scrivere nella seguente forma

$$[T(p, 0\,;\ W^{r+1,p}(\Gamma),\ W^{r,p}(\Gamma)),\ T(p, 0\,;\ W^{s+1,p}(\Gamma),\ W^{s,p}(\Gamma))\,;\ \delta(\theta)] =$$

$$= T(p, 0\,;\ [W^{r+1,p}(\Gamma),\ W^{s+1,p}(\Gamma)\,;\ \delta(\theta)],\ [W^{r,p}(\Gamma),\ W^{s,p}(\Gamma)\,;\ \delta(\theta)])$$

per r e s interi e $\theta(r-s)$ intero; e in questa forma esprime una specie di «commutatività» delle operazioni di interpolazione $T(...)$ e $[...]$. Si pone il problema di sapere se essa è vera in generale, cioè se si ha

$$[T(p, \alpha\,;\ X_0, X_1),\ T(p, \alpha\,;\ Y_0, Y_1)\,;\ \delta(\theta)] =$$

$$= T(p, \alpha\,;\ [X_0, Y_0\,;\ \delta(\theta)],\ [X_1, Y_1\,;\ \delta(\theta)])$$

X_i e Y_i essendo spazi di Banach verificanti le condizioni richieste perchè abbiano senso i due membri della relazione scritta (v. ad es. i n. 1 e 3 di [22]).

n. 2. Ipotesi e risultati preliminari sui problemi ai limiti non omogenei per gli operatori lineari ellittici.

2.1. Sempre seguendo le notazioni di [22], consideriamo ora nell'insieme Ω introdotto nel n. 1 un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$, che scriveremo nella forma

$$Au = \sum_{|k|,|h|\leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh}\, D^h u(x)) \tag{2.1}$$

e *i cui coefficienti* a_{hk} *supporremo appartenere a* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$) (2).

Inoltre supporremo che A sia *ellittico* in $\overline{\Omega}$, cioè per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e ogni vettore $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ reale e $\neq 0$ sia

$$\sum_{|k|=|h|=m} a_{hk}(x)\, \xi^{k+h} \neq 0 \qquad (\xi^{k+h} = \xi_1^{k_1+h_1} \dots \xi_n^{k_n+h_n}).$$

Se è $n = 2$ supporremo anche che A sia *propriamente ellittico,* in $\overline{\Omega}$, cioè che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e ogni coppia di vettori reali ξ e ξ' linearmente indipendenti il polinomio nella variabile complessa τ: $\sum_{|k|=|h|=m} a_{hk}(x)(\xi + \tau\xi')^{k+h}$

(2) A proposito delle ipotesi sugli a_{hk} vale un'osservazione analoga a quella della nota (1). Ricordiamo anche che se $k = (k_1, \dots, k_n)$, k_i intero ≥ 0, è $|k| = k_1 + \dots k_n$ e $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$.

abbia esattamente m radici con parte immaginaria positiva (3).

Siano poi

$$a(u, v) = \sum_{|k|,\,|h| \leq m} \int_{\Omega} a_{kh}\, D^h u\, \overline{D^k v}\, dx$$

la forma sesquilineare associata ad A rispetto alla decomposizione (2.1) assegnata di A; e

$$A^* v = \sum_{|h|,\,|k| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (\overline{a_{hk}}\, D^h v)$$

l'operatore aggiunto formale di A e

$$a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$$

la forma sesquilineare associata ad A^*.

2.2. Siano poi dati m « operatori di frontiera », cioè m operatori differenziali lineari

$$B_j u = \sum_{|h| \leq m_j} b_{j,h}(x)\, D^h u \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

i cui coefficienti $b_{j,h}(x)$ supporremo *definiti solo su Γ e ivi indefinitamente differenziabili* (4) *e il cui ordine m_j supporremo ≥ 0 e minore di $2m$*; faremo inoltre l'ipotesi che il sistema degli operatori $\{B_j\}$ sia *normale* nel senso di ARONSZAJN-MILGRAM [6] (o [28]), cioè tale che sia $m_j \neq m_i$ se $j \neq i$ e, per ogni punto $x \in \Gamma$, risulti

$$\sum_{|h| = m_j} b_{j,h}(x)\, \nu^h \neq 0$$

per ogni vettore $\nu \neq 0$ e normale a Γ in x.

Un tale sistema di operatori frontiera $\{B_j\}$ si può sempre e in più modi (5) completare con altri m operatori frontiera $\{C_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ d'ordine $\mu_j < 2m$, a coefficienti indefinitamente differenziabili su Γ, formanti

(3) E' noto (v. ad es. [3], [27]) che, se è $n > 2$, allora ogni operatore ellittico è anche propriamente ellittico.

(4) Anche per questa ipotesi vale una osservazione analoga a quella della nota (1).

(5) Basta ad es. prendere gli operatori $\dfrac{\partial^i}{\partial \nu^i}$ (ν normale interna a Γ) per quei valori di i tra 0 e $2m-1$ che sono diversi dagli m_j.

anch'essi un sistema *normale*, in modo che il sistema $\{B_0,\dots,B_{m-1};C_0,\dots,C_{m-1}\}$ risulti un *sistema di* DIRICHLET *di ordine* $2m$ nel senso di [6], cioè tale che esso sia *normale* e gli ordini m_j, μ_j, $j=0,\dots,m-1$ esauriscano i numeri $0,1,\dots,2m-1$.

Esistono allora (si veda ad es. [6], [28] pag. 467 e seg., [25] pag. 78) altri $2m$ operatori frontiera B_j^*, C_j^*, $j=0,\dots,m-1$, a coefficienti indefinitamente differenziabili su Γ, d'ordine rispettivamente $m_j^*=2m-\mu_j-1$ e $\mu_j^*=2m-m_j-1$ tali che il sistema $\{B_0^*,\dots,B_{m-1}^*,C_0^*,\dots,C_{m-1}^*\}$ sia anch'esso un sistema di DIRICHLET d'ordine $2m$ e inoltre valga la *formula di* GREEN

$$(Au,v)-(u,A^*v)=\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma C_ju\,\overline{B_j^*v}\,d\sigma-\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma B_ju\,\overline{C_j^*v}\,d\sigma \tag{2.2}$$

per ogni coppia di funzioni u e $v\in\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, essendosi posto al solito $(u,v)=$ $=\int_\Omega u\bar v\,dx$.

In particolare se u e v verificano le condizioni al contorno

$$B_ju=0 \quad \text{su } \Gamma \quad \text{e} \quad B_j^*v=0 \quad \text{su } \Gamma, \qquad j=0,\dots,m-1 \tag{2.3}$$

la (2.2) diventa

$$(Au,v)-(u,A^*v)=0. \tag{2.4}$$

In virtù del fatto che $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{2m,p}(\Omega)$ e delle proprietà di tracce delle funzioni di $W^{2m,p}(\Omega)$ (si ricordi ad es. il teor. 5.1 di [22]), la (2.2) è valida anche per $u\in W^{2m,p}(\Omega)$ e $v\in W^{2m,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e la (2.4) lo è se in più u e v verificano le (2.3) (6).

---

(6) Si osservi che se $u\in W^{2m,p}(\Omega)$ e $v\in W^{2m,p'}(\Omega)$, allora $B_ju\in W^{2m-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ e $C_j^*v\in W^{2m-\mu^*-1/p',p'}(\Gamma)=W^{m_j+1/p,p'}(\Gamma)$ e dunque gli integrali $\int_\Gamma B_ju\,\overline{C^*v_j}\,d\sigma$ hanno senso; e così pure per $\int_\Gamma C_ju\,\overline{B_j^*v}\,d\sigma$. Ricordiamo anche che l'operatore $\frac{\partial^j}{\partial\nu^j}$, derivazione secondo la normale ν a Γ, viene indicato di solito con il simbolo γ_j.

Si osservi che la (2.2) contiene come caso particolare la (6.1) di [22] quando si ponga $B_j = B_j^* = \gamma_j$, $C_j = S_j$, $C_j^* = T_j$, S_j e T_j essendo gli operatori di NEUMANN associati alla decomposizione di A assegnata mediante la (2.1), vale a dire tali che sia

$$(Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma S_j u \, \overline{\gamma_j v} \, d\sigma \tag{2.5}$$

$$(A^* v, u) = a(v, u) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma T_j v \, \overline{\gamma_j u} \, d\sigma \tag{2.6}$$

per ogni u e $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Noi considereremo nel seguito il problema ai limiti

$$\begin{cases} Au = f \\ B_j u = g_j \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.7}$$

Il problema

$$\begin{cases} A^* v = \varphi \\ B_j^* v = \psi_j \end{cases} \qquad j = 0, \ldots, m-1, \tag{2.8}$$

si dice allora *problema aggiunto formale di* (2.7), *relativamente alla formola di Green* (2.2).

2.3. Introduciamo ora una nuova condizione sugli operatori B_j. Nell'ipotesi fatte su A è noto che, fissato il punto $x \in \Gamma$, il polinomio nella variabile complessa τ: $\sum_{|k|,|h|=m} a_{kh}(x)(\xi + \tau\nu)^{k+h}$ dove ν è un qualunque vettore reale $\neq 0$ e normale a Γ in x e ξ un qualunque vettore reale $\neq 0$ e tangente a Γ in x, ammette m radici $\tau_1(\xi, \nu) \ldots \tau_m(\xi, \nu)$ con parte immaginaria positiva; considerati allora gli m polinomi in τ

$$P_j(x, \xi + \tau\nu) = \sum_{|k|=m_j} b_{j,k}(\xi + \tau\nu)^k \qquad j = 0, \ldots, m-1$$

imporremo la

Condizione complementare sui B_j rispetto ad A (7): *I polinomi $P_j(x, \xi + \tau\nu)$ siano linearmente indipendenti modulo il polinomio $\prod_{i=1}^{m}(\tau - \tau_i(\xi, \nu))$.*

Si ha allora ([28] lemma 2.3 e 2.1 e [30] pag. 186):

(7) Cf. [3]. Si dice anche secondo una nomenclatura di SCHECHTER [28] che $\{ B_j \}$ « ricopre » A.

PROP. 2.1: *Se i $\{B_j\}$ verificano la condizione complementare rispetto ad A, gli operatori $B_j^*, j = 0, 1, \ldots, m-1$, relativi ad ogni problema aggiunto formale di* (2.7), *verificano la condizioue complementare rispetto ad A^*.*

Secondo una nomenclatura di BROWDER [7] la Prop. 2.1 assicura che i problemi (2.7) e (2.8) sono *formalmente aggiunti e regolarizzabili.*

D'ora innanzi noi supporremo di aver fissato una volta per tutte la scelta degli operatori C_j e quindi del problema aggiunto formale (2.8) del problema ai limiti (2.7).

2.4 Ricordiamo ora che, per i risuitati di regolarizzazione di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3] e di BROWDER [7] e [8], si ha il seguente teorema (v. BROWDER [7], theor. 5):

TEOR. 2.1: *Nelle ipotesi fatte su Ω, A, B_j, condizione necessaria e sufficiente perchè il problema*

$$\begin{cases} Au = f \\ B_j u = 0 \end{cases} \qquad j = 0, \ldots, m-1$$

sia risolubile nello spazio $W^{2m,p}(\Omega)$ per ogni $f \in L^p(\Omega), p > 1$, è che il problema omogeneo

$$\begin{cases} A^* v = 0 \\ B_j^* v = 0 \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{2.9}$$

abbia in $W^{2m,p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, solo la soluzione $v = 0$; e, soddisfatta questa ipotesi, si ha $\| u \|_{W^{2m,p}(\Omega)} \leq c \| f \|_{L^p(\Omega)}$ (c indipendente da f e da u).

Indichiamo allora con $\mathcal{U}_p$) la seguente proposizione:

$\mathcal{U}_p$) *Il problema omogeneo*

$$\begin{cases} Au = 0 \\ B_j u = 0 \end{cases} \qquad j = 0, \ldots, m-1 \tag{2.10}$$

ammette in $W^{2m,p}(\Omega)$, p fissato > 1, solo la soluzione $u = 0$.

E analogamente indichiamo con $\mathcal{U}_q^*$) la proposizione:

$\mathcal{U}_q^*$) *Il problema* (2.9) *ammette in $W^{2m,q}(\Omega)$, q fissato > 1, solo la soluzione $v = 0$.*

È facile vedere che, se la $\mathcal{U}_p$) è verificata per un certo valore $p_0 > 1$ di p, essa lo è per ogni altro $p > 1$. Infatti se $u \in W^{2m,p}(\Omega)$ e verifica (2.10), allora per i risultati di regolarizzazione succitati (v. in particolare [7], theor. 1) essa appartiene anche a $W^{2m,p_0}(\Omega)$ e dunque è identicamente nulla. Risultato analogo vale per la $\mathcal{U}_q^*$).

Introdurremo allora come ipotesi base la seguente ipotesi

J_B) *Su* Ω, A *e i* B_j *valgano le ipotesi poste nei* n. 2.1, 2.2 *e* 2.3 *e inoltre per almeno un* $p>1$ *valga la* $\mathcal{U}_p$) *e almeno un* $q>1$ *valga la* $\mathcal{U}_q^*$).

Questa ipotesi è in sostanza l'analoga di quella introdotta nel n. 7 di [22] (e ivi indicata con J)) per il problema di DIRICHLET; sarà solo bene osservare che nel caso del problema di DIRICHLET la validità della $\mathcal{U}_q^*$) scende dall'ammettere la $\mathcal{U}_p$) (si veda il n. 7.1 di [22]), cosa in generale non più vera per il problema (2.7).

Per la validità della J_B) occorre dunque avere un teorema di unicità per il problema dato (2.7) e per un suo aggiunto (2.8) in almeno una classe $W^{2m,p}(\Omega)$. E perciò occorrerà in generale aggiungere alla *ellitticità* di A e alla *Condizione complementare sui* B_j (più precisamente alle condizioni dei n. 2.1, 2.2 e 2.3) qualche ulteriore ipotesi. Così ad es., se il problema è quello di DIRICHLET ($B_j = \gamma_j$), si hanno, come si è ricordato nel n. 7.1 di [22], condizioni ben note, quali la *forte ellitticità* di A e il fatto che il coefficiente del termine in u in A sia del tipo $a+\lambda$, con λ costante >0 sufficientemente grande.

Per problemi diversi da quello di DIRICHLET ci sembra utile osservare che, nei casi in cui il problema dato (2.7) possa ricondursi e risolversi mediante l'impostazione « variazionale », la validità della J_B) si collega con il problema della cosidetta *V-ellitticità* (si veda ad es. [19 bis] e [24]); così ad es. nel caso del problema di NEUMANN relativo alla decomposizione (2.1) assegnata di A ($B_j = S_j$), una condizione sufficiente per l'unicità in $W^{2m,2}(\Omega)$ di (2.9) e anche di (2.10) è la $W^{2m,2}(\Omega)$*-ellitticità*, cioè il fatto che per ogni $u \in W^{2m,2}(\Omega)$ si abbia

$$|a(u,u)| \geq \alpha \, \|u\|^2_{W^{2m,2}(\Omega)} \qquad (\alpha \text{ costante } > 0).$$

Il problema è così ricondotto a quello della *coercività* della forma $a(u,u)$ ed è noto che esso è stato studiato e risolto da ARONSZAJN [4], AGMON [2], SCHECHTER [27],... non solo per il problema di NEUMANN ma anche per una vasta classe di altri problemi al contorno.

Non riteniamo comunque sia qui il caso di entrare in ulteriori particolari, sembrandoci sufficienti le considerazioni fatte per illustrare il significato dell'ipotesi J_B), che noi assumeremo d'ora innanzi.

2.5 Indichiamo con $W_B^{2m,p}(\Omega)$ e con $W_{B^*}^{2m,p'}(\Omega)$ rispettivamente il sottospazio di $W^{2m,p}(\Omega)$ delle u verificanti le $B_j u = 0$, $j = 0, \dots, m-1$, e il sottospazio di $W^{2m,p'}(\Omega)$ delle v verificanti le $B_j^* v = 0$, $j = 0, \dots, m-1$.

Dal teor. 2.1 si ricava allora il

TEOR. 2.2: *Nell'ipotesi* J_B), *per ogni* $p>1$, *l'operatore* $u \to Au$ *è un iso-*

morfismo di $W_B^{2m,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega)$ *è l'operatore* $v \to A^* v$ *è un isomorfismo di* $W_{B^*}^{2m,p'}(\Omega)$ *su* $L^{p'}(\Omega), \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Tenuto poi conto delle proprietà di tracce ben note delle funzioni di $W^{2m,p}(\Omega)$ (si ricordi ad es. il teor. 5.1 di [22]), e del fatto che il sistema dei B_j è normale, con ragionamento di tipo abituale, analogo a quello usato per il teor. 7.3 di [22], si ottiene il

TEOR. 2.3 : *Nell'ipotesi* J_B), *per ogni* $p > 1$, *l'operatore* $u \to \{Au, Bu\} = \{Au\,;\, B_0 u, \ldots, B_{m-1} u\}$ *è un isomorfismo di* $W^{2m,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega) \times \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)$.

n. 3 Il problema ai limiti nello spazio $D_A^{0,p}(\Omega)$.

3.1 Seguendo una nomenclatura già introdotta in [22], indicheremo con $D_A^{s,p}(\Omega)$ per p e s reale, $p > 1$, $0 \leq s \leq 2m$, lo spazio di Banach delle $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tali che $Au \in L^p(\Omega)$, normalizzato da

$$\| u \|_{D_A^{s,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \| Au \|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p}$$

Come si è già visto in [22] (Prop. 9.1) ([8]) vale la seguente

PROP. 3.1 : *Nelle ipotesi fatte su A nel* n. 2.1, *lo spazio* $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ *è denso in* $D_A^{0,p}(\Omega)$, *per* $p > 1$.

Per $p = 2$ la Proposizione è dovuta ad HÖRMANDER [13]; essa si estende anche al caso $p > 1$. Per comodità del lettore richiamiamo qui rapidamente la dimostrazione che abbiamo già dato per $p = 2$ nella nota ([6]) di [21].

Si consideri l'operatore A come operatore non limitato in $L^p(\Omega)$, di dominio di definizione $D_A^{0,p}(\Omega)$; e sia A_F la chiusura di A definito su $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Occorre dimostrare che $A_F = A$. Ora poichè è evidente che $A_F \subset A$, basta dimostrare l'inclusione inversa; il che equivale, se si introducono gli operatori aggiunti, $(A)^*$ e $(A_F)^*$, rispettivamente di A e di A_F, a dimostrare la $(A_F)^* \subset (A)^*$ ([9]).

([8]) La prop. 9.1 è stata enunciata in [22] in ipotesi inutilmente più ristrettive di quelle che ora stabiliremo.

([9]) Gli operatori aggiunti vanno qui intesi nel senso della teoria degli operatori lineari nello spazio di BANACH $L^p(\Omega)$; come tali essi sono operatori lineari nello spazio $L^{p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, duale di $L^p(\Omega)$.

Sia dunque u elemento del dominio di definizione di $(A_F)^*$; se $(A_F)^* u = f$, con $f \in L^{p'}(\Omega)$, si ha

$$(u, A\varphi) = (f, \varphi) \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}). \tag{3.1}$$

Sia ora $\mathcal{A}$ l'operatore differenziale definito da

$$\mathcal{A}v = \sum_{|k|,|h| \geq m} (-1)^{|k|} D^k (\mathcal{A}_{k,h}(x) D^h v(x))$$

dove le funzioni $\mathcal{A}_{k,h}(x)$ sono definite in tutto R^n e ivi indefinitamente differenziabili, limitate con tutte le loro derivate e inoltre coincidono con $a_{k,h}$ su Ω. L'operatore $\mathcal{A}$ si dirà un *prolungamento* di A. In modo analogo si introduce l'operatore $\mathcal{A}^*$ *prolungamento* di A^*, aggiunto formale di A.

Evidentemente, poichè A e A^* sono propriamente ellittici in $\bar{\Omega}$, si può fare in modo che gli operatori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ siano essi stessi propriamente ellittici, almeno in un insieme aperto Ω' contenente Ω. Ciò posto, la (3.1) ci dice che $\mathcal{A}^* \tilde{u} = \tilde{f}$ (con $\tilde{v}$ indicheremo come d'abitudine il prolungamento di una funzione v ottenuta ponendo $\tilde{v} = v$ in Ω e $\tilde{v} = 0$ in $R^n - \Omega$). Ma allora poichè $\mathcal{A}^*$ è propriamente ellittico in Ω' e poichè $\tilde{u}$ e $\tilde{f}$ appartengono a $L^{p'}(R^n)$, in quanto u e f appartengono a $L^{p'}(\Omega)$, applicando i risultati di regolarizzazione di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3] e di BROWDER [7], [8], si ottiene che $\tilde{u} \in W^{2m,p'}(R^n)$ e quindi, poichè $\tilde{u}$ è a supporto in $\bar{\Omega}$, si ha che $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \dots, 2m-1$ e dunque $u \in W_0^{2m,p'}(\Omega)$.

E allora, poichè è subito visto che $W_0^{2m,p'}(\Omega)$ è contenuto nel dominio di $(A)^*$, si ottiene l'inclusione $(A_F)^* \subset (A)^*$. c. v. d.

Dimostriamo ora il

LEMMA 3.1: *Siano assegnati* $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ e $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$ *con* $\varphi_j \in W^{2m-\mu_j-1/p',p'}(\Gamma)$ *e* $\psi_j \in W^{2m-m_j-1/p',p'}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, $p' > 1$; *allora esiste una funzione* $w \in W^{2m\,p'}(\Omega)$ *tale che*

$$\begin{cases} B_j w = \psi_j \\ C_j w = \varphi_j \end{cases} \qquad j = 0, \dots, m-1$$

l'applicazione $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}; \psi_0, \dots, \psi_{m-1}\} \to w$ *essendo continua da*

$$\prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-\mu_j-1/p',p'}(\Gamma) \times \prod_{j-0}^{m-1} W^{2m-m_j-1/p',p'}(\Gamma) \text{ in } W^{2m,p'}(\Omega).$$

Lo stesso risultato si ha sostituendo B_j, C_j, μ_j *e* m_j *con* B_j^*, C_j^*, μ_j^* *e* m_j^*.

Poichè il sistema $\{B_0, \dots, B_{m-1}; C_0, \dots, C_{m-1}\}$ è un sistema di DIRICHLET d'ordine $2m$, in virtù di un lemma di ARONSZAJN-MILGRAM [6] lemma 2 (si veda anche il lemma 4.1 di [28]), il problema si riconduce a costruire una funzione $w \in W^{2m,p'}(\Omega)$ tale che

$$\gamma_j w = f_j \qquad j = 0, \dots, 2m-1$$

con $f_j \in W^{2m-j-1/p',p'}(\Gamma)$; e allora basta applicare i risultati noti sulle « tracce » (v. ad es. il teor. 5.1 di [22]) per ottenere la dimostrazione del lemma.

OSSERVAZIONE 3.1. In sostanza il lemma estende allo spazio $W^{2m,p'}(\Omega)$ il cor. 4.1 di SCHECHTER [28], da cui si ottiene « per continuità », in virtù appunto dei risultati citati sulle tracce delle $u \in W^{2m,p'}(\Omega)$. Si osservi anche che la funzione w così ottenuta può poi essere prolungata in tutto R^n, mediante l'operatore P di prolungamento più volte adoperato nel cap. I di [22], in modo da ottenere una funzione $v \in W^{2m,p'}(R^n)$ e coincidente con w in Ω. Così perfezionato il lemma risulta essere una estensione dei lemmi 1.1 di [21] e 6.1 di [22]; a noi però nel seguito servirà solo nella forma datagli nell'enunciato.

Passiamo ora a dimostrare il

TEOR. 3.1 : *Nelle ipotesi su A e i B_j dei* n. 2.1 *e* 2.2, *per ogni $p > 1$, l'applicazione $u \to Bu = \{B_0 u, \dots, B_{m-1} u\}$, definita per $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua, ancora indicata con $u \to Bu$, di $D_A^{0,p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma)$.*

Il teorema estende il théor. 4.1 di [21] ed è analogo ai théor. 2.1 di [21] e teor. 9.1 di [22]; e si ottiene con dimostrazione analoga, che qui riportiamo, facendovi alcune semplificazioni (che si potrebbero naturalmente portare anche alle dimostrazioni dei teoremi citati).

Siano dunque dati $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ con $\varphi_j \in W^{2m-\mu_j^*-1/p',p'}(\Gamma)$ e si consideri la funzione $w \in W^{2m,p'}(\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} B_j^* w = 0 \\ C_j^* w = \varphi_j \end{cases} \qquad j = 0, 1, \dots, m-1 \tag{3.2}$$

di cui al lemma 3.1. Per u fissata in $D_A^{0,p}(\Omega)$ e per tale w poniamo

$$Y_\varphi^w = (u, A^* w) - (Au, w) \tag{3.3}$$

gli integrali rappresentati dai due (,) avendo ovviamente significato per

u e w così fissate. Verifichiamo poi che in realtà Y_φ^w non dipende dalla scelta fatta di w, purchè w appartenga a $W^{2m,p'}(\Omega)$ e verifichi le (3.2) (si osservi che la w di cui al lemma 3.1 non è unica); supposto invero che w e w_1 siano due elementi di $W^{2m,p'}(\Omega)$ verificanti le (3.2), posto $\chi = w - w_1$, si ha $B_j^* \chi = 0$ e $C_j^* \chi = 0$, $j = 0, \dots, m-1$, e quindi, poichè il sistema $\{B_0^*, \dots, B_{m-1}^*; C_0^*, \dots, C_{m-1}^*\}$ è un sistema di DIRICHLET di ordine $2m$, si ha, per il lemma di ARONSZAJN-MILGRAM sopracitato, $\gamma_j \chi = 0$, $j = 0, \dots, 2m-1$, e dunque $\chi \in W_0^{2m,p'}(\Omega)$; e allora, tenuto conto che per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta $(u, A^*\psi) - (Au, \psi) = 0$, prolungando per continuità in $W_0^{2m,p}(\Omega)$, si ottiene la: $(u, A^*\chi) - (Au, \chi) = 0$; da cui si ha $Y_\varphi^w = Y_\varphi^{w_1}$; scriveremo perciò d'ora innanzi Y_φ invece di Y_φ^w.

Il funzionale semi-lineare $\varphi \to Y_\varphi$ è continuo su $\prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-\mu_j^*-1/p', p'}(\Gamma)$, poichè w dipende con continuità da $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, per il lemma 3.1; dunque Y_φ è della forma

$$Y_\varphi = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \tau_j u, \overline{\varphi_j} \rangle \qquad \text{con} \qquad \tau_j u \in W^{-(2m-\mu_j^*-1/p'),p}(\Gamma)$$

e, poichè $2m - \mu_j^* - \dfrac{1}{p'} = 2m - (2m - m_j - 1) - \dfrac{1}{p'} = m_j + \dfrac{1}{p}$, $\tau_j u$ appartiene a $W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma)$; inoltre l'applicazione $u \to \tau_j u$ è lineare e continua da $D_A^{0,p}(\Omega)$ in $W^{-m_j-1/p}(\Gamma)$.

Poichè $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $D_A^{0,p}(\Omega)$ per la Prop. 3.1, resta solo da dimostrare che $\tau_j u = B_j u$ per $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Si prenda perciò $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Gamma)$; possiamo allora scegliere w in modo che appartenga a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$; e allora per questa w, utilizzando la formula di GREEN (2.2), si ottiene, tenendo conto anche delle (3.2)

$$Y_\varphi = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma B_j u \, \overline{\varphi_j} \, d\sigma;$$

dunque $\langle \tau_j u, \overline{\varphi_j} \rangle = \langle B_j u, \overline{\varphi_j} \rangle$ per ogni $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e quindi $\tau_j u = B_j u$, c.v.d.

Da questo teorema, dalla Prop. 3.1 e dalla formula di GREEN (2.2), prolungando per continuità, si ottiene che per $u \in D_A^{0,p}(\Omega)$ e $v \in W_{B^*}^{2m,p'}(\Omega)$ vale la formula di GREEN

$$(Au, v) - (u, A^*v) = -\sum_{j=0}^{m-1} \langle B_j u, \overline{C_j^* v} \rangle, \tag{3.4}$$

$\langle B_j u, \overline{C_j^* v} \rangle$ indicando la dualità tra $W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{m_j+1/p,p'}(\Gamma)$.

Si ha infine per dualità dal teor. 2.2, con ragionamento analogo a quello svolto in [22] per il teor. 9.2, il

TEOR. 3.2: *Nell'ipotesi J_B) per ogni $p > 1$, $u \to \{Au, Bu\}$ è un isomorfismo di $D_A^{0,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma)$.*

n. 4. Il problema ai limiti negli spazi $D_A^{s,p}(\Omega)$, $0 \leq s \leq 2m$.

4.1. I teoremi 2.3 e 3.2 assicurano dunque che nell'ipotesi J_B) l'operatore $u \to \{Au, Bu\}$ stabilisce un isomorfismo di $D_A^{2m,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega) \times \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ e di $D_A^{0,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma)$.

Verremo ora a studiare il problema ai limiti (2.7) negli spazi $D_A^{s,p}(\Omega)$ $0 \leq s < 2m$. Nel caso $p = 2$ in [21] questo studio è stato fatto interpolando *direttamente* tra i casi estremi, $s = 0$ e $s = 2m$, ora richiamati; ma, come si è già visto in [22] per il problema di DIRICHLET nel caso $p \neq 2$ una simile interpolazione *diretta* offre difficoltà notevoli. Per questo in [22] si è utilizzato in modo opportuno sia la teoria dell'interpolazione che i risultati di regolarizzazione di AGMON [1] (*). Si potrebbe dunque pensare di seguire anche ora questo procedimento, estendendo anzitutto i risultati di AGMON ai problemi (2.7); purtroppo il metodo indicato da AGMON in [1] per il problema di DIRICHLET si può estendere in realtà a una certa classe di altri problemi ai limiti, come avremo occasione di precisare nel prossimo n. 5, ma non sembra che esso possa utilizzarsi per tutti quei problemi (2.7) che rientrano nell'ipotesi J_B).

Abbiamo perciò pensato di utilizzare contemporaneamente entrambe le teorie dell'interpolazione, quella «reale» e quella «complessa», ricordate nel cap. I di [22]; mediante la teoria «complessa» potremo esaurire lo studio per il caso s *intero* e successivamente tratteremo con quella «reale» il caso di s compreso tra due interi consecutivi.

Interpoliamo dunque anzitutto con il metodo «complesso» di CALDERON [9] e LIONS [19] tra i due risultati sopra ricordati ($s = 0$, $s = 2m$); tenendo conto del teorema di interpolazione (v. ad es. il teor. 3.1 di [22]) e del théor. 3 di [9], si ha che, nella ipotesi J_B), $u \to \{Au, Bu\}$ è un isomorfismo di $[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)]$ su $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} [W^{2m-m_j-1/p,p}(\Gamma), W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$ per $0 < \theta < 1$.

(*) (Nota aggiunta durante la correzione delle bozze). In realtà avremmo potuto fare a meno dei risultati di AGMON [1], utilizzando solo quelli di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3]; infatti per quanto riguarda il teor. 8.1 di [22] abbiamo osservato già nel n. 8.2 che esso si può dimostrare per interpolazione, supponendolo vero nel caso $r = 0$; ma in questo caso il risultato si può in sostanza facilmente dedurre già dal teor. 15.3′ di AGMON-DOUGLIS-NIREMBERG [3]. Infine per quanto riguarda il teor. 10.1 di [22] esso si può ottenere con lo stesso ragionamento che svilupperemo per l'analogo teor. 4.1 del presente lavoro.

Lo spazio $[W^{2m-m_j-1/p,p}(\Gamma), W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$, applicando il teor. 1.1 per $r = 2m - m_j$ e $s = -m_j$, risulta «coincidente» con $W^{2(1-\theta)m-m_j-1/p,p}(\Gamma)$, se $2\theta m$ è intero.

Quanto a $[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)]$ si ha la seguente

PROP. 4.1: *Se $0 < \theta < 1$, $2\theta m$ è intero e A è un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$ a coefficienti appartenenti a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, allora è (algebricamente e topologicamente)*

$$[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)] \subset D_A^{2(1-\theta)m,p}(\Omega)$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti si ha anzitutto che l'applicazione identica $u \to u$ è lineare e continua da $D_A^{2m,p}(\Omega)$ in $W^{2m,p}(\Omega)$ e da $D_A^{0,p}(\Omega)$ in $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e dunque, per il teorema di interpolazione e la definizione stessa degli spazi $H^{s,p}(\Omega)$ (v. il n. 5 di [22]), essa è lineare e continua da $[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{m,p}(\Omega); \delta(\theta)]$ in $H^{2(1-\theta)m,p}(\Omega)$ per ogni θ, $0 < \theta < 1$. Se ora di più $2\theta m$ è intero allora $H^{2(1-\theta)m,p}(\Omega)$ coincide per la Prop. 4.2 di [22] con $W^{2(1-\theta)m,p}(\Omega)$.

Si consideri poi l'applicazione $u \to Au$; essa è continua da $D_A^{2m,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ e da $D_A^{0,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, dunque da $[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)]$ in $L^p(\Omega)$, $0 < \theta < 1$. E la Prop. 4.1 è così dimostrata. Osserviamo che più avanti torneremo su questa proposizione, precisandola maggiormente in ipotesi più restrittive (v. Prop. 5.4).

Utilizzando allora la Prop. 4.1 e tenendo presente quanto si è sopra detto possiamo concludere con il

TEOR. 4.1: *Nell'ipotesi J_B), per ogni $p > 1$ e $s = 0, \dots, 2m$ il problema (2.7) ammette, per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ una e una sola soluzione $u \in D_A^{s,p}(\Omega)$; ed essa dipende con continuità dai dati f e g_j.*

4.2. Veniamo ora a studiare il problema (2.7) negli spazi $D_A^{s,p}(\Omega)$ con s reale compreso tra 0 e $2m$.

Utilizzeremo qui il metodo di interpolazione «reale» richiamato nel n. 1 di [22]. Il teor. 4.1 si può in sostanza enunciare nel seguente modo: nell'ipotesi J_B), l'operatore $\{A, B\}$ ammette l'operatore inverso $G = \{A, B\}^{-1}$, il quale è lineare e continuo da

$$L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{r-m_j-1/p,p}(\Gamma) \text{ in } D_A^{r,p}(\Omega) \qquad r = 0, \dots, 2m$$

Applicando allora il teorema di interpolazione (si veda ad es. il teor. 1.1 di [22]) tra i casi $r+1$ e r, si ottiene che G è lineare e continua da da $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} T(p, \alpha; W^{r+1-m_j-1/p,p}(\Gamma), W^{r-m_j-1/p,p}(\Gamma))$ in $T(p, \alpha; D_A^{r+1}(\Omega), D_A^{r,p}(\Omega))$, $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$.

Teniamo conto allora che per il teor. 11.5 di [22] si ha

$$T(p, \alpha ; \; W^{r+1-m_j-1/p,p}(\Gamma), W^{r-m_j-1/p,p}(\Gamma)) = W^{r+1-m_j-\theta-1/p,p}(\Gamma)$$

con la condizione che, se è $p \neq 2$, $\theta + \dfrac{1}{p}$ non sia intero; e ricordiamo anche che

$$T(p, \alpha ; D_A^{r+1,p}(\Omega), D_A^{r,p}(\Omega)) \subset D_A^{r+1-\theta,p}(\Omega)$$

algebricamente e topologicamente (la dimostrazione è del tutto analoga a quella della Prop. 4.1, tenuto conto delle Prop. 2.4 di [22]).

Possiamo allora concludere con il seguente

TEOR. 4.2: *Nell'ipotesi J_B), per ogni $p > 1$ e ogni s reale, $0 \leq s \leq 2m$ e inoltre, se è $p \neq 2$, tale che $s - \dfrac{1}{p}$ non sia intero, il problema* (2.7) *ammette qualunque sia $f \in L^p(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-m_j-1/p\,p}(\Gamma)$ una e una sola soluzione appartenente a $D_A^{s,p}(\Omega)$ ed essa dipende con continuità dai dati f e g_j.*

Nel caso $p \neq 2$ e $s - \dfrac{1}{p}$ intero, si ricava subito dallo stesso teor. 4.2 un risultato « approssimato » e precisamente:

TEOR. 4.3: *Nell'ipotesi J_B), per ogni $p > 1$ e s reale $0 \leq s \leq 2m$, il problema* (2.7) *ammette per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-m_j-1/p,}(\Gamma)$ una e una sola soluzione u che appartiene a $D_A^{s-\varepsilon\,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.*

n. 5. Ulteriori risultati e osservazioni.

5.1. Raccoglieremo in questo numero, insieme ad alcune osservazioni immediate, qualche altro risultato, che completerà sotto certi punti di vista la teoria dei problemi ai limiti svolta nei lavori [21] e [22] e nei precedenti numeri.

Vogliamo anzitutto precisare maggiormente la questione sulle tracce delle funzioni degli spazi $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ introdotti nei n. 9 e 10 di [22] (10).

Sarà bene per questo ricordare l'ipotesi J) del n. 7.1 di [22], ipotesi che indicheremo ora con J_γ), poichè relativa al problema di Dirichlet ($B_j = \gamma_j$):

J_γ) *su Ω e sull'operatore A valgano le ipotesi introdotte nel* n. 2.1 *del presente lavoro, inoltre, per almeno un $p > 1$ fissato, il problema di Dirichlet*

(10) $\mathcal{W}_A^{s\,p}(\Omega)$, $0 \leq s \leq m$ è lo spazio delle $u \in W^{s,p}(\Omega)$ tali che $Au \in W^{-m,p}(\Omega)$, con la norma del grafico.

$Au = 0$, $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \dots, m-1$, ammetta in $W^{2m,p}(\Omega)$ solo la soluzione $u = 0$.

Ricordiamo anche che nell'ipotesi J_γ), in virtù del teor. 9.1 di [22], ogni funzione $u \in \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ ammette tracce $\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u$ e inoltre $\gamma_j u \in W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$.

Studieremo ora il caso $u \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < m$; ci sarà utile aver premesso la seguente

PROP. 5.1: *Sia p reale > 1, s reale $> \frac{1}{p}$ e tale che $s - \frac{1}{p}$ non sia intero; sia $r = \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$ $\left(\text{massimo intero} \geq 0 \text{ e inferiore a } s - \frac{1}{p}\right)$. Indicato con $W_\gamma^{s,p}(\Omega)$ il sottospazio delle u di $W^{s,p}(\Omega)$ tali che $\gamma_0 u = 0, \dots, \gamma_r u = 0$, si ha*

$$W_\gamma^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega)\ (^{11}).$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto è evidente che se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, poichè u è allora limite in $W^{s,p}(\Omega)$ di funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$ ed esistono le tracce $\gamma_0 u, \dots, \gamma_r u$ di u (v. ad es. Teor. 5.2 di [22]), allora risulta $u \in W_\gamma^{s,p}(\Omega)$.

Per dimostrare che viceversa $W_\gamma^{s,p}(\Omega) \subset W_0^{s,p}(\Omega)$, osserviamo anzitutto che con procedimento abituale, mediante un sistema di « carte locali » e di partizione dell'unità, ci si può ricondurre al caso in cui Ω coincida col semispazio R_+^n degli x per cui è $x_n > 0$. Ciò fatto, poniamo $s = t + \theta$, t intero, $0 \leq \theta < 1$ e distinguiamo due casi: $0 \leq \theta < \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p} < \theta < 1$.

Nel primo caso, $0 \leq \theta < \frac{1}{p}$, sia $u \in W_\gamma^{s,p}(R_+^n)$ e introduciamo per $\varepsilon > 0$ le « traslate » di u secondo l'asse x_n

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x_n < \varepsilon \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \varepsilon) & \text{per } x_n > \varepsilon. \end{cases}$$

Si ha allora $u_\varepsilon \in W^{t,p}(R_+^n)$ poichè $\gamma_0 u = \dots \gamma_{t-1} u = 0$ (in questo caso è $t - 1 = r$). Inoltre $D^k u_\varepsilon = (D^k u)_\varepsilon$ per $|k| = t$, dove con $(D^k u)_\varepsilon$ si intende ovviamente la « traslata » di $D^k u$ secondo l'asse x_n; dunque poichè $\theta < \frac{1}{p}$

(11) La Prop. 5.1 è nota per s *intero* > 0 ed é stata già da noi enunciata e adopeperata in questo caso in [22] (Prop. 5.1). Dobbiamo però osservare che nell'enunciato della Prop. 5.1 di [22] abbiamo scordato di aggiungere l'ipotesi s *intero* anche nel caso $p = 2$.

(si ricordi il théor. 3.1 di [23]) si ha anche $D^k u_\varepsilon \in W^{\theta,p}(R^n_+)$ e quindi $u_\varepsilon \in W^{s,p}(R^n_+)$; e inoltre per $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u$ in $W^{s,p}(R^n_+)$. Ciò basta per poter applicare noti ragionamenti di regolarizzazione e approssimare u in $W^{s,p}(R^n_+)$ con funzioni di $\mathcal{D}(R^n_+)$.

Nel secondo caso, $\frac{1}{p} < \theta < 1$, si proceda in modo analogo al primo caso costruendo anche ora le « traslate » u_ε di u; anche ora si ha $u_\varepsilon \in W^{t,p}(R^n_+)$ ($t = r$ in questo caso) e $D^k u_\varepsilon = (D^k u)_\varepsilon$, $|k| = t$. Inoltre si ha ora, poichè $\theta > \frac{1}{p}$, $\gamma_0(D^k u) = 0$, $|k| = t$; basterà dunque per poter concludere come sopra, nel caso $0 \leq \theta < \frac{1}{p}$, dimostrare che se $w \in W^{\theta,p}(R^n_+)$, $\frac{1}{p} < \theta < 1$, e $\gamma_0 w = 0$, allora $w \in W_0^{\theta,p}(R^n_+)$. Ora questo risultato segue dal théor. 4.1 di [23]; detto teorema afferma infatti che l'applicazione $w \to \tilde{w}$ ($\tilde{w} = w$ in R^n_+ e $w = 0$ in $R^n - R^n_+$) è lineare e continua da $W_0^{\theta,p}(R^n_+)$ in $W^{\theta,p}(R^n)$, ma basta ricordare la dimostrazione datane e la Remarque 4.1 di [23] per osservare che essa assicura di più che $w \to \tilde{w}$ è lineare e continua dal sottospazio di $W^{\theta,p}(R^n_+)$ delle w tali che $\gamma_0 w = 0$, in $W^{\theta,p}(R^n)$. Di qui segue che w_ε, traslata di w, appartiene ancora a $W^{\theta,p}(R^n_+)$ e per $\varepsilon \to 0$ converge a w in $W^{\theta,p}(R^n_+)$; e allora, « regolarizzando » w_ε è possibile approssimare w in $W^{\theta,p}(R^n_+)$ mediante funzioni di $\mathcal{D}(R^n_+)$. E la Prop. 5.1 è così dimostrata.

Passiamo ora senz'altro al

TEOR. 5.1.: *Nell'ipotesi J_γ), per ogni $p > 1$ e s reale tale che $0 \leq s \leq m$ e $s - \frac{1}{p}$ non sia intero, l'applicazione $u \to \vec{\gamma} u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ è lineare e continua da $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ su $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$.*

DIMOSTRAZIONE. *a*) Anzitutto osserviamo che, poichè $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$, in virtù del teorema di tracce di USPENSKII (v. teor. 5.2 di [22]) basterà che ci limitiamo a considerare il caso $s - \frac{1}{p} < m - 1$. Ricordiamo poi anche che con T_j, $j = 0, \dots, m-1$, abbiamo indicato gli operatori frontiera di NEUMANN relativi all'operatore A e alla formula di GREEN (2.6); e dimostriamo il

LEMMA 5.1. *Sia $p' > 1$ reale, s reale tale che $0 \leq s < m - \frac{1}{p'}$, e $s + \frac{1}{p'}$ non sia intero; poniamo $r = \left[2m - s - \frac{1}{p'}\right]^-$ (massimo intero ≥ 0 e inferiore* *a* $2m - s - \frac{1}{p'}\Big)$. *Siano dati* $\varphi_j \in W^{j+1-s-1/p',p'}(\Gamma)$, $j = 2m - r - 1$, $2m - r, \dots, m - 2, m - 1$; *esiste allora almeno una funzione* $w \in W^{2m-s,p'}(\Omega)$ *tale che*

$$\begin{cases} \gamma_j w = 0 & j = 0, 1, \dots, m - 1 \\ T_j w = \varphi_j & j = 2m - r - 1, \dots, m - 1. \end{cases}$$

l'applicazione $\{\varphi_{2m-r-1}, \dots, \varphi_{m-1}\} \to w$ *essendo continua da* $\prod_{j=2m-r-1}^{m-1} W^{j+1-s-1/p',p'}(\Gamma)$ *in* $W^{2m-s,p'}(\Omega)$.

La dimostrazione di questo lemma è del tipo di quella del lemma 3.1; l'operatore T_j, come già si è ricordato e come risulta ad es. dalla (1.11) di [21], è della forma

$$T_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{i=2}^{2m-j} T_j^i \gamma_{2m-j-i} \tag{5.2}$$

dove $b_j \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ed è sempre $\neq 0$ e gli operatori T_j^i sono operatori tangenziali a Γ d'ordine $\leq i - 1$, nel senso ad es. di [19 ter.]. Tenuto conto delle (5.2) si vede allora che il sistema $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}; T_{m-1}, T_{m-2}, \dots, T_{2m-r-1}\}$ costituisce un sistema di Dirichlet d'ordine $r + 1$ e il problema si riconduce allora, in virtù del lemma di Aronszajn-Milgram già citato a proposito del lemma 3.1, a costruire una funzione $w \in W^{2m-s,p'}(\Omega)$ tale che

$$\gamma_j w = f_j \qquad j = 0, 1, \dots, r$$

con f_j dato in $W^{2m-s-1/p',p'}(\Gamma)$, e perciò basta applicare il teorema di tracce di Uspenskii (v. teor. 5.2 di [22])

b) Sia ora $u \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ e $s < m - 1 + \frac{1}{p} = m - \frac{1}{p'}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ e $s - \frac{1}{p}$ non intero. Allora se $s > \frac{1}{p}$ per il teorema di tracce ora citato, poichè $u \in W^{s,p}(\Omega)$, si ha che $\gamma_j u \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ per $j = 0, s, \dots, t = \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$. Si consideri allora il problema

$$\begin{cases} A z = 0, & \\ \gamma_j z = \gamma_j u, & j = 0, 1, \dots, t \\ \gamma_j z = 0, & j = t + 1, \dots, m - 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

In virtù del teor. 12.1 di [22] esiste una e una sola $z \in W^{s,p}(\Omega)$ che risolve il problema (5.3).

Poniamo $v = u - z$; allora $v \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ e inoltre per la Prop. 5.1 $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Se invece $s < \frac{1}{p}$, poniamo $v = u$; allora $v \in W^{s,p}(\Omega) \equiv W_0^{s,p}(\Omega)$ (cfr. [23]).

Poichè $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) \subset \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$, in virtù del teor. 9.1 di [22], esistono $\gamma_j u$, $\gamma_j z$ e $\gamma_j v$ anche per $j = t+1, \dots, m-1$ e si ha $\gamma_j u = \gamma_j v$ in $W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = t+1, \dots, m-1$.

Dimostriamo di più che $\gamma_j v \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = t+1, \dots, m-1$; seguiremo un ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del teor. 3.1; poniamo perciò, assegnate, per $j = 2m-r-1, \dots, m-1$, $\varphi_j \in W^{j-s+1-1/p',p'}(\Gamma)$,

$X_\varphi^w = \langle v, \overline{A^* w} \rangle - \langle Av, \overline{w} \rangle$,

dove w è la funzione (non unica necessariamente) di cui al lemma 5.1 e il primo $\langle , \rangle$ indica la dualità tra $W_s^{0,p}(\Omega)$ e $W^{-s,p'}(\Omega)$ e il secondo quella tra $W^{-m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p'}(\Omega)$; l'espressione ha senso in virtù della Prop. 11.1 di [22] e della Remarque 6.1 di [23].

In realtà si vede che X_φ^w è indipendente da w, purchè w verifichi le condizioni del lemma 5.1; infatti se w_1 e w_2 sono due tali w allora $\chi = w_1 - w_2$ appartiene a $W^{2m-s,p}(\Omega)$ e verifica le condizioni

$$\gamma_0 \chi = \dots = \gamma_{m-1}\chi = 0, \quad T_{m-1}\chi = 0, \dots, T_{2m-r-1}\chi = 0$$

e quindi, formando tali condizioni un sistema di Dirichlet d'ordine $r+1$, risulta, per la Prop. 5.1, $\chi \in W_0^{2m-s,p'}(\Omega)$. Ne segue che

$$\langle v, \overline{A^* \chi} \rangle - \langle Av, \overline{\chi} \rangle = 0\,; \tag{5.4}$$

e infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $\langle v, \overline{A^* \varphi} \rangle - \langle Av, \overline{\varphi} \rangle = 0$ e quindi essendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso in $W_0^{2m-s,p'}(\Omega)$, si ottiene la (5.4).

Da essa viene che X_φ^w non dipende da w e possiamo dunque scrivere X_φ invece di X_φ^w.

Inoltre il funzionale semilineare $\varphi \to X_\varphi$ è continuo su $\prod_{j=2m-r-1}^{m-1} W^{j-s+1-1/p',p'}(\Gamma)$, poichè w dipende con continuità da $\{\varphi_{2m-r-1}, \dots, \varphi_{m-1}\}$; dunque X_φ è della forma

$$X_\varphi = \sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \langle \sigma_j v, \overline{\varphi_j} \rangle \qquad \text{con } \sigma_j v \in W^{-j+s-1+1/p',p}(\Gamma) = W^{-j+s-1/p,p}(\Gamma).$$

D'altra parte poichè $v \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) \subset \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$, vale per essa la formula di GREEN (9.1) di [22], cioè per ogni $w \in W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$ si ha

$$(v, A^* w) - (Av, w) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j v, \overline{T_j w} \rangle, \tag{5.5}$$

$\langle \gamma_j v, \overline{T_j w} \rangle$ indicando la dualità tra $W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{j+1/p,p'}(\Gamma)$.

Dalla (5.5) e dalla definizione di X_φ, osservando che, se prendiamo $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Gamma)$ allora può scegliersi la w del lemma 5.1 appartenente a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, otteniamo

$$X_\varphi = \sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \langle \gamma_j v, \overline{\varphi}_j \rangle$$

e dunque $\langle \sigma_j v, \overline{\varphi}_j \rangle = \langle \gamma_j v, \overline{\varphi}_j \rangle$ per ogni $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Gamma)$; da cui $\sigma_j v = \gamma_j v$.

Abbiamo dunque ottenuto che $\gamma_j u = \gamma_j v \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ anche per $j = t+1, \dots, m+1$; e perciò possiamo dire che *l'applicazione* $u \to \vec{\gamma} u$ *è lineare da* $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ *in* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$.

c) Da quanto ora dimostrato in *b*) e dal teor. 12.1 di [22], si ha che l'operatore $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ è un'isomorfismo algebrico di $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ su $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ *ed è inoltre continuo in una direzione*; dunque per il noto teorema di Banach sugli isomorfismi esso è continuo anche nell'altra direzione. Abbiamo così ottenuto il seguente teorema, che precisa ii teor. 12.1 di [22] ora citato:

TEOR. 5.2: *Nell'ipotesi* J_γ), *per ogni* $p > 1$ *l'operatore* $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ *è un isomorfismo* (*algebrico e topologico*) *di* $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, *s reale tale che* $0 \leq s \leq m$ *e* $s - \dfrac{1}{p}$ *non intero.*

Ovviamente con il teor. 5.2 abbiamo anche completata la dimostrazione del teor. 5.1 dimostrando la continuità dell'applicazione $u \to \vec{\gamma} u$ e dimostrando anche che l'applicazione è *suriettiva.*

OSSERVAZIONE 5.1: Il teor. 5.2 nel caso $p = 2$ completa per i valori di $s \neq \text{intero} + \dfrac{1}{2}$ la Prop. 10.1 di [21], dimostrando che, con la notazione di [21], risulta $h_A^\alpha(\Omega) = \mathcal{H}_A^\alpha(\Omega)$ per $0 \leq \alpha \leq m$, $\alpha - \dfrac{1}{2}$ non intero (tale coincidenza non è invece più vera per $\alpha = \text{intero} + \dfrac{1}{2}$ in virtù dei risultati di [23]).

5.2. Poichè $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) \supset D_A^{s,p}(\Omega)$, $0 \leq s \leq m$ dal teor. 5.1 segue che $u \to \vec{\gamma} u$ è un'applicazione lineare e continua anche da $D_A^{s,p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $0 \leq s \leq m$, $s - \dfrac{1}{p}$ non intero.

E allora dal teor. 5.2 utilizzando anche il teor. di Banach sugli isomorfismi segue subito la

PROP. 5.2. *Nell'ipotesi* J_γ), *per ogni* $p>1$ *l'operatore* $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ *è un isomorfismo di* $D_A^{s,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Omega)$, $0 \le s \le m$, $s - \frac{1}{p}$ *non intero.*

E con lo stesso ragionamento, utilizzando il teor. 11.2 di [22] e la Remarque 6.1 di [23] si ha poi che la *Prop.* 5.2 *vale anche per* $m \le s \le 2m$, $s - \frac{1}{p}$ *non intero.*

5.3. Possiamo ora dedurre altre applicazioni

PROP. 5.3. *Nell'ipotesi* J_γ) *si ha per* $0<\theta<1$, θm *intero*

$$[\mathcal{W}_A^{m,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)] = \mathcal{W}_A^{(1-\theta)m,p}(\Omega).$$

Infatti interpolando col metodo « complesso » tra i casi $s=m$ e $s=0$ del teor. 5.2, si ha che $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ è un isomorfismo di $[\mathcal{W}_A^{m,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)]$ su $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} [W^{m-j-1/p,p}(\Gamma), W^{-j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$.

Ma utilizzando il teor. 1.1 si ha che $[W^{m-j-1/p,p}(\Gamma), W^{-j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$ coincide per θm intero con $W^{(1-\theta)m-j-1/p,p}(\Gamma)$ e quindi confrontando col teor. 5.2 per $s=(1-\theta)m$, si ha la Prop. 5.3.

In modo del tutto analogo, sfruttando il teor. 1.1 e la Prop. 5.2 si ha la

PROP. 5.4. *Nell'ipotesi* J_γ) *si ha per* $0<\theta<1$, $2\theta\, m$ *intero*

$$[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)] = D_A^{2(1-\theta)m,p}(\Omega).$$

La Prop. 5.4 precisa ulteriormente, sia pure in ipotesi più restrittive la Prop. 4.1, e permette perciò, riprendendo le considerazioni del n. 4.1 di precisare ulteriormente, sia pure in ipotesi più restrittive, il teor. 4.1 mediante il

TEOR. 5.3. *Se sono verificate entrambe le ipotesi* J_γ) *e* J_B), *allora per ogni* $p>1$, $s=0, 1, \dots, 2m$ *l'operatore* $u \to \{Au, Bu\}$ *è un isomorfismo di* $D_A^{s,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-m_j-1/p,p}(\Omega)$.

5.4. Siano ora in grado di ottenere ulteriori risultati di interpolazione e di applicarli ancora ai problemi ai limiti.

PROP. 5.5. *Nell'ipotesi J_γ), per ogni $p>1$ si ha*

$$T(p,\alpha;\mathcal{W}_A^{s+1}(\Omega),\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega))=\mathcal{W}_A^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

$$s=0,\dots,m-1,\ 0<\frac{1}{p}+\alpha=\theta<1,\ 1-\theta\neq\frac{1}{p}.$$

Infatti il teor. 5.2 ci assicura che $\{A,\vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di

$$\mathcal{W}_A^{s+1,p}(\Omega)\ \text{su}\ W^{-m,p}(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1}W^{s+1-j-1/p,p}(\Gamma)\ \text{e di}\ \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$$

su $W^{-m,p}(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1}W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$. Adoperando allora il teorema di interpolazione (v. teor. 1.1 di [22]) e tenuto conto del teor. 11.5 di [22] si ottiene che $\{A,\vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di

$$T(p,\alpha;\mathcal{W}_A^{s+1,p}(\Omega),\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega))\ \text{su}\ W^{-m,p}(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1}W^{s+1-j-\theta-1/p,p}(\Gamma);$$

e quindi confrontando col teor. 5.2 nel caso $s+1-\theta$ si ottiene la Prop. 5.5.

Con ragionamento analogo, adoperando invece del teor. 5.2 la Prop. 5.2, si ottiene poi la

PROP. 5.6. *Nell'ipotesi J_γ), per ogni $p>1$ si ha*

$$T(p,\alpha;D_A^{s+1}(\Omega),D_A^{s,p}(\Omega))=D_A^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

$$s=0,1,\dots,2m-1,\ 0<\frac{1}{p}+\alpha=\theta<1,\ 1-\theta\neq\frac{1}{p}.$$

Dalla Prop. 5.6, riprendendo i ragionamenti fatti nel n. 4.2 e tenuto conto del teor. 5.3, si ottiene infine un perfezionamento del teor. 4.2, sia pure un ipotesi più restrittive:

TEOR. 5.4. *Nelle ipotesi J_γ) e J_B), per ogni $p>1$ e ogni s reale tale che, $0\le s\le 2m$, $s-\dfrac{1}{p}$ non intero, l'operatore $u\to\{Au,Bu\}$ è un isomorfismo di $D_A^{s,p}(\Omega)$ su*

$$L^p(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1}W^{s-m_j-1/p,p}(\Omega).$$

OSSERVAZIONE 5.2. Per $p=2$ il teor. 5.4 completa la Prop. 11.1 di [21], dimostrando con le notazioni di [21] che è $d_A^\alpha(\Omega)=D_A^\alpha(\Omega)$ per $\alpha-\dfrac{1}{2}$ non intero (il caso $\alpha-\dfrac{1}{2}$ intero è eccezionale in virtù dei risultati di [23]).

OSSERVAZIONE 5.3. Nel teor. 5.4 è ammessa, a differenza di quanto si è fatto per il teor. 4.2 l'ipotesi $J_\gamma)$; sarebbe interessante poter eliminare tale ipotesi anche nel teor. 5.4; si tratta in sostanza di dimostrare un teorema di tracce degli operatori $B_j\, u$ per le $u \in D_A^{s,p}(\Omega)$ nella sola ipotesi $J_B)$; e a ciò possono probabilmente servire ragionamenti diretti analoghi a quelli fatti per il teor. 5.1.

5.5. Abbiamo avuto occasione sia in questo lavoro che nei precedenti [21] e [22] di dimostrare teoremi di densità dello spazio $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ in $D_A^{0,p}(\Omega)$, in $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ e in $D_A^{m,p}(\Omega)$. Vediamo ora di completare questi risultati dimostrando, come era presumibile, la densità di $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ in $D_A^{s,p}(\Omega)$ e in $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$. Si ha più precisamente:

PROP. 5.7: *Nell'ipotesi $J_\gamma)$, per ogni $p > 1$ e s reale tale che $0 \leq s \leq m$, $s - \dfrac{1}{p}$ non intero, lo spazio $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$.*

PROP. 5.8: *Nell'ipotesi $J_\gamma)$, per ogni $p > 1$ e s reale tale che $0 \leq s \leq 2m$, $s - \dfrac{1}{p}$ non intero, lo spazio $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $D_A^{s,p}(\Omega)$.*

Per la dimostrazione di queste due proposizioni si possono seguire due diversi procedimenti; ci sembra interessante esporli entrambi. Ci limiteremo a dimostrare la Prop. 5.7, considerazioni del tutto analoghe potendosi fare per la Prop. 5.8.

Un primo metodo di dimostrazione consiste nell'utilizzare le teorie dell'interpolazione sia «complessa» che «reale». In virtù della Prop. 9.2 di [22] $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$; ed esso è anche denso in $\mathcal{W}_A^{m,p}(\Omega)$ essendo questo spazio isomorfo a $W^{m,p}(\Omega)$. Ne segue, per un risultato generale sulla teoria dell'interpolazione ([12]), che $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ è denso anche in $[\mathcal{W}_A^{m,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)]$; questo ultimo spazio per θm intero coincide per la Prop. 5.3 con $\mathcal{W}_A^{(1-\theta)m,p}(\Omega)$. Dunque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$, $s = 0, 1, \dots, m$.

Applicando ora la teoria «reale» di interpolazione si ha (v. nota ([12])) che $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $T(p, \alpha; \mathcal{W}_A^{s+1}(\Omega), \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega))$, $s = 0, 1, \dots, m-1$ e quest'ultimo spazio per la Prop. 5.5, se $1 - \theta$ è $\neq \dfrac{1}{p}$, coincide con $\mathcal{W}_A^{s+1-\theta,p}(\Omega)$; e dunque la Prop. 5.7 è dimostrata.

([12]) Con la nomenclatura del cap. I di [22] il risultato è il seguente: se $\mathcal{X}$ è un sottospazio di X_0 e di X_1 denso in entrambi gli spazi, esso è denso in $[X_0, X_1; \delta(\theta)]$. Esso si dimostra con procedimento analogo a quello svolto in [18] per l'analogo risultato nella teoria «reale» (lemma 1.1 chap. II di [18] o anche lemma 1.1 di [22]), vale a dire: se $\mathcal{X}$ è denso in X_0 e X_1 allora è denso anche in $T(p, \alpha; X_0, X_1)$.

Un secondo metodo di dimostrazione della Prop. 5.7 è il seguente. Sia $u \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$; nell'ipotesi J_y) si ha che esiste una e una sola w tale che $Aw = Au$ e $w \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e per essa si ha

$$(5.6) \qquad \| w \|_{\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)} \leq \| w \|_{\mathcal{W}_A^{m,p}(\Omega)} \leq c \, \| Aw \|_{W^{-m,p}(\Omega)}$$

Poniamo $v = u - w$, allora $v \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ e inoltre $Av = 0$ e, in virtù del teor. 5.1 e del fatto che $w \in W_0^{m,p}(\Omega)$, si ha $\gamma_j v = \gamma_j u$ in $W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$. Tenuto poi conto del teor. 5.2 si ha

$$(5.7) \qquad \| v \|_{\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)} \leq c \sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_j v \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)}$$

Siano ora $\{\varphi_i\}$ e $\{\psi_{i,j}\}$, $i = 1, 2, \dots$, successioni di funzioni tali che $\varphi_i \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ e $\varphi_i \to Au$ in $W^{-m,p}(\Omega)$, $\psi_{i,j} \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e $\psi_{i,j} \to \gamma_j u$ in $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$; l'esistenza di tali successioni è assicurata dalle proprietà degli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s,p}(\Gamma)$ (v. ad es. il n. 2 di [22]). Si considerino allora le soluzioni dei seguenti problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} Aw_i = \varphi_i \\ \gamma_j w_i = 0 \qquad j = 0, \dots, m-1 \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} Av_i = 0 \\ \gamma_j v_i = \psi_{j,i} \quad j = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Per i teoremi noti di regolarizzazione del problema di DIRICHLET si ha che $w_i \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ e $v_i \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ e d'altra parte, per le maggiorazioni (5.6) e (5.7) applicate a w_i e v_i rispettivamente, si ha che $w_i \to w$ e $v_i \to v$ in $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ e dunque $w_i + v_i \to u$ in $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ c. v. d.

OSSERVAZIONE 5.4. Viene naturale domandarsi se le Prop. 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 sono ancora valide quando su A si faccia solo l'ipotesi che sia un operatore differenziale lineare a coefficienti sufficientemente differenziabili in $\bar{\Omega}$, per es. appartenenti a $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, come ad es. avviene per la Prop. 4.1. I metodi da noi adoperati finora si appoggiano sulla teoria dei problemi ai limiti ellittici, ma non sembra che essa sia necessaria.

5.6. Un'altra proprietà che potrebbe facilmente essere esposta nei dettagli è quella dell'*interpretazione del modo di assumere i dati al contorno* $B_j u = g_j$, nel senso di una « convergenza » in media negli spazi $W^{s-m_j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ su un opportuno sistema di varietà $\{\Gamma_\varrho\}$ contenuto in Ω e tendente a Γ per $\varrho \to 0$. I risultati che sono stati ottenuti nel caso $p = 2$ in [21] (si vedano in particolare i n. 3, 5, 9 di [21]) si trasportano senz'altro anche al caso $p \neq 2$ e al problema al contorno (2.7) da noi qui studiati.

5.7 Osserviamo anche che il problema (2.7) potrebbe essere studiato negli spazi $\mathcal{D}_A^{s,p}(\Omega) = \{u \in H^{s,p}(\Omega), Au \in L^p(\Omega)\}$ $0 \leq s \leq 2m$, i quali coincidono con gli spazi $D_A^{s,p}(\Omega)$ per s intero, ma ne differiscono in generale per s non intero (per la def. di $H^{s,p}(\Omega)$ si veda il n. 4 di [22]). Basterebbe partire dai risultati ottenuti per s intero e interpolare, come si è fatto nel n. 4.2, utilizzando il metodo complesso anzichè quello « reale ».

Tuttavia non svilupperemo qui questo argomento perché occorrerebbe aver prima trattato per gli spazi $H^{s,p}(\Omega)$ le questioni analoghè a quelle trattate in [23] per i $W^{s,p}(\Omega)$. Cogliamo anzi l'occasione per avvertire a questo proposito che i teor. 11.7 e 11.8 di [22] vanno modificati, tenuto conto dei casi eccezionali per i valori di s, che si presentano per gli $H^{s,p}(\Omega)$ come per i $W^{s,p}(\Omega)$ (si veda anche la Remarque 6.1 di [23]).

5.8. Tra i risultati ottenuti per il problema di DIRICHLET e quelli per il problema più generale di tipo (2.7) c'è una leggera differenza: per il problema di DIRICHLET si è potuto lasciare una maggior generalità al termine noto f: $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ anzichè $f \in L^p(\Omega)$, utilizzando così gli spazi $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ oltre ai $D_A^{s,p}(\Omega)$. Come già si è osservato nella Remarque 11.3 di [21] ciò dipende sostanzialmente dalle particolari condizioni al contorno del problema di DIRICHLET, le quali fanno sì che il sottospazio delle u di $W^{m,p}(\Omega)$, che verificano le $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \dots, m-1$, è uno spazio normale di distribuzioni su Ω. Dovendo costruire una teoria generale per il problema ai limiti (2.7) ci si è limitati allo spazio $L^p(\Omega)$ per il termine noto f. È tuttavia evidente che per ogni singolo problema ai limiti particolare si potrebbe svolgere la teoria da noi esposta lasciando il termine noto f in uno spazio $F \supset L^p(\Omega)$ che andrà di volta in volta precisato.

5.9. Vogliamo infine terminare questo numero riprendendo e sviluppando maggiormente le considerazioni iniziali del n. 4.1. Abbiamo ivi accennato alla possibilità di studiare il problema (2.7) negli spazi $D_A^{s,p}(\Omega)$, con *s intero,* partendo dal teor. 3.2 e regolarizzando successivamente la soluzione con i procedimenti ideati da S. AGMON per il problema di DIRICHLET in [1]. Questa idea è stata da noi già utilizzata in [22] nella dimostrazione del teor. 8.1 e del teor. 10.1 (*); tuttavia non sembra essere direttamente utilizzabile in generale, per ogni problema del tipo (2.7) che verifichi l'ipotesi J_B). Esaminiamo infatti rapidamente il metodo di regolarizzazione di AGMON; esso si fonda essenzialmente su questo teorema, al quale si riporta il problema di regolarizzazione alla frontiera della soluzione, mediante un sistema di « carte locali »:

(*) Si veda a questo proposito la nota (*) di pag. 18.

« *Detta* Σ_δ *la semisfera* $\{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < \delta^2, x_n > 0\}$, se $u \in L^q(\Sigma_1)$ *per un certo* $q > 1$ *e verifica la*

$$|(u, A^* v)| \leq c_0 \| v \|_{W^{2m-s,p'}(\Sigma_1)} \qquad (s \text{ intero, } 0 \leq s \leq 2m,\ p' > 1,\ c_0 \text{ costante})$$

per tutte le funzioni (« test functions ») $v \in C^{2m}(\bar{\Sigma}_1)$, *nulle identicamente in un intorno della parte di frontiera di* Σ_1: $\partial_1 \Sigma_1 = \{|x| = 1, x_n > 0\}$ *e verificanti sulla rimanente parte di frontiera* $\partial_2 \Sigma_1$ *le condizioni* $\dfrac{\partial^j v_j}{\partial x_n} = 0, j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$, *allora* $u \in W^{s,p}(\Sigma_\delta)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *per ogni* $\delta < 1$ *e inoltre risulta*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Sigma_\delta)} \leq c_\delta (c_0 + \| u \|_{L^p(\Sigma_1)}) \qquad (c_\delta \textit{ indipendente da } u)\text{ »}$$

Questa regolarizzazione viene ottenuta, ispirandosi al noto procedimento per la regolarizzazione hilbertiana delle soluzioni variazionali, maggiorando dapprima i rapporti incrementali « tangenziali » delle u, cioè rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{n-1}$, e successivamente ricavando le maggiorazioni per le derivate secondo la variabile x_n direttamente dall'equazione e con l'uso di un lemma di Lions (si veda [24] n. 11).

Ebbene per far questo occorre che la classe V delle « test functions » v verifichi certe condizioni, e si vede facilmente che il ragionamento di Agmon è valido se la classe V gode di queste due proprietà:

a) è chiusa rispetto alle traslazioni sufficientemente piccole relativamente alle variabili $x_1, \ldots, x_{n-1}$;

b) per ogni $\delta < 1$ esiste almeno una funzione φ_δ indefinitamente differenziabile in $\bar{\Sigma}_1$, nulla in un intorno di $\partial_1 \Sigma_1$, uguale a 1 in Σ_δ, in modo che il prodotto $\varphi_\delta v$, per ogni $v \in V$, appartenga ancora a V.

Nel caso del problema di Dirichlet la classe V è quella indicata nel teorema ora enunciato e verifica infatti le *a*) e *b*); ma altri problemi ai limiti possono dar luogo a una classe V di « test functions » che verifichi *a*) e *b*) e per essi dunque è possibile ottenere un teorema di regolarizzazione simile a quello di Agmon.

Per questi problemi il teor. 4.1 si sarebbe potuto ottenere quindi con un ragionamento analogo a quello del teor. 10.1 di [22]; ma non lo si sarebbe ottenuto per tutti i problemi che rientrano nell'enunciato da noi dato, poichè per essi in generale le *a*) e *b*) non sono verificate.

Dunque la sola utilizzazione diretta dei procedimenti di regolarizzazione di Agmon non sembra efficace come il metodo da noi seguito, che è stato quello di arrivare al teor. 4.1 dimostrando dapprima direttamente il teor. 1.1 e poi facendo uso della sola teoria dell'interpolazione « complessa ».

Tuttavia le osservazioni ora fatte a proposito dei procedimenti di regolarizzazione di Agmon potrebbero essere utilizzate per ottenere in altro modo proprio il teor. 1.1: partendo infatti dal teor. 4.1, supposto dimostrato per quei soli problemi cui è possibile applicare il metodo AGMON, si può ottenere con procedimento « misto », cioè utilizzando anche l'interpolazione, il teor. 1.1 nella sua generalità. Abbiamo voluto accennare a questa diversa strada, anche se essa è assai meno semplice di quella da noi seguita, perchè le idee che la suggeriscono ci sembra possano essere ulili in altri problemi.

5.10. Una ultima osservazione riguarda il caso $p = 2$. I risultati ottenuti nel presente lavoro per $p = 2$ estendono ai problemi di tipo (2.7) quelli ottenuti in [21] per i problemi di DIRICHLET, di NEUMANN e di derivata obliqua regolare; come tali potrebbero essere anche utilizzati per studiare, come si è fatto nel n. 13 di [21], problemi misti del tipo di HADAMARD per operatori non ellittici, quali: $A + \frac{\partial}{\partial t}$ e $A + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

n. 6. Un teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui di $W^{s,p}(\Omega)$.

6.1. Come abbiamo già annunciato nel n. 13 di [22] faremo ora un'applicazione dei teoremi esistenziali ottenuti in questo lavoro per dimostrare un teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui di $W^{s,p}(\Omega)$, che estende quello classico di F. RIESZ sui funzionali lineari e continui di $L^p(\Omega)$.

Sia dunque p reale > 1, $s = r + \theta$ con r intero ≥ 0 e θ reale tale che $\frac{1}{p} < \theta \leq 1$. Consideriamo lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$, Ω essendo un aperto limitato di R^n che per semplicità supporremo essere di classe C^∞, come si è fatto nei numeri precedenti.

Avremo bisogno in seguito di considerare il seguente operatore

$$Au = \sum_{|k| \leq r+1} (-1)^{|k|} D^k (D^k u) \tag{6.1}$$

cui è associata la forma sesquilineare

$$a(u, v) = \sum_{|k| \leq r+1} \int_\Omega D^k u \, \overline{D^k v} \, dx. \tag{6.2}$$

L'operatore (6.1) è *fortemente ellittico, formalmente autoaggiunto e verifica inoltre la condizione di V-elliticità* relativa al problema di NEUMANN, perchè è

$$a(u, u) = \| u \|^2_{W^{r+1,2}(\Omega)} \tag{6.3}$$

per tutte le u di $W^{r+1,2}(\Omega)$.

Indicheremo al solito con S_j, $j=0, \dots, r$ gli operatori di NEUMANN associati a (6.1), cioè gli operatori tali che valga la formula di GREEN

$$(Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{r} \int_\Gamma S_j u \, \overline{\gamma_j v} \, d\sigma \tag{6.4}$$

per ogni coppia di funzioni u e $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Considerati per l'operatore A il problema di DIRICHLET

$$Au = f, \qquad \gamma_j u = g_j \qquad j = 0, \dots, r \tag{6.5}$$

e quello di NEUMANN

$$Au = f, \qquad S_j u = g_j \qquad j = 0, \dots, r \tag{6.6}$$

risultano verificati per essi rispettivamente l'ipotesi $J_\gamma)$ e la $J_B)$; la verifica delle diverse condizioni può essere fatta direttamente oppure può essere ricavata dalla forte ellitticità di A e dalla (6.3), in virtù anche del risultato di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG (v. n. 10 di [3]) sulla necessità delle « Condizioni complementari ».

Dunque ai problemi (6.5) e (6.6) possono essere applicati i risultati di [22] e dei precedenti numeri del presente lavoro.

6.2. Fatte queste premesse veniamo ora al teorema di rappresentazione:

TEOR. 6.1.: *Sia Ω un aperto limitato di R^n, di classe C^∞* (13) *e si consideri lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$, $p > 1$, $s = r + \theta$, con r intero ≥ 0 e θ reale tale che $\frac{1}{p} < \theta \leq 1$; allora per ogni funzionale lineare e continuo $L(u)$ su $W^{s,p}(\Omega)$ esiste un elemento e uno solo $v \in W^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, tale che*

$$L(u) = \sum_{|k| \leq r} \int_\Omega D^k v \, D^k u \, dx + \sum_{|k| = r+1} \langle D^k v, D^k u \rangle, \tag{6.7}$$

dove il $\langle\, , \rangle$ indica la dualità tra $W_0^{1-\theta,p'}(\Omega)$ e $W^{\theta-1,p}(\Omega)$.

OSSERVAZIONI: Si noti anzitutto che se $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e $v \in W^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$ allora si ha rispettivamente (si veda la Prop. 11.1 di [22] e la Remarque 6.1 di [23]):

$$D^k u \in W^{\theta-1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad D^k v \in W^{1-\theta,p'}(\Omega) \quad \text{per} \quad |k| = r + 1.$$

D'altra parte per il théor. 1.1 di [23], poichè $1 - \theta < \frac{1}{p'}$, si ha che $W^{1-\theta,p'}(\Omega) = W_0^{1-\theta,p'}(\Omega)$. Inoltre $W^{\theta-1,p}(\Omega)$ per definizione è uguale al duale di $W_0^{1-\theta,p'}(\Omega)$ e dunque $\langle D^k v, D^k u \rangle$ ha significato.

(13) Vale anche qui un'osservazione analoga a quella della nota (1); inoltre si osservi che la limitatezza di Ω non è necessaria, perchè ad es. il teorema è vero anche nel caso $\Omega = R^n_+$.

Si noti ancora che nel caso $\theta = 1$, la (6.7) diventa

$$L(u) = \sum_{|k| \leq r+1} \int_{\Omega} D^k v \, D^k u \, dx.$$

In questo caso, $\theta = 1$, il teorema è stato ottenuto indipendentemente e con altro procedimento da FRITZ e MILGRAM [10]; sempre per $\theta = 1$ una diversa dimostrazione del teorema (e di un risultato un po' più generale di rappresentazione) è stata data in seguito anche da K. T. SMITH e L. HÖRMANDER (comunicazione personale).

Osserviamo poi che il teorema di rappresentazione può essere utile in diverse questioni di analisi; esso permette tra l'altro di risolvere un problema esistenziale posto da G. FICHERA in [9bis] pag. 15 e 16.

E infine aggiungiamo che si possono avere con lo stesso nostro procedimento altri teoremi di rappresentazione utilizzando anzichè l'operatore A dato dalla (6.1), altri operatori A del tipo

$$A = \sum_{|k|,\, |h| \leq r+1} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh} D^h),$$

purchè per essi valgano le ipotesi $J_\gamma)$ per il problema di DIRICHLET e $J_B)$ per il problema di NEUMANN ($B = S$); si ottiene allora la

$$L(u) = \sum_{|k|,\, |h| \leq r} \int_{\Omega} a_{kh} \, D^k v \, D^h u \, dx + \sum_{|k|,\, |h| = r+1} \langle a_{kh} \, D^k v, D^k u \rangle. \tag{6.7'}$$

E sarebbe interessante di sapere sotto quali ipotesi minime di differenziabilità dei coefficienti a_{kh} e della frontiera Γ di Ω la rappresentazione (6.7') è vera.

DIMOSTRAZIONE: *a*) Dimostriamo anzitutto l'esistenza di v; ricordiamo (v. ad es. il n. 2. di [22]) che esiste un'applicazione lineare e continua $u \to Pu$ di $W^{s,p}(\Omega)$ in $W^{s\,p}(R^n)$ tale che $Pu = u$ q — d. in Ω.

Allora se $L(u)$ è un funzionale lineare e continuo su $W^{s,p}(\Omega)$ si ha che esiste un elemento $T \in W_{\overline{\Omega}}^{-s,p'}(R^n)$ (14) tale che

$$L(u) = \langle T, Pu \rangle \qquad \text{per ogni } u \in W^{s,p}(\Omega). \tag{6.8}$$

b) Sia allora T_Ω la restrizione di T a Ω: $T_\Omega \in W^{-s,p'}(\Omega)$ e dunque per quanto si è detto in 6.1 e per il teor. 11.1 di [22] il problema di

---

(14) Ricordiamo che se E è uno spazio di distribuzioni su R^n e X un insieme di R^n con E_X si suole indicare il sottospazio di E delle distribuzioni a supporto contenuto in X.

DIRICHLET

$$\begin{cases} Au_0 = T_\Omega \\ \gamma_j u_0 = 0 \end{cases}$$

dove A è l'operatore (6.1) ammette una e una sola soluzione $u_0 \in W^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$,

Indicato al solito con $\tilde{f}$ il prolungamento a tutto R^n di una funzione o distribuzione f definita in Ω, ottenuto ponendo $\tilde{f} = f$ in Ω e $\tilde{f} = 0$ in $R^n - \Omega$, si ha allora che la distribuzione

$$S = T - A\tilde{u}_0 \tag{6.9}$$

è a supporto contenuto in Γ.

Inoltre, poichè $u_0 \in W^{r+1,p'}(\Omega)$, $\tilde{u}_0 \in W^{r+1,p'}(R^n)$ essendo $r+1$ intero. E ancora, poichè $D^k\tilde{u}_0 = (D^k u_0)^{\sim}$, per $|k| = r+1$ si ha che $D^k\tilde{u}_0$ appartiene a $W^{1-\theta,p'}(R^n)$, in virtù del fatto che $D^k u_0 \in W^{1-\theta,p'}(\Omega)$ e che, essendo $1 - \theta < \dfrac{1}{p'}$, per il théor. 3.1 di [23], $(D^k u_0)^{\sim} \in W^{1-\theta,p'}(R^n)$. Dunque possiamo concludere che $\tilde{u}_0 \in W^{r+2-\theta,p'}(R^n)$ e quindi $S \in W^{-s,p'}(R^n)$.

c) Dimostriamo ora che S ammette una rappresentazione del tipo

$$\langle S, w \rangle = \sum_{j=0}^{r} \langle g_j, \gamma_j w \rangle \quad \text{per ogni} \quad w \in W^{s,p}(R^n) \tag{6.10}$$

dove i g_j sono opportuni elementi di $W^{-(s-j-1/p),p'}(\Gamma)$.

Infatti indicato con σ il complementare di Γ in R^n, $\sigma = \complement\,\Gamma$, ricordiamo (v. ad es. teor. 5.2 di [22]) che l'applicazione $w \to \vec{\gamma} w = \{\gamma_0 w, \dots, \gamma_r w\}$ è lineare e continua da $W^{s,p}(R^n)$ su $\prod_{j=0}^{r} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ e il nucleo di questa applicazione, in virtù della Prop. 5.1 (sostituendo Ω con σ essa è ancora valida), risulta esser proprio $\widetilde{W_0^{s,p}}(\sigma)$ (sottospazio di $W^{s,p}(R^n)$ costituito dai prolungamenti $\tilde{w}$ delle $w \in W_0^{s,p}(\sigma)$).

Dunque, passando allo spazio quoziente e indicando con $\dot{w}$ gli elementi di $W^{s,p}(R^n)\big/\widetilde{W_0^{s,p}}(\sigma)$ e con $\dot{w} \to \dot{\gamma}\dot{w}$ l'applicazione quoziente ($\dot{\gamma}\dot{w} = \vec{\gamma} w$, $w \in \dot{w}$), si ha che $\dot{w} \to \dot{\gamma}\dot{w}$ è un isomorfismo di $W^{s,p}(R^n)\big/\widetilde{W_0^{s,p}}(\sigma)$ su $\prod_{j=0}^{r} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$. Sia $\dot{\gamma}^{-1}$ l'isomorfismo inverso di $\dot{\gamma}$.

Osserviamo poi che $w \to \langle S, w \rangle$ è un funzionale lineare e continuo su $W^{s,p}(R^n)$, nullo su $\widetilde{W_0^{s,p}}(\sigma)$, poichè, se $w \in \widetilde{W_0^{s,p}}(\sigma)$, allora esiste una successione φ_i, $i = 1, 2, \dots$, di funzioni $\varphi_i \in \mathcal{D}(\sigma)$ e tale che $\varphi_i \to w$ in $W^{s,p}(R^n)$, e per queste φ_i risulta $\langle S, \varphi_i \rangle = 0$, essendo il supporto di S in Γ; e dunque $\langle S, w \rangle = 0$ per $w \in \widetilde{W_0^{s,p}(\sigma)}$. Ne segue che il funzionale $\dot{w} \to \langle S, \dot{w} \rangle = \langle S, w \rangle$ per $w \in \dot{w}$, è lineare e continuo su $W^{s,p}(R^n) \Big/ \widetilde{W_0^{s,p}(\sigma)}$ e quindi il funzionale $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_r\} \to \langle S, \dot{\gamma}^{-1}\varphi \rangle$ è lineare e continuo su $\prod_{j=0}^{r} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ e perciò risulta: $\langle S, \dot{\gamma}^{-1}\varphi \rangle = \sum_{j=0}^{r} \langle g_j, \varphi_j \rangle$ con $g_j \in W^{-(s-j-1/p),p'}(\Gamma)$. In definitiva si ha, posto $\dot{\gamma}^{-1}\varphi = \dot{w}$, per $w \in \dot{w}: \langle S, w \rangle = \langle S, \dot{w} \rangle = \sum_{j=0}^{r} \langle g_j, \gamma_j w \rangle$, cioè la (6.10)

d) Ricordando quanto si è detto nel n. 6.1 possiamo applicare il teor. 4.2 del n. 4 al problema di NEUMANN (6.6) con $f = 0$ e i g_j dati dalla (6.9), cioè al problema

$$\begin{cases} Aw = 0 \\ S_j w = g_j \qquad\qquad j = 0, 1, \dots, r, \end{cases}$$

e ottenere così una e una sola soluzione w di esso appartenente a $W^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$.

Per questa soluzione w vale la formula di GREEN seguente

$$(6.11) \qquad 0 = (Aw, u) = \sum_{|k| \le r} \int_{\Omega} D^k w\, \overline{D^k u}\, dx + \sum_{|k|=r+1} \langle D^k w, \overline{D^k u} \rangle + \sum_{j=0}^{r} \langle g_j, \overline{\gamma_j u} \rangle$$

per ogni $u \in W^{s,p}(\Omega)$, dove $\langle D^k w, \overline{D^k u} \rangle$ e $\langle g_j, \overline{\gamma_j u} \rangle$ indicano rispettivamente la dualità tra $W_0^{1-\theta,p'}(\Omega)$ e $W^{\theta-1,p}(\Omega)$ e tra $W^{-(s-j-1/p),p'}(\Gamma)$ e $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$. La (6.11) si ottiene infatti dalla (6.4) per continuità, ricordando che $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{s,p}(\Omega)$ (Prop. 2.5 di [22]) e in $D_A^{r+2-\theta,p}(\Omega)$ (Prop. 5.8 del presente lavoro).

Si deduce allora dalle (6.8), (6.9), (6.10) e (6.11)

$$L(u) = \langle A\tilde{u}_0, Pu \rangle + \sum_{j=0}^{r} \langle g_j, \gamma_j u \rangle =$$

$$= \sum_{|k| \le r} \int_{R^n} D^k \tilde{u}_0\, D^k Pu\, dx + \sum_{|k|=r+1} \langle D^k \tilde{u}_0, D^k Pu \rangle - \sum_{|k| \le r} \int_{\Omega} D^k w\, D^k u\, dx$$

$$- \sum_{|k|=r+1} \langle D^k w, D^k u \rangle,$$

con ovvio significato dei simboli.

D'altra parte risulta

$$\int_{R^n} D^k\tilde{u}_0\, D^k Pu\, dx = \int_{\Omega} D^k u_0\, D^k u\, dx \qquad \text{per} \quad |k| \leq r \tag{6.12}$$

e così pure

$$\langle D^k\tilde{u}_0\,,\, D^k Pu\rangle = \langle D^k u_0\,,\, D^k u\rangle \qquad \text{per} \quad |k| = r+1. \tag{6.13}$$

Infatti per la Prop. 5.1 (applicata a $W_0^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$), u_0 appartiene a $W_0^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$ e quindi esiste una successione di funzioni $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che $\psi_i \to u_0$ in $W^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$; per esse risulta

$$\int_{R^n} D^k\tilde{\psi}_i\, D^k Pu\, dx = \int_{\Omega} D^k\psi_i\, D^k u\, dx$$

e quindi passando al limite si hanno le (6.12) e (6.13).

In definitiva dunque si ha

$$L(u) = \sum_{|k|\leq r} \int_{\Omega} D^k (u_0 - w)\, D^k u\, dx + \sum_{|k|=r+1} \langle D^k (u_0 - w),\, D^k u\rangle$$

cioè la (6.7) con $v = u_0 - w$.

e) Dimostriamo ora l'unicità di v; e perciò dimostriamo che se $v \in W^{r+2-\theta\, p'}(\Omega)$ e

$$\sum_{|k|\leq r} \int_{\Omega} D^k v\, D^k u\, dx + \sum_{|k|=r+1} \langle D^k v, D^k u\rangle = 0 \tag{6.14}$$

per ogni $u \in W^{r+\theta,p}(\Omega)$, allora è $v = 0$. La (6.14) è dunque verificata in particolare per tutte le $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$; e se prendiamo addirittura $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ dalla (6.14) si ottiene che $Av = 0$. Allora tenuto conto del teor. 5.4, dalla (6.4) ricaviamo che per la v considerata per ogni $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si ha

$$a(v, u) + \sum_{j=0}^{r} \langle S_j v, \overline{\gamma_j u}\rangle = 0$$

e dunque poichè la (6.14) ci dice che è anche $a(v, u) = 0$, otteniamo

$$\sum_{j=0}^{r} \langle S_j v, \overline{\gamma_j u}\rangle = 0 \qquad \text{per ogni} \quad u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),$$

da cui si ha $S_j v = 0$, $j = 0, 1, \ldots, r$. E allora per il teor. 5.4 si ha $v = 0$. c. v. d.

n. 7. Quadro riassuntivo dei risultati.

Ci sembra utile riassumere i principali risultati ottenuti per i problemi ellittici in questo lavoro e nei precedenti [21], [22] e [23], raggruppandoli secondo i diversi argomenti:

1) *teoremi di tracce e di densità*; 2) *il problema ai limiti generale* $Au = f$, $B_j u = g_j$; 3) *il problema di Dirichlet*; 4) *teoremi di interpolazione*; 5) *altri risultati.*

I riferimenti verranno dati indicando rispettivamente con II, III, IV e V i lavori [21], [22], [23] e il presente. Utilizzeremo gli spazi seguenti per la cui precisa definizione diamo tra parentesi l'indicazione bibliografica: $W^{s,p}(R^n)$ (III, n. 1.3), $W^{s,p}(\Omega)$ (III, n. 2.1 2.2, 2.3), $W_0^{s,p}(\Omega)$ (III, n. 2.3) $W^{s,p}(\Gamma)$ (III, n. 2.5), $H^{s,p}(R^n)$ (III, n. 3.1), $H^{s,p}(\Omega)$ (III, n. 4.1, 4.2), $H^{s,p}(\Gamma)$ (III, n. 4.3), $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ (III, n. 10.1), $D_A^{s,p}(\Omega)$ (V, n. 3.1); e inoltre $\mathcal{D}(\Omega)$ (spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili a supporto compatto in Ω), $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in $\overline{\Omega}$), $\mathcal{D}(\Gamma)$ (spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili su Γ).

Richiamiamo anche le *ipotesi* che abbiamo utilizzato

α) *Ω è un aperto limitato di R^n, di classe C^∞* (Γ è la sua frontiera, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$)

β) $A = \sum_{|k|,|h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh} D^h)$, $a_{kh} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, è un operatore differenziale lineare *propriamente ellittico* in $\overline{\Omega}$ (V, n. 2.1)

γ) $B_j = \sum_{|h| \leq m_j} b_{j,h} D^h$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ $b_{j,h} \in \mathcal{D}(\Gamma)$, $0 \leq m_j < 2m$, sono m operatori differenziali lineari di frontiera costituenti un sistema *normale* (V, n. 2.2)

δ) gli operatori B_j verificano la *condizione complementare rispetto* ad A (V, n. 2.3)

J_γ) valgono le ipotesi α) e β) e inoltre *per almeno un $p > 1$ il problema omogeneo di Dirichlet $Au = 0$ in Ω, $\gamma_j u = 0$ su Γ, $j = 0, 1, \ldots, m-1$* $\left(\gamma_j = \dfrac{\partial j}{\partial \nu^j}\right.$, ν normale interna a $\left.\Gamma\right)$ *ammette in $W^{2m,p}(\Omega)$ solo la soluzione $u = 0$* (condizioni sufficienti per la validità di J_γ) sono richiamate in III, n. 7.1 e II n. 10).

J_D) valgono le ipotesi α), β), γ), δ) e inoltre *per almeno un $p > 1$ il problema omogeneo : $Au = 0$ in Ω, $B_j u = 0$ su Γ, $j = 0, \ldots, m-1$, ammette in $W^{2m,p}(\Omega)$ solo la soluzione $u = 0$, e per almeno un $q > 1$ il problema omogeneo* (aggiunto) *$A^* v = 0$ in Ω, $B_j^* v = 0$ su Γ, $j = 0, \ldots, m-1$, ammette solo la soluzione $v = 0$* (per A^* e B_j^* v. V, n. 2.1 e 2.2; condizioni sufficienti per la validità di J_D) sono richiamate in V, n. 2.4 e II n. 8).

In tutti i risultati l'ipotesi α) e quelle sui coefficienti $a_{k,h}$ e $b_{j,h}$ possono essere sostituite da ipotesi più generali, di «sufficiente regolarità» di Ω e degli $a_{k,h}$ e $b_{j,h}$, che per brevità non abbiamo precisato.

1). Teoremi di tracce e di densità.

1⁰) Nell'ipotesi α) e β), $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $D_A^{0,p}(\Omega)$, per $p > 1$ (V, Prop. 3.1)

2⁰) Nell'ipotesi J_γ), $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $D_A^{s,p}(\Omega)$, per $p > 1$, $0 \leq s \leq 2m$, $s - \frac{1}{p}$ non intero (V, Prop. 5.8)

3⁰) Nell'ipotesi J_γ), $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$, per $p > 1$, $0 \leq s \leq m$, $s - \frac{1}{p}$ non intero (V, Prop. 5.7)

4⁰) Nell'ipotesi α), $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $W^{s,p}(\Omega)$, per $p > 1$, $0 \leq s \leq \frac{1}{p}$ (IV, théor. 1.1)

5⁰) Nell'ipotesi J_γ), l'applicazione $u \to \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ è lineare e continua da $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ su $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, per $p > 1$, $0 \leq s \leq m$, $s - \frac{1}{p}$ non intero. (V. Teor. 5.1)

6⁰) Nell'ipotesi α), β), γ), l'applicazione $u \to \{B_0 u, \dots, B_{m-1} u\}$ è lineare e continua da $D_A^{0,p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{-m_j-1/p,p}(\Gamma)$, per $p > 1$. (V. Teor. 3.1)

7⁰) Nell'ipotesi J_γ) e J_B), l'applicazione $u \to \{B_0 u, \dots, B_{m-1} u\}$ è lineare e continua da $D_A^{s,p}(\Omega)$ su $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$, per $p > 1$, $0 \leq s \leq 2m$, $s - \frac{1}{p}$ non intero (V. teor. 5.4)

2). Il problema ai limiti $\begin{cases} Au = f \\ B_j u = g_j \end{cases}$. $j = 0, \dots, m-1$

1⁰) Nell'ipotesi J_B), per $p > 1$, $0 \leq s \leq 2m$ e, se è $p \neq 2$, $s - \frac{1}{p}$ non intero, il problema ammette per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-m_j-1/p,p}(\Omega)$ una e una sola soluzione $u \in W^{s,p}(\Omega)$ ed essa dipende con continuità dai dati (V. teor. 4.2)

2⁰) Nell'ipotesi J_B), per $p > 1$, $0 \leq s \leq 2m$, $s - \frac{1}{p}$ intero, il problema ammette per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ una e una sola soluzione u, che appartiene a $W^{s-\varepsilon}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$ (V. teor. 4.3).

3^0) Nell'ipotesi J_γ) e J_B), per $p > 1$, $0 \leq s \leq 2m$, $s - \dfrac{1}{p}$ non intero, l'applicazione $u \to \{Au\,; B_0 u, \dots, B_{m-1} u\}$ è un isomorfismo di $D_A^{s,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ (per $s = 0$ e $s = 2m$ basta la sola ipotesi J_B)) (V, teoremi 2.3, 3.2, e 5.4).

3). Il problema di Dirichlet $\begin{cases} Au = f \\ \gamma_j u = g_j \qquad j = 0, , \dots, m-1 \end{cases}$

1^0) Nell'ipotesi J_γ), l'applicazione $u \to \{Au; \gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ è un isomorfismo di $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ su $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ per $p > 1$, $0 \leq s \leq m$, $s - \dfrac{1}{p}$ non intero (V, teor. 5.2).

2^0) Nell'ipotesi J_γ), per $p = 2$ e $0 \leq s \leq m$ il problema ammette per ogni $f \in W^{-m,2}(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-j-1/2,2}(\Gamma)$ una e una sola soluzione $u \in \mathcal{W}_A^{s,2}(\Omega)$ ed essa dipende con continuità dai dati (II, théor. 10.1).

3^0) Nell'ipotesi J_γ), per $p > 1$, $0 < s < m$, $s - \dfrac{1}{p}$ intero, il problema ammette per ogni $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ una e una sola soluzione che appartiene a $W^{s-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$ (III, teor. 12.2).

4^0) Nell'ipotesi J_γ), l'applicazione $u \to \{Au; \gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ è un isomorfismo di $W^{s,p}(\Omega)$ su $W^{s-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, per $p > 1$, $m \leq s \leq 2m$, $s - \dfrac{1}{p}$ non intero (III, teor. 11.2 e IV Remarque 6.1).

5^0) Nell'ipotesi J_γ), per $p > 1$, $m < s < 2m$, $s - \dfrac{1}{p}$ intero, il problema ammette per ogni $f \in W^{s-2m,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ una e una sola soluzione u che appartiene a $W^{s-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$. (III cor. 11.6).

4) Teoremi di interpolazione.

Per la definizione degli spazi intermedi $T(p, \alpha\,; X_0, X_1)$ e $[X_0, X_1\,; \delta(\theta)]$ si veda rispettivamente, III n. 1.1 e n. 3.2

1^0) $\qquad T(p, \alpha\,; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n)) = W^{s+1-\theta,p}(R^n)$

per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, s intero (III, Prop. 1.4)

2^0) Nell'ipotesi α), è

$$T(p, \alpha; W^{s+1,p}(\Omega), W^{s,p}(\Omega)) = W^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, s intero ≥ 0 oppure s intero < 0 e $1 - \theta \neq \frac{1}{p}$ (III, Prop. 2.4 e teor. 11.3 bis; IV, théor. 6.2 e Remarque 6.1).

3^0) Nell'ipotesi α), è

$$T(p, \alpha; W_0^{s+1,p}(\Omega), W_0^{s,p}(\Omega)) = W_0^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, s intero ≥ 0 e $1 - \theta \neq \frac{1}{p}$, (IV, théor. 6.1)

4^0) Nell'ipotesi α), è

$$T(p, \alpha; W^{s+1,p}(\Gamma), W^{s,p}(\Gamma)) = W^{s+1-\theta,p}(\Gamma)$$

per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, s intero qualunque (III, Prop. 2.11).

5^0) Nell'ipotesi α), è

$$T(p, \alpha; W^{s+1-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma)) = W^{s+1-\theta-1/p,p}(\Gamma)$$

per $p > 1$, s intero qualunque, $0 < \theta < 1$, e, se è $p \neq 2$, $1 - \theta \neq \frac{1}{p}$ (III, teor. 11.4 e 11.5; IV, Remarque 6.1).

6^0) Nell'ipotesi J_γ), è

$$T(p, \alpha; \mathcal{W}_A^{s+1,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)) = \mathcal{W}_A^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, $s = 0, 1, \ldots, m-1$, $0 < \theta < 1$, $1 - \theta \neq \frac{1}{p}$ (V, Prop. 5.5).

7^0) Nell'ipotesi J_γ), è

$$T(p, \alpha; D_A^{s+1,p}(\Omega), D_A^{s,p}(\Omega)) = D_A^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, $s = 0, 1, \ldots, 2m-1$, $0 < \theta < 1$, $1 - \theta \neq \frac{1}{p}$ (V, Prop. 5.6).

8^0) Nell'ipotesi α), è

$$[W^{r-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma), \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(\Gamma)$$

per $p > 1$, r e s interi, $0 < \theta < 1$, $\theta(r-s)$ intero, (V, teor. 1.1).

9^0) Nell'ipotesi α), è

$$[W^{0,p}(\Omega), W^{s,p}(\Omega); \delta(\theta)] = W^{\theta s,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, s intero < 0, $0 < \theta < 1$, θs intero (III, (8.4)).

10^0) Nell'ipotesi J_γ), è

$$[\mathcal{W}_A^{m,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)] = \mathcal{W}_A^{(1-\theta)m,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, θm intero (V. Prop. 5.3).

11^0) Nell'ipotesi J_γ), è

$$[D_A^{2m,p}(\Omega), D_A^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)] = D_A^{2(1-\theta)m,p}(\Omega)$$

per $p > 1$, $0 < \theta < 1$, $2\theta\, m$ intero (V, Prop. 5.4).

5) **Altri risultati.**

1^0) Nell'ipotesi α), ogni funzionale lineare e continuo di $W^{r+\theta,p}(\Omega)$, $p > 1$, r intero ≥ 0, $\dfrac{1}{p} < \theta \leq 1$ è rappresentabile in modo unico nella forma

$$L(u) = \sum_{|k| \leq r} \int_\Omega D^k v\, D^k u\, du + \sum_{|k| = r+1} \langle D^k v, D^k u \rangle$$

con $v \in W^{r+2-\theta,p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $\langle , \rangle$ indicando la dualità tra $W_0^{1-\theta,p'}(\Omega)$ e $W^{\theta-1,p}(\Omega)$ (V, teor. 6.1).

2^0) Per $\varepsilon > 0$, $p > 1$, s reale qualunque si ha

$$H^{s+\varepsilon,p}(R^n) \subset W^{s,p}(R^n) \subset H^{s-\varepsilon,p}(R^n)$$

(III, teor. 3.2).

3^0) Nell'ipotesi α), per $p > 1$ l'applicazione $u \to \tilde{u}$ ($\tilde{u} = u$ in Ω, $\tilde{u} = 0$ in $R^n - \Omega$) è lineare e continua da $W^{s,p}(\Omega)$ in $W^{s,p}(R^n)$ per $0 \leq s < \dfrac{1}{p}$ e da $W_0^{s,p}(\Omega)$ in $W^{s,p}(R^n)$ per $\dfrac{1}{p} < s \leq 1$, e non lo è se $s = \dfrac{1}{p}$ (IV, théor 3.1 e 4.1).

BIBLIOGRAFIA

1 - S. AGMON: *The L_p approach to the Dirichlet problem I,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1959) dp. 405-448.

2 - S. AGMOM: *The coerciveness problem for integro-differential forms.* Journal d'Anal. Math., 6 (1958) pp. 183-223.

3 - S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG: *Estimates near the boundary ....,* Comm. Pure Applied Math. XII (1959) pp. 623-727.

4 - N. ARONSZAJN: *Boundary value of functions with finite Dirichlet integral,* Tech. Report, n. 14, Univ. of Kansas, (1955), pp. 77-94.

5 - N. ARONSZAJN: *Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems,* Conferenza di Berkeley, 1960 (in corso di stampa).

6 - N. ARONSZAJN, A. N. MILGRAM: *Differential operators on Riemannian manifolds,* Rend. Circ. Matem. Palermo, 2 (1952) pp. 1-61.

7 - F. E. BROWDER: *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems.* Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 45 (1959), pp. 365-372.

8 - F. E. BROWDER: *A priori estimates for solutions of elliptic boundary-value problems,* Indagationes Math. XXII (1960), pp. 145-169

9 - A. P. CALDERON: *Intermediate spaces and interpolation,* Convegno di Varsavia, Settembre 1960 (in corso di stampa).

9 bis - G. FICHERA: *Sul concetto del problema «ben posto» per una equazione differenziale,* Rend. di mat., (1-2) 19 (1960), pp. 95-121.

10 - N. FRITZ, A. N. MILGRAM: . . . .

11 - E. GAGLIARDO: *Interpolation d'espaces de Banach et applications,* C. R. Acad. Sci. Paris (I), (II), (III), 248 (1959), pp. 1912-1914; 3388-3390; 3517-3518.

12 - E. GAGLIARDO: *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni,* Ricerche di Mat., IX (1960), pp. 58-81.

13 - L. HÅRMANDER: *Definitions of maximal differential operators,* Arkiv for Math., 3 (1958), pp. 500-504.

14 - L. HÅKMANDER: *Regularity on the Boundary ....,* Acta Math., 99 (1958), pp. 225-264.,

15 - L. HÅRMANDER, J. L. LIONS: *Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet.* Math. Scand., 4 (1956) pp. 259-270.

16 - J. L. LIONS: *Conditions aux limites de Visik-Soboleff et problèmes mixtes,* C. R. Acad. Sci. Paris, 244 (1957) pp. 1126-1128.

17 - J. L. LIONS: *Théorèmes de trace et d'interpolation.* (I) Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, XII (1959), pp. 389-403.

18 - J. L. LIONS: *Sur les espaces d'interpolation, dualité.* Math. Scand. t. 9 (1961), pp. 147-177.

19 - J. L. LIONS: *Une construction d'espaces d'interpolation,* C. R. Acad. Sc. Paris, 251 (1960), pp. 1851-1855.

19 bis - J. L. LIONS: *Problèmes aux limites en théorie des distributions.* Acta Math. 94 (1955), pp. 13-153.

19 ter - J. L. LIONS: *Sur les problèmes aux limites du type de dérivée oblique,* Annals of Math. 64 (1956) pp. 206-239.

20 - J. L. LIONS, E. MAGENES: *Problemi al contorno non omogenei.* (I), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XIV (1960), pp. 259-308.

21 - J. L. LIONS, E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes* (II), Ann. Inst. Fourier, 11 (1961), pp. 137-178.

22 - J. L. LIONS, E. MAGENES : *Problemi ai limiti non omogenei* (III). Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XV (1961), pp. 39-101.

23 - J. L. LIONS, E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes,* (IV) Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XV (1961), (in corso di stampa).

24 - E. MAGENES, G. STAMPACCHIA : *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico.* Ann Scuola Norm. Sup. Pisa, III, 12 (1958), pp. 247-357.

25 - J. PEETRE : *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels,* Lund. Université, 1959.

26 - J. PEETRE : *Another approach to elliptic boundary problems* (in corso di stampa).

27 - M. SCHECHTER : *Coerciveness for linear ...,* Comm. Pure Appl. Math , 11 (1958), pp. 153-174.

28 - M. SCHECHTER : *General boundary value problems for elliptic partial differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), pp. 457-486.

29 - M. SCHECHTER : *Remarks on elliptic boundary ...*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), pp. 561-578.

30 - M. SCHECHTER : *Mixed Boundary problems for general elliptic equations,* Comm Pure Appl. Math. 13 (1960), pp. 183-201.

30 bis - M. SCHECHTER; *A general approach to boundary problems.* Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), pp. 495-500.

31 - L. N. SLOBODETSKII : *Valutazione in L^p delle soluzioni dei sistemi ellittici,* (in russo) Doklady Akad. Nauk., 123 (1958), pp. 616-619.

32 - S. L. SOBOLEV, I. M. VISHIK : *Nuova forma generale dei problemi ai limiti* (in russo) Doklady Akad. Nauk., 111 (1956), pp. 521-523.

33 - V. A. SOLONNIKOV : *Su certe proprietà degli spazi di ordine frazionario* (in russo) Doklady Akad. Nauk., 134 (1960), pp. 282-285.

34 - S. V. USPENSKII : *Proprietà delle classi W_p^r con una derivata frazionaria su varietà differenziabili* (in russo) Doklady Akad. Nauk. 132 (1960), pp. 60-62.

35 - I. M. VISHIK : *Sui problemi ai limiti per le equazioni a derivate parziali ellittiche* (in russo) Trudy Moskov. Mat. Obsc., 1 (1952), pp. 187-246.