

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

GIOVANNI AQUARO

**Teoremi di prolungamento per premisure esterne**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 15, n° 3 (1961), p. 159-169*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1961\\_3\\_15\\_3\\_159\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_3_159_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TEOREMI DI PROLUNGAMENTO PER PREMISURE ESTERNE

Nota (\*) di GIOVANNI AQUARO

I noti teoremi di prolungamento di misure da anelli di insiemi, di recente, sono stati generalizzati da F. CAFIERO ([4], [5], [6]) in teoremi di prolungamento di misure da reticoli di insiemi a struttura relativamente  $\mathcal{U}$ -normale (e, dualmente,  $\mathcal{N}$ -normale).

Successivamente, i risultati di F. CAFIERO ed alcuni teoremi di prolungamento di W. AMBROSE - P. R. HALMOS ([1], [8]) e N. BOURBAKI (cfr. [3]) sono stati inquadrati da U. BARBUTI ([2]) in uno schema generale nel quale ha ufficio essenziale il concetto di *regolarità esterna (interna)* da lui introdotto. Tale concetto è stato chiarito ed approfondito da G. LETTA (in [9]) alla luce della teoria delle misure esterne secondo C. CARATHÉODOREY in reticoli algebrici.

Nella presente nota, ancora esclusivamente con i mezzi forniti dalla teoria delle misure esterne, si indica uno schema che, contenendo quelli di BARBUTI e LETTA, limitatamente alla esterna regolarità, include risultati che sembrano sfuggire alle precedenti analisi.

Si adoperano, a tal fine, il concetto di *premisura esterna* (def. 2) e di  *$\sigma$ -esterna regolarità* (def. 3): quest'ultima sostituisce la regolarità esterna di BARBUTI e LETTA.

I risultati ottenuti possono essere esaminati, come qui si è fatto, in termini puramente insiemistici ma possono essere agevolmente trattati in termini di reticoli booleani.

## 1. — Notazioni.

Con  $E$  indichiamo un insieme prefissato una volta per tutte, con  $\mathcal{P}(E)$  indichiamo l'insieme delle parti di  $E$ , con  $\emptyset$  la parte vuota di  $E$ .

---

(\*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 20 del Consiglio Nazionale delle Ricerche (1960-61).

Inoltre  $\mathcal{A}$  è un insieme di parti di  $E$  tale che  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;  $b(\mathcal{A})$  è il  $\sigma$ -anello su  $E$  generato da  $\mathcal{A}$ ;  $h^*(\mathcal{A})$  è il  $\sigma$ -anello ereditario su  $E$  generato da  $\mathcal{A}$ .

Con  $N$  indichiamo l'insieme dei numeri naturali (compreso lo zero). Per ogni  $X \in \mathcal{P}(E)$  designamo con  $\mathcal{A}_X^N$  l'insieme delle successioni  $(X_n)_{n \in N}$  di elementi di  $\mathcal{A}$  tali che  $X \subset \bigcup_{n \in N} X_n$ .

Ovviamente è  $X \in h^*(\mathcal{A})$  se e solo se  $\mathcal{A}_X^N$  non è vuoto.

## 2. — Premisure esterne.

Premettiamo la

**PROP. 1.** — *Sia  $\mu$  una funzione reale estesa non negativa su  $\mathcal{A}$  tale che  $\mu(\emptyset) = 0$ . Detta  $\mu^*$  la funzione reale estesa su  $h^*(\mathcal{A})$  definita ponendo per ogni  $X \in h^*(\mathcal{A})$ :*

$$(1) \quad \mu^*(X) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n) : (X_n)_{n \in N} \in \mathcal{A}_X^N \right\},$$

per ogni  $X \in \mathcal{A}$  risulta  $\mu^*(X) \leq \mu(X)$  e  $\mu^*$  è una misura esterna su  $h^*(\mathcal{A})$ .

**DIM.** Sia  $X \in \mathcal{A}$ : la successione  $(X_n)_{n \in N}$  di elementi di  $\mathcal{P}(E)$ , definita ponendo  $X_0 = X$  e, per ogni  $n \in N$   $n > 0$ ,  $X_n = \emptyset$ , è un elemento di  $\mathcal{A}_X^N$  e quindi si ha  $\mu^*(X) \leq \mu(X)$ : in particolare è  $\mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) \leq \mu^*(\emptyset)$ .

Ovviamente  $\mu^*$  è monotona.

In fine,  $\mu^*$  è numerabilmente sub-additiva il che stabiliamo dimostrando che per ogni successione  $(X_n)_{n \in N}$  di elementi di  $h^*(\mathcal{A})$  risulta:

$$(2) \quad \mu^*\left(\bigcup_{n \in N} X_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(X_n).$$

La (2) è ovvia se è  $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(X_n) = +\infty$ . Supponiamo quindi  $\mu^*(X_n) < +\infty$  per ogni  $n \in N$ .

Sia  $\varepsilon$  reale positivo: per ogni  $p \in N$  esiste  $(X_{pq})_{q \in N} \in \mathcal{A}_{X_p}^N$  tale che  $\sum_{q=0}^{\infty} \mu(X_{pq}) < \mu^*(X_p) + \varepsilon/2^{p+1}$ . Si ha  $\mu^*\left(\bigcup_{p \in N} X_p\right) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \mu(X_{pq}) < \sum_{p=0}^{\infty} \mu^*(X_p) + \varepsilon$ : per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , la (2).

Dopo ciò è giustificata la seguente definizione:

**DEF. 1.** — *Nelle ipotesi e con le notazioni della prop. 1,  $\mu^*$  si chiama la misura esterna generata da  $\mu$ .*

Convieni rilevare che:

PROP. 2. — Se  $\mu$  è una funzione reale estesa su  $\mathcal{A}$  le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) — esiste una misura esterna su  $h^*(\mathcal{A})$  la cui restrizione ad  $\mathcal{A}$  sia  $\mu$ .

b) — risulta  $\mu(\emptyset) = 0$ ; da  $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{A}, X \subset Y$  consegue  $\mu(X) \leq \mu(Y)$ ;

da  $X \in \mathcal{A}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$  consegue  $\mu(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$ .

c) — è  $\mu(\emptyset) = 0$  e la misura esterna  $\mu^*$  generata da  $\mu$  (def. 1) ammette  $\mu$  come restrizione a  $\mathcal{A}$ .

DIM. a) implica b). Supponiamo che  $\nu^*$  sia una misura esterna su  $h^*(\mathcal{A})$  la cui restrizione ad  $\mathcal{A}$  sia  $\mu$ . Si ha  $\mu(\emptyset) = \nu^*(\emptyset) = 0$  e da  $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{A}, X \subset Y$  consegue  $\mu(X) = \nu^*(X) \leq \nu^*(Y) = \mu(Y)$ . In fine da  $X \in \mathcal{A}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$  risulta  $\mu(X) = \nu^*(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu^*(X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$ .

b) implica c). In forza della prop. 1 da  $X \in \mathcal{A}$  segue  $\mu^*(X) \leq \mu(X)$ ; inoltre, se è  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$ , da b) consegue  $\mu(X) \leq \mu^*(X)$  (def. 1).

c) implica a). È ovvia.

Ciò giustifica la:

DEF. 2. — Una funzione reale estesa  $\mu$  su  $\mathcal{A}$  si dice una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  se verifica una e quindi ciascuna delle proprietà a), b), c) della prop. 1.

Conviene notare che:

PROP. 3. — Se  $\mu$  è una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 1) e se  $\mu^*$  è la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 2), per ogni misura esterna  $\nu^*$  su  $h^*(\mathcal{A})$ , la cui restrizione a  $\mathcal{A}$  sia  $\mu$ , risulta  $\nu^* \leq \mu^*$ .

DIM. Sia  $X \in h^*(\mathcal{A})$  e  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$ : poichè la restrizione ad  $\mathcal{A}$  di  $\nu^*$  è  $\mu$  si ha  $\nu^*(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu^*(X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$  e da ciò (def. 1)  $\nu^*(X) \leq \mu^*(X)$ .

### 3. — Premisure esterne $\sigma$ -esternamente regolari e loro prolungamenti.

PROP. 4. — Se  $\mu$  è una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 1) e se  $\mu^*$  è la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 2), le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) — ogni  $X \in \mathcal{A}$  è  $\mu^*$  misurabile.

b) — da  $X \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A}$  consegue  $\mu(A) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A - X)$ .

DIM. a) implica b). Consegue dalla definizione  $\mu^*$ -misurabilità, dalla def. 2 e dalla c) della prop. 2.

b) implica a). Supponiamo vera la b) e sia  $X \in \mathcal{A}$  e  $A \in h^*(\mathcal{A})$ . Per ogni  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$ , in forza di b),  $\mu^*$  essendo una misura esterna, si trova  $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n \cap X) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n - X) \geq \mu^*(A - X) + \mu^*(A - X)$ ; per

la def. 1, consegue  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A - X)$  ed  $X$  risulta  $\mu^*$ -misurabile.

DEF. 3. — Se  $\mu$  è una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 2) e se  $\mu^*$  è la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 2) si dice che  $\mu$  è  $\sigma$ -esternamente regolare se verifica la b) della prop. 4.

Sarà utilizzata la

PROP. 5. — Se  $\mathcal{A}$  è un  $\cap$ -semireticolato <sup>(1)</sup>, se  $\mu$  è una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 1) e se  $\mu^*$  è la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 2), le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) —  $\mu$  è  $\sigma$ -esternamente regolare (def. 3),

b) — da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$  segue  $\mu(Y) = \mu(X) + \mu^*(Y - X)$ .

DIM. Che a) implichi b) è ovvio in forza delle propp. 2 e 4 e della def. 1.

Reciprocamente, se è vera la b), poichè  $\mathcal{A}$  è un  $\cap$ -semireticolato, supposto  $A \in \mathcal{A}$  e  $X \in \mathcal{A}$ , risultando  $A \cap X \in \mathcal{A}$  e  $A \cap X \subset A$  si trova  $\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu^*(A - (A \cap X)) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A - X)$ .

Dalla def. 3 segue la a).

Indichiamo un lemma che verrà adoperato per stabilire la prop. 6.

LEMMA 1 — Se  $\mathcal{A}$  è un reticolo <sup>(2)</sup>, se  $s(\mathcal{A})$  è l'insieme delle differenze (proprie) di elementi di  $\mathcal{A}$ , se  $\mu$  è una funzione reale estesa su  $\mathcal{A}$  tale che  $\mu(\emptyset) = 0$  e monotona (cioè da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$  consegue  $\mu(X \leq \mu(Y))$ ) e se  $\mu^*$  è una funzione reale estesa su  $s(\mathcal{A})$  legata a  $\mu$  dalla b) della prop. 5, allora  $\mu$  è modulare cioè da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$  consegue:

$$(1) \quad \mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y).$$

DIM. Supponiamo  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ : si ha  $X \cup Y \in \mathcal{A}$  e  $X \subset X \cup Y$  nonchè  $X \cap Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \cap Y \subset Y$  e da ciò, in forza delle ipotesi sopra  $\mu$  e  $\mu^*$ , consegue:

$$(2) \quad \mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu^*((X \cup Y) - X) = \mu(X) + \mu^*(Y - X),$$

$$(3) \quad \mu(Y) = \mu(X \cap Y) + \mu^*(Y - (X \cap Y)) = \mu(X \cap Y) + \mu^*(Y - X).$$

Da ciò segue (1). Infatti, se è  $\mu(X \cup Y) = +\infty$ , in forza di (2) o è  $\mu(X) = +\infty$  ed allora la (1) è vera, oppure è  $\mu^*(Y - X) = +\infty$  ed allora, in forza di (3) è  $\mu(Y) = +\infty$  e, di nuovo, la (1) è vera. Se, invece, è  $\mu(X \cup Y) \neq +\infty$ , allora, in forza della ipotesi di monotonia di  $\mu$ ,  $\mu(X)$ ,  $\mu(Y)$ ,  $\mu(X \cap Y)$  sono finiti e quindi, per la (3), risulta  $\mu^*(Y - X) < +\infty$ . Da (2) e (3) consegue  $\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) + \mu^*(Y - X) = \mu(X) + \mu(Y) + \mu^*(Y - X)$  e poi la (1).

<sup>(1)</sup> Cioè da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$  consegue  $X \cap Y \in \mathcal{A}$ .

<sup>(2)</sup> Cioè da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$  consegue  $X \cup Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \cap Y \in \mathcal{A}$ .

Ciò premesso, è agevole dimostrare la

**PROP. 6.** — *Se  $\mathcal{A}$  è un reticolo e se  $\mu$  è una funzione reale estesa su  $\mathcal{A}$  le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) —  $\mu$  è una premisura esterna (def. 2)  $\sigma$ -esternamente regolare (def. 3).

b) — risulta  $\mu(\emptyset) = 0$ ; da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$  consegue  $\mu(X) \leq \mu(Y)$  ( $\mu$  è monotona); se  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione crescente di elementi di  $\mathcal{A}$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathcal{A}$ , risulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n)$  ( $\mu$  è continua dal basso); detta  $\mu^*$  la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 1) da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$  consegue  $\mu(Y) = \mu(X) + \mu^*(Y - X)$ .

**DIM.** a) implica b). Da a), dalle def. 1 e 2 e dalla prop. 4, consegue che ogni elemento di  $\mathcal{A}$  è  $\mu^*$ -misurabile e quindi b) consegue dalla teoria della  $\mu^*$ -misurabilità.

b) implica a). Supposta vera la b), dal lemma 1 consegue che  $\mu$  è modulare e quindi,  $\mathcal{A}$  essendo un reticolo, finitamente subadditiva.

Ciò osservato, sia  $X \in \mathcal{A}$  e  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$  (cfr. n. 1). Ovviamente,  $(X \cap (\bigcup_{k=0}^n X_k))_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione crescente di elementi di  $\mathcal{A}$  convergente verso  $X$  per cui,  $\mu$  essendo continua dal basso, risulta  $\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X \cap (\bigcup_{k=0}^n X_k)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$ .

Da ciò, da b) e dalla b) della prop. 5, consegue la a).

Abbandoniamo ora ogni ipotesi strutturale relativa ad  $\mathcal{A}$  e indichiamo un teorema di prolungamento per premisure esterne.

**PROP. 7.** — *Supponiamo che  $\mu$  sia una premisura esterna (def. 2)  $\sigma$ -esternamente regolare (def. 3) su  $\mathcal{A}$  e sia  $\mu^*$  la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 1).*

*Allora, detto  $\overline{\mathcal{A}}_\mu$  il  $\sigma$ -anello degli elementi  $\mu^*$ -misurabili di  $h^*(\mathcal{A})$ , risulta  $b(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{A}}_\mu$  ed esiste una misura completa  $\bar{\mu}$  su  $\overline{\mathcal{A}}_\mu$  la cui restrizione ad  $\mathcal{A}$  è  $\mu$ .*

*Inoltre, se  $\mu$  è  $\sigma$ -finita, detto  $\mathcal{B}$  un  $\sigma$ -anello su  $E$  tale che  $b(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}_\mu$  e detta  $\nu$  una misura su  $\mathcal{B}$  la cui restrizione ad  $\mathcal{A}$  sia  $\mu$ , la restrizione  $\mu_{\mathcal{B}}$  di  $\bar{\mu}$  a  $\mathcal{B}$  è  $\nu$ .*

**DIM.** In primo luogo si osservi che ogni  $X \in \mathcal{A}$  è  $\mu^*$ -misurabile e quindi è  $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}_\mu$ , e ciò,  $\overline{\mathcal{A}}_\mu$  essendo un  $\sigma$ -anello, dimostra che è  $b(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{A}}_\mu$ ; inoltre, detta  $\bar{\mu}$  la restrizione di  $\mu^*$  ad  $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ , per ogni  $X \in \mathcal{A}$ , in forza della def. 2 e della prop. 2, si ha  $\bar{\mu}(X) = \mu^*(X) = \mu(X)$ .

Dimostrata così la prima parte della tesi, per stabilire la seconda, supponiamo  $X \in \mathcal{B}$  e  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{N}}$ : per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , risulta  $X_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  e quindi si ha  $\nu(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$  e da ciò, in forza della def. 2.

$$\forall X \in \mathcal{B} : \nu(X) \leq \mu^*(X) = \bar{\mu}(X).$$

Denoteremo con  $\mathcal{C}$  l'insieme degli  $X \in \mathcal{B}$  tali che  $\bar{\mu}(X) = \nu(X) < +\infty$ .  
Si ha:

$\alpha$  — per ogni  $X \in \mathcal{B}$ , per ogni  $Y \in \mathcal{C}$  risulta  $\bar{\mu}(X \cap Y) = \nu(X \cap Y)$  e  $\bar{\mu}(Y - X) = \nu(Y - X)$ .

Infatti, per essere  $Y \in \mathcal{C}$ , si ha  $\nu(X \cap Y) + \nu(Y - X) = \nu(Y) = \bar{\mu}(Y) = \bar{\mu}(X \cap Y) + \bar{\mu}(Y - X)$ . Da ciò, in primo luogo, a causa di (1) risulta  $\nu(X \cap Y) + \nu(Y - X) \geq \bar{\mu}(X \cap Y) + \nu(Y - X)$  e poi,  $\nu(Y - X)$  essendo finita,  $\nu(X \cap Y) \geq \bar{\mu}(X \cap Y)$  donde, per la (1),  $\nu(X \cap Y) = \bar{\mu}(X \cap Y)$ ; in secondo luogo, si trova  $\nu(Y - X) = \bar{\mu}(Y - X)$ . Da ciò la  $\alpha$ .

Riconosciamo, che, in conseguenza  $\mathcal{C}$  è un anello. Infatti se e  $X \in \mathcal{C}$ ,  $Y \in \mathcal{C}$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , si ha  $\bar{\mu}(X \cup Y) = \bar{\mu}(X) + \bar{\mu}(Y) = \nu(X) + \nu(Y) = \nu(X \cup Y)$  e ciò, insieme ad  $\alpha$ , basta, come è noto, a dimostrare l'asserto.

Ciò premesso, facciamo intervenire l'ipotesi di  $\sigma$ -finitezza di  $\mu$ . Sia  $X \in \mathcal{B}$ : poichè è  $\mathcal{B} \subset h^*(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}_X^N$  non è vuoto e, poichè  $\mu$  è  $\sigma$ -finita, esiste un  $(X_n)_{n \in N} \in \mathcal{A}_X^N$  tale che per ogni  $n \in N$ , sia  $\mu(X_n) < +\infty$ . Sia  $(A_n)_{n \in N}$  la successione di parti di  $E$  definita come segue:  $A_0 = X_0$  e, per ogni  $n \in N$   $n > 0$ ,  $A_n = X_n - \bigcup_{k=0}^{n-1} X_k$ . Evidentemente, essendo ogni  $X_n \in \mathcal{C}$  e,  $\mathcal{C}$  essendo, come si è visto, un anello, per ogni  $n \in N$ , è  $A_n \in \mathcal{C}$  e quindi, essendo  $X \in \mathcal{B}$ , per la  $\alpha$  risulta  $\bar{\mu}(X \cap A_n) = \nu(X \cap A_n)$ . Poichè è  $X \subset \bigcup_{n \in N} X_n = \bigcup_{n \in N} A_n$  e gli  $X \cap A_n$ , al pari degli  $A_n$ , sono a due a due disgiunti, risulta:  $\bar{\mu}(X) = \bar{\mu}(\bigcup_{n \in N} (X \cap A_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}(X \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(X \cap A_n) = \nu(\bigcup_{n \in N} (X \cap A_n)) = \nu(X)$ .

Dunque, da  $X \in \mathcal{B}$  consegue  $\mu_{\mathcal{B}}(X) = \bar{\mu}(X) = \nu(X)$  e da ciò  $\nu = \mu_{\mathcal{B}}$ .

### 3. — Esempi ed osservazioni metodologiche.

Alcuni ben noti teoremi di prolungamento per misure vengono dedotti dai precedenti risultati: a tal fine premettiamo due lemmi.

LEMMA 2. — Se  $\mathcal{A}$  è un  $\cap$ -semireticolato<sup>(3)</sup>, se  $\mu$  è una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 2) e se  $\mu^*$  è la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 1) affinché  $\mu$  sia  $\sigma$ -esternamente regolare (occorre e) basta che da  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$ ,  $\mu(X) < +\infty$ , consegua:

$$\mu(Y) \geq \mu(X) + \mu^*(Y - X).$$

DIM. — Consegue dalla prop. 2 e dalla prop. 5.

<sup>(3)</sup> Cfr. nota (1).

LEMMA 3. — Supponiamo che  $\mathcal{A}$  sia un  $\cap$ -semireticolo e che  $\mu$  sia una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 2) tale che: 1) — se  $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$  è una famiglia finita di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{A}$ , tutti contenuti in uno stesso  $X \in \mathcal{A}$ , risulta  $\sum_{k=0}^n \mu(X_k) \leq \mu(X)$ ; 2) — se è  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$ ,  $\mu(X) < +\infty$ , per ogni numero  $\varepsilon > 0$  esiste una famiglia finita  $(A_k)_{0 \leq k \leq p}$  di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{A}$  ed una successione  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{A}$  tali che  $\mu(X) < \sum_{k=0}^p \mu(A_k) + \varepsilon$ ,  $\bigcup_{k=0}^p A_k \subset Y$ ,  $Y - X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset Y$ ,  $(\bigcup_{k=0}^p A_k) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \emptyset$ . Allora  $\mu$  è  $\sigma$ -esternamente regolare (def. 3).

DIM. — Se  $X$ ,  $Y$ ,  $\varepsilon$ ,  $(A_k)_{0 \leq k \leq p}$ ,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sono quelli previsti in 2), detta  $\mu^*$  la misura esterna generata da  $\mu$  (def. 1), si ha:

$$(1) \quad \mu(X) + \mu^*(Y - X) < \sum_{k=0}^p \mu(A_k) + \varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n).$$

Per ogni  $q \in \mathbb{N}$  è  $(\bigcup_{k=0}^p A_k) \cap (\bigcup_{l=0}^q B_l) \subset Y$  e gli  $A_k$  e  $B_l$  sono a due a due disgiunti: da 1) consegue  $\sum_{k=0}^p \mu(A_k) + \sum_{l=0}^q \mu(B_l) \leq \mu(Y)$ . Da ciò per  $q \rightarrow \infty$ , richiamata la (1), consegue la tesi in forza del lemma 2.

Ovvia conseguenza è:

PROP. 8 — (ZAAANEN) Supponiamo che  $\mathcal{A}$  sia un  $\cap$ -semireticolo tale che se è  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}$ ,  $X \subset Y$ , esista una successione  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{A}$  tale che  $Y - X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ . Inoltre supponiamo che  $\mu$  sia una premisura esterna su  $\mathcal{A}$  (def. 1) verificante la condizione 1) del lemma 3. Allora  $\mu$  è  $\sigma$ -esternamente regolare (def. 3).

Da ciò e dalla prop. 7 consegue il teorema di prolungamento indicato da A. C. ZAAANEN in [11] (cap. 2, § 7) tenendo presente che tale autore attribuisce ad  $\mathcal{A}$ , il nome di semianello e, a  $\mu$ , il nome di misura.

Il lemma 3 ha l'ulteriore conseguenza:

PROP. 9 — (CAFIERO) Se  $\mathcal{A}$  è un reticolo a struttura relativamente U-normale ([6] cap. III, § 1, n. 1) e se  $\mu$  è una funzione monotona, additiva, subadditiva e continua dal basso in  $\mathcal{A}$  e se è  $\mu(\emptyset) = 0$ , allora  $\mu$  è una premisura esterna (def. 1)  $\sigma$ -esternamente regolare su  $\mathcal{A}$  (def. 3).

DIM. Si riconosce che  $\mu$  è una premisura esterna (def. 2) con argomentazione analoga a quella che stabilisce che b) implica a) nella prop. 6. Poichè  $\mathcal{A}$  è un reticolo e  $\mu$  è monotona e additiva, la proprietà 1) del lemma 3 sussiste.

Quanto alla proprietà 2) del lemma 3 essa consegue dalla struttura U-normale di  $\mathcal{Q}$  e dalla continuità dal basso di  $\mu$ .

Per il lemma 3,  $\mu$  è  $\sigma$ -esternamente regolare.

Da ciò e, come è ovvio, dalle prop. 6 e 7, consegue il teor. di prolungamento di F. CAFIERO nel caso dei reticoli a struttura U-normale ([6] cap. IV, § 2).

La prop. 8 sussiste in particolare se  $\mathcal{Q}$  è un semianello secondo J. VON NEUMANN con una ipotesi per la premisura esterna  $\mu$  più tenue della 1) del lemma 3.

Ciò viene stabilito appresso attraverso un risultato implicitamente contenuto in un teorema di J. VON NEUMANN ([10] teor. 10.1.12 ed esplicitamente enunciato in [8] cap. I, § 4, (5)) del quale viene data una dimostrazione diretta che evita l'uso della tecnica delle  $\mu$ -partizioni ([10] e [8] loco cit.).

Ricordiamo ([10] def. 10.1.5; [8] cap. I, § 4, (6)) che:

DEF. 4. — *L'insieme  $\mathcal{S}$  di parti dell'insieme  $E$  dicesi semianello<sup>(4)</sup> su  $E$  se verifica i seguenti assiomi:*

(SA<sub>I</sub>) —  $\mathcal{S}$  non è vuoto,

(SA<sub>II</sub>) —  $X \in \mathcal{S}, Y \in \mathcal{S}$  implica  $X \cap Y \in \mathcal{S}$ ,

(SA<sub>III</sub>) —  $X \in \mathcal{S}, Y \in \mathcal{S}, X \subset Y$  implica che esiste una famiglia finita crescente  $(Z_k)_{0 \leq k \leq n}$  di elementi di  $\mathcal{S}$  tale che  $Z_0 = X, Z_n = Y$  e, per ogni  $k = 0, 1, \dots, n-1, Z_{k+1} - Z_k \in \mathcal{S}$ .

OSSERVAZIONE 1. — L'assioma (SA<sub>III</sub>) equivale all'altro:

(SA<sub>III</sub><sup>\*</sup>) —  $X \in \mathcal{S}, Y \in \mathcal{S}, X \subset Y$  implica che esiste una famiglia finita  $(Z_k)_{0 \leq k \leq n}$  di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$  tale che  $Z_0 = X, \bigcup_{k=0}^n Z_k = Y$  e,

per ogni  $l = 1, 2, \dots, n-1$ , risulti  $\bigcup_{k=0}^l Z_k \in \mathcal{S}$  (cfr. [7] cap. VI, 2).

OSSERVAZIONE 2. — Da (SA<sub>I</sub>) e (SA<sub>III</sub>) (o, se si vuole, da (SA<sub>III</sub><sup>\*</sup>) consegue  $\emptyset \in \mathcal{S}$  e quindi per (SA<sub>II</sub>),  $\mathcal{S}$  è un  $\cap$ -semireticolo

OSSERVAZIONE 3. — Ogni semianello secondo VON NEUMANN è un semianello secondo ZAAZEN ma, in generale, non viceversa.

Ciò premesso stabiliamo il lemma seguente:

LEMMA 4. — *Se  $\mathcal{S}$  è un insieme di parti dell'insieme  $E$  verificante (SA<sub>I</sub>) e (SA<sub>II</sub>) (def. 4), se  $\mu$  è una funzione additiva su  $\mathcal{S}$  e se  $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$  è una famiglia finita di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$  tale che, per ogni  $l = 1, 2, \dots, n$ , sia  $(\bigcup_{k=0}^l X_k) \in \mathcal{S}$ , allora per ogni  $A \in \mathcal{S}$  risulta  $\mu(A \cap (\bigcup_{k=0}^n X_k)) = \sum_{k=0}^n \mu(A \cap X_k)$ .*

(4) « half-ring » secondo VON NEUMANN e « semi-ring » secondo HALMOS.

DIM. — Per induzione completa.

PROP. 10 — Se  $\mathcal{S}$  è un semianello su  $E$  (def. 4) ogni funzione  $\mu$  additiva su  $\mathcal{S}$  è finitamente additiva.

DIM. — Dobbiamo stabilire che se  $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$  è una famiglia finita di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$ , tale che  $\bigcup_{k=0}^n X_k \in \mathcal{S}$ , risulta :

$$(1) \quad \mu \left( \bigcup_{k=0}^n X_k \right) = \sum_{k=0}^n \mu(X_k).$$

Si procede per induzione su  $n$ . La (1) è ovviamente vera per  $n = 1$ . Suppostala vera per un certo  $n \in N$ , sia  $(X_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  una famiglia finita di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$  tale che, posto  $X = \bigcup_{k=0}^{n+1} X_k$ , sia  $X \in \mathcal{S}$ .

Poichè è  $X_{n+1} \subset X$ , in forza di (SA<sub>iii</sub><sup>\*</sup>) della osservazione 1 alla def. 1, esiste una famiglia finita  $(A_j)_{0 \leq j \leq p}$  di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$  tale che  $A_0 = X_{n+1}$ ,  $\bigcup_{j=0}^p A_j = X$  e, per ogni  $l = 1, 2, \dots, p - 1$ , sia  $\bigcup_{j=0}^l A_j \in \mathcal{S}$ .

In forza del lemma 4, per ogni  $Y \in \mathcal{S}$ , risulta :

$$(2) \quad \mu \left( Y \cap \left( \bigcup_{j=0}^p A_j \right) \right) = \sum_{j=0}^p \mu(Y \cap A_j).$$

Sia  $k = 0, 1, \dots, n$ : allora è  $X_k \cap A_0 = X_k \cap X_{n+1} = \emptyset$  nonchè  $X_k = X_k \cap X = X_k \cap \left( \bigcup_{j=0}^p A_j \right)$ .

Risulta  $\mu(X_k \cap A_0) = 0$  e la (2), in cui si assuma  $Y = X_k$ , fornisce :

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu(X_k) &= \mu \left( X_k \cap \left( \bigcup_{j=0}^p A_j \right) \right) = \sum_{j=0}^p \mu(X_k \cap A_j) = \\ &= \sum_{j=1}^p \mu(X_k \cap A_j) \quad \forall \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni  $j = 1, 2, \dots, p$ , si ha  $X_{n+1} \cap A_j = A_0 \cap A_j = \emptyset$  e quindi  $A_j = X \cap A_j = \bigcup_{k=0}^{n+1} (X_k \cap A_j) = \bigcup_{k=0}^n (X_k \cap A_j)$  ed, in conseguenza, in forza dell'ipotesi di induzione, si ha :

$$(4) \quad \mu(A_j) = \sum_{k=0}^n \mu(X_k \cap A_j) \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Poichè, per ogni  $j = 0, 1, \dots, n$  risulta  $X \cap A_j = A_j$ , la (2) per  $Y = X$  e le (4) e (5) forniscono successivamente:

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \sum_{j=0}^p \mu(A_j) = \sum_{j=1}^p \mu(A_j) + \mu(A_0) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^n \mu(X_k \cap A_j) + \mu(X_{n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^p \mu(X_k \cap A_j) + \mu(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \mu(X_k) + \mu(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu(X_k). \end{aligned}$$

La (1) è dunque vera per  $n$  sostituito da  $n + 1$  e quindi, per induzione completa, è vera per ogni  $n \in N$ .

Dimostrata così la prop. 10, della quale conserviamo notazioni e terminologia, per induzione completa si riconosce che se  $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$  è una famiglia finita di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$ , tutti contenuti in uno stesso  $X \in \mathcal{S}$ , esiste una famiglia finita  $(Y_l)_{0 \leq l \leq p}$  di elementi a due a due disgiunti di  $\mathcal{S}$  tale che  $X - (\bigcup_{k=0}^n X_k) = \bigcup_{l=0}^p Y_l$ . Conseguo  $\mu(X) = \sum_{k=0}^n \mu(X_k) + \sum_{l=0}^p \mu(Y_l)$  e quindi, se  $\mu$  è non negativa, si ha la 1) del lemma 3.

Pertanto, per la prop. 8:

PROP. 11. — *Se  $\mathcal{S}$  è un semianello (def. 4) ogni premisura esterna (def. 1), additiva, su  $\mathcal{A}$  è un  $\sigma$ -esternamente regolare (def. 3).*

Da ciò e dalla vista prop. 8 consegue il noto teorema di prolungamento di J. VON NEUMANN ([10] teor. 10.3.3 e segg.). Tale teorema qui viene ottenuto senza il preventivo prolungamento all'anello generato da  $\mathcal{S}$  del quale si serve detto autore in [10].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] AMBROSE, W. - *Lectures on topological groups*; Ann. Arbour (1943) non pubblicato e citato da P. R. HALMOS nel seguente [8] in *references* al § 54 e in *bibliography* n. 2.
- [2] BARBUTI, U. - *Teoremi di prolungamento per misure da reticoli d'insiemi*; *Ricerche di Matematica*, vol. VIII (1959) fasc. 2, pp. 145-162.
- [3] BOURBAKI, N. - *Integration*; Actual. Scient. et Ind. n. 1175, Hermann, Paris (1952).
- [4] CAFIERO, F. - *Funzioni additive d'insieme ed integrazione negli spazii astratti*; Liguori, Napoli, (1953).
- [5] » - *Teoremi di prolungamento per misure relative in particolari reticoli di insiemi*; *Ricerche di Matematica*, vol. 5 (1956) pp. 273-312.
- [6] » - *Misura e Integrazione*; « *Monografie Matematiche* » a cura del C. N. R., Cremonese, Roma (1959).
- [7] FICHERA, G. - *Lezioni sulle trasformazioni lineari*; vol. I., ed. Istituto Matematico-Università, Trieste (1954).
- [8] HALMOS, P. R. - *Measure Theory*; Van Nostrand; New York (1950).
- [9] LETTA, G. - *Teoremi di prolungamento per misure in reticoli algebrici*; *Ricerche di Matematica*, vol. III (1959) pp. 300-319.
- [10] VON NEUMANN, J. - *Functional Operators*; Annals of Math. Studies, Princeton (1950).
- [11] ZAAANEN, A. C. - *An introduction to the theory of Integration*; North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1958).