ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. LIONS
E. MAGENES

Problemi ai limiti non omogenei (III)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 1-2 (1961), p. 41-103
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_1-2_41_0>

PROBLEMI AI LIMITI NON OMOGENEI. (III)

di J. L. LIONS (Nancy) e E. MAGENES (Pavia)

Questo lavoro fa seguito ai lavori [27] e [28] (v. bibliografia finale) dallo stesso titolo dedicati ai problemi ai limiti non omogenei per le equazioni lineari a derivate parziali. Più precisamente viene qui studiato il problema di DIRICHLET non omogeneo per l'equazione ellittica d'ordine $2m$, assegnata in un aperto Ω dello spazio euclideo R^n, limitato e sufficientemente regolare:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = g_j & \text{su } \Gamma, \quad j = 0, \dots, m-1 \ (\nu \text{ normale alla frontiera } \Gamma \text{ di } \Omega) \end{cases}$$

cercando la soluzione in certi spazi funzionali, indicati con $W^{s,p}(\Omega)$ e $H^{s,p}(\Omega)$, che generalizzano al caso di s *reale* gli spazi di S. L. SOBOLEV delle funzioni di potenza p-esima sommabile in Ω $(p > 1)$ con le derivate fino all'ordine s, quando s è intero.

Otterremo teoremi di esistenza e di unicità e di dipendenza continua dei dati e addirittura teoremi di isomorfismo per l'operatore $u \to \left\{ A\,u\,; u, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \right\}$, nel caso che s sia reale compreso tra 0 e $2m$. È noto che per $s \geq 2m$, il problema, almeno per s intero, è stato studiato di recente e risolto da una serie di lavori di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2], BROWDER [9], [10] e KOSELEV [18]. Non ci risulta invece che esso lo sia per $0 \leq s < 2m$, in particolare se s è *reale* non intero $< 2m$; ci riferiamo naturalmente al caso $p \neq 2$. Sarà bene infatti ricordare che nel caso $p = 2$ la teoria del problema di DIRICHLET ha preso l'avvio dal teorema di GÅRDING relativo proprio al caso $s = m$ (soluzioni a integrale di DIRICHLET d'ordine m finito) e poi con i successivi teoremi di « regolarizzazione » di BROWDER, GUSEVA, NIRENBERG, ..., e di « tracce » su Γ delle funzioni e delle loro derivate di

ARONSZAJN, PRODI, ..., è passata a considerare il problema non omogeneo nel caso $s \geq m$; il caso $0 \leq s < m$ (soluzione a integrale di DIRICHLET non finito) è stato poi da noi trattato nei lavori [27] e [28].

Nel caso $p \neq 2$, invece, il problema per $0 \leq s < 2m$ ci sembra ancora aperto; un risultato veramente notevole è stato ottenuto di recente da AGMON [1], relativamente però alla sola regolarizzazione di soluzioni deboli per s *intero* compreso tra 0 e $2m$ (nella prefazione di [1] AGMON annuncia un successivo lavoro dedicato alla teoria esistenziale, che a noi non è ancora noto).

Noi otterremo in questo lavoro risultati sia a integrale di DIRICHLET finito (caso $m \leq s < 2m$) sia a integrale di DIRICHLET non finito (caso $0 \leq s < m$), per s *reale*, anche non intero. Per un riassunto dei risultati e dei metodi rinviamo al quadro, che abbiamo inserito alla fine del lavoro per comodità del lettore. Le idee essenziali sono le stesse che ci hanno giudato nei lavori precedenti, e cioè: applicazione di risultati esistenziali in classi sufficientemente regolari ($s = 2m$), passaggio per «dualità» a risultati in classi più generali e interpolazione tra i risultati così ottenuti. Tuttavia nel caso $p \neq 2$ si presentano difficoltà notevoli, che per $p = 2$ è stato più facile superare, difficoltà che sono essenzialmente legate al problema dell'interpolazione, più complesso negli spazi di BANACH che in quelli di HILBERT. Per questo non abbiamo potuto procedere in modo così diretto come nel caso $p = 2$ (v. [27] e [28] ma a volte abbiamo dovuto combinare opportunamente diversi metodi e risultati.

Desideriamo mettere in evidenza tra gli strumenti che ci sono stati utili (oltre i risultati già citati relativi al caso $s = 2m$) le teorie dell'interpolazione sviluppate in [23], [25] e [26], i teoremi di regolarizzazione di AGMON [1] già citati e alcuni recenti notevoli risultati di USPENSKII [48] sulle tracce delle funzioni appartenenti a $W^{s,p}(\Omega)$.

Marzo 1961.

CAPITOLO I

ALCUNI SPAZI DI DISTRIBUZIONI

n. 1. Gli spazi $W^{s,p}(R^n)$.

1.1. Si consideri lo spazio reale euclideo R^n a n dimensioni, il cui punto indicheremo con $x = (x_1; \dots, x_n)$. Durante tutto il corso del presente lavoro p e q saranno numeri reali maggiori di 1, p' e q' i loro coniugati, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

È noto che, se s è un numero intero ≥ 0, si indica con $W^{s,p}(R^n)$ (1) lo spazio di S. L. SOBOLEV delle distribuzioni u su R^n tali che $D^k u \in L^p(R^n)$ (2), per $|k| \leq s$, normalizzato da

$$\| u \|_{W^{s,p}(R^n)} = \Big(\sum_{|k| \leq s} \| D^k u \|^p_{L^p(R^n)} \Big)^{1/p}.$$

L'estensione di questo spazio al caso di s reale è stata considerata già da diversi Autori, sopratutto nel caso $p = 2$ (3). A noi interesserà qui ripren-

---

(1) Frequentemente esso è indicato anche con i simboli $W_p^s(R^n)$ o $H^{s,p}(R^n)$ ($H^s(R^n)$ se $p = 2$) o $H_{s,L_p}(R^n)$ o $L_p^s(R^n)$ o $P^{p,s}(R^n)$. Osserviamo subito che noi più avanti per s reale indicheremo con $H^{s,p}(R^n)$ e $W^{s,p}(R^n)$ spazi tra di loro diversi.

(2) Se Ω è un aperto di R^n, $L^p(\Omega)$ è lo spazio (delle classi) delle funzioni di potenza p-esima sommabile in Ω normalizzato al solito da

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p}$$

Indicheremo con $k = (k_1, \dots, k_n)$ una qualunque n-pla di numeri interi ≥ 0;

$$| k | = k_1 + \dots + k_n, \qquad D^k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \qquad D^{(0,\dots,0)} u = u.$$

(3) Si veda ad es. [3], [4], [8], [11], [13], [14], [15], [19], [20], [21], [22 bis], [23] [24], [25], [26], [28], [30], [32], [34], [35], [36], [37], [38], [43], [44], [45], [46 bis], [47], [48].

dere e confrontare alcuni dei modi più usati per introdurre appunto lo spazio $W^{s,p}(R^n)$ per s reale qualunque e $p > 1$ qualunque. Considereremo anzitutto $W^{s,p}(R^n)$ come spazio di tracce seguendo in particolare i lavori [23] e [26].

Richiamiamo perciò alcune definizioni e risultati. Sia X uno spazio di BANACH, $\|f\|_X$ la norma in X. Indicheremo con $L^p(0, \infty; X)$ lo spazio delle (classi delle) funzioni $t \to f(t)$, $0 \leq t < +\infty$, misurabili a valori in X, tali che

$$(1.1) \qquad \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p} < \infty.$$

Esso è uno spazio di BANACH per la norma definita da (1.1).

Siano poi X_0 e X_1 due spazi di BANACH e $\mathcal{A}$ uno spazio vettoriale topologico tali che $X_0 \subset \mathcal{A}$, $X_1 \subset \mathcal{A}$, le inclusioni essendo continue. Indichiamo con $W(p, \alpha; X_0, X_1)$ per α e p reali e $1 < p < +\infty$, $0 < \frac{1}{p} + \alpha < 1$, lo spazio (delle classi) delle funzioni $f(t)$ tali che

$$(1.2) \qquad t^\alpha f(t) \in L^p(0, \infty; X_0), \qquad t^\alpha \frac{df}{dt} \in L^p(0, \infty; X_1)$$

la derivazione essendo intesa nel senso delle distribuzioni a valori vettoriali di L. SCHWARTZ (42); prendendo come norma

$$\max\left(\|t^\alpha f\|_{L^p(0,\infty;X_0)}, \left\|t^\alpha \frac{df}{dt}\right\|_{L^p(0,\infty;X_1)}\right)$$

esso risulta uno spazio di BANACH. Per le $f \in W(p, \alpha; X_0, X_1)$ la «traccia» $f(0)$ ha un senso in $X_0 + X_1$, sottospazio degli f di $\mathcal{A}$, per cui è $f = f_0 + f_1$ con $f_i \in X_i$, normalizzato ponendo $\|f\| = \inf_{f_0, f_1} \{\|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_1}\}$, (vedasi più precisamente la Prop. 1.1, Cap. I di [26]); si può allora introdurre la

DEF. 1.1: *Indicheremo con $T(p, \alpha; X_0, X_1)$ lo spazio delle tracce u delle $f(t) \in W(p, \alpha; X_0, X_1)$, normalizzato da:*

$$(1.3) \qquad \|u\|_{T(p,\alpha;X_0,X_1)} = \inf_{u=f(0)} \left(\max\left(\|t^\alpha f(t)\|_{L^p(0,\infty;X_0)}, \left\|t^\alpha \frac{df}{dt}\right\|_{L^p(0,\infty;X_1)}\right)\right)$$

Esso risulta uno spazio di BANACH.

Per gli spazi così introdotti valgono le seguenti proprietà. Siano Y_0 e Y_1 altri due spazi di BANACH contenuti in uno spazio vettoriale topologico $\mathcal{B}$, le iniezioni essendo continue. Supponiamo che $X_0 \cap X_1$ sia denso in X_0 e in X_1; e sia $\mathcal{T}$ un operatore lineare da $X_0 \cap X_1$ in $Y_0 \cap Y_1$ tale che esistano due costanti c_0 e c_1 per cui

$$(1.4) \qquad \| \mathcal{T}u \|_{Y_i} \leq c_i \| u \|_{X_i} \qquad u \in X_0 \cap X_1\,, \qquad i = 0, 1$$

Allora, prolungando per continuità, si ha che $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X_0; Y_0)$ e $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X_1; Y_1)$ [4]. E si ha in proposito (v. théor. 3.1, chap. I di [26])

TEOR. 1.1 (di interpolazione). *Nelle ipotesi fatte sugli spazi X_i, Y_i e su $\mathcal{T}$, per ogni p e α con $1 < p < +\infty$, $0 < \frac{1}{p} + \alpha < 1$, si ha*

$$(1.5) \qquad \mathcal{T} \in \mathcal{L}(T(p, \alpha; X_0, X_1); T(p, \alpha; Y_0, Y_1))$$

e la norma di $\mathcal{T}$ in questo spazio è maggiorata da $c_0^{1-\theta} c_1^{\theta}$, $\theta = \frac{1}{p} + \alpha$.

Supponiamo ora di più che

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \text{esista una successione di operatori } P_\mu \ (\mu = 1, 2, \ldots) \text{ lineari e} \\ \text{continui da } X_0 \text{ in } X_0 \cap X_1 \text{ e da } X_1 \text{ in } X_0 \cap X_1\,, \text{ tale che per} \\ \mu \to \infty \ P_\mu u \to u \text{ in } X_0 \text{ se } u \in X_0 \text{ e } P_\mu u \to u \text{ in } X_1 \text{ se } u \in X_1. \end{cases}$$

Si ha allora (Lemme 1.1, chap. II di [26]).

LEMMA 1.1: *Nelle ipotesi dette, $X_0 \cap X_1$ è denso in $T(p, \alpha; X_0, X_1)$ e più precisamente si ha che $P_\mu u \to u$ in $T(p, \alpha; X_0, X_1)$ per $\mu \to \infty$.*

Aggiungiamo infine l'ulteriore ipotesi che X_0 e X_1 siano *riflessivi*. Se X_0' e X_1' sono i loro duali, poichè è $1 < p < +\infty$ e $0 < \frac{1}{p} + \alpha < 1$, si ha anche $0 < \frac{1}{p'} - \alpha < 1$ e $p' > 1$, sicchè si può introdurre mediante la def. 1.1 lo spazio $T(p', -\alpha; X_1', X_0')$. Si ha allora (v. théor. 1.1, chap. II di [26])

TEOR. 1.2 (di dualità): *In tutte le ipotesi fatte su X_0 e X_1, p e α, risulta (algebricamente e topologicamente)*

$$(T(p, \alpha; X_0, X_1))' = T(p', -\alpha; X_1', X_0')$$

E dunque $T(p, \alpha; X_0, X_1)$ è *riflessivo.*

---

[4] Con $\mathcal{L}(E; F)$ indichiamo lo spazio delle applicazioni lineari e continue di E in F.

OSSERVAZIONE: Spazi e teoremi più generali di quelli ora ricordati si trovano in [26].

1.2. La teoria richiamata nel n. 1.1 si può applicare in particolare prendendo $X_0 = W^{1,q}(R^n)$ e $X_1 = W^{0,q}(R^n)$ ($= L^q(R^n)$) con $1 < q < +\infty$, q reale (si veda infatti [23] e [26]).

Le ipotesi richieste su X_0 e X_1 sono in realtà soddisfatte in questo caso. In particolare la successione di operatori P_μ richiesta nella (1.6) può essere scelta nel modo seguente: si consideri una successione di funzioni «regolarizzanti» (o «mollifiers») $\{\alpha_\mu\}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$), cioè di funzioni $\alpha_\mu \in \mathcal{D}(R^n)$ (5), non negative, con supporti tendenti uniformemente all'origine e tali che $\int_{R^n} \alpha_\mu \, dx = 1$, e si ponga $P_\mu u = u * \alpha_\mu$ ($*$ prodotto di composizione). Per note proprietà del prodotto di composizione si ha che gli operatori P_μ verificano la (1.6) e che $P_\mu u$ appartiene allo spazio $\mathcal{D}_{L^q}$ delle funzioni indefinitamente differenziabile in R^n e ivi di potenza q-esima sommabile insieme con tutte le loro derivate (si veda SCHWARTZ [41] t. II).

In particolare potremo prendere $q = p$ e porre quindi la seguente

DEF. 1.2. *Per* $1 < p < +\infty$, $\theta = \dfrac{1}{p} + \alpha$, $0 < \theta < 1$

$$W^{1-\theta,p}(R^n) = T(p, \alpha\,;\, W^{1,p}(R^n), W^{0,p}(R^n)).$$

La norma in $W^{1-\theta,p}(R^n)$ per le (1.3) risulta dunque essere

$$\| u \|_{W^{1-\theta,p}(R^n)} = \inf_{u = f(0)} \left\{ \max \left[\left(\int_0^\infty \left\| t^\alpha f(t) \right\|^p_{W^{1,p}(R^n)} dt \right)^{1/p}, \left(\int_0^\infty \left\| t^\alpha \frac{df}{dt} \right\|^p_{W^{0,p}(R^n)} dt \right)^{1/p} \right] \right\}. \tag{1.7}$$

PROP. 1.1: *Lo spazio* $\mathcal{D}(R^n)$ *è denso in* $W^{1-\theta,p}(R^n)$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$.

Infatti per il lemma 1.1 si ha che $u * \alpha_\mu \to u$ in $W^{1-\theta,p}(R^n)$ per $\mu \to \infty$; ma $u * \alpha_\mu \in \mathcal{D}_{L^p}$ e, poichè $\mathcal{D}(R^n)$ è denso in $\mathcal{D}_{L^p}$, si può approssimare $u * \alpha_\mu$ con funzioni di $\mathcal{D}(R^n)$ in $\mathcal{D}_{L^p}$, e dunque a maggior ragione in $W^{1-\theta,p}(R^n)$.

---

(5) Se Ω è un aperto di R^n indicheremo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili e a supporto compatto in Ω.

1.3. Sia ora s reale $\geq$ o qualunque; indichiamo con $[s]$ il massimo intero $\leq s$, cosicchè sarà $s = [s] + \sigma$ con $0 \leq \sigma < 1$; e poniamo la

DEF. 1.3: *Indicheremo con* $W^{s,p}(R^n)$, $s \geq 0$, $1 < p < +\infty$, *lo spazio delle distribuzioni* u *tali che* $u \in W^{[s],p}(R^n)$ *e* $D^k u \in W^{\sigma,p}(R^n)$ *per* $|k| = [s]$, *normalizzato da*

$$\| u \|_{W^{s,p}(R^n)} = (\| u \|^p_{W^{[s],p}(R^n)} + \sum_{|k|=[s]} \| D^k u \|^p_{W^{\sigma,p}(R^n)})^{1/p}. \tag{1.8}$$

Con ragionamento abituale si vede immediatamente che esso risulta uno spazio di BANACH riflessivo, poichè tali sono $W^{[s],p}(R^n)$ e $W^{\sigma,p}(R^n)$. Esso è anche uno spazio normale di distribuzioni poichè vale la

PROP. 1.2: *Lo spazio* $\mathcal{D}(R^n)$ *è denso in* $W^{s,p}(R^n)$, $s \geq 0$, $1 < p < +\infty$.

Infatti se $u \in W^{s,p}(R^n)$ basta approssimare u con $u * \alpha_\mu$ (le α_μ definite come sopra); utilizzando note proprietà del prodotto di composizione e quanto si è visto per la Prop. 1.1, si ha che $u * \alpha_\mu \to u$ in $W^{s,p}(R^n)$ per $\mu \to \infty$ e inoltre $u * \alpha_\mu \in \mathcal{D}_{L^p}$; di qui essendo $\mathcal{D}(R^n)$ denso in $\mathcal{D}_{L^p}$ si può approssimare $u * \alpha_\mu$ in $\mathcal{D}_{L^p}$, e dunque in $W^{s,p}(R^n)$, con funzioni di $\mathcal{D}(R^n)$.

Lo spazio duale di $W^{s,p}(R^n)$ è ancora uno spazio di distribuzioni su R^n. Noi porremo la

DEF. 1.4. *Per* s *reale* < 0, $1 < p < +\infty$

$$W^{s,p}(R^n) = (W^{-s,p'}(R^n))' ; \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ne segue subito, per la riflessività di $W^{s,p}(R^n)$ nel caso $s \geq 0$, la

PROP. 1.3. *Per ogni* s *reale e* $1 < p < \infty$, *risulta*

$$(W^{s,p}(R^n))' = W^{-s,p'}(R^n) ; \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Dimostreremo ora una interessante proprietà di interpolazione degli spazi $W^{s,p}(R^n)$ per s *intero*, che ci servirà nel seguito:

PROP. 1.4. *Per* s *intero qualunque*, $1 < p < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$, *lo spazio* $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n))$ *è isomorfo algebricamente e topologicamente allo spazio* $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$ *cioè*

$$T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n)) = W^{s+1-\theta,p}(R^n) \,(^6).$$

---

(6) Diremo anche che i due spazi « coincidono »; e tale terminologia useremo di frequente in analoghi casi nel seguito.

Osserviamo anzitutto che per gli spazi $W^{s+1,p}(R^n)$ e $W^{s,p}(R^n)$ sono soddisfatte le ipotesi richieste per gli spazi X_0 e X_1 nel n 1.1 e potremo dunque ad essi applicare la teoria ricordata nel n. 1.1. Veniamo ora alla dimostrazione della Proposizione.

Per $s = 0$ è la stessa definizione 1.2. Supponiamo dapprima $s \geq 1$.

Indichiamo con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ la variabile duale di $x = (x_1, \dots x_n)$ e con $\mathcal{F}u$ la trasformata di FOURIER di una distribuzione u temperata nel senso di SCHWARTZ [41], e con $\mathcal{F}^{-1}u$ la antitrasformata di FOURIER; $\mathcal{F}$ è un isomorfismo dello spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate in sè, di cui $\mathcal{F}^{-1}$ è lo isomorfismo inverso.

Consideriamo allora l'operatore

$$\mathcal{G}^{(s)} = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}).$$

È noto che nel caso $p = 2$ esso serve per definire gli stessi spazi $W^{s,2}(R^n)$, che vengono allora indicati di frequente con $H^s(R^n)$; nel caso $p \neq 2$, come appunto faremo nel n. 3, può ancora servire per introdurre dei nuovi spazi (che indicheremo con $H^{s,p}(R^n)$), i quali però non coincidono in generale per s reale qualunque con i $W^{s,p}(R^n)$. Tuttavia nel caso s *intero* ciò avviene, in virtù di un notevole teorema di MIHLIN [33] sui «moltiplicatori» nello spazio $\mathcal{F}L^p(R^n)$, spazio delle trasformate di Fourier delle $u \in L^p(R^n)$ (si veda anche il recente lavoro di HÖRMANDER [17]); più precisamente, nel caso che a noi ora interessa (s intero ≥ 1), se definiamo come spazio $H^{s,p}(R^n)$ lo spazio delle distribuzioni u temperate tali che $\mathcal{G}^{(s)}u \in L^p(R^n)$ normalizzato da

$$\| u \|_{H^{s,p}(R^n)} = \| \mathcal{G}^{(s)} u \|_{L^p(R^n)},$$

si ottiene uno spazio di Banach che è isomorfo, per il detto teorema di MIHLIN, a $W^{s,p}(R^n)$. Riservandoci di tornare nel n. 3 su questi spazi $H^{s,p}(R^n)$ e di considerarli anche per s reale qualunque, limitiamoci ad osservare che, per quanto si è ora detto, possiamo affermare che $\mathcal{G}^{(s)}$ è un isomorfismo di $W^{s+1,p}(R^n)$ su $W^{1,p}(R^n)$ e di $W^{s,p}(R^n)$ su $W^{0,p}(R^n)$, s intero ≥ 1.

Ma allora per il teor. 1.1 esso è anche un isomorfismo di $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n))$ su $W^{1-\theta,p}(R^n)$ $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$. Dunque l'appartenenza di u a $T(p, \alpha; W^{s+1}(R^n), W^{s,p}(R^n))$ equivale al fatto che $\mathcal{G}^{(s)}u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$.

Ebbene dimostriamo che ciò equivale anche al fatto che $u \in W^{s+1-\theta,p}(R^n)$, più precisamente che lo spazio delle u (temperate) per cui $\mathcal{G}^{(s)}u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$ *coincide* (cioè è isomorfo) con $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$; e dunque $u \to \mathcal{G}^{(s)}u$ è un isomorfismo di $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$ su $W^{1-\theta,p}(R^n)$. Infatti sia anzitutto u distribuzione temperata tale che $\mathcal{G}^{(s)} u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$. Allora per $k = (k_1, \dots, k_n)$ e $|k| = s$, trascurando per semplicità il fattore 2π nella trasformazione di FOURIER, si ha:

$$D^k u = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^k (1 + |\xi|^2)^{-s/2} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u) =$$
$$= \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^k (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u))) = K^{(k)} v$$

dove

$$v = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u) = \mathcal{G}^{(s)} u \quad \text{e} \quad K^{(k)} = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^k \cdot (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \mathcal{F}).$$

Ora, sempre per il suddetto teorema di MIHLIN, l'operatore $K^{(k)}$ è lineare e continuo da $L^p(R^n)$ in $L^p(R^n)$ e da $W^{1,p}(R^n)$ in $W^{1,p}(R^n)$ e quindi (teor. 1.1) da $W^{1-\theta,p}(R^n)$ in $W^{1-\theta,p}(R^n)$ e perciò $D^k u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$, dunque $u \in W^{s+1-\theta,p}(R^n)$.

Inversamente sia $u \in W^{s+1-\theta,p}(R^n)$ e dimostriamo che $\mathcal{G}^{(s)} u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$. Anzitutto dimostriamo che

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + \xi_j^{2s})^{1/2} \mathcal{F}u) \in W^{1-\theta,p}(R^n) \text{ per ogni } j = 1, \dots, n.$$

Infatti si ha

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + \xi_j^{2s})^{1/2} \mathcal{F}u) = L_j^{(s)} v_j$$

dove $L_j^{(s)}$ è l'operatore $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{(1 + \xi_j^{2s})^{1/2}}{1 + i\xi_j^s} \mathcal{F}\right)$ e $v_j = \mathcal{F}^{-1}((1 + i\,\xi_j^s)\, \mathcal{F}u)$.

Poichè $u \in W^{s+1-\theta,p}(R^n)$, $v_j \in W^{1-\theta,p}(R^n)$ ovviamente.

Sempre adoperando il teorema di MIHLIN sui moltiplicatori, si ha allora che $L_j^{(s)}$ è lineare e continuo da $L^p(R^n)$ in $L^p(R^n)$ e da $W^{1,p}(R^n)$ in $W^{1,p}(R^n)$ e dunque (teor. 1.1) da $W^{1-\theta,p}(R^n)$ in $W^{1-\theta,p}(R^n)$. E perciò si ha intanto la

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + \xi_j^{2s})^{1/2} \mathcal{F}u) \in W^{1-\theta,p}(R^n). \tag{1.9}$$

Passiamo ora a considerare $\mathcal{G}^{(s)} u$; risulta

$$\mathcal{G}^{(s)} u = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1 + |\xi|^2)^{1/2}}{\sum_{j=1}^{n}(1 + \xi_j^{2s})^{1/2}} (1 + \xi_j^{2s})^{1/2} \mathcal{F}u\right) = \sum_{j=1}^{n} M_j^{(s)} w_j$$

dove

$$M_j^{(s)} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{\sum_{j=1}^{n}(1 + \xi_j^{2s})^{1/2}} \mathcal{F}\right) \quad \text{e} \quad w_j = \mathcal{F}^{-1}((1 + \xi_j^{2s})^{1/2} \mathcal{F}u).$$

Per la (1.9) $w_j \in W^{1-\theta,p}(R^n)$.

Dimostriamo perciò che $M_j^{(s)}$ è lineare e continuo da $W^{1-\theta,p}(R^n)$ in $W^{1-\theta,p}(R^n)$; ma anche ora possiamo adoperare il teorema di MIHLIN e ottenere che $M_j^{(s)}$ è lineare e continuo da $L^p(R^n)$ in $L^p(R^n)$ e da $W^{1,p}(R^n)$ in $W^{1,p}(R^n)$ e dunque (teor. 1.1) da $W^{1-\theta,p}(R^n)$ in $W^{1-\theta,p}(R^n)$.

E con ciò la Prop. 1.4 è dimostrata per $s \geq 1$, poichè dagli stessi ragionamenti fatti risulta che c'è isomorfismo algebrico e topologico tra $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n))$ e $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$.

Rimane dunque da considerare il caso $s < 0$; esso si esaurisce per « dualità »; infatti per il teor. 1.2, se s è ≤ -1, si ha

$$(T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n)))' = T(p', -\alpha; W^{-s,p'}(R^n), W^{-s-1,p'}(R^n))$$

dove $-s \geq 1$ e $-s-1 \geq 0$. Dunque possiamo applicare la Prop. 1.4 stessa nel caso già dimostrato e si ha

$$T(p', -\alpha; W^{-s,p'}(R^n), W^{-s-1,p'}(R^n)) = W^{-s-\theta',p'}(R^n) = (W^{s+1-\theta,p}(R^n))'$$

poichè $\theta' = \dfrac{1}{p'} - \alpha = 1 - \dfrac{1}{p} - \alpha = 1 - \theta$. Con ciò la Prop. 1.4 è completamente dimostrata.

OSSERVAZIONI. *a*) In seguito nel cap. II n. 11 otterremo delle generalizzazioni della Prop. 1.4 al caso di s non intero, ma *non per ogni valore di* s; la difficoltà sta nel fatto che in generale si ha che $\mathcal{G}^{(s)}$ non è un isomorfismo di $W^{s+\sigma,p}(R^n)$ su $W^{\sigma,p}(R^n)$ (s e σ reali); per es. se $\sigma = 0$ e $s = 1 - \dfrac{1}{p}$ allora $\mathcal{G}^{(1-1/p)}$ non è un isomorfismo di $W^{1-1/p,p}(R^n)$ su $W^{0,p}(R^n)$ (controesempio dovuto e KAHANE, comunicazione personale, 1960). [6bis]

b) Il fatto: $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n); W^{s,p}(R^n)) \subset W^{s+1-\theta,p}(R^n)$ per $s \geq 1$ intero, si può ottenere anche facilmente senza introdurre l'operatore $\mathcal{G}^{(s)}$; si veda per una questione analoga il successivo teor. 11.1, dove appunto si può evitare la Prop. 1.4.

1.4. Abbiamo così definito $W^{s,p}(R^n)$ per ogni s reale. Come si è già detto, ci sono altri modi equivalenti di introdurre detto spazio. Riprendiamo perciò la def. 1.1, $s = 1 - \theta$, $0 < \theta < 1$.

Anzitutto si ha (v. [3] per $p = 2$, [13] per $p \neq 2$ e $\alpha = 0$, [23] per il caso generale (e anche [30], [43], [47])) la

PROP. 1.5. *Lo spazio* $W^{1-\theta,p}(R^n)$ $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$, *è isomorfo* (*algebricamente e topologicamente*) *allo spazio delle funzioni* $u \in L^p(R^n)$ *e tali che*

$$t^{\alpha-1}[u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)] \in L^p(0, \infty; L^p(R^n))$$

(6 bis) Un controesempio analogo è stato dato anche da E. M. STEIN.

$i = 1, \dots, n,\ \dfrac{1}{p} + \alpha = \theta,$ *normalizzato da*

$$(1.10)\quad |||u||| = \left(\int_{R^n} |u(x)|^p\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \int_{R^n} | t^{\alpha-1} [u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - \right.$$
$$\left. - u(x_1, \dots, x_n)] |^p\, dx\, dt \right)^{1/p}$$

Dunque le norme (1.10) e (1.7) sono equivalenti (7).

Si ha inoltre (v. [13], [43], [44] e [47]) la

Prop. 1.6. *Lo spazio* $W^{1-\theta,p}(R^n)$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$, $\theta = \dfrac{1}{p} + \alpha$, *è isomorfo* (*algebricamente e topologicamente*) *allo spazio* $\widetilde{W}^{1-\theta,p}(R^n)$ *delle funzioni* $u \in L^p(R^n)$ *per cui è finita la norma*

$$(1.11)\quad [u]_{\widetilde{W}^{1-\theta,p}(R^n)} = \left(\int_{R^n} |u(x)|^p\, dx + \int_{R^n}\int_{R^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n-1+(1-\alpha)p}}\, dx\, dy \right)^{1/p}$$

e dunque le norme (1.7), (1.10) *e* (1.11) *sono equivalenti.*

Partendo da queste diverse definizioni nel caso $0 < s < 1$, si può poi completare la definizione anche per s reale qualunque in modo analogo a quello sopra indicato nel n. 1.3 con la def. 1.3 e 1.4.

n. 2. Gli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s,p}(\Gamma)$.

2.1. Sia ora Ω un aperto limitato di R^n, « sufficientemente regolare » ; noi supporremo addirittura, per semplicità, che esso sia di classe C^∞, cioè tale che la sua frontiera Γ sia una varietà $(n-1)$-dimensionale, indefinitamente differenziabile e che Ω sia tutto da una stessa parte di Γ.

Vogliamo definire lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ per s reale e $p > 1$. Per s intero ≥ 0 e $p > 1$ esso è lo spazio ben noto di S. L. Sobolev delle distribuzioni u su Ω tali che $D^k u \in L^p(\Omega)$ per $|k| \leq s$ normalizzato ponendo

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|k| \leq s} \|D^k u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}.$$

(7) La Prop. 1.5 è stata estesa anche al caso dello spazio $T(p, \alpha\,;\, W^{1,q}(R^n),\ W^{0,q}(R^n))$ con $p \neq q$; si veda [23].

Per s reale si possono seguire diverse definizioni come nel caso $\Omega = R^n$. Analogamente a quanto si è fatto nel n. 1 applicheremo anzitutto la teoria richiamata nel n. 1.1, al caso $0 < s < 1$, prendendo dunque gli spazi X_0 e X_1 nel modo seguente

$$X_0 = W^{1,p}(\Omega), \qquad X_1 = W^{0,p}(\Omega)\,(= L^p(\Omega))\ (^8)$$

Le ipotesi richieste su X_0 e X_1 sono infatti soddisfatte; in particolare la successione di operatori P_μ richiesta nella (1.6) si può costruire per esempio nel seguente modo. È noto (v. ad es. [7]) che nelle ipotesi fatte su Ω esiste un operatore lineare e continuo (di prolungamento) $u \to Pu$ da $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(R^n)$ e da $W^{0,p}(\Omega)$ in $W^{0,p}(R^n)$ tale che $Pu = u$ $q.$-$d.$ in Ω; e così pure è noto che l'operatore restrizione a Ω, $u \to R_\Omega u$, è lineare e continuo da $W^{1,p}(R^n)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ e da $W^{0,p}(R^n)$ in $W^{0,p}(\Omega)$. Dunque se definiamo $P_\mu u = R_\Omega((Pu) * \alpha_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, dove α_μ è la successione di funzione regolarizzanti considerata nel n. 1.2, si ha che $P_\mu u$ verifica l'ipotesi (1.6) e si ha di più che $P_\mu u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (9).

Possiamo dunque porre la

DEF. 2.1. *Per* $1 < p < +\infty$, $\theta = \dfrac{1}{p} + \alpha$, $0 < \theta < 1$

$$W^{1-\theta,p}(\Omega) = T(p, \alpha\,;\ W^{1,p}(\Omega),\ W^{0,p}(\Omega)).$$

La norma in $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ resta definita per la (1.3) da

$$\| u \|_{W^{1-\theta,p}(\Omega)} = \inf_{f(0)=u} \left\{ \max \left[\left(\int_0^\infty \| t^\alpha f(t) \|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\, dt \right)^{1/p}, \right.\right. \tag{2.1}$$

$$\left.\left. \left(\int_0^\infty \left\| t^\alpha \frac{df}{dt} \right\|^p_{W^{0,p}(\Omega)} dt \right)^{1/p} \right] \right\}.$$

E dal lemma 1.1, poichè $P_\mu u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, si ha

PROP. 2.1. *Lo spazio* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *è denso in* $W^{1-\theta,p}(\Omega)$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$; *e più precisamente* $P_\mu u \to u$ *in* $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ *per* $\mu \to \infty$.

---

(8) In generale si potrebbero introdurre anche gli spazi

$$T(p, \alpha\,;\ W^{1,q}(\Omega),\ W^{0,q}(\Omega)) \text{ con } q \neq p.$$

(9) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in $\Omega = \overline{\Omega} + \Gamma$.

Un'altra interessante proposizione che lega le def. 1.2 e 2.1 è la seguente

PROP. 2.2. *$W^{1-\theta,p}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a Ω delle u di $W^{1-\theta,p}(R^n)$, $1 < p + \infty$, $0 < \theta < 1$.*

La dimostrazione è di tipo noto. Anzitutto si adopera l'operatore di prolungamento $u \to Pu$ sopra ricordato; per il teor. 1.1 di interpolazione esso è lineare e continuo anche da $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ in $W^{1-\theta,p}(R^n)$, cioè $P \in \mathcal{L}(W^{1-\theta,p}(\Omega), W^{1-\theta,p}(R^n))$. Poi si applica lo stesso teor. 1.1 all'operatore di restrizione R_Ω già introdotto e si ottiene che $R_\Omega \in \mathcal{L}(W^{1-\theta,p}(R^n), W^{1-\theta,p}(\Omega))$. c. v. d.

2.2. Passiamo ora a definire $W^{s,p}(\Omega)$ per s reale ≥ 0.

DEF. 2.2. *Indicheremo con $W^{s,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, $s \geq 0$, $s = [s] + \sigma$, lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $u \in W^{[s],p}(\Omega)$ e $D^k u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ per $|k| = [s]$, normalizzato da*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|k|=[s]} \| D^k u \|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)})^{1/p}. \tag{2.2}$$

Esso risulta uno spazio di BANACH riflessivo e si ha inoltre la

PROP. 2.3. *Lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a Ω delle u di $W^{s,p}(R^n)$, $1 < p < +\infty$, $s \geq 0$.*

Alla dimostrazione della Prop. 2.3 premettiamo il seguente

LEMMA 2.1. *Fissato un intero positivo r esiste un'applicazione lineare e continua $u \to Pu$ di $W^{\tau,p}(\Omega)$ in $W^{\tau,p}(R^n)$, per ogni τ intero con $0 \leq \tau \leq r + 1$, tale che $Pu = u$ q. - d. in Ω* e

$$D^k(Pu) = Q_k(D^k u)\,[10] \text{ per ogni } k \text{ tale che } |k| = r \tag{2.3}$$

dove le Q_k sono opportune applicazioni lineari e continue di $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(R^n)$ e di $W^{0,p}(\Omega)$ in $W^{0,p}(R^n)$.

Infatti mediante un sistema di « carte locali » e di partizione dell'unità ci si può ovviamente ricondurre al caso in cui Ω sia il semispazio R^n_+ degli x per cui è $x_n > 0$. L'applicazione P richiesta si può allora costruire nel seguente modo abituale (si veda ad es. [32] pag. 317-320, dove il procedimento è sviluppato dettagliatamente)

$$\begin{cases} Pu(x) = u(x) & \text{se } x_n > 0 \\ Pu(x) = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j u(x_1, \dots, x_{n-1}, -jx_n) & \text{se } x_n \leq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

---

[10] Le derivazioni vanno naturalmente intese quelle a primo membro nel senso delle distribuzioni su R^n e quelle a secondo membro nel senso delle distribuzioni su Ω.

dove i λ_j sono delle costanti tali che

$$\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j (-j)^i = 1 \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \dots, r \tag{2.5}$$

La P risulta allora in virtù delle (2.5) lineare e continua da

$$W^{\tau,p}(R^n_+) \quad \text{in} \quad W^{\tau,p}(R^n). \quad \text{per} \quad \tau = 0, \dots, r+1.$$

Inoltre si ha per $k = (k_1, \dots, k_n)$ tale che $|k| = r$

$$\begin{cases} D^k Pu = D^k u & \text{per} \quad x_n > 0 \\ D^k Pu = \sum_{j=1}^{r+1} (-j)^{k_n} \lambda_j D^k u (x_1, \dots, x_{n-1}, -j x_n) & \\ & \text{per } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Se dunque si pone

$$Q_k v = v \qquad \text{per} \quad x_n > 0$$

$$Q_k v = \sum_{j=1}^{r+1} (-j)^{k_n} \lambda_j v (x_1, \dots, x_{n-1}, -j x_n) \quad \text{per } x_n \leq 0,$$

$Q_k \in \mathcal{L}(W^{0,p}(R^n_+), W^{0,p}(R^n))$ e $Q_k \in \mathcal{L}(W^{1,p}(R^n_+), W^{1,p}(R^n))$; e quindi il lemma è dimostrato.

Dimostriamo ora la Prop. 2.3. Costruiamo l'applicazione P di cui al lemma 2.1 prendendo $r = [s]$. Allora per $u \in W^{s,p}(\Omega)$ si ha anzitutto che $Pu \in W^{[s],p}(\Omega)$ e $\| Pu \|_{W^{[s],p}(R^n)} \leq c \| u \|_{W^{[s],p}(\Omega)}$. Per k tale che $|k| = [s]$ si ha $D^k u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ con $\sigma = s - [s]$. Applicando allora il teor. 1.1 di interpolazione alla applicazione Q_k, si ha che $Q_k \in \mathcal{L}(W^{\sigma,p}(\Omega), W^{\sigma,p}(R^n))$ e dunque che $D_k(Pu) = Q_k(D^k u) \in W^{\sigma,p}(R^n)$ e $\| D^k(Pu) \|_{W^{\sigma,p}(R^n)} \leq c \| D^k u \|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}$. Dunque risulta che $P \in \mathcal{L}(W^{s,p}(\Omega), W^{s,p}(R^n))$.

Viceversa si consideri l'operatore, di restrizione a Ω, $R_\Omega u$; osservando che $D^k(R_\Omega u) = R_\Omega(D^k u)$, in virtù anche della Prop. 2.2 (più precisamente di quanto si è detto nella sua dimostrazione a proposito di R_Ω), si ha che $R_\Omega \in \mathcal{L}(W^{s,p}(R^n), W^{s,p}(\Omega))$. E quindi la Prop. 2.3 è dimostrata.

Prop. 2.4. *Per s intero ≥ 0 si ha*

$$T(p, \alpha; \; W^{s+1,p}(\Omega), \; W^{s,p}(\Omega)) = W^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

$1 < p < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$.

Infatti sia $u \to Pu$ un'applicazione lineare e continua da $W^{s,p}(\Omega)$ in $W^{s,p}(R^n)$ e da $W^{s+1,p}(\Omega)$ in $W^{s+1,p}(R^n)$ tale che $Pu = u$ *q.-d.* in Ω (operatore di prolungamento). Allora essa è lineare e continua anche da $T(p, \alpha; W^{s+1}(\Omega), W^{s,p}(\Omega))$ in $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(R^n), W^{s,p}(R^n))$, il quale spazio per la Prop. 1.4 coincide con $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$.

D'altra parte, con ragionamento analogo, l'operatore R_Ω, restrizione a Ω, è lineare e continuo da $W^{s+1-\theta,p}(R^n)$ in $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(\Omega), W^{s,p}(\Omega))$; dunque $T(p, \alpha; W^{s+1,p}(\Omega), W^{s,p}(\Omega))$, tenuto conto della Prop. 2.3, coincide con $W^{s+1-\theta,p}(\Omega)$. c. v. d.

PROP. 2.5. *Lo spazio $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{s,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, s reale ≥ 0.*

Sia infatti $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e si consideri l'applicazione $u \to Pu$ introdotta nella dimostrazione della Prop. 2.3. Per la Prop. 1.2 esiste una successione di funzioni $\varphi_i \in \mathcal{D}(R^n)$ tale che $\varphi_i \to Pu$ per $i \to \infty$ in $W^{s,p}(R^n)$; ma allora, tenuto conto della continuità di P e di R_Ω, per restrizione $R_\Omega \varphi_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e converge a u in $W^{s,p}(\Omega)$ per $i \to \infty$.

2.3. La definizione di $W^{s,p}(\Omega)$ per *s reale qualunque* si ottiene poi in modo abituale. Anzitutto se s è ≥ 0 si indicherà con $W_0^{s,p}(\Omega)$ il sottospazio di $W^{s,p}(\Omega)$ chiusura in $W^{s,p}(\Omega)$ di $\mathcal{D}(\Omega)$. E poi si porrà per definizione

$$W^{s,p}(\Omega) = (W_0^{-s,p'}(\Omega))' \quad \text{se è} \quad s < 0$$

Poichè $W_0^{-s,p'}(\Omega)$ è uno spazio normale di distribuzioni su Ω, $W^{s,p}(\Omega)$ per $s < 0$ è ancora uno spazio di distribuzioni su Ω.

2.4. Come si è già detto lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ può essere definito in altri modi. Limitiamoci al caso $0 < s < 1$, cioè a $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ con $0 < \theta < 1$, poichè l'estensione al caso di s reale qualunque viene fatta in modo analogo a quello dei n. 2.2 e 2.3.

Si ha anzitutto la

PROP. 2.7 *Lo spazio $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$ è isomorfo (algebricamente e topologicamente) allo spazio $\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)$ delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ e tali che sia finita la norma*

$$(2.7) \qquad [u]_{\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)} = \left(\| u \|_{L^p(\Omega)}^p + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+(1-\alpha)p}} \, dx \, dy\right)^{1/p}$$

$\theta = \dfrac{1}{p} + \alpha$, *normalizzato con la stessa* (2.7).

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto per un recente risultato di USPENSKII [48, teor. 3] si ha che $\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a Ω dello $u \in \widetilde{W}^{1-\theta,p}(R^n)$ (cf. n. 1.4).

Ma allora per la Prop. 1.4 e 2.2 si ha che $\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)$ e $W^{1-\theta,p}(\Omega)$ coincidono algebricamente.

Basterà dunque dimostrare che le norme (2.7) e (2.1) sono equivalenti. Per questo sia P l'applicazione già introdotta nella dimostrazione della Prop. 2.2; tenuto conto che $P \in \mathcal{L}(W^{1-\theta,p}(\Omega), W^{1-\theta,p}(R^n))$ e della Prop. 1.4, si ha

$$[u]_{\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)} \leq [Pu]_{\widetilde{W}^{1-\theta,p}(R^n)} \leq c \,\| Pu \|_{W^{1-\theta,p}(R^n)} \leq c' \,\| u \|_{W^{1-\theta,p}(\Omega)}$$

con c e c' indipendenti da u. La maggiorazione inversa segue allora dal teorema di BANACH sugli isomorfismi. Essa del resto si può ottenere direttamente nel seguente analogo modo: poichè esiste un'applicazione lineare e continua Q di $\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)$ in $\widetilde{W}^{1-\theta,p}(R^n)$ tale che $Qu = u$ $q.-d.$ in Ω (v. [48, teor. 3)], tenuto conto anche delle proprietà dell'operatore di restrizione R_Ω e della Prop. 1.6, si ha

$$\| u \|_{W^{1-\theta,p}(\Omega)} = \| R_\Omega \, Qu \|_{W^{1-\theta,p}(\Omega)} \leq c \,\| Qu \|_{W^{1-\theta,p}(R^n)} \leq$$

$$\leq c' \,[Qu]_{\widetilde{W}^{1-\theta,p}(R^n)} \leq c'' \,[u]_{\widetilde{W}^{1-\theta,p}(\Omega)},$$

con c, c', c'' costanti indipendenti da u. c.v.d.

2.5. La definizione degli spazi $W^{s,p}(\Gamma)$ può essere data in modo analogo a quello fatto per gli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ nei n. 2.1 2.2 e 2.3 partendo dal caso di s intero ≥ 0; ma può anche essere data, come noi ora richiameremo, direttamente per ogni s reale, riportandosi con un sistema di carte locali agli spazi $W^{s,p}(R^n)$.

Per l'ipotesi fatta su Ω è possibile ricoprire Γ con un numero finito $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ di aperti di R^n in modo che per ogni $\mathcal{O}_i$ esista un omeomorfismo indefinitamente differenziabile $x \to \theta_i(x)$ di $\mathcal{O}_i$ sul cilindro $C = \left[\sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \leq 1, \; -1 < y_n < 1\right]$ tale che $\Omega \cap \mathcal{O}_i$ venga trasformato nel sottoinsieme C_+ di C delle $y_n > 0$ e $\mathcal{O}_i \cap \Gamma = \Gamma_i$ venga trasformato nel sottoinsieme C_0 di C delle $y_n = 0$; e inoltre θ_i e θ_j coincidano su $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

Si ha così che $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \Gamma_i$ e il sistema dei Γ_i costituisce un ricoprimento di Γ mediante insiemi aperti relativamente a Γ.

Si consideri poi una partizione dell'unità su Γ relativa agli insiemi Γ_i, $1 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(x)$, mediante funzioni $\beta_i(x) \in \mathcal{D}(\Gamma)$ (spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili su Γ); ogni β_i ha supporto contenuto in Γ_i ed è ivi ≥ 0. Si consideri allora per ogni funzione $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$, fissato i, il prodotto $\beta_i u$ e lo si trasformi mediante l'omeomorfismo θ_i^{-1} inverso di θ_i, precisamente si ponga

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \Phi_i u(y) = (\beta_i u)(\theta_i^{-1}(y)) & \text{per } y \in C_0 \\ \Phi_i u(y) = 0 & \text{per } y \in R^{n-1} - C_0 \ (^{11}). \end{cases}$$

Si ha così ovviamente un'applicazione lineare $u \to \Phi_i(u)$ di $\mathcal{D}(\Gamma)$ in $\mathcal{D}(R^{n-1})$; vale allora il seguente

LEMMA 2.2. *L'applicazione $u \to \Phi_i u$ definita dalla (2.8) da $\mathcal{D}(\Gamma)$ in $\mathcal{D}(R^{n-1})$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua, ancora indicata con Φ_i, di $\mathcal{D}'(\Gamma)$ in $\mathcal{D}'(R^{n-1})$ ($\mathcal{D}'(\Gamma)$ e $\mathcal{D}'(R^{n-1})$ essendo rispettivamente gli spazi delle distribuzioni su Γ e R^{n-1}).*

Infatti si ha per $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e $v \in \mathcal{D}(R^{n-1})$

$$\langle \Phi_i u, v \rangle = \int_{R^{n-1}} (\beta_i u)(\theta_i^{-1}(y))\, v(y)\, dy = \int_{\Gamma_i} u(x)\, \beta_i(x)\, v(\theta_i(x))\, J_i(x)\, d\sigma_x$$

dove $J_i(x)$ è una opportuna funzione indefinitamente differenziabile su Γ_i e ivi $\neq 0$; e quindi si ha anche

$$(2.9) \qquad \langle \Phi_i u, v \rangle = \int_{R^{n-1}} u(x)\, \Psi_i v(x)\, dx$$

dove

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \Psi_i v(x) = \beta_i(x)\, v(\theta_i(x))\, J_i(x) & \text{per } x \in \Gamma_i \\ \Psi_i v(x) = 0 & \text{per } x \in \Gamma - \Gamma_i \end{cases}$$

e quindi $\Psi_i v \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

---

(11) $(\beta_i u)(\theta_i^{-1}(y))$ significa la funzione $\beta_i u$ calcolata nel punto $x = \theta_i^{-1}(y)$.

Di qui poichè $\mathcal{D}(\Gamma)$ è denso in $\mathcal{D}'(\Gamma)$, si ha il lemma.

Ciò premesso noi porremo la seguente

DEF. 2.3. *Per ogni s reale, $1 < p < +\infty$, indicheremo con $W^{s,p}(\Gamma)$ lo spazio delle distribuzioni u su Γ tali che per $i = 1, \dots, r$, $\Phi_i u$ appartenga a $W^{s,p}(R^{n-1})$, normalizzato da*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^{r} \| \Phi_i u \|^p_{W^{s,p}(R^{n-1})} \right)^{1/p}. \tag{2.11}$$

Si ottiene così uno spazio di BANACH, per il quale valgono le sèguenti proprietà

PROP. 2.8. *$\mathcal{D}(\Gamma)$ è denso in $W^{s,p}(\Gamma)$.*

Sia $u \in W^{s,p}(\Gamma)$; allora $\Phi_i u \in W^{s,p}(R^{n-1})$ e il suo supporto è interno a C_0. Poichè $\mathcal{D}(R^{n-1})$ è denso in $W^{s,p}(R^{n-1})$ (Prop. 1.2 per $s \geq 0$, per $s < 0$ segue con ragionamento noto dalla riflessività di $W^{s,p}(R^{n-1})$) si può approssimare $\Phi_i u$ con una successione di funzioni $\psi_{i,m} \in \mathcal{D}(R^{n-1})$, aventi supporto contenuto in C_0. Poniamo allora

$$\varphi_{i,m}(x) = \begin{cases} \Psi_{i,m}(\theta_i(x)) & \text{per } x \in \Gamma_i \\ 0 & \text{per } x \in \Gamma - \Gamma_i . \end{cases}$$

Allora $\varphi_{i,m}(x) \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Inoltre $\varphi_{i,m}(x) \to \beta_i u$ in $W^{s,p}(\Gamma)$. Infatti per $j = 1, \dots, r$ si ha, tenuto conto che θ_i e θ_j coincidono su $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$: $\Phi_j \varphi_{i,m}(y) = (\beta_j \varphi_{i,m})(\theta_j^{-1}(y)) = \beta_j(\theta_j^{-1}(y))\varphi_{i,m}(\theta_i^{-1}(y)) = \beta_j(\theta_j^{-1}(y))\ \psi_{i,m}(y) \to \beta_i(\theta_j^{-1}(y))\ \Phi_i u(y) = \Phi_j(\beta_i u)$ in $W^{s,p}(R^{n-1})$.

Si può anche vedere che lo spazio $W^{s,p}(\Gamma)$ non dipende dal ricoprimento $\{\mathcal{O}_i\}$, dagli omeomorfismi $\{\theta_i\}$ e dalla partizione dell'unità $\{\beta_i\}$ introdotti, nel senso che al variare di questi elementi si ottengono spazi di BANACH isomorfi, le diverse norme (2.11) essendo equivalenti; precisamente

PROP. 2.9. *Se $\{\mathcal{O}_i^*\}$, $\{\theta_i^*\}$, $\{\beta_i^*\}$ sono rispettivamente un ricoprimento di Γ, un sistema di omeomorfismi di $\mathcal{O}_i^*$ su C e una partizione dell'unità associata ai $\Gamma_i^* = \Gamma \cap \mathcal{O}_i^*$, verificanti le stesse ipotesi degli $\{\mathcal{O}_i\}$, $\{\theta_i\}$ e $\{\beta_i\}$, allora si ha che $W^{s,p}(\Gamma)$ e l'analogo spazio $W^{s,p}(\Gamma)^*$ definito attraverso $\{\mathcal{O}_i^*\}$, $\{\theta_i^*\}$ e $\{\beta_i^*\}$ sono isomorfi, come spazi di Banach.*

Per la Prop. 2.8, basterà verificare che la norma (2.11) e l'analoga relativa a $W^{s,p}(\Gamma)^*$ sono equivalenti, calcolate su $\mathcal{D}(\Gamma)$; cioè che se $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$ è

$$c' \| u \|_{W^{s,p}(\Gamma)^*} \leq \| u \|_{W^{s,p}(\Gamma)} \leq c \| u \|_{W^{s,p}(\Gamma)^*}$$

con c e c' costanti positive; la verifica si può effettuare direttamente, tenuto conto delle proprietà degli omeomorfismi θ_i e θ_i^*.

Si ha ancora

PROP. 2.10. $(W^{s,p}(\Gamma))' = W^{-s,p'}(\Gamma), \qquad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

DIMOSTRAZIONE. Mettiamo in evidenza anzitutto alcune formule. Osserviamo che per $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e $v \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ la (2.9) si può scrivere anche nella forma

$$\langle \Phi_i u, v \rangle = \langle u, \Psi_i v \rangle . \tag{2.12}$$

L'applicazione $v \to \Psi_i v$, definita dalla (2.10) da $\mathcal{D}(R^{n-1})$ in $\mathcal{D}(\Gamma)$, si può poi, con lo stesso ragionamento fatto per il Lemma 2.2, prolungare per continuità in una applicazione lineare e continua da $\mathcal{D}'(R^{n-1})$ in $\mathcal{D}'(\Gamma)$, indicandola ancora con Ψ_i; e la (2.12) viene così ad aver senso anche per $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ e $v \in \mathcal{D}'(R^{n-1})$.

Si ha poi, per $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e i fissato, $\langle \beta_i u, \varphi \rangle = \langle \beta_i u, \tilde{\beta}_i \varphi \rangle$, dove $\tilde{\beta}_i$ è ancora una funzione di $\mathcal{D}(\Gamma)$ a supporto contenuto in Γ_i e inoltre è uguale ad 1 nel supporto di β_i; allora è

$$< \beta_i u, \varphi > = < \beta_i u, \tilde{\beta}_i \varphi > = \int_\Gamma \beta_i(x)\, u(x)\, \tilde{\beta}_i(x)\, \varphi(x)\, dx = \tag{2.13}$$

$$\int_{C_0} (\beta_i u)(\theta_i^{-1}(y))\, (\tilde{\beta}_i \varphi)(\theta_i^{-1}(y))\, \tilde{J}_i(y)\, dy = < \Phi_i u, \tilde{\Phi}_i \varphi >$$

dove

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_i \varphi = (\tilde{\beta}_i \varphi)(\theta_i^{-1}(y))\, \tilde{J}_i(y) & \text{in } C_0 \\ \tilde{\Phi}_i \varphi = 0 & \text{in } C_0 - R^{n-1} \end{cases}$$

essendo $\tilde{J}_i(y)$ funzione indefinitamente differenziabile in C_0 e ivi diversa da zero.

L'applicazione $\varphi \to \tilde{\Phi}_i \varphi$ è dunque lineare da $\mathcal{D}(\Gamma)$ in $\mathcal{D}(R^{n-1})$. D'altra parte si ha

$$\tilde{\Phi}_i \varphi = \tilde{\Phi}_i \Big(\sum_{j=1}^{r} \beta_j \varphi\Big) = \sum_{j=1}^{r} \tilde{\Phi}_i (\beta_j \varphi) \qquad \text{e, per } y \in C_0:$$

$$\tilde{\Phi}_i(\beta_j \varphi) = \tilde{\beta}_i(\theta_i^{-1}(y)) \cdot (\beta_j \varphi)(\theta_i^{-1}(y)) \cdot \tilde{J}_i(y) = \tilde{\beta}_i(\theta_i^{-1}(y)) \cdot \tilde{J}_i(y) \cdot (\beta_j \varphi)(\theta_j^{-1}(y)) =$$

$$= \tilde{\beta}_i(\theta_i^{-1}(y)) \cdot \tilde{J}_i(y) \cdot \Phi_j \varphi = \gamma(y) \cdot \Phi_j \varphi \qquad \text{con } \gamma \in \mathcal{D}(R^{n-1}).$$

E dunque di qui, prima per s intero e poi per interpolazione (Prop. 1.4) per s reale, si ottiene la proposizione:

a) *l'applicazione* $\varphi \to \tilde{\Phi}_i \varphi$ *si può prolungare in un'applicazione, ancora indicata con* $\tilde{\Phi}_i$, *lineare e continua di* $W^{s,p}(\Gamma)$ *in* $W^{s,p}(R^{n-1})$.

Osserviamo ancora che le applicazioni Φ_j e Ψ_i, $j, i = 1, \dots, r$ soddisfano alla proposizione:

b) $u \to \Phi_j(\Psi_i u)$ *è lineare e continua da* $W^{s,p}(R^{n-1})$ *in sè*.

Infatti per $u \in D(R^{n-1})$ dalle (2.8) e (2.10) si ha che $\Phi_j(\Psi_i u)$ nei punti y di R^{n-1} in cui non è nullo risulta uguale a $[\beta_j(x) \cdot \beta_i(x) \cdot u(\theta_i(x)) \cdot J_i(x)]_{x=\theta_j^{-1}(y)} = (\beta_j \beta_i J_i)(\theta_j^{-1}(y)) \cdot u(y)$; e dunque si ha

$$\Phi_j(\Psi_i u) = \varphi(y) \cdot u(y) \text{ con } \varphi(y) \in \mathcal{D}(R^{n-1}).$$

Di qui si ricava subito, prima per s intero e poi per interpolazione (Prop. 1.4) per s reale qualunque, la proposizione enunciata in b).

Dimostrate così a) e b), veniamo alla dimostrazione della Prop. 2.10. Sia anzitutto $u \to L(u)$ un funzionale lineare e continuo su $W^{s,p}(\Gamma)$; poichè questo spazio è munito della topologia meno fine che rende l'applicazione $u \to \Phi_i u$ continua da $W^{s,p}(\Gamma)$ in $W^{s,p}(R^{n-1})$, si ha per un noto teorema

$$L(u) = \sum_{i=1}^{r} < T_i, \Phi_i u > \text{ con } T_i \in W^{-s,p'}(R^{n-1})$$

Supposto $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e applicando la (2.12), si ha allora

$$L(u) = \sum_{i=1}^{r} < \Psi_i T_i, u >$$

da cui, per la Prop. 2.8, possiamo identificare L con $\sum_{i=1}^{r} \Psi_i T_i$: e allora $\Phi_j L = \sum_{i=1}^{r} \Phi_j \Psi_i T_i$ dove, per la proposizione b) $\Phi_j \Psi_i T_i \in W^{-s,p'}(R^{n-1})$ e dunque $L \in W^{-s,p'}(\Gamma)$.

Viceversa se $L \in W^{-s,p'}(\Gamma)$ si ha per $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e per la (2.13)

$$< L, \varphi > = \sum_{i=1}^{r} < \beta_i L, \tilde{\beta}_i \varphi > = \sum_{i=1}^{r} < \Phi_i L, \tilde{\Phi}_i \varphi >$$

da cui, per la proposizione a), si ricava che $L \in (W^{s,p}(\Gamma))'$ e inoltre risulta anche che, se $L \to 0$ in $W^{-s,p'}(\Gamma)$, allora $L \to 0$ anche in $(W^{s,p}(\Gamma))'$.

Dunque algebricamente $W^{-s,p'}(\Gamma)$ coincide con $(W^{s,p}(\Gamma))'$, essendo inoltre il primo spazio munito di una topologia più forte del secondo; per il teorema del grafico chiuso ne segue che $W^{-s,p'}(\Gamma) = (W^{s,p}(\Gamma))'$ anche topologicamente.

PROP. 2.11 — *Per s intero qualunque si ha*

$$T(p,\alpha\,;\,W^{s+1,p}(\Gamma),\,W^{s,p}(\Gamma)) = W^{s+1-\theta,p}(\Gamma)$$

$1 < p < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$.

Infatti si consideri per $i = 1, \dots, r$ l'applicazione $u \to \Phi_i\, u$; essa è ovviamente per la stessa definizione 2.3 lineare e continua da $W^{s,p}(\Gamma)$ in $W^{s,p}(R^{n-1})$ e da $W^{s+1,p}(\Gamma)$ in $W^{s+1,p}(R^{n-1})$; dunque per il teor. 1.1 e la Prop. 1.4 (applicata allo spazio R^{n-1} anzichè a R^n; si noti che s è intero), si ha che essa è lineare e continua da $T\,(p,\alpha\,;\,W^{s+1,p}(\Gamma),\,W^{s,p}(\Gamma))$ in $W^{s+1-\theta,p}(R^{n-1})$.

E questo per la def. 2.3 equivale al fatto che

$$T(p,\alpha\,;\,W^{s+1,p}(\Gamma),\,W^{s,p}(\Gamma)) \subset W^{s+1-\theta,p}(\Gamma). \tag{2.14}$$

Passando agli spazi duali, si ottiene dal teor. 1.2,

$$W^{-s-1+\theta,p'}(\Gamma) \subset T(p',\,-\,\alpha\,;\,W^{-s,p'}(\Gamma),\,W^{-s-1,p'}(\Gamma))$$

e poichè s è di segno qualunque e così pure p' può essere un qualunque numero reale > 1, si ha l'inclusione inversa della (2.14) e la Proposizione è dimostrata

2.6. Partendo dalle considerazioni precedenti si possono ottenere dei risultati del tipo del « teorema di SOBOLEV » per le derivate frazionarie. Diamone un esempio brevemente (anche se ciò non ci servirà nel seguito); se $n > q$ il teorema di SOBOLEV dice che $W^{1,p}(R^n) \subset L^q(R^n)$ con $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$; dunque l'applicazione identica è lineare e continua da $W^{1,p}(R^n)$ in $L^q(R^n)$ e, naturalmente, da $W^{0,p}(R^n)$ in $L^p(R^n)$. Perciò essa è anche lineare e continua da $T(p,\alpha\,;\,W^{1,p}(R^n);\,W^{0,p}(R^n)) = W^{1-\theta,p}(R^n)$ in $T\,(p,\alpha\,;\,L^q(R^n),\,L^p(R^n))$.
Ma da [26] segue che $\mathrm{T}\,(p,\alpha\,;\,L^q(R^n), L^p(R^n)) \subset L^{q(\theta)}(R^n)$, dove è $\dfrac{1}{q\,(\theta)} = \dfrac{1-\theta}{q} + \dfrac{\theta}{p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1-\theta}{n}$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$, dunque si ha

$$W^{1-\theta,p}(R^n) \subset L^{q(\theta)}(R^n)\,; \qquad \frac{1}{q\,(\theta)} = \frac{1}{p} - \frac{1-\theta}{n}.$$

Noi non insisteremo però ulteriormente su questo punto.

n. 3. Gli spazi $H^{s,p}(R^n)$

3.1 — Abbiamo già ricordato nel n. 1.3 che per $p=2$ gli spazi $W^{s,2}(R^n)$ possono essere definiti anche attraverso l'uso della trasformata di Fourier, con notevoli vantaggi. L'uso della trasformata di Fourier si può estendere anche al caso $p \neq 2$, ma gli spazi che così vengono ottenuti non coincidono in generale con gli spazi $W^{s,p}(R^n)$, tuttavia anche questi spazi hanno interesse nelle applicazioni e sono infatti già stati in parte studiati (v. ad es. [25]). Riprendendo dunque una definizione in parte introdotta nel n. 1.3 e usando lo stesso simbolismo ivi introdotto, poniamo la

DEF. 3.1. *Indicheremo con $H^{s,p}(R^n)$, $1<p<\infty$, s reale, lo spazio (di Banach) delle distribuzioni temperate u tali che*

$$\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}u) \in L^p(R^n)$$

normalizzato da

$$\|u\|_{H^{s,p}(R^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}u)\|_{L^p(R^n)} \tag{3.1}$$

OSSERVAZIONE 3.1. Per $p=2$ si ha che $H^{s,2}(R^n)$ è isomorfo a $W^{s,2}(R^n)$ per ogni s.

OSSERVAZIONE 3.2. Come già si è ricordato nel n. 1.1, anche per s intero e $p>1$ $H^{s,p}(R^n)$ è isomorfo a $W^{s,p}(R^n)$, in virtù del teorema di MIHLIN [33] sui moltiplicatori nello spazio $\mathcal{F}L^p(R^n)$; ma ciò non è più vero in generale per s qualunque in virtù di un esempio già citato di KAHANE e di STEIN.

Si ha anche la seguente proposizione.

PROP. 3.1. *$\mathcal{D}(R^n)$ è denso in $H^{s,p}(R^n)$, $s \geq 0$.*

Sia infatti una successione di « regolarizzanti » α_μ, $\mu = 1, 2 \ldots$ (v. n. 1.2); allora $u * \alpha_\mu \in \mathcal{D}_{L^p}$. Dimostriamo anzitutto che $u * \alpha_\mu \to u$ in $H^{s,p}(R^n)$; ciò equivale a dimostrare la

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}(u * \alpha_\mu) \to (1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}u \quad \text{in } \mathcal{F}L^p(R^n). \tag{3.2}$$

Ora $(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}(u*\alpha_\mu) = ((1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}u)(\mathcal{F}\alpha_\mu) = v * \alpha_\mu$ dove $v = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}u)$, con $v \in L^p(R^n)$. E perciò $v * \alpha_\mu \to v$ in $L^p(R^n)$, cioè la (3.2).

Basta dunque approssimare in $H^{s,p'}(R^n)$ $u * \alpha_\mu$ mediante una successione di funzioni di $\mathcal{D}(R^n)$, cosa che è possibile, poichè $\mathcal{D}(R^n)$ è denso in $\mathcal{D}_{L^p}$, e dunque esiste una successione di funzioni di $\mathcal{D}(R^n)$ che converge a $u * \alpha_\mu$ in $\mathcal{D}_{L^p}$ e quindi a maggior ragione in $H^{s,p}(R^n)$.

Si ha anche con ragionamenti noti

PROP. 3.2. $(H^{s,p}(R^n))' = H^{-s,p'}(R^n)$; $\qquad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

PROP. 3.3. $H^{s_0,p}(R^n) \subset H^{s_1,p}(R^n)$; *$s_1 < s_0$ il primo spazio essendo denso nel secondo.*

3.2. Alcuni recenti risultati di interpolazione (v. [11] e [25] ([12])), fondati, a differenza di quelli richiamati nel n. 1, su metodi di funzioni di variabile complessa, si rivelano utili nel trattare gli $H^{s,p}(R^n)$.

Siano anche ora X_0 e X_1 due spazi di Banach e $\mathcal{A}$ uno spazio vettoriale topologico nelle stesse ipotesi del n. 1.1. Indichiamo con $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ lo spazio delle funzioni della variabile complessa $z = v + iw$, $z \to f(z)$, olomorfe in $0 < v < 1$ a valori in $X_0 + X_1$, continue e limitate in $0 \leq v \leq 1$, a valori in $X_0 + X_1$, tali che $f(iw) \in X_0$, $w \to f(iw)$ essendo continua da R^1 in X_0, e $f(1 + iw) \in X_1$, $w \to f(1 + iw)$ essendo continua da R^1 in X_1, con

$$\|f\|_{\mathcal{H}(X_0,X_1)} = \max\left[\sup_w \|f(iw)\|_{X_0}, \sup_w \|f(1+iw)\|_{X_1}\right] < \infty. \tag{3.3}$$

Normalizzato da (3.3), $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ è uno spazio di BANACH. Poniamo poi per $f \in \mathcal{H}(X_0, X_1)$

$$Lf = \int_0^1 f(v)\, d\mu(v) \tag{3.4}$$

ove $d\mu$ è una misura su $[0, 1]$ o una distribuzione su $]0, 1[$ a supporto compatto. Risulta così definita un'applicazione $f \to Lf$ lineare e continua da $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ in $X_0 + X_1$.

DEF. 3.2. *Indichiamo con* $[X_0, X_1, \mu]$ *lo spazio immagine di* $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ *per mezzo di* L, *normalizzato da*

$$\|u\|_{[X_0,X_1,\mu]} = \inf_{Lf=u} \|f\|_{\mathcal{H}(X_0,X_1)}. \tag{3.5}$$

Si ha così uno spazio di Banach.

Siano ora Y_0, Y_1 e $\mathcal{B}$ spazi analoghi agli spazi X_0, X_1 e $\mathcal{A}$ e supponiamo inoltre che $X_0 \cap X_1$ sia denso in X_0 e in X_1 e sia $\mathcal{T}$ l'operatore lineare già introdotto nel n. 1.1 Si osservi in più che $\mathcal{T}$ è prolungabile per continuità in un operatore lineare e continuo da $X_0 + X_1$ in $Y_0 + Y_1$. Ciò posto si ha il seguente teorema di interpolazione (v. [11] e [25])

TEOR. 3.1. *Nelle ipotesi fatte sugli spazi* X_i, Y_i *e su* $\mathcal{T}$, *allora* $\mathcal{T}$ *è anche lineare e continuo da* $[X_0, X_1, \mu]$ *in* $[Y_0, Y_1, \mu]$. *Se in particolare si prende* $\mu = \delta(\theta)$, *misura di Dirac concentrata nel punto* θ *dell'intervallo* $]0, 1[$, *la norma di* $\mathcal{T}$ *considerata da* $[X_0, X_1, \delta(\theta)]$ *in* $[Y_0, Y_1, \delta(\theta)]$ *è maggionata da* $c_0^{1-\theta} c_1^{\theta}$ (c_0 *e* c_1 *costanti che compaiono nella* (1.4)).

Il teor. 3.1 si può applicare a $X_0 = H^{s_0,p}(R^n)$ e $X_1 = H^{s_1,p}(R^n)$ e si

---

([12]) A dire il vero l'interpolazione negli spazi $H^{s,p}(R^n)$, $p \neq 2$, mediante i metodi di variabile complessa è stata ottenuta anteriormente a [11] e a [25] da ARONSZAJN e LIONS, 1959 (non pubblicato, si utilizzava il metodo di ARONSZAJN per dimostrare il risultato di [20]) e annunciato indipendentemente da A. P. CALDERON, Conferenza di Berkeley, 1960 e S. G. KREIN [19].

dimostra allora il seguente risultato ([11], [25])

PROP. 3.4. $[H^{s_0,p}(R^n),\ H^{s_1,p}(R^n),\ \delta(\theta)] = H^{(1-\theta)s_0+\theta s_1,p}(R^n)$

OSSERVAZIONE. I risultati corrispondenti per $p=1$ e $p=\infty$ non sono probabilmente veri (in ogni caso il metodo di dimostrazione di [25] non è più valido). Sarebbe interessante sapere se il risultato di interpolazione corrispondente è vero o no; per es. se $\mathcal{C}$ è un operatore lineare e continuo da $L^\infty(R^n)$ in sè e da $H^{2,\infty}(R^n)$ in sè, lo è anche da $H^{1,\infty}(R^n)$ in sè?

3.3. Veniamo ora ad un confronto degli spazi $H^{s,p}(R^n)$ con i $W^{s,p}(R^n)$. Si ha anzitutto il

LEMMA 3.1. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *risulta algebricamente e topologicamente*

$$H^{1-\theta+\varepsilon,p}(R^n) \subset W^{1-\theta,p}(R^n) \qquad 0<\theta<1,\ 1<p<+\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Basterà limitarci a dimostrare il lemma per $\varepsilon < \theta$, poichè $H^{s_0,p}(R^n) \subset H^{s_1,p}(R^n)$ se $s_1 < s_0$.

Poniamo $\lambda = 1-\theta+\varepsilon$ e sia dunque $u \in H^{\lambda,p}(R^n)$ e perciò $(1+|\xi|^2)^{\lambda/2}\mathcal{F}u \in \mathcal{F}L^p(R^n)$. Dimostriamo che esiste $f(t)$ tale che

$$t^\alpha f(t) \in L^p(0,1; H^{1,p}(R^n)) \tag{3.6}$$

$$t^\alpha \frac{df}{dt} \in L^p(0,1; H^{0,p}(R^n)) \tag{3.7}$$

$$f(0) = u. \tag{3.8}$$

Supposta esistente $f(t)$, moltiplichiamola per una funzione $b(t)$ derivabile con continuità per $0 \le t < +\infty$, uguale a zero per $t \ge 1$ e ad 1 per $0 \le t \le \frac{1}{2}$, e poniamo $g(t) = b(t)f(t)$ per $0 \le t \le 1$, e $g(t) = 0$ per $t > 1$. Allora $t^\alpha g(t) \in L^p(0,\infty; H^{1,p}(R^n))$, $t^\alpha \frac{dg}{dt} \in L^p(0,\infty; H^{0,p}(R^n))$ e $g(0) = f(0) = u \in W^{1-\theta,p}(R^n)$; di qui segue: $H^{\lambda,p}(R^n) \subset W^{1-\theta,p}(R^n)$. Dimostriamo dunque l'esistenza della $f(t)$.

Poniamo perciò

$$w(t,\xi) = \exp(-t(1+|\xi|^2)^{1/2})\mathcal{F}u$$

$$f(t,x) = \mathcal{F}_\xi^{-1}(w(t,\xi))$$

dove con $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ indichiamo l'antitrasformata di Fourier rispetto alle sole variabili $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Così definita, $f(t,x)$ verifica senz'altro la (3.8).

Per dimostrare la (3.6) basterà far vedere che

$$t^\alpha w \in L^p(0,1; \mathcal{F}H^{1,p}(R^n)) \tag{3.9}$$

dove $\mathcal{F}H^{1,p}(R^n)$ indica lo spazio delle trasformate di Fourier delle $u \in H^{1,p}(R^n)$.

La (3.9) equivale alla

$$(3.10) \qquad t^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{1/2}\, w(t,\xi) \in L^p(0,1, \mathcal{F}L^p(R^n))$$

Quanto alla (3.7) essa si riconduce alla

$$-\, t^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{1/2} \exp(-t(1+|\xi|^2)^{1/2})\, \mathcal{F}u \in L^p(0,1\,; \mathcal{F}L^p(R^n))$$

cioè anche essa alla (3.10). Resta dunque da dimostrare solo la (3.10). Ora

$$t^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{1/2}\, w(t,\xi) = t^{\alpha} M_t(\xi)(1+|\xi|^2)^{\lambda/2}\, \mathcal{F}u$$

dove $M_t(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1-\lambda}{2}} \exp(-t(1+|\xi|^2)^{1/2})$.

Dimostriamo allora anzitutto che $M_t(\xi)$ è un moltiplicatore su $\mathcal{F}L^p(R^n)$ di norma $\leq ct^{-1}$ (c costante); basterà per questo far uso del teorema di Mihlin già ricordato [33], cioè dimostrare che

$$(3.11) \qquad |\xi|^k\, |D^k M_t(\xi)| \leq ct^{-1} \qquad \text{per ogni } k=(k_1,\dots,k_n) \text{ con } |k|\leq n$$

la derivazione D^k essendo intesa rispetto alle variabili $\xi_1,\dots,\xi_n$. Ora si ha

$$|\xi|^k\, |D^k M_t(\xi)| \leq c \exp(-t(1+|\xi|^2)^{1/2} \{(1+|\xi|^2)^{\frac{1-\lambda}{2}} + \cdot\, t(1+|\xi|^2)^{\frac{1-\lambda+1}{2}} + \\ + \dots + t^{|k|}(1+|\xi|^2)^{\frac{1-\lambda+|k|}{2}}\}$$

e d'altra parte con calcoli elementari si ha, tenuto conto che, poichè $\varepsilon<\theta$, è $\lambda-1<0$,

$$\sup_{\xi\in R^n} [t^r(1+|\xi|^2)^{\frac{1-\lambda+r}{2}} \exp(-t(1+|\xi|^2)^{1/2})] \leq ct^{\lambda-1}$$

Dunque la (3.11) è vera e quindi $M_t(\xi)$ è un moltiplicatore su $\mathcal{F}L^p(R^n)$ di norma $\leq ct^{-1}$.

Ne segue che

$$\| t^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{1/2} w(t,\xi) \|_{\mathcal{F}L^p(R^n)} \leq c\, t^{\alpha+\lambda-1} \| u \|_{H^{\lambda,p}(R^n)}\,.$$

Ma si ha che $\int_0^1 t^{(\alpha+\lambda-1)p}\, dt < \infty$, poichè $\lambda > 1-\theta = 1-\alpha-\dfrac{1}{p}$ e quindi $(\alpha+$ $+\lambda-1)p<1$. Dunque si ha

$$(3.12) \qquad \left(\int_0^1 \| t^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{1/2} w(t,\xi)\|^p_{\mathcal{F}L^p(R^n)}\, dt\right)^{1/p} \leq c' \| u \|_{H^{\lambda,p}(R^n)}$$

Resta così dimostrata la (3.10) e dunque $H^{\lambda,p}(R^n) \subset W^{1-\theta,p}(R^n)$ algebricamente e dalla dimostrazione stessa data, in virtù della (3.12), si ha che l'inclusione è anche topologica.

Dimostriamo ora il

LEMMA 3.2. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *risulta algebricamente e topologicamente*

$$W^{1-\theta,p}(R^n) \subset H^{1-\theta-\varepsilon,p}(R^n) \qquad 0 < \theta < 1, \qquad 1 < p < +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri l'operatore $\mathcal{G}^{(1)}$

$$\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{1/2}\mathcal{F}).$$

Esso risulta un isomorfismo di $W^{1,p}(R^n)$ su $W^{0,p}(R^n)$ e di $W^{0,p}(R^n)$ su $W^{-1,p}(R^n)$. E allora in virtù dell'osservazione 3.2, del teor. 3.1 e della Prop. 3.4, esso è anche un isomosfismo di $H^{1-\theta+\varepsilon,p}(R^n)$ *su* $H^{-\theta+\varepsilon,p}(R^n)$, se si suppone $\varepsilon < 1 - \theta$.

Analogamente per il teor. 1.1, il teor. 1.2 e la def. 1.4 esso è un isomorfismo di

$$T(p, \alpha; W^{1,p}(R^n), W^{0,p}(R^n)) = W^{1-\theta,p}(R^n) \text{ su } T(p, \alpha; W^{0,p}(R^n), W^{-1,p}(R^n)) =$$

$$= (T(p', -\alpha; W^{1,p'}(R^n), W^{0,p'}(R^n))' = (W^{1-(1/p'-\alpha),p'}(R^n))' = W^{-\theta,p}(R^n).$$

Ne segue in virtù del lemma 3.1 che

$$H^{-\theta+\varepsilon,p}(R^n) \subset \dot{W}^{-\theta,p}(R^n)$$

relazione che, una volta dimostrata per $\varepsilon < 1 - \theta$, vale anche per ogni ε. Passando allora agli spazi duali si ha

$$H^{\theta-\varepsilon,p'}(R^n) \supset W^{\theta,p'}(R^n),$$

cioè il lemma 3.2, quando si scambi nell'enunciato θ con $1 - \theta$ e p con p'. c. v. d.

Dai lemmi precedenti si può infine ricavare il seguente teorema che precisa le relazioni tra gli spazi $W^{s,p}(R^n)$ e $H^{s,p}(R^n)$:

TEOR. 3.2. *Per ogni* $\varepsilon > 0$, s *reale e* $1 < p < +\infty$ *si ha*

$$H^{s+\varepsilon,p}(R^n) \subset W^{s,p}(R^n) \subset H^{s-\varepsilon,p}(R^n)$$

algebricamente e topologicamente [12bis].

[12bis] Durante la correzione delle bozze abbiamo saputo che un risultato più preciso è stato ottenuto da E. M. STEIN (in corso di stampa), si veda già [46 ter]. Per un confronto dei $W^{s,p}(R^n)$ con altri spazi analoghi si veda anche [11 bis].

DIMOSTRAZIONE. 1) Supponiamo $s \geq 0$. Dimostriamo dapprima che $H^{s+\varepsilon,p}(R^n) \subset W^{s,p}(R^n)$. Se $u \in H^{s+\varepsilon,p}(R^n)$, allora $D^k u \in L^p(R^n)$ per $|k| \leq s + \varepsilon$ e quindi in particolare per $|k| \leq [s]$. Inoltre $D^k u \in H^{s+\varepsilon-[s],p}(R^n)$ per $|k| = [s]$ e quindi, per il lemma 3.1, $D^k u \in W^{s-[s],p}(R^n)$ dunque $u \in W^{s,p}(R^n)$ e $H^{s+\varepsilon,p}(R^n) \subset W^{s,p}(R^n)$.

Viceversa se $u \in W^{s,p}(R^n)$, allora $u \in H^{[s],p}(R^n)$ e, per il lemma 3.2, $D^k u \in H^{s-[s]-\varepsilon,p}(R^n)$, dunque $u \in H^{s-\varepsilon,p}(R^n)$ e $W^{s,p}(R^n) \subset H^{s-\varepsilon,p}(R^n)$.

2) Se è invece $s < 0$ il risultato si ottiene immediatamente dal caso precedente passando agli spazi duali.

OSSERVAZIONE. Lo spazio $W^{s,p}(R^n)$ è dunque *contiguo* a $H^{s,p}(R^n)$ secondo una definizione introdotta di recente da GAGLIARDO [15 bis].

n. 4. Gli spazi $H^{s,p}(\Omega)$ e $H^{s,p}(\Gamma)$.

4.1. La definizione degli spazi $H^{s,p}(\Omega)$ va ora fatta tenendo conto delle proprietà viste per gli $H^{s,p}(R^n)$. Porremo dunque la

DEF. 4.1. *Per m intero positivo fissato e $s = (1 - \theta)m$, $0 < \theta < 1$, definiamo*

$$H^{s,p}(\Omega) = [W^{m,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega); \delta(\theta)]$$

dove [...] va inteso nel senso della def. 3.2.

$H^{s,p}(\Omega)$ risulta così definito per ogni s reale ≥ 0. Come ora vedremo, questa definizione è corretta, nel senso che, in condizioni di sufficiente regolarità per Ω, in particolare nelle ipotesi da noi fatte su Ω, non dipende da m e, se s è intero, $H^{s,p}(\Omega)$ coincide con $W^{s,p}(\Omega)$, definito direttamente attraverso le derivate. Si ha infatti la

PROP. 4.1. *$H^{s,p}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a Ω delle u di $H^{s,p}(R^n)$ per ogni $s \geq 0$.*

La dimostrazione è di tipo noto e analoga a quella della Prop. 2.2 o 2.3. Anzitutto esiste un operatore P tale che $P \in \mathcal{L}(W^{m,p}(\Omega); W^{m,p}(R^n))$ e $P \in \mathcal{L}(L^p(\Omega); L^p(R^n))$ e che $Pu = u$ *q.-d.* in Ω; allora per il teor. 3.1 e la Prop. 3.4, $P \in \mathcal{L}(H^{s,p}(\Omega); H^{s,p}(R^n))$.

Inversamente l'operatore di restrizione ad Ω, R_Ω, appartiene a $\mathcal{L}(W^{m,p}(R^n); W^{m,p}(\Omega))$ e a $\mathcal{L}(L^p(R^n); L^p(\Omega))$ e dunque per il teor. 3.1 e la Prop. 3.4 appartiene a $\mathcal{L}(H^{s,p}(R^n); H^{s,p}(\Omega))$ c. v. d.

Ne segue in particolare, tenuto conto dell'osservazione 3.2, la

PROP. 4.2. *Per s intero ≥ 0, $H^{s,p}(\Omega)$ è isomorfo a $W^{s,p}(\Omega)$.*

Con dimostrazione del tutto analoga a quella della Prop. 2.5, ricordando la Prop. 3.1, si ha

PROP. 4.3. *Lo spazio $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $H^{s,p}(\Omega)$, $s \geq 0$, $1 < p < +\infty$.*

4.2. *La definizione di $H^{s,p}(\Omega)$ per s reale qualunque si ottiene in modo abituale.* Anzitutto si pone

$$\dot{H}_0^{s,p}(\Omega) = \text{chiusura di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } H^{s,p}(\Omega), \text{ per } s \geq 0, \quad 1 < p < +\infty.$$

E poi

$$H^{s,p}(\Omega) = (H_0^{-s,p'}(\Omega))' \quad \text{per} \quad s < 0, 1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Per s *intero* si ha ancora: $H^{s,p}(\Omega)$ è isomorfo a $W^{s,p}(\Omega)$.

4.3. Con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel n. 2.5 si definiscono poi, riportandoli mediante un sistema di « carte locali » agli spazi $H^{s,p}(R^{n-1})$, gli spazi $H^{s,p}(\Gamma)$ per s reale e $1 < p < +\infty$. Anche ora si ha che $H^{s,p}(\Gamma)$ è isomorfo a $W^{s,p}(\Gamma)$ per s intero. E così pure: $\mathcal{D}(\Gamma)$ è denso in $H^{s,p}(\Gamma)$; $H^{s,p}(\Gamma) \subset H^{s',p}(\Gamma)$ per $s' < s$; $(H^{s,p}(\Gamma))' = H^{-s,p'}(\Gamma)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

n. 5. **Proprietà di tracce degli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ e $H^{s,p}(\Omega)$.**

5.1. È noto (v. ad es. [37], [38], [44], [3], [22 bis],...) che per $p = 2$ e $s > \frac{1}{2}$ si possono definire per le funzioni $u \in W^{s,2}(\Omega)$ le tracce su Γ di u e delle sue derivate fino all'ordine j, purchè sia $s - j - \frac{1}{2} > 0$. Questi risultati sono poi stati estesi anche al caso $p \geq 1$ e $s = 1$ in [13] e al caso $p > 1$ e s intero ≥ 1 in [43]; e sono stati generalizzati in [21] agli spazi generali, mediante utilizzazione della teoria dei semigruppi (per $s = 1$, si veda [23]) e introducendo delle funzioni « peso t^α ». In [48] infine (si veda anche [30] e [46 bis]) essi sono generalizzati anche alle « derivate frazionarie » (i lavori [48] e [30] contengono anche risultati relativi alle derivate « ordinarie » nel caso di spazi con funzioni « peso », i risultati corrispondenti alla funzione « peso » t^α sono contenuti in quelli di [21]). Noi ricorderemo qui perchè ce ne serviremo nel seguito, dapprima i risultati relativi alle derivate ordinarie (s intero, se $p \neq 2$) e poi quelli relativi alle derivate « frazionarie » (s qualunque e p qualunque). Se τ è un numero reale > 0 indicheremo con $[\tau]^-$ il massimo intero ≥ 0 *inferiore* a τ.

TEOR. 5.1. *Sia s reale $> \frac{1}{2}$ e $p = 2$ oppure s intero > 0 e p reale > 1. Per $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ si ponga $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ (ν normale interna a Γ; $\gamma_0 u = u$)* e $\vec{\gamma} u =$

$= [\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots \gamma_{[s-1/p]^-} u]$. *L'applicazione* $u \to \vec{\gamma} u$ *definita su* $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ *si può prolungare per continuità in una applicazione lineare e continua, che denoteremo ancora con* $u \to \vec{\gamma} u$, *di* $W^{s,p}(\Omega)$ *su*

$$\prod_{j=0}^{[s-1/p]^-} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)\,;$$

precisamente per ogni $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *si ha, per* $j = 0, \dots, \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$,

$$\| \gamma_j u \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} \leq c \, \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \qquad (c \text{ indipendente da } u) \tag{5.1}$$

e viceversa dati comunque $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$, *esiste una* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *tale che* $\gamma_j u = g_j$ *e*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c' \sum_{j=1}^{[s-1/p]^-} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} \qquad (c' \text{ indipendente dai } g_j). \tag{5.2}$$

Dal teor. 5.1 con ragionamento noto si ha inoltre

Prop. 5.1. *Nelle ipotesi del teor.* 5.1 , $W_0^{s,p}(\Omega)$ *coincide col sottospazio delle* u *di* $W^{s,p}(\Omega)$ *per cui è* $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \dots, \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$.

Ed ecco ora il teorema di Uspenskii [48] (si vedano anche [30] e [46 bis]):

Teor. 5.2. *Sia* p *reale* $e > 1$, s *reale* $e > \frac{1}{p}$ *e inoltre, se è* $p > 2$, *sia anche* $s - \frac{1}{p}$ *non intero; allora per ogni* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *esistono le tracce* $\gamma_j u$, $j = 0, \dots, \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$ *(definite in modo analogo a quello del* teor. 5.1) *e si ha*

$$\| \gamma_j u \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} \leq c \, \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \qquad (c \text{ indipendente da } u). \tag{5.3}$$

Viceversa sia p *reale* > 1, s *reale* $> \frac{1}{p}$ *e inoltre, se è* $p < 2$, *sia anche* $s - \frac{1}{p}$ *non intero, allora assegnati comunque* $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$, *esiste una* $u \in W^{s,p}(\Gamma)$ *tale che* $\gamma_j u = g_j$ *e*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c \sum_{j=0}^{[s-1/p]^-} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)}\,. \tag{5.4}$$

Sicchè per $s - \frac{1}{p}$ *non intero vale ancora il teor.* 5.1.

5.2. Per quanto riguarda gli spazi $H^{s,p}(\Omega)$ la situazione è più complessa, naturalmente nei casi in cui essi non coincidano con i $W^{s,p}(\Omega)$. Qualche risultato si potrebbe ottenere facendo uso della teoria di interpolazione partendo da s intero e dal teor. 5.1. — Avremo occasione di ritornare su ciò più avanti.

Capitolo II

IL PROBLEMA DI DIRICHLET NON OMOGENEO PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE

n. 6. Preliminari.

6.1. Nella ipotesi già fatta che Ω sia di classe C^∞, supponiamo ora che sia dato un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$ che scriveremo nella forma

$$Au = \sum_{|k|,|h|\leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh}(x)\, D^h u(x))$$

e *i cui coefficienti* a_{kh} *supporremo appartenere a* $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Inoltre supporremo A *ellittico* in Ω, cioè per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e ogni vettore ξ reale e $\neq 0$ sia

$$\sum_{|k|=|h|=m} a_{kh}(x)\, \xi^{k+h} \neq 0 \text{ [13]}$$

Se n è $= 2$ supporremo anche che A sia *propriamente ellittico* in $\bar{\Omega}$, cioè che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e ogni coppia di vettori reali ξ e ξ' linearmente indipendenti il polinomio nella variabile complessa τ: $\sum_{|k|=|h|=m} a_{kh}(x)(\xi + \tau\xi')^{k+h}$, abbia esattamente m radici con parte immaginaria positiva.

Siano poi

$$a(u, v) = \sum_{|k|,|h|\leq m} \int_\Omega a_{kh}\, D^h u\, \overline{D^k v}\, dx$$

la forma sesquilineare associata ad A e

$$A^* v = \sum_{|k|,|h|\leq m} (-1)^{|k|} D^k (\bar{a}_{hk}\, D^h v)$$

l'operatore aggiunto formale di A e

$$a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$$

la forma sesquilineare associata ad A^*.

---

(13) $\xi^{h+k} = \xi_1^{h_1+k_1} \cdots \xi_n^{h_n+k_n}$

6.2. Posto d'ora innanzi

$$(u, v) = \int_\Omega u\bar{v}\, dx$$

si hanno per u e $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ le seguenti *formule di* GREEN (v. ad es. [28], [5], [40])

$$(6.1) \qquad (Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma S_j u \cdot \overline{\gamma_j v}\, d\sigma$$

$$(6.2) \qquad (A^* v, u) = a^*(v, u) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma T_j v \cdot \overline{\gamma_j u}\, d\sigma$$

$$(6.3) \qquad (Au, v) - (u, A^* v) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma S_j u \cdot \overline{\gamma_j v}\, d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma \gamma_j u \cdot \overline{T_j v}\, d\sigma$$

dove $d\sigma$ indica l'elemento d'area su Γ e S_j e T_j sono opportuni operatori differenziali d'ordine $2m - j - 1$, tali che i sistemi

$$\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, S_{m-1}, \ldots, S_0\} \text{ e } \{\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \ldots, T_0\}$$

sono *sistemi normali* e *di* DIRICHLET nel senso di [5].

La (6.3) prolungata per continuità, in virtù delle Prop. 2.4 e del teor. 5.1, risulta valida anche per $u \in W^{2m,p}(\Omega)$ e $v \in W^{2m,p'}(\Omega)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Sempre dalla (6.3) si può ottenere anche la

$$(6.4) \qquad \langle Au, v \rangle - \langle u, \overline{A^* v} \rangle = 0 \quad \text{per} \quad u \in W_0^{m,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad v \in W_0^{m,p'}(\Omega).$$

Basta infatti scrivere la (6.3) per u e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$; per continuità, tenuto conto della definizione stessa di $W_0^{m,p}(\Omega)$ e del fatto che l'operazione di derivazione D^k è lineare e continua da $W^{m,p}(\Omega)$ in $W^{m-|k|,p}(\Omega)$ si ottiene la (6.4) dove i $\langle\, , \rangle$ stanno ad indicare rispettivamente la dualità tra $W^{-m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p'}(\Omega)$ e tra $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Sempre dalla (6.3) si può ottenere anche la

$$(6.5) \qquad \langle Au, \bar{v} \rangle - (u, A^* v) = - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma \gamma_j u \cdot \overline{T_j v}\, d\sigma$$

per ogni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $v \in W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$. Con un primo prolungamento per continuità si ottiene infatti dalla (6.3) la

$$(6.6)\qquad (Au, v) - (u, A^*v) = -\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\Gamma} \gamma_j u \cdot \overline{T_j v}\, d\sigma$$

per $u\, \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ e $v \in W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$. Dalla (6.6) si ottiene poi la (6.5) con un ulteriore prolungamento per continuità, $\langle , \rangle$ indicando la dualità tra $W^{-m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p'}(\Omega)$.

6.3. Si ha poi il

LEMMA 6.1. *Siano assegnati* $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$ *e* $\psi = \{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$ *con* $\varphi_j \in W^{j+1/p,p'}(\Gamma)$ *e* $\psi_j \in W^{2m-j-1/p,p'}(\Gamma)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $j = 0, \dots, m-1$: *esiste allora una funzione* w *appartenente a* $W^{2m,p'}(R^n)$ *tale che*

$$\begin{cases} \gamma_j w = \psi_j \\ S_j w = \varphi_j \end{cases} \qquad j = 0, \dots, m-1,$$

l'applicazione $\{\varphi, \psi\} \to w$ *essendo continua da*

$$\prod_{j=0}^{m-1} W^{j+1/p,p'}(\Gamma) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-j-1/p,p'}(\Gamma) \quad in \quad W^{2m,p'}(R^n).$$

Risultato analogo si ha scambiando S_j *con* T_j.

La dimostrazione si riconduce, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti per il *lemma* 1.1 di [28], a costruire una funzione $w \in W^{2m,p'}(R^n)$, tale che

$$\gamma_j w = f_j \in W^{2m-j-1/p,p'}(\Gamma), \qquad j = 0, \dots, 2m-1.$$

w dipendendo con continuità dagli f_j. Tale costruzione si fa subito utilizzando il teor. 5.1 e l'operazione $u \to Pu$ di prolungamento da Ω in R^n delle $u \in W^{2m,p'}(\Omega)$, già utilizzata più volte in condizioni analoghe nei n. 3 e 4.

n. 7. Risultati noti sul problema di Dirichlet e alcuni complementi ad essi.

7.1. Richiamiamo anzitutto il seguente notevole risultato sul problema di Dirichlet omogeneo di AGMON — DOUGLIS — NIRENBERG [2] e di BROWDER [9], [10];

TEOR. 7.1. *Nelle ipotesi fatte nel n. 6 su Au e su Ω, condizione necessaria e sufficiente perchè il problema di Dirichlet omogeneo*

$$\left\{\begin{array}{l} Au = f, \quad f \in L^p(\Omega), \qquad p > 1 \\ u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) \end{array}\right. \tag{7.1}$$

sia risolubile per ogni $f \in L^p(\Omega)$ è che il problema omogeneo aggiunto

$$\left\{\begin{array}{l} A^* w = 0 \\ w \in W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega), \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1 \end{array}\right. \tag{7.2}$$

abbia solo la soluzione $w = 0$. Soddisfatta questa condizione, allora $u \to Au$ è un isomorfismo di $W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$.

Mettiamo anche in evidenza esplicitamente alcune conseguenze immediate dei risultati di BROWDER e di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG (loco citato).

Supponiamo verificata la proposizione

U_p) il problema

$$Au = 0, \quad u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega) \tag{7.3}$$

ammette solo la soluzione $u = 0$, per un certo p fissato > 1.

Si vede subito allora che *la proposizione U_q) è vera per ogni altro $q > 1$.* Infatti se $q > 1$ è diverso da p, una funzione $u \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap W^{2m,q}(\Omega)$ e tale che $Au = 0$ deve necessariamente appartenere anche a $W^{2m,q}(\Omega)$ per ogni $p > 1$, in virtù dei risultati citati di BROWDER (v. più precisamente ad es. [9. teor. 1]) e di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2, n. 14 e 15] e dunque, poichè U_p) è supposta vera, è $u = 0$.

Altra conseguenza immediata dell'ipotesi U_p) è la seguente: *il problema omogeneo*

$$A^* w = 0, \qquad w \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap W^{2m,q}(\Omega) \tag{7.4}$$

ammette la sola soluzione $w = 0$ per ogni $q > 1$.

Infatti se è vera la U_p) per p fissato essa è vera per ogni p, per quanto si è visto or ora, e dunque anche per $p = 2$; ma allora il problema (7.4) per $q = 2$ ha solo la soluzione $w = 0$, in virtù di un risultato di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG (v. precisamente quanto è osservato nel n. 12.4 di [2] per la dimostrazione del teor. 12.7 in $L^2(\Omega)$); e dunque applicando l'osservazione sopra fatta ad A^* anzichè ad A, il risultato è vero anche per ogni $q > 1$.

Dalla considerazioni ora fatte e dal teor. 7.1 ricaviamo poi (v. anche [2]) che nell'ipotesi U_p) per un certo p fissato > 1, $u \to Au$ è un isomorfismo di $W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$ per ogni $p > 1$. Concludendo possiamo enunciare esplicitamente il

TEOR. 7.2: *Nelle ipotesi del* n. 6 *su A e su Ω, se la proposizione U_p) è vera per un certo p fissato > 1, allora*

a) *essa è vera per ogni $p > 1$;*

b) *è vera anche la proposizione analoga alla U_p) relativamente all'operatore A^*, per ogni $p > 1$*

c) *per ogni $p > 1$ A* (e A^*) *è un isomorfismo di*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega) \quad su \quad L^p(\Omega).$$

Il teorema è dunque applicabile ogni volta che si abbia un teorema di unicità per il problema di DIRICHLET in una qualunque classe $W^{2m,p}(\Omega)$. E sono note, in aggiunta all'ellitticità propria di A, condizioni integrali o algebriche perchè ciò avvenga per A o almeno per l'operatore $A + \lambda$ con λ costante > 0 sufficientemente grande; per es:

1^0) *A è $W_0^{m,2}(\Omega)$ ellittico*, cioè vale la

$$| a(u, u) | \geq c \| u \|^2_{W^{m,2}(\Omega)},$$

per ogni $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$, c indipendente da u;

2^0) *A è fortemente ellittico* (GÅRDING), cioè

$$\mathcal{R}e \sum_{|k|,|h|=m} a_{kh}(x) \xi^{k+h} \geq c | \xi |^{2m}$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e ogni ξ reale $e \neq 0$, con c costante;

3^0) *A è debolmente positivo semidefinito* (AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG) [2, teor. 12.8], cioè

$$\mathcal{R}e \sum_{|k|,|h|=m} a_{kh}(x) \xi^{k+h} \geq 0$$

per $x \in \overline{\Omega}$ e ξ reale.

Nell'ipotesi 1^0) il teorema di unicità vale per A, nella 2^0) e 3^0) per $A + \lambda$ con $\lambda > 0$ sufficientemente grande. La 1^0) è stata sempre da noi posta alla base dei lavori precedenti al presente, [27] e [28], solo per semplicità, ciò che si è del resto già osservato sia in [27] (Osservazione II del n. 10) sia in [28] (REMARQUE 10.5). Noi comunque nel seguito di questo lavoro prenderemo come ipotesi base la seguente

J) Ω e i coefficienti a_{kh} sono regolari nel senso precisato nel n. 6.1; *l'operatore A è ellittico in $\overline{\Omega}$; per almeno un p fissato > 1 è valida la U_p).*

Desideriamo osservare anche esplicitamente che, come risulterà da quanto diremo in seguito, i risultati del presente lavoro potrebbero essere formulati in forma ancora più generale e più « astratta » ; più precisamente, anzichè mettere alla base la ipotesi J), si potrebbero prendere come ipotesi le seguenti, ferme restando le condizioni di regolarità su Ω e sui coefficienti a_{kh} :

I⁰) *ellitticità dell'operatore* A *in* $\bar{\Omega}$.

II⁰) A *è un isomorfismo di* $W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega)$ *e* A *è un isomorfismo di* $W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$ *su* $L^{p'}(\Omega)$ *per un* $p>1$ *fissato*, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

III⁰) *Se* $u \in L^p(\Omega)$ *e verifica le*

$$|\langle u, A^* v\rangle| \leq c \, \| v \|_{W^{m,p'}(\Omega)} \quad \textit{per ogni } v \in W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$$

allora $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

I teoremi principali dei numeri seguenti sono validi anche in queste ipotesi. Naturalmente, per quanto si è detto in questo numero e per il risultato di AGMON [1] già citato nell'introduzione l'ipotesi J) è condizione sufficiente per il verificarsi delle I⁰), II⁰) e III⁰).

7.2. Per quanto riguarda il problema di Dirichlet non omogeneo

$$\text{(7.5)} \qquad \begin{cases} Au = f \\ \gamma_j u = g_j \end{cases} \qquad j = 0, \dots, m-1$$

possiamo senz'altro enunciare il

TEOR. 7.3. *Nell'ipotesi* J) *del n.* 7.1 *per ogni* $p>1$, $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ *è un isomorfismo di* $W^{2m,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma)$.

La dimostrazione è abituale, tenuto conto del teor. 5.1 e del teor. 7.2. Accenniamola per il seguito. Anzitutto $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ è lineare e continua da $W^{2m,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma)$ per il teor. 5.1 e per il fatto che l'operazione di derivazione $D^k u$ è lineare e continua da $W^{2m,p}(\Omega)$ in $W^{2m-|k|,p}(\Omega)$. D'altra parte assegnata $f \in L^p(\Omega)$ e $g_j \in W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j=0, \dots, m-1$ esiste un $v \in W^{2m,p}(\Omega)$ tale che $\gamma_j v = g_j$; risolviamo allora col teor. 7.2 il problema omogeneo $Aw = f - Av$, $w \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega)$. Allora $u = v + w$ appartiene a $W^{2m,p}(\Omega)$ e risolve il problema $Au = f$, $\gamma_j u = g_j$, $j = 0, \dots, m-1$ ed è unica per il teor. 7.2. Un noto teorema di BANACH sugli isomorfismi ci assicura dunque la tesi del teorema. c.v.d.

n. 8. Il problema di Dirichlet in $W^{m+r,p}(\Omega)$, $r = 0, 1, \dots, m-1$.

8.1. È noto che per $p = 2$ nell'ipotesi che A è $W_0^{m,2}(\Omega)$-*ellittico* o più in generale se vale l'ipotesi U_2) di unicità (si veda la remarque 10.5 di [28]), si ha che $\{A, \vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di $W^{m+r,2}(\Omega)$ su $W^{-m+r,2}(\Omega) \times \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{m+r-j-1/2,2}(\Gamma)$, $r = 0, \dots, m-1$.

Vogliamo in questo numero estendere questo risultato al caso $p > 1$.

Dimostriamo intanto il

LEMMA 8.1. *Nelle ipotesi del* n. 7.1, *per ogni* $p > 1$ *esiste solo la soluzione* $u = 0$ *del problema*

$$A\,u = 0, \quad u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Infatti poichè $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ possiamo scrivere la (6.4) per ogni $v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ e per u; essa diventa allora

$$(u, A^* v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$$

Ma nelle ipotesi fatte, per il teor. 7.2, A^* è un isomorfismo di $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ su $L^{p'}(\Omega)$ e dunque risulta $u = 0$.

TEOR. 8.1. *Nella ipotesi* J) *del* n. 7.1, *per ogni* $p > 1$ $u \to Au$ *è un isomorfismo di* $W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m+r,p}(\Omega)$, $r = 0, 1, \dots, m$.

Dimostriamo anzitutto che il problema

$$Au = f, \qquad u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{m+r,p}(\Omega)$$

è risolubile qualunque sia $f \in W^{-m+r,p}(\Omega)$ (necessariamente la soluzione sarà unica per il Lemma 8.1).

Infatti per ogni $p > 1$ per il teor. 7.2 A^* è un isomorfismo di $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ su $L^{p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$; dunque per dualità, con procedimento noto (v. [46], [22], [32, n. 14], [27] e [28, n. 6 e 7]), si ottiene che, per ogni funzionale semilineare e continuo $L(v)$ su $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ esiste una e una sola $u \in L^p(\Omega)$ tale che

$$(u, A^* v) = L(v) \qquad \text{per ogni } v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega).$$

Consideriamo $\langle f, \bar{v} \rangle$, dove il $\langle\ ,\ \rangle$ indica la dualità tra $W^{-m+r,p}(\Omega)$ e $W_0^{m-r,p'}(\Omega)$; si ha allora

$$|\langle f, \bar{v}\rangle| \leq \|f\|_{W^{-m+r,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{m-r,p'}(\Omega)}$$

e dunque $\langle f, \bar{v}\rangle$ è un $L(v)$ e perciò esiste una e una sola $u \in L^p(\Omega)$ tale che

(8.1) $\quad (u, A^* v) = \langle f, \bar{v} \rangle \quad$ per ogni $v \in W_0^{2m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$

e per tale u risulta, per quanto si è visto,

(8.2) $\quad |(u, A^* v)| \leq c \|v\|_{W^{2m-(m+r),p'}(\Omega)}, \quad$ per ogni $v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$,

$$c = \|f\|_{W^{-m+r,p}(\Omega)}$$

Si ha allora $Au = f$ e inoltre dalla (8.2) per un recente notevole risultato di AGMON (1, teor. 8.1], si ha che, $u \in W^{m+r,p}(\Omega)$. Applicando allora la (6.5) ad u e a $v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ si ottiene, per la (8.1),

(8.3) $$\sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma \gamma_j u \, \overline{T_j v} \, d\sigma = 0 \text{ per ogni } v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega).$$

Allora, poichè l'applicazione $v \to \{T_{m-1} v, \ldots, T_0 v\}$ è una applicazione lineare e continua di $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ *su* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{j+1/p,p'}(\Gamma)$ (la cosa segue per es. dal lemma 6.1 e dalla Prop. 5.1), si ottiene da (8.3) che $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \ldots$ $\ldots, m-1$ e quindi dalla Prop. 5.1 che $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Dunque il problema di DIRICHLET considerato è risolubile in modo unico per ogni f.

Osserviamo poi che l'operatore $u \to Au$ è lineare e continuo da $W^{m+r,p}(\Omega)$ in $W^{-m+r,p}(\Omega)$, poichè tale è l'operatore $u \to D^k u$ per $|k| \leq 2m$. In definitiva dunque, per un noto teorema di BANACH sugli isomorfismi, $u \to Au$ è un isomorfismo algebrico e topologico di $W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ su $W^{-m+r,p}(\Omega)$.

8.2. Desideriamo riprendere il teor. 8.1 da un altro punto di vista, utilizzando il procedimento di interpolazione « complessa », richiamato nel n. 3.2. Supponiamo dunque di aver già dimostrato il teor. 8.1 per $r = 0$ e $r = m$; il caso $r = m$ è espresso dal teor. 7.2, il caso $r = 0$ si può ottenere con la dimostrazione data sopra nel n. 8.1, ricorrendo al teorema di regolarizzazione di Agmon *nel solo caso* $r = 0$. Volendo potremmo anche ammettere semplicemente la validità delle ipotesi I^0) II^0) e III^0) messe in evidenza nel n. 7.1.

Abbiamo dunque che A è un isomorfismo di $W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$ e di $W_0^{m,p}(\Omega)$ su $W^{-m,p}(\Omega)$; applicando perciò il teor. 3.1 otteniamo che A è un isomorfismo di

$$[W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega), \; W_0^{m,p}(\Omega)\,; \; \delta(\theta)] \;\; \text{su} \;\; [L^p(\Omega), \; W^{-m,p}(\Omega)\,; \; \delta(\theta)]$$

per ogni θ, $0 < \theta < 1$.

Si tratta dunque ora di interpretare i due spazi « intermedi » così trovati.

Dimostriamo perciò anzitutto che

$$[L^p(\Omega), \; W^{-m,p}(\Omega)\,; \delta(\theta)] = W^{-\theta m,p}(\Omega), \; \textit{se } \theta m \textit{ è intero.} \tag{8.4}$$

Sia $u \to Qu$ un'applicazione lineare e continua di $W^{m,p'}(R^n)$ in $W_0^{m,p'}(\Omega)$ e di $L^{p'}(R^n)$ in $L^{p'}(\Omega)$ e tale che $Q\tilde{\varphi} = \varphi$ se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\tilde{\varphi}$ è il suo prolungamento a zero fuori di Ω; una tale applicazione esiste come si può vedere con le seguenti considerazioni. Mediante un sistema di « carte locali », nelle ipotesi di regolarità fatte su Ω, ci si può ricondurre al caso in cui Ω sia il semispazio R_+^n degli x per cui è $x_n > 0$.

E allora, ispirandosi a procedimenti noti (si veda il lemma 2.1) la Q si può così costruire

$$\begin{cases} Qu(x) = u(x) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \, u(x_1, \dots, x_{n-1}, -j\,x_n), & \text{se } x_n > 0 \\ Qu(x) = 0 & \text{se } x_n \leq 0 \end{cases}$$

dove i λ_j sono costanti tali che

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (-j)^i = 1 \qquad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Consideriamo allora l'applicazione trasposta ${}^tQ$; essa è lineare e continua da $W^{-m,p}(\Omega)$ in $W^{-m,p}(R^n)$ e da $L^p(\Omega)$ in $L^p(R^n)$ ed è tale che la restrizione a Ω, $R_\Omega({}^tQ\,S)$ coincide con S. Allora, tenuto conto che per s intero $W^{s,p}(\Omega) = H^{s,p}(\Omega)$ (v. Prop. 4.2 e n. 4.2) e $W^{s,p}(R^n) = H^{s,p}(R^n)$

(Osservazione 3.1) e inoltre che vale la Prop. 3.4, passiamo applicare il teor. 3.1 e otteniamo che ${}^tQ$ è una applicazione lineare e continua da $[L^p(\Omega), W^{-m,p}(\Omega)\,;\,\delta(\theta)]$ in $[L^p(R^n), W^{-m,p}(R^n)\,;\,\delta(\theta)] = W^{-\theta m,p}(R^n)$.

D'altra parte l'operatore restrizione a $\Omega\, u \to R_\Omega\, u$, è lineare e continuo da $L^p(R^n)$ in $L^p(\Omega)$ e da $W^{-m,p}(R^n)$ in $W^{-m,p}(\Omega)$, dunque da $W^{-\theta m,p}(R^n)$ in $[L^p(\Omega), W^{-m,p}(\Omega)\,;\,\delta(\theta)]$ e dunque $[L^p(\Omega), W^{-m,p}(\Omega)\,;\,\delta(\theta)]$ coincide con l'insieme delle restrizioni a Ω delle u di $W^{-\theta m,p}(R^n)$.

Ora questo insieme coincide con $W^{-\theta m,p}(\Omega)$; infatti poichè θm è intero, assegnato comunque $S \in W^{-\theta m,p}(\Omega)$ esiste una e una sola $u_0 \in W_0^{\theta m,p}(\Omega)$ tale che

$$(-\Delta + 1)^{\theta m}\, u_0 = S, \qquad (\Delta = \text{operatore di Laplace}):$$

basta infatti applicare all'operatore $(-\Delta + 1)^{\theta m}$ il teor. 8.1 nel caso $r = 0$, cosa possibile. Ne segue che la distribuzione $T = (-\Delta + 1)^{\theta m}\, \tilde{u}_0$ (dove $\tilde{u}_0$ è il prolungamento a zero di u_0 in tutto R^n) appartiene a $W^{-\theta m,p}(R^n)$ e verifica la $T = S$.

Dunque possiamo concludere che vale la (8.4) algebricamente e la stessa dimostrazione assicura che la (8.4) vale anche topologicamente.

Veniamo poi allo studio dello spazio $X = [W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega)\,;\,\delta(\theta)]$.

È facile dimostrare che

$$X \subset W^{2m-\theta m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega). \tag{8.5}$$

Infatti consideriamo l'applicazione identica $u \to u$ e osserviamo che essa è lineare e continua da $W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$ e da $W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$; si ha che essa risulta tale anche da X in $W_0^{m,p}(\Omega)$ per il teor. 3.1 e dunque $X \subset W_0^{m,p}(\Omega)$. Analogamente $u \to u$ è lineare continua da $W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{2m,p}(\Omega)$ e da $W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ e dunque (teor. 3.1) da X in $[W^{2m,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)\,;\,\delta(\theta)]$, il quale spazio per la Prop. 3.4, la Prop. 4.1 e la Prop. 4.2, tenuto conto che $\theta\, m$ è intero, coincide con $W^{2m-\theta m,p}(\Omega)$; dunque $X \subset W^{2m-\theta m,p}(\Omega)$.

Dimostriamo ora la inclusione inversa della (8.5). Sia $u \in W^{2m-\theta m,p}(\Omega) \cap$ $\cap\, W_0^{m,p}(\Omega)$ e poniamo $Au = S$; allora $S \in W^{-\theta m,p}(\Omega)$, dunque poichè A è, per la (8.4) un isomorfismo di X su $W^{-\theta m,p}(\Omega)$, esiste una $u_0 \in X$ e una sola tale che $Au_0 = S$; ma allora $u_0 = u$, poichè entrambe appartengono a $W_0^{m,p}(\Omega)$ e in $W_0^{m,p}(\Omega)$ vale il teorema di unicità per il problema di DIRICHLET (lemma 8.1); dunque tenuto conto della (8.5) si ha

$$X = W^{2m-\theta m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega), \qquad (\theta\, m \text{ intero}). \tag{8.6}$$

In definitiva si ha che $u \to Au$ *è un isomorfismo di* $W^{2m-\theta m,p}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m\theta,p}(\Omega)$ *per* θm *intero,* $0 < \theta < 1$.

E dunque si ha di nuovo il teor. 8.1 per $r = 1, \dots, m-1$.

OSSERVAZIONI.

a) Si osservi che questa dimostrazione fa uso in modo alterno dell'*interpolazione* e dei risultati sui problemi ellittici, e precisamente; si parte da risultati sui problemi ellittici (teor. 8.1 nel caso $r=0$ e $r=m$), si interpola, si usa ancora il teor. 8.1 per $r=0$ relativamente all'operatore $(-\Delta+1)^{\theta m}$ e poi di nuovo si interpola.

È questo un procedimento, che per quanto « complesso » può dare buoni risultati, come dimostreremo anche in seguito.

b) Si osservi anche che, sostituendo, come è possibile, gli spazi $H^{s,p}$ agli spazi $W^{s,p}$ nella dimostrazione precedente, essa potrebbe essere ripetuta anche per θm *non intero*, salvo che nel punto in cui si fa uso del teorema di esistenza per il problema $(-\Delta+1)^{\theta m} u_0 = S$, $u_0 \in \overset{0}{H}{}^{\theta m,p}(\Omega)$, con S assegnato in $H^{-\theta m,p}(\Omega)$. Si pone allora la questione, naturalmente dando a $(-\Delta+1)^{\theta m}$ un opportuno significato generalizzato, se θm non è intero.

8.3. Non si ha ora difficoltà a passare, con il ragionamento già richiamato per il teorema 7.3, al problema non omogeneo. Tenuto conto del teor. 5.1 e del teor. 8.1, si ha così il

TEOR. 8.2. *Nella ipotesi J) del* n. 7.1 *per ogni* $p > 1$ $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ *è un isomorfismo di* $W^{m+r,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m+r,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma)$, $r = 0,1,2,\dots,m$.

Con i teor. 7.3 e 8.2 il problema di DIRICHLET non omogeneo è completamente studiato nelle classi $W^{s,p}(\Omega)$ con $s = m, \dots, 2m$. Passeremo ora nei n. 9 e 10 ai casi $s = 0, \dots, m-1$.

Una osservazione, che ci sembra interessante e che si ricollega a quanto si è fatto nel n. 8.2 e in particolare all'osservazione *a*) del n. 8.2, è la seguente.

Interpoliamo col metodo « complesso » tra i casi $r = m$ e $r = 0$ del teor. 8.2 cioè, partendo dal fatto che

$$\{A, \vec{\gamma}\} \textit{ è un isomorfismo di } W^{2m,p}(\Omega) \textit{ su } L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma)$$

$$» \quad » \quad » \quad » \quad » \quad » \quad W^{m,p}(\Omega) \textit{ su } W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1/p,p}(\Gamma)$$

Si ottiene allora (tenendo conto anche del teor. 3 di [25]) che $\{A, \vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di

$$[W^{2m,p}(\Omega),\ W^{m,p}(\Omega);\ \delta(\theta)] \text{ su } [L^p(\Omega),\ W^{-m,p}(\Omega);\ \delta(\theta)] \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} [W^{2m-j-1/p,p}(\Omega),\ W^{m-j-1/p,p}(\Omega);\ \delta(\theta)].$$

Se θm è intero, tenuto conto del fatto che $H^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$ se s è intero, della Prop. 3.4 e della Prop. 4.1 e inoltre della (8.4), si ottiene che $\{A, \vec{\gamma}\}$ *è un isomorfismo di*

$$W^{2m-\theta m,p}(\Omega) \text{ su } W^{-\theta m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} [W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma),\ W^{m-j-1/p,p}(\Gamma);\ \delta(\theta)].$$

E di qui confrontando col teorema 8.2, in cui si faccia $r = (1 - \theta)m$, si ottiene

(8.7) $$[W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma),\ W^{m-j-1/p,p}(\Gamma);\ \delta(\theta)] = W^{2m-\theta m-j-1/p,p}(\Gamma)$$

per $0 < \theta < 1$, θm intero.

Dal fatto che m è un intero qualunque ≥ 1, e $j = 0, 1, \ldots, m-1$ si deduce la seguente proposizione sugli spazi di interpolazione.

PROP. 8.1. *Se* $1 < p < \infty$, r *e* s *sono interi tali che* $s \geq 1$ *e* $r \geq 2s$ *e* $\theta(r - s)$ *è intero e* $0 < \theta < 1$, *allora*

(8.8) $$[W^{r-1/p,p}(\Gamma),\ W^{s-1/p,p}(\Gamma);\ \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s-1/p,p}(\Gamma)$$

algebricamente e topologicamente.

Si pone il problema di generalizzare la (8.8) anche al caso di r e s qualunque; più in particolare di sapere se la (8.7) vale nel caso θm non intero.

n. 9. Il problema di Dirichlet nello spazio $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$.

9.1. Anzitutto poniamo la definizione

DEF. 9.1. *Indicheremo con* $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ (*rispett. con* $D_A^{0,p}(\Omega)$) *per* $p > 1$, *lo spazio delle* $u \in L^p(\Omega)$ *tali che* $Au \in W^{-m,p}(\Omega)$ (*rispett.* $Au \in L^p(\Omega)$) *normaliz-*

zato da

$$\| u \|_{\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{L^p(\Omega)} + \| Au \|^p_{W^{-m,p}(\Omega)})^{1/p}$$

(*rispettivamente*

$$\| u \|_{D_A^{0,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{L^p(\Omega)} + \| Au \|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p})$$

Essi risultano spazi di BANACH. Si ha subito la

PROP. 9.1. *Nelle ipotesi* J) *del* n. 7.1 *lo spazio* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *è denso in* $D_A^{0,p}(\Omega)$ *per ogni* $p > 1$.

La proposizione è dovuta ad HORMANDER [16] per $p = 2$; ma vale anche per $p \neq 2$ e si può ad es. dimostrare in modo del tutto analogo a quello dato per $p = 2$ nella nota (6) di [28].

Possiamo allora ottenere anche la

PROP. 9.2. *Nelle ipotesi* J) *del* n. 7.1 *per ogni* $p > 1$ $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *è denso in* $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$.

Infatti sia $u \in \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ e si consideri il problema

$$Av = Au, \quad v \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Per il teor. 8.1 esso è risolubile in modo unico; poniamo perciò $u = v + w$ con $w = u - v$. Allora $w \in L^p(\Omega)$ e $Aw = 0$, dunque per la Prop. 9.1 esiste una successione $\{\varphi_i\}$ di funzioni $\varphi_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tale che $\varphi_i \to w$ in $L^p(\Omega)$ e $A\varphi_i \to 0$ in $L^p(\Omega)$ per $i \to \infty$. Inoltre esiste una successione $\{\psi_i\}$ di funzioni $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\psi_i \to v$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$ per la definizione stessa di $W_0^{m,p}(\Omega)$ e per essa è anche $A\psi_i \to Av$ in $W^{-m,p}(\Omega)$. In definitiva $\varphi_i + \psi_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e converge a u in $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ per $i \to \infty$.

Possiamo ora enunciare il

TEOR. 9.1. *Nella ipotesi* J) *del* n. 7.1 *per ogni* $p > 1$ *l'applicazione* $u \to \vec{\gamma u} = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$, *definita per le* u *di* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, *si prolunga per continuità in un'applicazione lineare e continua, indicata ancora con* $\vec{\gamma u}$, *di*

$$\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega) \quad in \quad \prod_{j=0}^{m-1} W^{-j-1/p,p}(\Gamma).$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teor. 2.1 di [28], alla quale dunque rinviamo.

Così pure in modo analogo a quanto visto per il Teor. 4.1 di [28], partendo dalla (6.3) e prolungando per continuità, come è possibile per la Prop. 9.2 e il teor. 9.1, otteniamo la validità della formula di GREEN

$$(9.1) \qquad (u, A^* v) - \langle Au, \bar{v} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, T_j \bar{v} \rangle$$

per ogni $u \in \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ e $v \in W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$.

9.2. Si ha infine il

TEOR. 9.2: *Nelle ipotesi J) del* n. 7.1 *per ogni* $p > 1$ $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ *è un isomorfismo di* $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano dati $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$. Nelle ipotesi poste A^* è un isomorfismo di $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ su $L^{p'}(\Omega)$, dunque per dualità, con lo stesso ragionamento richiamato per il teor. 8.1, esiste una e una sola $u \in L^p(\Omega)$ tale che

$$(9.2) \qquad (u, A^* v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle \quad \text{per ogni} \quad v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$$

dove $\langle f, \bar{v} \rangle$ indica la dualità tra $W^{-m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p'}(\Omega)$ e $\langle g_j, \overline{T_j v} \rangle$ quella tra $W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{j+1/p,p}(\Gamma)$. Basta osservare che il secondo membro di (9.2) è infatti un funzionale $L(v)$ semilineare e continuo su $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap \cap W^{2m,p'}(\Omega)$.

Dalla (9.2) si deduce che $Au = f$ e dunque $u \in \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$. Inoltre, tenendo conto della (9.1) si ha per la stessa (9.2)

$$(9.3) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma (\gamma_j u - g_j) \overline{T_j v} \, d\sigma = 0$$

da cui, con lo stesso ragionamento usato nel teor. 8.1 sulla formula (8.3), si ottiene che $\gamma_j u = g_j$, $j = 0, \dots, m-1$.

Dunque $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è biunivoca da $W_A^{0,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m,p}(\Omega) \times \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$.

D'altra parte per il teor. 9.1 e per la definizione stessa dello spazio $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Gamma)$ essa è anche lineare e continua, sicchè per il solito teorema di BANACH sugli isomorfismi, il teorema è dimostrato.

n. 10. Il problema di Dirichlet negli spazi $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$, $s = 0, \dots, m-1$.

Nella memoria [28] dedicata al caso $p = 2$, una volta ottenuto il teor. 9.2 si è applicata la teoria dell'interpolazione quadratica tra i due teoremi cui si riducono per $p = 2$ gli attuali teoremi 8.2 (caso $r = 0$) e 9.2. E sempre per $p = 2$ è possibile interpolare anche tra i teor. 8.2 (caso $r = 0$) e 7.3 (si veda ad es. la remarque 10.4 di [28] e anche [36]). Si ottengono così dei teoremi di isomorfismo per il problema di DIRICHLET non omogeneo negli spazi $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ per s reale compreso tra 0 e $2m$.

Il problema si pone anche ora nel caso $p \neq 2$, ma presenta difficoltà notevoli, in quanto le teorie dell'interpolazione tra i $W^{s,p}(\Omega)$ che si conoscono sono tutte assai più complesse. Noi otterremo secondo questa via nei prossimi numeri 11 e 12 alcuni risultati che ci sembrano significativi.

Vogliamo però mostrare prima come, senza far uso esplicito di teorie dell'interpolazione si possano ottenere ugualmente teoremi di esistenza e di unicità per il problema di DIRICHLET, almeno nel caso degli $W^{s,p}(\Omega)$ con s *intero* $(0 \leq s < m)$. Tuttavia è opportuno osservare che per ottenere questi risultati, oltre a far uso di teoremi di regolarizzazione di soluzioni molto «deboli» dati di recente da AGMON [1], noi sfrutteremo anche i teoremi di tracce del n. 5. Ed è noto quale siano gli stretti legami tra certe teorie della interpolazione basata su metodi reali e i teoremi di tracce (v. ad es. [20], [14], [23], [21], [15], ecc ...).

Poniamo dunque la

DEF. 10.1: *Indicheremo con $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$, $p > 1$, s reale, $0 \leq s \leq m$, lo spazio delle $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e tali che $Au \in W^{-m,p}(\Omega)$ normalizzato da*

$$\| u \|_{\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \| Au \|^p_{W^{-m,p}(\Omega)})^{1/p}.$$

Esso risulta uno spazio di BANACH.

Si ha allora il

TEOR. 10.1: *Nelle ipotesi J) del* n. 7.1 *per ogni $p > 1$ e $s = 0, \dots, m-1$, fissato comunque $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, esiste una e una sola $u \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} Au = f \\ \gamma_j u = g_j \end{cases} \qquad j = 0, \dots, m-1$$

e u dipende con continuità da f e da g_j.

Applichiamo il ragionamento già svolto per i teor. 8.1 e 9.2 e dimostriamo anzitutto che

$$L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle$$

è un funzionale semilineare e continuo su $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$. Ora si ha infatti addirittura

$$(10.1) \qquad |\langle f, \bar{v} \rangle| \leq \| f \|_{W^{-m,p}(\Omega)} \| v \|_{W^{m,p'}(\Omega)} \leq \| f \|_{W^{-m,p}(\Omega)} \cdot \| v \|_{W^{2m-s,p'}(\Omega)} ;$$

$$(10.2) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} |\langle g_j, \overline{T_j v} \rangle| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} \| T_j v \|_{W^{j+1/p-s,p'}(\Gamma)} \leq$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{m-1} \| T_j v \|_{W^{j+1/p-s,p'}(\Gamma)} \leq c\, C \| v \|_{W^{2m-s\, p'}(\Omega)}$$

dove c è una costante indipendente da v e $C = \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)}$.

La (10.1) è immediata; la (10.2) segue ricordando che T_j è un operatore d'ordine $2m - j - 1$ e applicando il teor. 5.1 ([14]).

In definitiva si ha

$$(10.3) \qquad | L(v) | \leq c \left\{ \| f \|_{W^{-m,p}(\Omega)} + \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} \right\} \cdot \| v \|_{W^{2m-s,p'}(\Omega)}$$

per tutte le $v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$, c indipendente da v.

Possiamo perciò anzitutto affermare, col solito ragionamento per dualità, tenendo conto che A^* è un isomorfismo di $W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$ su $L^{p'}(\Omega)$, che esiste una e una sola $u \in L^p(\Omega)$ tale che

$$(10.4) \qquad (u, A^* v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle \quad \text{per ogni } v \in W_0^{m\, p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega).$$

Di qui si ha subito che $Au = f$.

([14]) Si osservi che il teor. 5.1 vale anche per ogni derivata di u e non solo per le derivate normali $\gamma_j u$.

Inoltre la (10.3), applicando il teor. 8.1 di AGMON [1] già citato, assicura che $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e dunque $u \in \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$.

Osserviamo poi che $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) \subset \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ e dunque per il teor. 9.1 esistono le traccie $\gamma_j u$ di u, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Applicando allora la (9.1) ad u, in virtù della (10.4), si ha

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle \tag{10.5}$$

per ogni $v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega)$. Poichè $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma) \subset W^{-j-1/p,p}(\Gamma)$, dalla (10.5), con lo stesso ragionamento fatto sulle (8.3) e (9.3), si ottiene $\gamma_j u = g_j$, $j = 0, \dots, m-1$.

L'unicità della soluzione segue poi dal teorema 9.2 poichè $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) \subset \subset \mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$.

Per quanto riguarda la dipendenza continua dai dati f e g_j, dimostriamo infatti che si ha

$$\| u \|_{\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)} \leq c \left\{ \| f \|_{W^{-m,p}(\Omega)} + \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} \right\}. \tag{10.6}$$

Poichè vale la (10.3), il teor. 8.1 di [1] non da solo che $u \in W^{s,p}(\Omega)$ ma (v. formula (8.4) di [1]) di più che vale la

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c \left\{ \| f \|_{W^{-m,p}(\Omega)} + \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} + \| u \|_{L^p(\Omega)} \right\} \tag{10.7}$$

con c indipendente da u.

D'altra parte in virtù del teorema 9.2 si ha

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq c \left\{ \| f \|_{W^{-m,p}(\Omega)} + \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{W^{-j-1/p,p}(\Gamma)} \right. \quad (c \text{ indipendente da } u). \tag{10.8}$$

e quindi, poichè $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma) \subset W^{-j-1p,p}(\Gamma)$ anche topologicamente, dalla (10.7) si ha la (10.6). c.v.d.

n. 11. Applicazione della teoria dell'interpolazione; caso dell'integrale di Dirichlet finito.

11.1. Una prima applicazione della teoria di interpolazione richiamata nel n. 1, sarà ora fatta estendendo il teor. 8.1 al caso di r reale, $0 \leq r \leq m$. Precisamente dimostreremo il

TEOR. 11.1 *Nell'ipotesi J) del n. 7.1, per ogni $p > 1$ $u \to Au$ è un isomorfismo di $W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ su $W^{-m+r,p}(\Omega)$, per r reale compreso tra 0 e m.*

Sia infatti $r = [r] + 1 - \theta$, con $0 \leq [r] \leq m - 1$ e $0 < \theta < 1$. Per il teor. 8.1 sappiamo che A è un isomorfismo di $W^{m+[r],p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ su $W^{-m+[r],p}(\Omega)$ e di $W^{m+[r]+1,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ su $W^{-m+[r]+1,p}(\Omega)$.

Dunque il teor. 1.1 che è ora applicabile per le proprietà dei $W^{s,p}(\Omega)$ viste nel n. 2, ci assicura che A è un isomorfismo di

$$X = T(p,\alpha\,;\, W^{m+[r]+1,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega),\ W^{m+[r],p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega))$$

su

$$Y = T(p, \alpha\,;\, W^{-m+[r]+1,}(\Omega),\ W^{-m+[r],p}(\Omega)), \qquad \frac{1}{p} + \alpha = \theta$$

Dimostriamo anzitutto che

$$X \subset W^{m+[r]+1-\theta,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) \tag{11.1}$$

Infatti, considerando l'applicazione identica $u \to u$ e osservando che essa è lineare e continua da $W^{2m+[r]+1,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$ e da $W^{m+[r],p}(\Omega)$ $\cap$ $W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$, essa risulta tale anche da X in $W_0^{m,p}(\Omega)$ per il teor. 1.1; dunque anzitutto $X \subset W_0^{m,p}(\Omega)$.

D'altra parte l'operazione $D^k u$ per $|k| \leq m + [r]$ è lineare e continua da $W^{2m+[r]+1,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{0,p}(\Omega)$ e da $W^{m+[r],p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{0,p}(\Omega)$, dunque per il teor. 1.1 da X in $W^{0,p}(\Omega)$; e perciò se $u \in X$, si ha che $D^k u \in W^{0,p}(\Omega)$ per $|k| \leq m + [r]$ e dunque $u \in W^{m+[r],p}(\Omega)$; inoltre $u \to D^k u$ per $|k| = m + [r]$ è lineare e continua da $W^{m+[r]+1,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ e da $W^{m+[r],p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{0,p}(\Omega)$ e dunque (teor. 1.1) da X in $W^{1-\theta,p}(\Omega)$; quindi, se $u \in X$, $D^k u \in W^{1-\theta,p}(\Omega)$ e perciò $u \in W^{m+[r]+1-\theta,p}(\Omega)$. La (11.1) è così dimostrata.

Osserviamo poi che per il teor. 1.2 si ha

$$Y' = T(p', -\alpha;\ W_0^{m-[r]\,p'}(\Omega),\ W_0^{m-[r]-1,p'}(\Omega)).$$

e quindi, per lo stesso ragionamento fatto a proposito di X, si ha $Y' \subset W_0^{m-[r]-\theta',p'}(\Omega)$ con $\dfrac{1}{p'} - \alpha = \theta'$, e dunque $\theta' = 1 - \theta$. Perciò risulta ricordando che $r = [r] + 1 - \theta$

$$Y \supset W^{-m+r,p}(\Omega)$$

Concludiamo che, poichè A è un isomorfismo di X su Y, per ogni $f \in W^{-m+r,p}(\Omega)$ esiste una e una sola $u \in X$, e dunque esiste una $u \in W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$, tale che $Au = f$.

Essa è poi unica in $W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ a verificare la $Au = f$, poichè il teorema di unicità vale già in $W_0^{m,p}(\Omega)$ nelle ipotesi fatte (Lemma 8.1).

D'altra parte si ha anche che $u \to Au$ è lineare e continua da $W^{m+r,p}(\Omega)$ in $W^{-m+r,p}(\Omega)$. Basterà per questo dimostrare la seguente

PROP. 11.1 *L'operazione* $u \to D_i u, D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ *è lineare e continua da* $W^{s,p}(\Omega)$ *in* $W^{s-1,p}(\Omega)$ *per ogni* s *reale e* $p > 1$.

DIMOSTRAZIONE *a*) Nel caso che s è reale ≥ 1 basta osservare che la Proposizione vale per s intero e applicare quindi il teor. 1.1 e la Prop. 2.4.

b) Nel caso $0 \leq s < 1$ ricordiamo anzitutto che esiste un'applicazione lineare e continua (v. il n. 2) $u \to Pu = U$ di $W^{s,p}(\Omega)$ in $W^{s,p}(R^n)$ tale che $U = u$ *q.-d.* in Ω. Poichè è $D_i u = R_\Omega(D_i U)$ (R_Ω operatore di restrizione a Ω), basterà dimostrare che $D_i U \in \mathcal{L}(W^{s,p}(R^n); W^{s-1,p}(R^n))$. Ora se $s = 1 - \theta$, con $0 < \theta < 1$, osservando che $D_i \in \mathcal{L}(W^{1,p}(R^n); W^{0,p}(R^n))$ e $D_i \in \mathcal{L}(W^{0,p}(R^n); W^{-1,p}(R^n))$, si ha per il teor. 1.1 che D_i è lineare e continua da $T(p, \alpha; W^{1,p}(R^n), W^{0,p}(R^n)) = W^{1-\theta,p}(R^n)$ in $T(p, \alpha; W^{0,p}(R^n), W^{-1,p}(R^n))$ e questo ultimo spazio per il teor. 1.2 coincide con

$$(T(p', -\alpha; W^{1,p'}(R^n), W^{0,p'}(R^n)))' = (W^{\theta,p'}(R^n))' = W^{-\theta,p}(R^n).$$

Dunque $D_i \in \mathcal{L}(W^{s,p}(\Omega); W^{s-1,p}(\Omega))$ per $s \geq 0$.

c) Si passa poi facilmente al caso $s < 0$ osservando che per ogni $\varphi \in D(\Omega)$ si ha

$$| \langle D_i u, \varphi \rangle | = | \langle u, D_i \varphi \rangle | \leq \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \| D_i \varphi \|_{W^{-s,p'}(\Omega)} \leq c \| \varphi \|_{W^{-s+1,p'}(\Omega)}$$

e quindi $D_i u \in W^{s-1,p}(\Omega)$.

In virtù della Prop. 11.1 si ha dunque che $u \to Au$ è lineare e continua da $W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W^{-m+r,p}(\Omega)$; tenuto conto che, come si è sopra visto, essa è anche biunivoca, si conclude per il solito teorema di BANACH che essa è un isomorfismo; il teor. 11.1 è così dimostrato.

11.2. Passando al problema non omogeneo, sarebbe interessante poter analogamente interpolare estendendo al caso di r reale, $0 \leq r \leq m$ il teor. 8.2 (si ricordi che nel caso $p = 2$ il teor. 8.2 vale anche per r reale $0 \leq r \leq m$, v. [36] e remarque 10.4 di [28]). Ma si presentano qui difficoltà notevoli. Interpoliamo tra il teor. 8.2 nel caso $r = k + 1$ e $r = k$ con

k intero compreso tra 0 e $m-1$, mediante il metodo del n. 1. Allora il teor. 1.1 ci assicura la validità della seguente proposizione;

$\{A, \vec{\gamma}\}$ *è un isomorfismo di* $T(p, \alpha; W^{m+k+1,p}(\Omega), W^{m+k,p}(\Omega))$ *su*

$$T(p, \alpha; W^{-m+k+1,p}(\Omega), W^{-m+k,p}(\Omega)) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} T(p, \alpha; W^{m+k+1-j-1/p,p}(\Gamma), W^{m+k-j-1/p,p}(\Gamma))$$

$$0 < \frac{1}{p} + \alpha < 1, \qquad \theta = \frac{1}{p} + \alpha.$$

Ora il primo spazio è $W^{m+k+1-\theta,p}(\Omega)$, in virtù della Prop. 2.4. La difficoltà consiste nell'interpretazione degli spazi

$$(11.2) \qquad T(p, \alpha; W^{m+k+1-j-1/p,p}(\Gamma), \quad W^{m+k-j-1/p,p}(\Gamma)) \qquad \text{e}$$

$$T(p, \alpha; W^{-m+k+1,p}(\Omega), \quad W^{-m+k,p}(\Omega)).$$

Uno studio diretto di questi spazi si presenta difficile. Tuttavia i risultati di USPENSKII, cioè il teor. 5.2, permettono almeno nella maggior parte dei casi di superare indirettamente queste difficoltà, come ora vedremo.

Infatti con il solito procedimento di riduzione al problema omogeneo (v. dimostrazione del teor. 7.3), dal teor. 5.2 e dal teor. 11.1 si ottiene il

TEOR. 11.2. *Nelle ipotesi J) del n. 7.1 per ogni $p > 1$ e ogni r reale tale che $0 \leq r \leq m$ e inoltre, se è $p \neq 2$, che $r - \dfrac{1}{p}$ non sia intero, $u \to \{Au, \vec{\gamma} u\}$ è un isomorfismo di*

$$W^{m+r,p}(\Omega) \ \ su \ \ W^{-m+r,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma).$$

Abbiamo così risolto il problema non omogeneo, se $r - \dfrac{1}{p}$ non è intero; e si può ottenere anche l'interpretazione degli spazi (11.2) nella stessa ipotesi. Infatti da questo teorema e dalla Proposizione enunciata poco sopra otteniamo, ponendo $r = k + 1 - \theta$ nel teor. 11.2, con k fissato tra 0 e $m-1$,

$$T(p, \alpha; W^{m+k+1-j-1/p,p}(\Gamma), W^{m+k-j-1/p,p}(\Gamma)) = W^{m+k-j-1/p+1-\theta,p}(\Gamma) \qquad \text{e}$$

$$T(p, \alpha; W^{-m+k+1,p}(\Omega), W^{-m+k,p}(\Omega)) = W^{-m+k+1-\theta,p}(\Omega)$$

$\dfrac{1}{p}+\alpha=\theta$, $0<\theta<1$, $r-\dfrac{1}{p}$ non intero (se $p\neq 2$) con $r=k+1-\theta$, $j=0,1,\dots,m-1$.

E di qui in definitiva, tenuto conto che m è un intero qualunque, $j=0,1,\dots,m-1$, e $k=0,1,\dots,m-1$ e dunque $m+k-j$ è un intero ≥ 1 qualunque, si hanno i

TEOR. 11.3. *Per s intero $\geq 1, 1<p<+\infty, 0<\theta<1$, e $\theta+\dfrac{1}{p}$ non intero (se $p\neq 2$), si ha*

$$T(p,\alpha\,;\,W^{s+1-1/p,p}(\Gamma),\,W^{s-1/p,p}(\Gamma))=W^{s+1-\theta-1/p/p}(\Gamma)\ \theta=\frac{1}{p}+\alpha.$$

TEOR. 11.3 bis. *Per s intero <0, $1<p+\infty$, $0<\theta<1$. $\dfrac{1}{p}+\alpha=\theta$, $\theta+\dfrac{1}{p}$ non intero, si ha*

$$T(p,\alpha\,;\,W^{s+1,p}(\Omega),\,W^{s,p}(\Omega))=W^{s+1-\theta,p}(\Omega).$$

OSSERVAZIONE.

Si osservi che nella dimostrazione da noi data del teor. 11.3 non c'è alcun circolo « vizioso » poichè il teor. 5.2 di USPENSKII è un teorema di tracce per « derivate frazionarie » e invece $T(p,\alpha\,;\,W^{s+1-1/p,p}(\Gamma),\,W^{s-1/p,p}(\Gamma))$ è uno spazio di tracce per « derivate ordinarie » di spazi con *peso* t^{α}. Ciò conduce naturalmente al problema generale della definizione di tracce facenti intervenire delle « derivate frazionarie » (per il caso hilbertiano v. [20]) e al confronto di questi spazi con gli spazi $T(p,\alpha\,;\,X_0\,,\,X_1)$ (v. anche [48] e [30]).

11.3. Si pone ora il problema di sapere se il teor. 11.3 è valido anche per s intero di segno qualunque. Come ora vedremo la risposta è positiva e si può ricavare con procedimento diretto, usando solo gli strumenti di « interpolazione » del n. 1, dallo stesso teor. 11.3 nel caso $s\geq 1$.

Osserviamo anzitutto che con la stessa dimostrazione fatta per il teor. 11.3 si può ottenere la

$$T(p,\alpha\,;\,W^{s+1-1/p,p}(R^{n-1}),\,W^{s-1/p,p}(R^{n-1}))=W^{s+1-\theta-1/p,p}(R^{n-1}) \tag{11.3}$$

s intero ≥ 1, $0<\theta<1$, $\theta+\dfrac{1}{p}$ non intero (se $p\neq 2$), $\dfrac{1}{p}+\alpha=\theta$. Infatti basta sostituire Ω con R^n_+ (semispazio delle x per cui $x_n>0$) e prendere

$A = (-\Delta + 1)^m$. Tutto quanto abbiamo detto in questo lavoro si può ancora applicare.

Dimostriamo ora che la (11.3) vale anche per s intero ≤ 0. Riprendiamo l'operatore $\mathcal{G}^{(s)}$ introdotto nel n. 1.3, (sostituendo però R^n con R^{n-1}; modifiche ovvie) e dimostriamo che

a) $\mathcal{G}^{(m)}$ *è un isomorfismo di* $W^{1-\theta,p}(R^{n-1})$ *su* $W^{1-\theta-m,p}(R^{n-1})$ *per* m *intero* ≥ 1 *e* $0 < \theta < 1$.

Infatti $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di $W^{1,p}(R^{n-1})$ su $W^{1-m,p}(R^{n-1})$ e di $W^{0,p}(R^{n-1})$ su $W^{-m,p}(R^{n-1})$, come si può ottenere direttamente ricorrendo al teorema di MIHLIN già citato [33].

Ne segue (teor. 1.1 e teor. 1.2) che $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di $T(p,\alpha; W^{1,p}(R^{n-1}),$ $W^{0,p}(R^{n-1})) = W^{1-\theta,p}(R^{n-1})$ su

$$T(p, \alpha; W^{1-m,p}(R^{n-1}); W^{-m,p}(R^{n-1}) = (T(p', -\alpha; W^{m,p'}(R^{n-1}),$$

$$W^{m-1,p'}(R^{n-1}))' = (W^{m-(1/p'-\alpha),p}(R^{n-1}))' = W^{-m+1-\theta,p}(R^{n-1}).$$

Si ha poi

b) $\mathcal{G}^{(m)}$ *è un isomorfismo di* $W^{2-\theta,p}(R^{n-1})$ *su* $W^{2-\theta-m,p}(R^{n-1})$ *per* m *intero* ≥ 1, $0 < \theta < 1$.

Infatti, se $m = 1$, la cosa rientra nella Prop. 1.4. Se m è ≥ 2 allora dal fatto che $\mathcal{G}^{(m)}$ è un isomorfismo di $W^{2,p}(R^{n-1})$ su $W^{2-m,p}(R^{n-1})$ e di $W^{1,p}(R^n)$ su $W^{1-m,p}(R^{n-1})$ si ricava per la Prop. 1.4, che lo è anche da

$$W^{2-\theta,p}(R^{n-1}) \text{ su } T(p, \alpha; W^{2-m,p}(R^{n-1}), W^{1-m,p}(R^{n-1})) =$$

$$= (T(p', -\alpha; W^{m-1,p'}(R^{n-1}), W^{m-2,p'}(R^{n-1})))' = (W^{m-1-(1/p'-\alpha),p'}(R^{n-1}))' =$$

$$= W^{2-\theta-m,p}(R^{n-1}).$$

Da *a)* e *b)* segue per interpolazione e utilizzando la (11.3) nel caso $s = 1$ che

$$\mathcal{G}^{(m)} \text{ è un isomorfismo di } W^{2-\theta-1/p,p}(R^{n-1}) \text{ su}$$

$$T(p, \alpha; W^{2-m-1/p,p}(R^{n-1}), W^{1-m-1/p,p}\, R^{n-1}))$$

per $\theta + \dfrac{1}{p}$ non intero (se $p \neq 2$).

Dunque si conclude che per m intero ≥ 1 e $\theta + \frac{1}{p}$ non intero (se $p \neq 2$):

$$T(p, \alpha ; W^{2-m-1/p,p}(R^{n-1}), W^{1-m-1/p,p}(R^{n-1})) = \mathcal{G}^{(m)} W^{2-\theta-1/p,p}(R^{n-1}),$$

dove l'ultimo spazio è lo spazio delle trasformate mediante $\mathcal{G}^{(m)}$ delle $u \in W^{2-\theta-1/p,p}(R^{n-1})$, con norma ovvia.

Per ottenere la (11.3) anche per s intero ≤ 0 basterà verificare che

$$\mathcal{G}^{(m)} W^{2-\theta-1/p,p}(R^{n-1}) = W^{2-m-\theta-1/p,p}(R^{n-1})$$

e ciò si ottiene subito da *a*) o da *b*) a seconda che $1 - \theta - \frac{1}{p}$ è < 0 oppure > 0.

Possiamo dunque concludere con il seguente

TEOR. 11.4. *Per s intero qualunque, $1 < p < +\infty, 0 < \theta < 1$, e $\theta + \frac{1}{p}$ non intero (se $p \neq 2$), $\frac{1}{p} + \alpha = \theta$, si ha,*

$$T(p, \alpha ; W^{s+1-1/p,p}(R^{n-1}), W^{s-1/p,p}(R^{n-1})) = W^{s+1-\theta-1/p,p}(R^{n-1}).$$

E infine da questo teorema deduciamo la validità del teor. 11.3 anche per s intero ≤ 0; precisamente

TEOR. 11.5. *Per s intero qualunque, $1 < p < +\infty, 0 < \theta < 1, \theta + \frac{1}{p}$ non intero (se $p \neq 2$), si ha*

$$T(p, \alpha ; W^{s+1-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma)) = W^{s+1-\theta-1/p,p}(\Gamma), \qquad \frac{1}{p} + \alpha = \theta.$$

Infatti si considerino le applicazioni $u \to \Phi_i u$ introdotte nel n. 2.5; con ragionamento analogo a quello ivi fatto per la Prop. 2.8, sfruttando ora il teor. 11.4, si ottiene

$$T(p, \alpha ; W^{s+1-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma)) \subset W^{s+1-\theta-1/p,p}(\Gamma). \tag{11.4}$$

Di qui per dualità si ottiene

$$T(p', -\alpha ; W^{-s+1/p,p'}(\Gamma), W^{-s-1+1/p,p'}(\Gamma)) \supset W^{-s-1+\theta+1/p,p'}(\Gamma)$$

vale a dire, tenuto conto che s è di segno qualunque e p' può essere un qualunque numero > 1, si ha l'inclusione inversa della (11.4) c. v. d.

11.4. Ritorniamo al problema di DIRICHLET, riprendendo il teor. 11.2; in esso c'è la limitazione che se $p \neq 2$ sia $r - \frac{1}{p}$ non intero. Questa limitazione si può attenuare, ottenendo un teorema di esistenza e di unicità e di dipendenza continua dai dati f e g_j (non però di isomorfismo come è il teor. 11.2), precisamente

TEOR. 11.6. *Nell'ipotesi J) del n. 7.1 per ogni $p > 1$ e ogni r reale tale che $0 \leq r \leq m$ e inoltre, se è $p < 2$, $r - \frac{1}{p}$ non intero, assegnati comunque $f \in W^{-m+r,p}(\Omega)$ e $g_i \in W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \ldots, m-1$, esiste una e una sola $u \in W^{m+r,p}(\Omega)$ tale che*

$$Au = f; \quad \gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1$$

e u dipende con continuità dai dati f e g_j.

Infatti assegnati f e g_j per il teor. 5.2 esiste una $v \in W^{m+r,p}(\Omega)$ tale che $\gamma_j v = g_j$; risolviamo allora con il teor. 11.1 il problema $Aw = f - Av$, $w \in W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$. Allora $u = v + w$ appartiene a $W^{m+r,p}(\Omega)$ e risolve il problema dato; essa è poi unica perchè è contenuta in $W_0^{m,p}(\Omega)$ e dipende con continuità dai dati f e g_j per il teor. 5.2 e il teor. 11.1.

Sfortunatamente dunque se è $1 < p < 2$ nei teoremi precedenti non rientra il caso in cui $r - \frac{1}{p}$ sia intero. Ma ovviamente si può ottenere un risultato anche in questo caso, sia pure meno preciso; osservato che $W^{m+r-\varepsilon-j-1/p,p}(\Gamma) \supset W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e che per ε sufficientemente piccolo, se $r - \frac{1}{p}$ è intero, $r - \frac{1}{p} - \varepsilon$ non è intero, si ha il seguente

COROLLARIO 11.6. *Nell'ipotesi J) del n. 7.1, per ogni $p > 1$ e r reale tale che $0 \leq r \leq m$ e $r - \frac{1}{p}$ è intero, assegnati comunque $f \in W^{-m+r,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \ldots, m-1$, esiste una e una sola soluzione u del problema*

$$Au = f; \quad \gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1$$

appartenente a $W^{m+r-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

11.5. Sempre prendendo come punto di partenza i teor. 8.1 e 8.2, si può interpolare ricorrendo al metodo basato sulle funzioni di variabile complessa esposto nel n. 3 e alle definizioni date degli spazi $H^{s,p}(\Omega)$; abbiamo già fatto ciò almeno in parte nel n. 8.3.

Poichè per s intero $H^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$ il teor. 7.2 e il teor. 8.1 ci assicurano che A è un isomorfismo di $H^{2m,p}(\Omega) \cap H_0^{m,p}(\Omega)$ su $H^{0,p}(\Omega)$ e di $H_0^{m,p}(\Omega)$ su $H^{-m,p}(\Omega)$; di qui per interpolazione il teor. 3.1 assicura che

TEOR. 11.7. *Nell'ipotesi J) del n. 7.1, per ogni $p > 1$ $u \to Au$ è un isomorfismo di $H^{m+r,p}(\Omega) \cap H_0^{m,p}(\Omega)$ su $H^{-m+r,p}(\Omega)$ per ogni r reale tale che $0 \leq r \leq m$.*

Più complessa è la situazione per il problema non omogeneo; dai teor. 7.3 e 8.2, utilizzando sempre il teor. 3.1, si ottiene subito

TEOR. 11.8. *Nell'ipotesi J) del n. 7.1 per ogni $p > 1$, $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $H^{2m-m\theta,p}(\Omega)$ su $H^{-m\theta,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} [W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma), W^{m-j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$ per ogni $0 < \theta < 1$.*

L'interpretazione di $[W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma); W^{m-j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)]$ se θm è intero è data dalla (8.7), la quale assicura dunque che se *θm è intero*, questo spazio coincide con $W^{2m-\theta m-j-1/p,p}(\Gamma)$. Nel caso generale, θm non intero, l'interpretazione si presenta complessa. Noi ci limiteremo qui, sfruttando i risultati del n. 3, a ricavare un corollario del teor. 11.8, che ci sembra interessante. Osserviamo dunque che per il teor. 3.2, tenuto conto della definizione degli spazi $H^{s,p}(\Gamma)$ mediante un sistema di carte locali, riconducendoli agli spazi $H^{s,p}(R^{n-1})$ (v. n. 4.3), si ottengono le seguenti relazioni di inclusione per ogni $\varepsilon > 0$:

$$H^{2m-j-1/p+\varepsilon,p}(\Gamma) \subset W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma); \; H^{m-j-1/p+\varepsilon,p}(\Gamma) \subset W^{m-j-1/p,p}(\Gamma).$$

e quindi

$$[H^{2m-j-1/p+\varepsilon,p}(\Gamma), H^{m-j-1/p+\varepsilon,p}(\Gamma); \delta(\theta)] \subset [W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma), W^{m-j-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)].$$

Ma il primo spazio per la Prop. 3.4 (valida anche per gli $H^{s,p}(\Gamma)$) coincide con $H^{2m-\theta m-j-1/p+\varepsilon,p}(\Gamma)$. Applichiamo dunque il teor. 11.8, sostituendo in esso θ con $\theta + \dfrac{\varepsilon}{m}$ (ε sufficientemente piccolo perchè $0 < \theta + \varepsilon/m < 1$); si ottiene allora

COROLLARIO 11.8. *Nelle ipotesi J) del n. 7.1 per ogni $p > 1$, assegnati $f \in H^{-m\theta,p}(\Omega)$ e $g_j \in H^{2m-\theta m-j-1/p,p}(\Gamma)$, $0 < \theta < 1$, esiste una e una sola soluzione del problema*

$$Au = f, \quad \gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

che appartiene a $H^{2m-\theta m-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

n. 12. Applicazione dell'interpolazione; caso dell'integrale di Dirichlet non finito.

Riprendiamo ora il problema di DIRICHLET negli spazi $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$ $0 \leq s \leq m$, introdotti nel n. 10, problema che nel n. 10 abbiamo studiato e risolto per

s intero. Ricordiamo anzitutto che il teor. 10.1 si può in sostanza enunciare nel seguente modo: nelle ipotesi colà fatte *l'operatore* $\{A, \vec{\gamma}\}$ *ammette un operatore inverso* $G = \{\vec{A}, \gamma\}^{-1}$ *il quale è lineare e continuo da*

$$W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p,p}(\Gamma) \quad su \quad \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$$

pee ogni $s = 0, 1, \ldots, m-1$.

Applicando allora il metodo d'interpolazione del n. 1 tra i casi $s+1$ e s si ottiene

a) G *è lineare e continuo da* $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} T(p, \alpha;\, W^{s+1-j-1/p,p}(\Gamma),$ $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma))$ *su* $T(p, \alpha;\, \mathcal{W}_A^{s+1,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega))$.

Se allora applichiamo il teor. 11.5 otteniamo

b) G *è lineare e continuo da* $W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{s+1-j-1/p-\theta,p}(\Gamma)$, *su* $T(p, \alpha;\, \mathcal{W}_A^{s+1,p}(\Omega), \mathcal{W}^{s,p}(\Omega))$ *per* $0 < \theta < 1$ *e, se* $p \neq 2$, $\theta + \dfrac{1}{p}$ *non intero,* $\left(\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta\right)$.

Anche senza interpretare con precisione lo spazio

$$T(p, \alpha;\, \mathcal{W}_A^{s+1,p}(\Omega), \mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega))$$

possiamo però affermare, in virtù della Prop. 2.4, che esso è contenuto nello spazio $W^{s+1-\theta,p}(\Omega)$. Possiamo dunque concludere, ponendo $r = s + 1 - \theta$, con il seguente:

Teor. 12.1. *Nell'ipotesi* J) *del n.* 7.1 *per ogni* r *reale tale che* $0 \leq r \leq m$ *e inoltre, se è* $p \neq 2$, *tale che* $r - \dfrac{1}{p}$ *non sia intero, il problema di Dirichlet*

$$\left\{ \begin{aligned} & Au = f \\ & \gamma_j u = g_j \end{aligned} \right. \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{12.1}$$

ammette qnalunque siano $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ *e* $g_j \in W^{r-j-1/p,p}(\Gamma)$ *una e una sola soluzione* $u \in W^{r,p}(\Omega)$; *ed essa dipende con continuità dai dati* f *e* g_j.

Nel caso $p \neq 2$ e $r - \dfrac{1}{p}$ intero, benchè l'enunciato del teor. 12.1 non sia probabilmente più vero, si può però dallo stesso teorema ricavare un risultato «approssimato», che ci sembra abbia comunque interesse.

Poichè, se $g_j \in W^{r-j-1/p,p}(\Gamma)$, allora g_j appartiene anche a ogni spazio $W^{r-j-1/p-\varepsilon,p}(\Gamma)$ per ogni $\varepsilon > 0$, dal teor. 12.1 si ricava il

TEOR. 12.2. *Nell'ipotesi J) del n. 7.1 per ogni r reale, $0 \leq r \leq m$ il problema di Dirichlet* (12.1) *ammette qualunque siano $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{r-j-1/p,p}(\Gamma)$ una e una sola soluzione u che appartiene allo spazio $W^{r-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.*

OSSERVAZIONE.

a) Osserviamo subito che il risultato qui ottenuto generalizza nel caso $m = 1$ i risultati a integrali di DIRICHLET non finito per le equazioni del secondo ordine dovuti a CIMMINO [12].

b) Per il problema $\Delta u = 0$, $\gamma_0^u = g_0$, $g_0 \in L^p(\Gamma)$, nel caso $n = 2$ e che Ω sia un cerchio si veda anche [49] cap. XIV.

n. 13. Considerazioni finali.

Desideriamo terminare questo lavoro con alcune considerazioni sugli ulteriori sviluppi che esso può avere.

Lo schema fondamentale seguito nei lavori [27] e [28] (consistente nelle tre tappe: esistenza e regolarizzazione delle soluzioni, «dualizzazione» dei risultati, interpolazione tra i risultati estremi), non è stato seguito perfettamente nel corso di questo lavoro; soprattutto le difficoltà dei problemi di interpolazione hanno via via consigliato l'uso composto, a volte alternato, dei tre strumenti di lavoro. I risultati che così abbiamo ottenuto non hanno la compiutezza di quelli per $p = 2$, che già si conoscevano (per il problema a integrale di Dirichlet finito) o che sono stati da noi ottenuti in [27] e [28] (per il problema a integrale di Dirichlet non finito). Tuttavia ci sembrano soddisfacenti.

Molte questioni si potrebbero approfondire maggiormente come si è fatto nei precedenti lavori [27] e [27]; prima fra tutte la questione della *interpretazione del modo di assumere i dati al contorno $\gamma_j u = g_j$*, nel senso di una convergenza «in media» su un opportuno sistema di varietà $\{\Gamma_\varrho\}$ tendenti per $\varrho \to 0$ a Γ (v. in particolare il n. 3 di [28]). Anche ora la risposta è positiva e lo studio analogo non presenta grosse difficoltà. Ma non riteniamo di dover allungare troppo questo lavoro.

Sempre rimanendo nell'ambito del problema di DIRICHLET ci sono poi molti problemi interessanti che andrebbero studiati. Noi abbiamo sostanzialmente fatto uso di due tipi di procedimenti di interpolazione; sarebbe interessante usarne altri, ad es. quelli introdotti da GAGLIARDO (v. [14] e [15]). Certamente si possono ottenere risultati positivi e interessanti, utilizzando i lavori [23] e [26] nella loro completezza e cioè facendo uso degli spazi del tipo

$$T(q.\beta;\ \dot{W}^{s,p}(\Omega),\ \dot{W}^{\sigma,p}(\Omega)) \quad \text{con} \quad q \neq p \quad \text{e} \quad \beta \neq \alpha;$$

per es. si potrebbe ottenere che A è un isomorfismo di

$$T(q, \beta\,;\; W^{m+r+1,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega),\; W^{m+r,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)) \quad \text{su}$$
$$T(q, \beta\,;\; W^{-m+r+1,p}(\Omega),\; W^{-m+r,p}(\Omega))$$

e interpretare gli spazi T che compaiono attraverso [23].

Lasciando poi il problema di DIRICHLET, si presenta l'estensione dei risultati ottenuti ad altri problemi al contorno. Nel caso $p = 2$ abbiamo già studiato nel lavoro [28] il problema di NEUMANN e quello di derivata obliqua regolare. I risultati ottenuti nel presente lavoro per il teorema di DIRICHLET si possono analogamente estendere a questi problemi. Non vogliamo però appesantire troppo questo lavoro e ci riserviamo perciò di ritornare in un prossimo lavoro sui problemi di NEUMANN e di derivata obliqua regolare e su altri problemi al contorno negli spazi L^p. Desideriamo solo mettere in evidenza un *risultato relativo al problema di Neumann e un teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su* $W^{m,p}(\Omega)$, m intero ≥ 1, che ne segue (le dimostrazioni saranno date nel prossimo lavoro):

a) In ipotesi di unicità per il problema di NEUMANN, per es. se l'operatore A è $H^m(\Omega)$-ellittico o se valgono le *condizioni algebriche complementari* su Γ (« complementing condition » del lavoro [2]), si può ottenere che l'*operatore*

$$u \to \{Au, Su\} \text{ \emph{è un isomorfismo di} } D_A^{m,p}(\Omega) \text{ \emph{su} } L^p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{-m+j+1-1/p,p}(\Gamma)$$

dove $D_A^{m,p}(\Omega)$ è lo spazio delle $u \in W^{m,p}(\Omega)$, tali che $Au \in L^p(\Omega)$ e $Su = \{S_0 u, \dots, S_{m-1} u\}$, essendo S_j gli operatori che compaiono nelle formule di GREEN (6.3).

b) Fondandosi su questo teorema si può poi ottenere il seguente teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su $W^{m,p}(\Omega)$, m intero ≥ 1, che estende al caso $m \geq 1$ quello ben noto per $m = 0$, e che non ci sembra sia mai stato finora dimostrato([15]): *per ogni funzionale lineare e continuo* $u \to L(u)$ *su* $W^{m,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, m *intero* ≥ 1, *esiste un elemento* $v \in W^{m,p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} \neq 1$, *tale che*

$$L(u) = \sum_{|k| \leq m} \int_\Omega D^k u \, D^k v \, dx.$$

([15]) Durante la correzione delle bozze abbiamo saputo che il risultato è stato ottenuto, indipendentemente e con altro metodo, anche da N. FRITZ e A. N. MILGRAM. Il nostro teorema si può estendere in modo opportuno anche al caso degli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ con s reale.

n. 14. Quadro riassuntivo dei risultati e dei metodi.

CAP. I - SPAZI DI DISTRIBUZIONI.

Richiami di due procedimenti di interpolazione, uno reale (metodo di tracce) e l'altro complesso.

Spazi di SOBOLEV: $W^{s,p}(R^n)$, $W^{s,p}(\Omega)$, $W^{s,p}(\Gamma)$ con s *reale*, $p>1$.

Spazi $H^{s,p}(R^n)$: definiti per trasformata di FOURIER $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}u)\in$ $\in L^p(R^n)$.

Spazi $H^{s,p}(\Omega)$: definiti per interpolazione complessa.

Spazi $H^{s,p}(\Gamma)$: definiti per «carte locali».

Relazione tra gli spazi $W^{s,p}$ e $H^{s,p}$ e proprietà di tracce.

CAP. II - PROBLEMA DI DIRICHLET (esistenza e unicità).

a) *Problema a «integrale di Dirichlet» finito*

I⁰) *Caso omogeneo*: $Au=f$, $\gamma_j u=0$ $j=0,\dots,m-1$

1) Si parte da: *A è un isomorfismo di* $W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$ *su* $L^p(\Omega)$

2) Se ne deduce con dimostrazione diretta utilizzando i risultati di AGMON [1]:

TEOR. 8.1: *A è un isomorfismo di* $W^{m+r,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m+r,p}(\Omega)$, r *intero* $=0,1,\dots,m$.

Il teor. 8.1 si dimostra anche per interpolazione complessa (n. 8.2), suppostolo vero per $r=m$ e $r=0$.

3) Si interpola il teor. 8.1 tra r e $r+1$ sia con il metodo reale di tracce, sia con il metodo complesso, ottenendo:

TEOR. 11.1: *A è un isomorfismo di* $W^{m+s,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m+s,p}(\Omega)$

TEOR. 11.7: *A* » » » » $H^{m+s,p}(\Omega)\cap H_0^{m,p}(\Omega)$ *su* $H^{-m-s,p}(\Omega)$

s *reale*, $0\le s\le m$.

II⁰) *Caso non omogeneo*: $Au=f$, $\gamma_j u=g_j$ $j=0,\dots,m-1$

1) Si ottiene direttamente riportandolo al teor. 8.1 il

TEOR. 8.2: $\{A,\vec{\gamma}\}$ *è un isomorfismo di* $W^{m+r,p}(\Omega)$ *su*

$$W^{-m+r,p}(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1}W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma)$$

r *intero* $=0,1,\dots,m$, $\vec{\gamma}u=\{\gamma_0 u,\dots,\gamma_{m-1}u\}$.

2) Si interpola il teor. 8.2 tra i casi r e $r+1$, *r intero*, mediante il metodo reale ottenendo

$$\{A, \vec{\gamma}\} \text{ è un isomorfismo di } W^{m+r+1-\theta,p}(\Omega) \text{ su}$$

$$T(p, \alpha; W^{-m+r+1,p}(\Omega), W^{-m+r,p}(\Omega)) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} T(p, \alpha; W^{m+r+1-j-1/p,p}(\Gamma), W^{m+r-j-1/p,p}(\Gamma)).$$

Ma è ancor più utile riportarsi al caso omogeneo 3) (teor. 11.1) utilizzando i risultati di *tracce frazionarie* di USPENSKII [48]; si ha così

TEOR. 11.2: *$\{A, \vec{\gamma}\}$ è un isomorfismo di $W^{m+s,p}(\Omega)$ su*

$$W^{-m+s,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{m+s-j-1/p,p}(\Gamma)$$

per s reale, $0 \leq s \leq m$, con $s - \dfrac{1}{p}$ non intero se $p \neq 2$.

Per confronto tra i due risultati (procedimento « misto ») si ottiene tra l'altro il seguente risultato relativo agli spazi di interpolazione:

TEOR. 11.3. $T(p, \alpha; W^{s+1-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma)) = W^{s+1-\theta-1/p,p}(\Gamma)$ *s intero $\geq 1, \theta + \dfrac{1}{p}$ non intero (se $p \neq 2$), $0 < \theta < 1$.*

Infine il teor. 11.3 si estende al caso di *s intero qualunque* con metodo diretto.

3) Nel caso $s - \dfrac{1}{p}$ intero, che sfugge al teor. 11.2, si può dare un risultato « approssimato »

COROLLARIO 11.6: *Per ogni $f \in W^{-m+s,p}(\Omega)$ e $g_j \in W^{m+s-j-1/p,p}(\Gamma)$ esiste e una sola soluzione del problema che appartiene a $W^{m+s-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.*

4) Si può anche interpolare il teor. 8.2 tra i casi $r = 0$ e $r = m$ con il metodo complesso, ma con minor successo. I risultati più significativi in questo senso sono la Prop. 8.1, che si ottiene col procedimento « misto », confrontando con lo stesso teor. 8.2, e che riguarda gli spazi di interpolazione:

PROP. 8.1: $[W^{r-1/p,p}(\Gamma), W^{s-1/p,p}(\Gamma); \delta(\theta)] = W^{(1-\theta)r+\theta s,p}(\Gamma)$ *per r e s interi, $s \geq 1$, $r \geq 2s$, $0 < \theta < 1$, $\theta(r - s)$ intero*;

e infine il seguente risultato « approssimato »

COROLLARIO 11.8: *Per ogni $f \in H^{-m\theta,p}(\Omega)$ e $g_j \in H^{2m-\theta m-j-1/p,p}(\Gamma)$, $0 < \theta < 1$, esiste una e una sola soluzione del problema che appartiene a $H^{2m-\theta m-\varepsilon,p}(\Omega)$.*

b) *Problema a « integrale di Dirichlet non finito », caso non omogeneo.*

Si introducono gli spazi $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\Omega), Au \in W^{-m,p}(\Omega)\}$ $0 \leq s \leq m$.

1) Anzitutto si dimostra direttamente che

TEOR. 9.1 : $\{A, \vec{\gamma}\}$ *è un isomorfismo di* $\mathcal{W}_A^{0,p}(\Omega)$ *su*

$$W^{-m,p}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{-j-1/p,p}(\Gamma).$$

2) Si passa poi, utilizzando tra l'altro AGMON [1], al

TEOR. 10.1 : *Per ogni* $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ *e* $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Omega)$ *con* s *intero tra* 0 *e* m, *esiste una e una sola soluzione del problema che appartiene a* $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$.

3) Infine interpolando con il metodo delle tracce si ottiene

TEOR. 12.1 : *Per ogni* $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ *e* $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ s *reale tra* 0 *e* m, *inoltre* $s - \dfrac{1}{p}$ *non intero se* $p \neq 2$, *esiste una e una sola soluzione del problema che appartiene a* $\mathcal{W}_A^{s,p}(\Omega)$.

Nel caso $s - \dfrac{1}{p}$ intero si ha il risultato approssimato:

TEOR. 12.2 : *Per ogni* $f \in W^{-m,p}(\Omega)$ *e* $g_j \in W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$ s *reale* $0 \leq s \leq m$ *esiste una e una sola soluzione del problema che appartiene a* $\mathcal{W}_A^{s-\varepsilon,p}(\Omega)$ *per ogni* $\varepsilon > 0$.

BIBLIOGRAFIA

1 - S. AGMON: *The L_p approach to the Dirichlet problem I*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa III, 13 (1959) pp. 405-448.

2 - S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG: *Estimates near the boundary.*, Comm. Pure Applied Math.. Vol. XII (1959), pp. 623-727.

3 - N. ARONSZAJN: *Boundary value of functions with finite Dirichlet integral*, Tech. Report. n. 14, Univ. of Kansas, (1955), pp. 77-94.

4 - N. ARONSZAJN: *Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems*, Conferenza di Berkeley, 1960, (in corso di stampa).

5 - N. ARONSZAJN, A. N. MILGRAM - *Differential operators on Riemaniam manifolds*, Rend. Circ. Matem. Palermo, Vol. 2 (1952), pp. 1-61.

6 - N. ARONSZAJN, K. T. SMITH: *Theory of Bessel Potentials*, P. I (in corso di stampa sugli Annales Inst. Fourier), P. II (in preparazione).

7 - V. N. BABITCH: *Il problema del prolungamento alla frontiera* (in russo) Ouspechi Mat. Nauk., t. 8 (1953), pp. 111-113.

8 - V. N. BABITCH, L. N. SLOBODETSKII: *Sulla limitatezza dell'integsale di Dirichlet* (in russo) Doklady Akad. Nauk. t. 106 (1956), pp. 604-608.

9 - F. E. BROWDER: *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems.* Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 45 (1959), pp. 365-372.

10 - F. E. BROWDER: *A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems*, Indagationes Math. XXII, (1960), pp. 145-169.

11 - A. P. CALDERON: *Intermediate spaces and interpolation*, Convegno di Varsavia, Settembre 1960 (in corso di stampa).

11 bis - S. CAMPANATO: *Teoremi di interpolazione per trasformazioni tra spazi funzionali.* Spazi di S. L. SOBOLEV (in corso di stampa su Ric. di Mat.).

12 - G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 61 (1937) pp. 177-224.

13 - E. GAGLIARDO: *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957) pp. 284-305.

14 - E. GAGLIARDO: *Interpolation d'espaces de Banach et applications*, C. R. Acad. Sci, Paris, (I), (II), (III), Vol. 248 (1959), pp. 1912-1914; 3388-3390; 3517-3518.

15 - E. GAGLIARDO: *Interpolazioni di spazi di Banach e applicazioni*, Ricerche di Mat., IX (1960), pp. 58-81.

15 bis - E. GAGLIARDO: *Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali. Teoremi di compattezza e di chiusura*, Rend. Acad. Sc. di Napoli, 4, XXVII, (1960).

16 - L. HÖRMANDER: *Définitions of maximal differential operators*, Arkiv for Math., t. 3 (1958), p. 500-504.

17 - L. HÖRMANDER: *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Mat., 104 (1960), pp. 93-139.

18 - A. I. KOSELEV: *Limitazioni a priori di soluzioni generalizzati di equazioni e sistemi ellittici* (in russo) Ouspechi Mat. Nauk., 13 (2958), pp. 29-89.

19 - S. G. KREIN: *Un teorema di interpolazione nella teoria degli operatori* (in russo) Doklady Akad. Nauk, t. 130 (1957), pp. 1162-1165.

20 - J. L. LIONS: *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie, 50 (1958), pp. 419-432.

21 - J. L. LIONS: *Un théorème de traces; applications*, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 249 (1959), pp. 2259-2261.

22 - J. L. LIONS: *Conditions aux limites de Visik Soboleff et problèmes mixtes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 244 (1957), pp. 1126-1128.

22 bis - J. L. LIONS: *Sur les problèmes aux limites du type de derivée oblique*, Annals of Math. 64 (1956) pp. 206-239.

23 - J. L. LIONS: *Théorèmes de trace et d'interpolation.* (I) Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XII (1959), pp. 389-403.

24 - J. L. LIONS: *Sur certaines théorèmes d'interpolation*, C. R. Acad. SC. Paris, t. 250 (1960), pp. 2104-2106.

25 - J. L. LIONS: *Une construction d'espaces d'interpolation*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251 (1960), pp. 1851-1855.

26 - J. L. LIONS: *Sur les espaces d'interpolation, dualité* (in corso di stampa su Math. Scand.)

27 - J. L. LIONS, E. MAGENES: *Problemi al contorno non omogenei.* (I); Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XIV (1960), pp. 269-308.

28 - J. L. LIONS, E. MAGENES: *Problèmes aux limites non homogènes.* (II), Ann. Inst. Fuorier, t. 11 (1961), pp. 137-178.

29 - J. L. LIONS, E. MAGENES: *Remarque sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251 (1960), pp. 2118-2120.

30 - P. I. LIZORKIN: *Proprietà di frontiera di funzioni di classi con «peso»* (in russo), Doklady Akad. Nauk, t. 132 (1960), pp. 514-517.

31 - E. MAGENES: *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Ann. Mat. pura ed Appl., IV, 48 (1959), pp. 257-279.

32 - E. MAGENES, G. STAMPACCHIA: *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, III, 12 (1958), pp. 247-357.

33 - S. G. MIHLIN: *Sui moltiplicatori degli integrali di Fourier* (in russo) Doklady Akad. Nauk, t. 109 (1956) pp. 701-703.

34 - S. M. NIKOLSKIJ: Mat. Sbornik, t. 75 (1953), pp. 261.

35 - S. M. NIKOLSKIJ: Doklady Akad. Nauk, t. 88 (1553), p. 409.

36 - J. PEETRE: *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels*, Lund. Université, 1959.

37 - G. PRODI: *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, Rend. Sem. Mat. Padova 26 (1959), pp. 36-40.

38 - G. PRODI: *Tracce di funzioni con derivata di ordine l...*, Rend. Sem. Mat. Padova, 28 (1958), pp. 402-452.

39 - M. SCHECHTER: *Solution of the Dirichlet problem for systems not necessarily strongly elliptic*, Comm. Pure Applied. Math., 12 (1959), pp. 241-247.

40 - M. SCHECHTER: *General boundary value problems for elliptic partial differeutial equations*, Comm. Pure Applied, Math. XV (1959) pp. 457-486.

41 - L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, t. I, 1950 (2e édition, 1957); t. II, 1951.

42 - L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* (I), (II), Annales Inst. Fourier, t. VII (1957), pp. 1-139, t. VIII (1958), pp. 1-209.

43 - L. N. SLOBODETSKII: *Valutazione in L^p delle soluzioni dei sistemi ellittici* (in russo) Doklady Akad. Nauk, t. 123 (1958), pp. 616-619.

44 - L. N. SLOBODETSKII: *Gli spazi di S. L. Sobolev d'ordine frazionario e loro applicazioni ...* (in russo), Doklady Akad. Nauk, t. 118 (1957) pp. 243-246.

45 - S. L. SOBOLEV: *Applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica* (in russo), Leningrad, 1950.

46 - S. L. SOBOLEV, I. M. VISHIK: *Nuova forma generale dei problemi ai limiti* (in russo), Doklady Akad. Nauk, t. 111 (1956), pp. 521-523.

46 bis - V. A. SOLONNIKOV - *Su certe proprietà degli spazi di ordine frazionario* (in russo), Doklady Akad. Nauk., t. 134 (1960), pp. 282-285.

46 ter - E. M. STEIN - *The characterization of functions arising as potentials,* Bull. Amer. Math. Soc., vol 67 (1961), pp. 102-104.

47 - S. V. USPENSKII: *Un teorema di immersione per le classi di L. S. Sobolev di ordine frazionario* W_p^r (in russo), Doklady Akad. Nauk. t. 130 (1960), pp. 992-993.

48 - S. V. USPENSKII: *Proprietà delle classi* W_p^r *con una derivata frazionaria su varietà differenziabili* (in russo), Doklady Akad. Nauk. t. 132 (1960) pp. 60-62.

49 - A. ZYGMUND: *Trigonometrical Series,* I e II, Cambridge 1959.