ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

NATALIA BERRUTI ONESTI

Sopra alcune proprietà delle estremaloidi relative ad una classe di problemi variazionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 4 (1961), p. 327-335

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_4_327_0>

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ DELLE ESTREMALOIDI RELATIVE AD UNA CLASSE DI PROBLEMI VARIAZIONALI (*)

Nota di NATALIA BERRUTI ONESTI (Pavia)

In una recente Memoria ([1]) ho esteso alle estremaloidi relative agli integrali curvilinei dipendenti dagli elementi differenziali di ordine superiore

$$\mathcal{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x, y, z\,;\, x', y', z'\,;\, u_2\,, v_2\,, w_2)\, ds,$$

$$\mathcal{I}^{(3)}_{C^{(3)}} = \int_{C^{(3)}} F(x, y, z\,;\, x', y', z'\,;\, u_2\,, v_2\,, w_2\,;\, u_3\,, v_3\,, w_3)\, ds$$

alcuni teoremi stabiliti da altri Autori per certe classi di problemi variazionali che riguardano il caso piano ([2]).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 19 del Comitato per la Matematica del CNR per l'anno accademico 1961-62.

([1]) N. BERRUTI ONESTI, *Sopra le estremaloidi relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, Annali di Matematica pura ed applicata, S. IV, T. LII, (1960), pp. 219-246. Per le generalità rinvio alla Memoria citata, facendo presente soltanto che, essendo s la lunghezza dell'arco rettificato, è

$$u_2 = x'y'' - x''y', \quad v_2 = y'z'' - y''z', \quad w_2 = z'x'' - z''x',$$
$$u_3 = x'y''' - x'''y', \quad v_3 = y'z''' - y'''z', \quad w_3 = z'x''' - z'''x'.$$

([2]) Per quanto riguarda gli integrali curvilinei del piano in forma parametrica vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, Cap. II, n. 34, d). N. BOGOLIOUBOFF, *Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*, Annali di Matematica pura ed applicata, S. IV, T. IX, (1931), pp. 195-241. S. CINQUINI, *Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali*, Rend. Accademia Nazionale dei Lincei, S. VIII, vol. XXIII, (1957), pp. 116-120. *Sopra un teorema relativo alle estremanti di una classe di problemi variazionali*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, S. III, vol. XI, (1957), pp. 137-147.

Facendo seguito a tale lavoro, nella presente Nota si dimostra (n. 1) una condizione sufficiente, affinchè sopra un'estremaloide di ordine 2 le derivate $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ siano a rapporto incrementale limitato; l'efficacia di tale teorema, che, in confronto al caso parametrico piano, si presenta in forma più complessa (cfr. Osservazione al n. 1), viene posta in luce mediante alcuni esempi (n. 2).

La condizione stabilita al n. 1 viene estesa (n. 3, *a*)) alle estremaloidi di ordine 3, per le quali inoltre si osserva (n. 3, *b*)) che la proprietà rilevata è verificata anche sotto altre ipotesi.

Infine, in base ad uno dei teoremi di esistenza del minimo assoluto che figurano in una recente Memoria di S. CINQUINI [3], e tenendo conto sia di quanto si è dimostrato al n. 1 della presente Nota, sia di alcuni dei risultati conseguiti nella Memoria citata in [1], viene stabilito (n. 6) un teorema di esistenza di un'estremale di ordine 2 congiungente due punti assegnati. Di tale teorema viene indicata in breve l'estensione al caso del terzo ordine.

1. *Se in ogni campo limitato A_λ appartenente ad A e per ogni terna normalizzata (x', y', z') l'espressione*

$$(1)\qquad F^2_{u_2}(x, y, z\,;\, x', y', z'\,;\, u_2\,, v_2\,, w_2) + F^2_{v_2}(\dots) + F^2_{w_2}(\dots) -$$
$$- \left(z'F_{u_2}(\dots) + x'F_{v_2}(\dots) + y'F_{w_2}(\dots)\right)^2$$

tende uniformemente a $+\infty$ per $\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \to +\infty$, allora su ogni estremaloide di ordine 2, relativa alla funzione $F(x, y, z\,;\, x', y', z'\,;\, u_2\,, v_2\,, w_2)$ ed appartenente ad A, le derivate del primo ordine $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ sono a rapporto incrementale limitato.

Infatti [4] se

$$\vec{C}: \qquad x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s), \qquad (0 \le s \le L)$$

è un'estremaloide appartenente ad A e relativa alla funzione $F(x, y, z\,;\, x', y', z'\,;\, u_2\,, v_2\,, w_2)$, dalle equazioni delle estremaloidi di ordine 2 [5]

---

[3] S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica*, Annali di Matematica pura ed applicata, S. IV, T. XLIX, (1960), pp. 25-71. In particolare vedi Cap. I, § 3. n. 16.

[4] Il procedimento è analogo a quello seguito da L. TONELLI per il caso ordinario del primo ordine. Vedi L. TONELLI, *Sulle proprietà delle estremanti*, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. III, (1934), pp. 213-237, Cap. I, n. 3.

[5] Vedi N. BERRUTI ONESTI, luogo cit. in [1], n. 2, *a*).

segue, in quasi-tutto $(0, L)$[6],

$$\begin{cases} y' F_{u_2} - z' F_{w_2} = H_1(s) \\ z' F_{v_2} - x' F_{u_2} = H_2(s) \\ x' F_{w_2} - y' F_{v_2} = H_3(s), \end{cases}$$

dove $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ risultano funzioni continue in tutto $(0,L)$, ed anche, indicato con H il massimo di $H_1^2(s) + H_2^2(s) + H_3^2(s)$ in $(0,L)$, e tenendo presente che è identicamente in $(0,L)$ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$,

$$F_{u_2}^2 + F_{v_2}^2 + F_{w_2}^2 - (z' F_{u_2} + x' F_{v_2} + y' F_{w_2})^2 \leq H. \tag{2}$$

D'altra parte, fissato un campo limitato A_λ contenente tutti i punti dell'estremaloide $\overline{C}$, al numero $H + 1$ possiamo, in virtù delle ipotesi fatte, subordinare un numero reale positivo N, tale che per ogni terna di numeri reali u_2, v_2, w_2 con

$$\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} > N$$

sia

$$F_{u_2}^2(x, y, z\,;\, x', y', z'\,;\, u_2, v_2, w_2) + F_{v_2}^2(\ldots) + F_{w_2}^2(\ldots) -$$
$$- \left(z' F_{u_2}(\ldots) + x' F_{v_2}(\ldots) + y' F_{w_2}(\ldots)\right)^2 > H + 1\cdot$$

Allora in quasi-tutto $(0,L)$, poichè è verificata la (2), deve essere

$$\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \leq N,$$

da cui, poichè in quasi-tutto $(0, L)$ valgono le identità

$$\begin{cases} x'' = z' w_2 - y' u_2 \\ y'' = x' u_2 - z' v_2 \\ z'' = y' v_2 - x' w_2\,, \end{cases} \tag{3}$$

segue

$$|x''| \leq N, \quad |y''| \leq N, \quad |z''| \leq N.$$

Pertanto l'asserto è immediato.

---

[6] Nel presente numero indichiamo brevemente con x', y', z', F_{u_2}, F_{v_2}, F_{w_2} rispettivamente le derivate del primo ordine di $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, e le funzioni F_{u_2}, F_{v_2}, F_{w_2} calcolate in $(x(s), y(s), z(s)\,;\, x'(s), y'(s), z'(s)\,;\, u_2(s), v_2(s), w_2(s))$.

OSSERVAZIONE I. L'espressione (1) si presenta in forma notevolmente diversa da quella che si considera nel problema del secondo ordine relativo alle curve piane. Peraltro dalla condizione relativa alla (1) si ottiene, come caso particolare per le curve piane, $|F_{\vartheta'}| \to +\infty$ [7].

OSSERVAZIONE II. Rileviamo inoltre che nel caso particolare in cui è $F(x, y, z;\ x', y', z';\ u_2, v_2, w_2) \equiv \Phi(x, y, z;\ x', y', z';\ \omega)$ [7'], dove $\omega = \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}$ (vale a dire nel caso in cui la funzione F dipende, anzichè in modo qualunque dalle variabili u_2, v_2, w_2, dalla flessione $\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}$), la ipotesi relativa alla (1) si riduce alla condizione $|\Phi_\omega| \to +\infty$ per $\omega \to +\infty$, la quale è analoga a quella, ricordata nella precedente Osservazione, che si presenta nel caso piano.

2. ESEMPI. *a*) La funzione

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\, e^{\frac{1}{1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha}}}, \quad (\alpha \text{ reale} \geq 1)$$

soddisfa alle condizioni del teorema del n. 1.

Si ha infatti in questo caso

$$F_{u_2}^2 + F_{v_2}^2 + F_{w_2}^2 = 4\, e^{\frac{2}{1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha}}} \cdot \left[u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - 2\alpha \frac{(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)(u_2^{2\alpha} + v_2^{2\alpha} + w_2^{2\alpha})}{(1 + u_2^{2\alpha} + v_2^{2\alpha} + w_2^{2\alpha})^2} + \right.$$
$$\left. + \alpha^2 \frac{(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)^2 (u_2^{4\alpha-2} + v_2^{4\alpha-2} + w_2^{4\alpha-2})}{(1 + u_2^{2\alpha} + v_2^{2\alpha} + w_2^{2\alpha})^4}\right],$$

dove, essendo per ogni α reale ≥ 1

$$u_2^{2\alpha} + v_2^{2\alpha} + w_2^{2\alpha} \leq (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)^\alpha \leq 3^{\alpha-1}\,(u_2^{2\alpha} + v_2^{2\alpha} + w_2^{2\alpha}), \tag{4}$$

l'espressione

$$\frac{(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)^2 (u_2^{4\alpha-2} + v_2^{4\alpha-2} + w_2^{4\alpha-2})}{(1 + u_2^{2\alpha} + v_2^{2\alpha} + w_2^{2\alpha})^4}$$

---

[7] Vedi S. CINQUINI, lavoro cit. per primo in [2], n. 4, p. 120.

[7'] Vedi N. BERRUTI ONESTI. *Sopra le estremali relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, Annali di Matematica pura ed applicata, S. IV, T. LII, (1960), pp. 79-106. Quanto si afferma per questo caso particolare segue dalle (5') del n. 8, § 1 di tale Memoria, le quali, per ogni estremaloide di ordine 2 relativa alla funzione Φ, sono soddisfatte in quasi-tutto $(0, L)$.

tende a zero, per $\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \to +\infty$, qualunque sia α reale ≥ 1, mentre l'espressione

$$\frac{(u_2^2+v_2^2+w_2^2)(u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha})}{(1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha})^2},$$

per $\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \to +\infty$, tende a 1 se è $\alpha=1$, e a zero se è $\alpha>1$.

Quindi si conclude immediatamente che la somma $F_{u_2}^2+F_{v_2}^2+F_{w_2}^2$ tende uniformemente a $+\infty$ per $\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \to +\infty$.

Si ha inoltre

$$z' F_{u_2} + x' F_{v_2} + y' F_{w_2} = 2\, e^{\frac{1}{1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha}}}$$

$$\cdot \left[z' u_2 + x' v_2 + y' w_2 - \alpha \frac{(u_2^2+v_2^2+w_2^2)(z' u_2^{2\alpha-1} + x' v_2^{2\alpha-1} + y' w_2^{2\alpha-1})}{(1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha})^2} \right];$$

e poichè su ogni estremaloide relativa alla funzione F è identicamente

$$z' u_2 + x' v_2 + y' w_2 = 0,$$

ed è, tenendo presenti le (4),

$$\frac{(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\,|\, z' u_2^{2\alpha-1} + x' v_2^{2\alpha-1} + y' w_2^{2\alpha-1} \,|}{(1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha})^2} \leq$$

$$\leq \frac{(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\left(\frac{z'^2+u_2^2}{2} u_2^{2\alpha-2} + \frac{x'^2+v_2^2}{2} v_2^{2\alpha-2} + \frac{y'^2+w_2^2}{2} w_2^{2\alpha-2} \right)}{(1+u_2^{2\alpha}+v_2^{2\alpha}+w_2^{2\alpha})^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{(u_2^2+v_2^2+w_2^2)^\alpha (1+u_2^2+v_2^2+w_2^2)}{\left[1+\frac{1}{3^{\alpha-1}}(u_2^2+v_2^2+w_2^2)^\alpha\right]^2},$$

la somma $z' F_{u_2} + x' F_{v_2} + y' F_{w_2}$, su ogni estremaloide relativa alla funzione F, è identicamente nulla se è $\alpha=1$, e tende a zero, per $\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \to +\infty$, quando è $\alpha>1$.

È pertanto evidente che è verificata la condizione del n. 1.

b) Anche la funzione

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)^\beta \log(1 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2), \left(\beta \text{ reale} \geq \frac{1}{2}\right)$$

soddisfa alle ipotesi del teorema del n. 1, come facilmente si verifica.

3. — *a*) *Se in ogni campo limitato A_λ ed in corrispondenza ad ogni numero reale positivo M, per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per ogni terna di numeri reali u_2, v_2, w_2, con $\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \leq M$, l'espressione*

$$(5) \quad F_{u_3}^2(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) + \\ + F_{v_3}^2(\ldots) + F_{w_3}^2(\ldots) - \left(z' F_{u_3}(\ldots) + x' F_{v_3}(\ldots) + y' F_{w_3}(\ldots)\right)^2$$

tende uniformemente a $+\infty$, per $\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \to +\infty$, allora su ogni estremaloide di ordine 3, relativa alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$ ed appartenente ad A, le derivate del secondo ordine $x''(s)$, $y''(s)$, $z''(s)$ sono a rapporto incrementale limitato.

Per dimostrare quanto si è affermato, basta ragionare come al n. 1. Ci limitiamo a rilevare che, in questo caso, si ha in quasi-tutto $(0, L)$

$$\frac{du_2(s)}{ds} = u_3(s), \quad \frac{dv_2(s)}{ds} = v_3(s), \quad \frac{dw_2(s)}{ds} = w_3(s),$$

da cui, in virtù delle (3), segue l'asserto.

b) La condizione sufficiente data nel capoverso *a*) del presente n° è valida anche quando *in ogni campo limitato A_λ ed in corrispondenza ad ogni coppia di numeri reali positivi m, M, per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per ogni terna di numeri reali u_2, v_2, w_2, con $m \leq \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \leq M$, tende uniformemente a $+\infty$, per $\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \to +\infty$, in luogo della* (5), *la espressione*

$$| u_2 F_{u_3}(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) + v_2 F_{v_3}(\ldots) + w_2 F_{w_3}(\ldots) | .$$

Infatti dalle equazioni delle estremaloidi di ordine 3 [8] segue, in quasi-tutto $(0, L)$ [9],

$$\begin{cases} y' F_{u_3} - z' F_{w_3} = K_1(s) \\ z' F_{v_3} - x' F_{u_3} = K_2(s) \\ x' F_{w_3} - y' F_{v_3} = K_3(s) \end{cases}$$

---

(8) Vedi N. BERRUTI ONESTI, luogo cit. in (1), n. 2, *b*).

(9) Facciamo una convenzione analoga a quella indicata in (6).

dove $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$ risultano funzioni continue in tutto $(0, L)$, e anche, ricordando le espressioni di u_2, v_2, w_2,

$$u_2 F_{u_3} + v_2 F_{v_3} + w_2 F_{w_3} = -\left(x'' K_1(s) + y'' K_2(s) + z'' K_3(s)\right).$$

Allora, procedendo come al n^0 1, si dimostra l'asserto.

4. Esempi. *a*) Le funzioni

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)\, e^{\frac{1}{1+u_3^{2\alpha}+v_3^{2\alpha}+w_3^{2\alpha}}}, \qquad (\alpha \text{ reale} \geq 1),$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)^\beta \log(1+u_3^2+v_3^2+w_3^2), \quad \left(\beta \text{ reale} \geq \frac{1}{2}\right),$$

soddisfano alle ipotesi del teorema che forma oggetto del n. 3, *a*); ciò si verifica in modo analogo a quello seguito al n. 2, tenendo presente che su ogni estremaloide di ordine 3 è identicamente

$$z' u_3 + x' v_3 + y' w_3 = 0.$$

b) Le funzioni

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3)(u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)^\alpha, \quad (\alpha \text{ reale} \geq 1)$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3) \log(1 + u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)$$

soddisfano alle condizioni del n. 3, *b*).

Si ha infatti, per la prima di tali funzioni,

$$u_2 F_{u_3} + v_2 F_{v_3} + w_2 F_{w_3} = (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)(u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)^\alpha +$$
$$+ 2\alpha (u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3)^2 (u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)^{\alpha-1},$$

e quindi, essendo

$$m \leq \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \leq M,$$

$u_2 F_{u_3} + v_2 F_{v_3} + w_2 F_{w_3}$ tende a $+\infty$ per $\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \to +\infty$.

Alla medesima conclusione si perviene, in modo analogo, a proposito della seconda funzione.

Osserviamo che, per le funzioni considerate nel presente capoverso, il teorema del n. 3, *a*) non risulta efficace, nella forma in cui è stato enunciato.

5. *a*) Tenendo presente quanto è stato dimostrato al n. 9, 2⁰) della Memoria citata in ([1]), è evidente che, se l'integrale $\mathcal{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ è quasi-regolare positivo normale e sono soddisfatte le ipotesi del n. 1 della presente Nota, ogni estremaloide di ordine 2 è anche un'estremale di ordine 2.

b) È pure ovvio che dal n. 10, 2⁰) della Memoria sopra citata segue che, se l'integrale $\mathcal{I}^{(3)}_{C^{(3)}}$ é quasi-regolare positivo normale e se sono soddisfatte le ipotesi del n. 3 della presente Nota, ogni estremaloide di ordine 3 è anche un'estremale di ordine 3.

6. ESISTENZA DELL'ESTREMALE DI ORDINE 2. *Si supponga il campo A costituito da tutti i punti dello spazio (x, y, z) e siano soddisfatte le condizioni in base alle quali è valido, nel caso di un campo illimitato* ([10]), *il teorema*

([10]) Per comodità del lettore enunciamo il teorema di esistenza in campi illimitati, al quale ci riferiamo, facendo presente che la sua dimostrazione è del tutto analoga a quella del caso piano (cfr. S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, vol. XIII, (1944), § 4, n. 23).

Supponiamo che:

1⁰) esistano un numero $R > 0$ ed una funzione $\psi(u)$ definita e continua per $u \geq R$, positiva e non decrescente e tale che sia

$$\int_R^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} = +\infty,$$

in modo che in ogni punto (x, y, z) del campo A esterno alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per ogni terna di numeri reali u_2, v_2, w_2 sia

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \geq \frac{1}{\psi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})};$$

2⁰) l'integrale $\mathcal{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ sia quasi-regolare positivo, ed in corrispondenza ad ogni campo limitato A_λ, tutto costituito di punti di A, esista una funzione $\Phi(t)$, $(0 \leq t < +\infty)$ crescente, concava verso l'alto, e tale che sia $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(t) : t \to +\infty$, per $t \to +\infty$, in modo che in tutto il campo A_λ, per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per ogni terna di numeri reali u_2, v_2, w_2, sia

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \geq \Phi(\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}).$$

di esistenza (o una sua estensione) che forma oggetto del n. 16 *della Memoria citata in* (3), *sia le ipotesi del n.* 3 *della Memoria citata in* (1) *e quelle del n.* 5, *a) della presente Nota. Allora, considerati due punti qualsiasi* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) *dello spazio* (x, y, z) *e fissate due terne normalizzate* (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2), *esiste almeno un'estremale di ordine* 2 *avente i punti terminali rispettivamente in* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), *la cui tangente in ciascuno di questi punti ha per coseni direttori rispettivamente i valori* x'_1, y'_1, z'_1 *e* x'_2, y_2, z'_2.

ESEMPIO. La funzione

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + x^2 + y^2 + z^2} + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2\right)$$

soddisfa alle condizioni del n. 6, come facilmente si verifica.

7. ESISTENZA DELL'ESTREMALE DI ORDINE 3. *Si supponga il campo A costituito da tutti i punti dello spazio* (x, y, z) *e siano soddisfatte sia le condizioni in base alle quali è valido, nel caso di un campo illimitato* (11), *il teorema del n.* 34 *(o una sua estensione) della Memoria citata in* (3), *sia le condizioni del n.* 6 *della Memoria citata in* (1) *e quella del n.* 5, *b) della presente Nota. Allora, considerati due punti qualsiasi* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})$ *dello spazio* (x, y, z), *e fissate due terne normalizzate* $(\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ $(\overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}')$ *e due terne di numeri reali* $(\overline{u}_2, \overline{v}_2, \overline{w}_2)$, $(\overline{\overline{u}}_2, \overline{\overline{v}}_2, \overline{\overline{w}}_2)$, *esiste almeno un'estremale di ordine* 3

$$x = x(s), \; y = y(s), \; z = z(s), \qquad (0 \leq s \leq l),$$

dove s é la lunghezza dell'arco rettificato, avente i punti terminali rispettivamente in $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})$, *la cui tangente in ciascuno di questi punti ha per coseni direttori rispettivamente* $\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'$ e $\overline{\overline{x}}', \overline{\overline{y}}', \overline{\overline{z}}'$, *e per la quale le tre differenze*

$$x'(s)\,y''(s) - x''(s)\,y'(s), \qquad y'(s)\,z''(s) - y''(s)\,z'(s), \qquad z'(s)\,x''(s) - z''(s)\,x'(s)$$ (12)

assumono, per $s = 0$ *e* $s = l$, *rispettivamente i valori* $\overline{u}_2, \overline{v}_2, \overline{w}_2$, *e* $\overline{\overline{u}}_2, \overline{\overline{v}}_2, \overline{\overline{w}}_2$ (13).

Sotto queste ipotesi esiste il minimo assoluto di $\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ in ogni classe, completa di ordine 2, di curve ordinarie $C^{(2)}$, ognuna delle quali debba passare per almeno un punto di un dato insieme limitato e chiuso dello spazio (x, y, z).

(11) Il teorema cui facciamo riferimento si può enunciare in modo analogo a quanto abbiamo fatto in (10).

(12) Tali differenze, com'è noto, rappresentano, nei punti in cui la flessione non è nulla, i prodotti dei cosèni direttori della binormale per la flessione.

(13) Rileviamo che, tenendo conto delle (3) del n. 1 della presente Nota, l'insieme delle curve ordinarie $C^{(3)}$ soddisfacenti a tale condizioni costituisce una classe completa d'ordine 3.