PIERO VILLAGGIO

Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo di stabilità dell'equilibrio elastico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 1-2 (1961), p. 25-40

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_1-2_25_0>

SUI PROBLEMI AL CONTORNO PER SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL TIPO DI STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Memoria di PIERO VILLAGGIO (a Genova)

Introduzione.

Il presente lavoro è dedicato allo studio di un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del secondo ordine intese come una generalizzazione delle equazioni differenziali del problema di indifferenza dell'equilibrio elastico nella forma per esso dedotta da E. TREFFTZ. [26] [27]

Secondo l'impostazione generalizzata dei problemi al contorno [17] [18] viene assegnato l'operatore differenziale, la sua decomposizione in operatori elementari e la classe ove si cercano le soluzioni attraverso lo studio di una forma sesquilineare in una particolare varietà V che determina una parte delle condizioni al contorno, le rimanenti presentandosi come condizioni naturali, legate alla formula di Green [18].

La trattazione può riguardare così diversi problemi al contorno (problema di Dirichlet, Neumann, misto e di trasmissione), semplicemente precisando le proprietà della varietà V.

Le condizioni che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione, si traducono anche in relazioni algebriche tra i coefficienti dell'operatore, utili anche per lo studio di ulteriori proprietà delle soluzioni come la regolarizzazione e l'analicità. Dette condizioni algebriche hanno uno specifico significato meccanico che è stato reso esplicito e discusso nei due casi fisicamente interessati in cui n (numero delle variabili indipendenti) è uguale a due e tre. Si deducono in tal modo alcuni criteri sufficienti di stabilità di un sistema elastico. Tali criteri si possono anche estendere a sistemi non limitati semplicemente precisando in maniera diversa le classi in cui si cercano le soluzioni e assegnando opportune condizioni sul dominio aperto in cui il problema è formulato. Anche l'impostazione del problema, che si discosta da quella tradizionale, è in effetti la più aderente all'interpretazione meccanica del fenomeno fisico. È infatti noto che spesso si traducono in forma differenziale problemi che hanno la loro naturale schematizzazione in relazioni del tipo integrale; e la prima richiede onerose ipotesi di regolarità sui dati, spesso incompatibili con quelli fisici (1).

La trattazione è svolta nell'ipotesi di condizioni omogenee al contorno perchè è possibile, con un noto procedimento (7), riportare il caso non omogeneo a quello omogeneo mediante sottrazione dall'incognita di una opportuna funzione.

1. Generalizzazione del criterio di stabilità [26].

Lo stato di equilibrio statico di un corpo elastico omogeneo e isotropo, nell'ipotesi fondamentale della teoria lineare dell'elasticità di poter trascurare i prodotti nei gradienti di spostamento, è, in virtù del teorema di unicità di Kirchhoff [13], univocamente determinato: ad una assegnata distribuzione di forze esterne, superficiali e di volume, corrisponde cioè una ed una sola configurazione di equilibrio.

La classe dei fenomeni di instabilità è invece caratterizzata dalla non validità del teorema di Kirchhoff, circostanza questa che può verificarsi quando i gradienti di spostamento non siano assimilabili a quantità infinitesime. Tale ragione giustifica il fatto che l'instabilità è stata storicamente studiata come un fenomeno specifico delle strutture « a grande deformazione » come travi sottili compresse parallelamente all'asse (caso di Eulero [13], Lagrange [13], Levy [13], Greenhill [13], Engesser [13], Timoshenko [13], Grammel [13], Bleich [13] ecc.), travi a sezione alta e stretta inflesse, (casi di Prandtl [13], Michell [13], ecc.), oppure soggette a una distribuzione uniforme di carichi di origine aerodinamica (Reissner [13]) lastre piane sottili caricate nel piano medio (Bryan [13], Reissner [13] ecc.) lastre curve con carichi agenti nel piano tangente alla superficie media (Zoelly [13], Föppl [13], Geckeler [13] ecc.).

A E. Trefftz [27] è dovuta la esposizione di una limpida teoria generale della stabilità dell'equilibrio elastico, fondata sul concetto di « indifferenza » dell'equilibrio stesso. Un corpo elastico si dice in equilibrio indifferente se accanto alla configurazione equilibrata « fondamentale » esiste un intorno di configurazioni « variate » tutte equilibrate: da tale criterio si possono dedurre immediatamente [26] [27] le equazioni generali di indifferenza dell'equilibrio elastico. Esse costituiscono un sistema differenziale

(1) v. [18], n. 4, nota (13).

alle derivate parziali omogeneo aventi come coefficienti le componenti del tensore degli sforzi dello stato fondamentale. I valori di tali funzioni che siano autovalori del problema rappresentano notoriamente le cosidette tensioni critiche del sistema elastico.

Le equazioni così ottenute sono lineari nelle funzioni di spostamento incognite in virtù delle ipotesi che si possa trascurare l'influenza dello stato di deformazione sullo stato di tensione dello stato fondamentale e che le componenti dello stato di spostamento variato differiscano da quelle dello stato fondamentale per infinitesimi del primo ordine: sotto questo aspetto le equazioni di Trefftz costituiscono una linearizzazione [2] del problema generale di stabilità dell'equilibrio elastico [20].

Le stesse equazioni di indifferenza (linearizzate o complete) possono essere facilmente dedotte, per via variazionale, da un funzionale avente il significato meccanico di energia potenziale totale. La condizione di stabilità impone all'energia totale di possedere un minimo effettivo (teorema di Dirichlet [15]) e il limite di stabilità è fornito dall'annullarsi della variazione seconda. Se le forze applicate si intendono funzioni di un parametro λ, i valori delle forze esterne e degli spostamenti che rendono nulla la variazione seconda dell'energia per $\lambda = 1$, costituiscono le autosoluzioni del problema (criterio di Jacobi [2]). Allo stesso risultato si può pervenire per altra via, in base al criterio di Lagrange, considerando il problema di stabilità come problema di minimo per la variazione seconda dell'energia potenziale interna sotto la condizione che la variazione seconda del lavoro di deformazione delle forze esterne sia uguale a uno. L'importanza di tale impostazione variazionale consiste nel fatto di permettere l'applicazione dei metodi diretti di calcolo degli autovalori [25] (Ritz, Galerkin, Kantorovic, ecc. [14]), nonchè di noti teoremi [7] sulle proprietà degli autovalori e delle autosoluzioni atti a fornire importanti limitazioni quantitative sugli stessi ([2]).

Le equazioni di Trefftz costituiscono un sistema omogeneo in quanto dedotte nel caso che le forze esterne, superficiali e di volume, non subiscano alterazioni nel passaggio alle configurazioni variate. Nel presente lavoro si considerano tuttavia anche le variazioni delle forze esterne ([3]). Il vantaggio di questa generalizzazione è duplice: da una parte si ha una più aderente interpretazione del fenomeno fisico perchè lo stato di indifferenza viene in pratica raggiunto facendo crescere progressivamente le forze applicate fino al valore critico delle tensioni; dall'altra è noto [21] [22] che

---

([2]) V. Courant-Hilbert [7] v. 1, cap. VII.

([3]) La considerazione delle variazioni delle forze è suggerita da Trefftz stesso in [27] come una possibile generalizzazione del problema.

nella estensione della teoria al caso inelastico deve essere precisata la legge geometrica e temporale secondo cui vengono incrementate le forze dato che lo stato finale è funzione del ciclo di trasformazioni seguito [4] [3].

Le equazioni di Trefftz in forma generalizzata sono equazioni di equilibrio tra gli stati di forze esterne e di tensioni dei sistemi variati a partire da una fondamentale configurazione equilibrata forze-tensioni. E si presentano pertanto efficaci per lo studio delle configurazioni di equilibrio in regime ipercritico.

3. Formulazione del problema al contorno in teoria delle distribuzioni.

In uno spazio euclideo R_n a n dimensioni consideriamo un insieme aperto Ω limitato e connesso di frontiera $\partial\Omega$. Su $\partial\Omega$ si considerano due porzioni $\partial_1 \Omega$, $\partial_2 \Omega$ disgiunte, cioè aperta la prima e chiusa la seconda, in modo che $\partial\Omega = \partial_1 \Omega + \partial_2 \Omega$. Indicato con $\mathbf{u}\,(x_1 \dots x_n)$ un vettore di componenti $\{u_1, \dots, u_n\}$, gli operatori

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i|j} + u_{j|i}) \qquad (i,j = 1, \dots, n) \tag{3.1}$$

rappresentano le componenti del tensore di deformazione nella teoria [12] dell'elasticità valida per spostamenti e gradienti di spostamento infinitesimi.

I due vettori

$$E_k\,\mathbf{u} \equiv \{e_{1k}(\mathbf{u}), \dots, e_{nk}(\mathbf{u})\} \tag{3.2}$$

$$(k = 1, \dots, n)$$

$$D_k\,\mathbf{u} \equiv \{u_{1|k}, \dots, u_{n|k}\} \tag{3.3}$$

si possono allora definire rispettivameure *vettore deformazione*, e *derivata del vettore spostamento.* [12]

Indichiamo ancora con $A_{hk} \equiv \| a_{hk,ij} \|$ $(h, k, i, j = 1, \dots, n)$ un sistema di matrici così definite:

$$a_{hk,ij} \equiv \begin{cases} (1+k)\,\mu & \text{se} \quad h = k = i = j \\ (k-1)\,\mu & \text{se} \quad h = i, \quad k = j, \quad \text{ma } h \neq k \\ \mu & \text{se} \quad h = k, \quad i = j, \quad \text{ma } h \neq i; \text{ oppure } h = j,\ k = i \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ma } h \neq k \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \tag{3.4}$$

---

[4] Per le considerazioni fisiche che giustificano questa impostazione v. [21].

e con: $B_{hk} \equiv \| b_{hk,ij} \| \; (h, k, i, j = 1, \dots, n)$ il sistema di matrici così definite

$$b_{hk,ij} \equiv \begin{cases} \sigma^0_{hk}(x) \text{ se } h = k = i = j; \text{ oppure } h = i, k = j \text{ ma } h \neq k \\ 0 \text{ negli altri casi} \end{cases} \tag{3.5}$$

dove nella (3.4), $k = \dfrac{1}{1 - 2\nu}$ con ν coefficiente di Poisson, μ è il modulo di elasticità tangenziale, e nella (3.5) (5) il tensore doppio simmetrico σ^0_{hk} rappresenta lo stato di tensione dello stato fondamentale.

In queste ipotesi si consideri in Ω l'operatore differenziale autoaggiunto

$$A(\mathbf{u}) = - D_h (A_{hk} D_k \mathbf{u}) - D_h (B_{hk} D_k \mathbf{u}) + \lambda \mathbf{u} \qquad (h, k = 1, \dots, n) \tag{3.6}$$

che si dirà del tipo di « stabilità ». Nella (3.6) λ è un parametro complesso e i coefficienti $\sigma^0_{hk}(x)$ si suppongono funzioni misurabili (secondo Lebesgue) e limitate in Ω. La circostanza che lo stato fondamentale è equilibrato consente di istituire fra le $\sigma^0_{hk}(x)$ la seguente condizione

$$D_k \sigma^0_{hk}(x) = 0. \qquad (h, k = 1, \dots, n) \tag{3.7}$$

Le derivazioni indicate nelle (3.1) e segg. si intendono come derivate covarianti, nel senso della Teoria delle Distribuzioni, in $\mathcal{D}'(\Omega)$ spazio duale forte di $\mathcal{D}(\Omega)$ (6).

L'operatore $A(\mathbf{u})$, definito per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$, è un'applicazione lineare e continua di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Secondo la teoria svolta in [17] [18], gli operatori si intendono definiti su distribuzioni appartenenti ad una certa classe, o in elementi del « completamento » rispetto a un'opportuna norma di uno spazio di vettori sufficientemente regolari; è necessario però precisare gli operatori elementari in cui si intende decomposto $A(\mathbf{u})$. La scelta della decomposizione dipende dalle ipotesi che si fanno sui coefficienti di A_{hk} e B_{hk}, in particolare se i $\sigma^0_{hk}(x)$ sono indefinitamente derivabili in Ω, $A(\mathbf{u})$ è definito per ogni distribuzione $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Inoltre a diverse decomposizioni di $A(\mathbf{u})$ corrispondono diversità sia nella classe in cui si cercano le soluzioni, sia nelle proprietà richieste sull'aperto Ω, al fine di applicare la teoria.

---

(5) Con x si è indicato il complesso delle variabili indipendenti $(x_1, \dots x_n)$.

(6) $\mathcal{D}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni complesse infinitamente derivabili e a supporto compatto contenute in Ω (v. [5] pag. 228).

Nel problema in questione assumiamo come operatori elementari le singole derivate parziali $D_k u_i$ delle componenti di $\mathbf{u}$, con che si intende ricercare la soluzione nello spazio $H^1(\Omega)$ delle funzioni $\mathbf{u}$ di quadrato sommabile insieme alle derivate prime nel senso della Teoria delle Distribuzioni.

All'operatore $A(\mathbf{u})$ resta associata la forma sesquilineare

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega [(A_{hk} + B_{hk}) D_k \mathbf{u} \cdot \overline{D_h \mathbf{u}} + \lambda \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}}] \, dx, \tag{3.8}$$

dalla quale, mediante integrazione per parti, si può dedurre la seguente « formula di Green » :

$$\int_\Omega A(\mathbf{u}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \, dx = \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} (A_{hk} + B_{hk}) \nu_h D_k \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} \, d\sigma, \tag{3.9}$$

essendo ν_h il coseno direttore della normale interna a $\partial\Omega$.

La (3.9) consente di formulare i seguenti problemi al contorno (ben posti) relativi all'operatore $A(\mathbf{u})$:

3.I; problema di Dirichlet: trovare una funzione $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

1) $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$ in Ω ($\mathbf{f}$ vettore assegnato)

2) $\mathbf{u} = 0$ su $\partial\Omega$.

3.II; problema di Neumann: trovare una funzione $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

1) $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in Ω

2) L(7) $(\mathbf{u}) = \mathbf{F}$ su $\partial\Omega$ ($\mathbf{F}$ vettore assegnato).

3.III; problema misto: trovare una funzione $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

1) $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$ in Ω

2) $\mathbf{u} = 0$ su $\partial_1 \Omega$

3) $L(\mathbf{u}) = \mathbf{F}$ su $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$.

---

(7) con $L(\mathbf{u})$ si indica l'operatore matriciale di frontiera $(A_{hk} + B_{hk}) \nu_h D_k \mathbf{u}$.

3.IV; problema di trasmissione: Detti Ω_1 e Ω_2 i due sottoinsiemi aperti, limitati, disgiunti tali che $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, sia S una varietà $(n-1)$ dimensionale comune a $\partial_1\Omega$ e $\partial_2\Omega$. Posto $S_i = \partial_i\Omega - S$ $(i = 1,2)$, il problema consiste nel trovare due funzioni $\mathbf{u}^{(i)} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che

$$
\begin{array}{lll}
1) & A^{(i)}[\mathbf{u}^{(i)}] = \mathbf{f}^{(i)} & \text{in } \Omega_i \\
2) & \mathbf{u}^{(i)} = 0 & \text{su } S_i \cap \partial_i \Omega \\
3) & L^{(i)}[\mathbf{u}^{(i)}] = \mathbf{F}^{(i)} & \text{su } S_i \cap \partial_2 \Omega \\
4) & \mathbf{u}^{(1)} \equiv \mathbf{u}^{(2)} & \text{su } S \\
5) & L^{(1)}[\mathbf{u}^{(1)}] = L^{(2)}[\mathbf{u}^{(2)}] & \text{su } S.
\end{array}
$$

I problemi 3.I; 3.II; 3.III; 3.IV si possono ulteriormente generalizzare (v. [18], n. 5) quando si ammette che sulla frontiera $\partial\Omega$, o su una sua porzione, non sia dato soltanto l'operatore $L(\mathbf{u})$ che proviene dall'applicazione della (3.9), bensì un generico operatore di frontiera $B(\mathbf{u})$, lineare e continuo nello spazio $(S^1(\partial\Omega)'$ duale di $S^1(\partial\Omega)$ (8). In queste ipotesi si definisce la seguente forma sesquilineare:

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle B\mathbf{u}, \gamma\bar{\mathbf{v}}\rangle, \tag{3.10}$$

dove il simbolo $\langle\ \rangle$ designa la dualità tra $(S^1(\partial\Omega))'$ e $S^1(\partial\Omega)$.

4. Formulazione debole del problema al contorno.

Rinviando ai lavori [5], [17], [18] citati per quanto riguarda le definizioni e le proprietà di teoria degli spazi lineari topologici e di teoria delle distribuzioni, esponiamo alcune proprietà delle classi vettoriali in cui si ricerca $\mathbf{u}$ o si intendono appartenere i dati del problema. In Ω indichiamo con $H^1(\Omega)^n$ lo spazio dei vettori $\mathbf{u}$ tali che $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$, $D_k\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$ e munito della norma

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)^n} = \|\mathbf{u}\|^2_0 + \|\mathbf{u}\|^2_1, \tag{4.1}$$

---

(8) Si rinvia a [18] per la definizione di «traccia» $\gamma\mathbf{u}$ di una funzione vettoriale $\mathbf{u}$ sulla frontiera $\partial\Omega$ e analogamente delle derivate $\gamma_s\mathbf{u}$ $(s = 0, \dots, k-1)$ di $\mathbf{u}$. L'insieme delle tracce, vale a dire il condominio dell'applicazione $\mathbf{u} \to \gamma\mathbf{u}$ è un certo spazio lineare $S^{k,2}(\partial\Omega)$ sottospazio di $L^2(\partial\Omega)$.

dove

$$\| \mathbf{u} \|_1^2 = \sum_{k=1}^{n} \| D_k \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega)^n} .$$

Siano poi dati:

1) Un sottospazio $V(\Omega)^n$ chiuso di $H^1(\Omega)^n$ tale che $H_0^1(\Omega)^n \subset V(\Omega)^n \subset \subset H^1(\Omega)^n$.

2) Uno spazio normale di distribuzioni Q, localmente convesso e separato, tale che $V \subset Q$, l'iniezione di V in Q essendo continua. Il duale Q' di Q è uno spazio normale localmente convesso e separato.

3) Lo spazio V delle $\mathbf{u} \in V$ tali che $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \in Q'$ munito della norma

$$\| \mathbf{u} \|_V^2 = \| \mathbf{u} \|_V^2 + \| \mathbf{f} \|_{Q'}^2 . \tag{4.2}$$

4) $\langle \mathbf{F}, \overline{\mathbf{v}} \rangle$, un funzionale lineare e continuo su $V(\Omega)^n$, nullo su $H_0^1(\Omega)$. Allora si dice che $\mathbf{u} \in V(\Omega)^n$ è soluzione debole del problema al contorno se, assegnati $\mathbf{f}$ e $\mathbf{F}$ vale la

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \langle \mathbf{f}, \overline{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{F}, \overline{\mathbf{v}} \rangle \tag{4.3}$$

per ogni $\mathbf{v} \in V(\Omega)^n$.

Infatti se la $\mathbf{u}$ verifica la (4.3) essa risolve l'equazione $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$ nel senso della teoria delle distribuzioni, inoltre fornisce in senso generalizzato le condizioni al contorno (cfr. [18] n. 96). Precisamente detto $V(\partial\Omega)^n$ il sottospazio lineare e chiuso di $L^2(\partial\Omega)^n$ delle tracce su $\partial\Omega$ dei vettori di $V(\Omega)^n$, nel suo duale $(V(\partial\Omega)^n)'$ esiste un elemento $T\mathbf{u}$ tale che

$$\langle T\mathbf{u}, \gamma\overline{\mathbf{v}} \rangle + \langle B\mathbf{u}, \gamma\overline{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \overline{\mathbf{v}} \rangle \tag{4.4}$$

per ogni $\mathbf{v} \in V(\Omega)^n$.

Il problema al contorno è così ricondotto alla soluzione dell'equazione funzionale (4.3) che in particolare coincide con la formula di Green (3.9) quando i dati $(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \Omega)$ e i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono sufficientemente regolari.

Nella presente impostazione si possono configurare i fondamentali problemi al contorno 3.I, 3.II, 3.III, 3.IV, una volta assegnata la decomposizione di $A(\mathbf{u})$, semplicemente facendo variare $V(\Omega)^n$ e $B(\mathbf{u})$. Precisamente:

4.I; Problema di Dirichlet: si deduce dal problema generale quando $V(\Omega)^n \equiv H_0^1(\Omega)$. Si può allora supporre $B\mathbf{u} \equiv 0$ perchè il problema non dipende nè da $B\mathbf{u}$ nè dalla decomposizione di $A(\mathbf{u})$. Le condizioni al contorno consistono nella: $\gamma\mathbf{u} \equiv 0$ su $\partial_1\Omega \equiv \partial\Omega$.

4.II; Problema di Neumann: trovare un vettore soluzione della (4.3) quando $V(\Omega)^n \equiv H^1(\Omega)^n$ e $B\mathbf{u} \equiv 0$.

4.III; Problema misto: trovare un vettore $\mathbf{u}$ soluzione della (4.3) quando $V(\Omega)^n$ è la chiusura rispetto alla norma (4.1) di $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})^n$, sottoinsieme di $\mathcal{D}(\Omega)^n$ costituito dai vettori che si annullano in un intorno (9) di $\partial_1\Omega$.

Si rinvia a [18] (n. 5) per una classificazione sistematica dei diversi problemi al contorno.

5. Teoremi di esistenza in domini limitati.

Alla base dell'esistenza della soluzione generalizzata sta la seguente definizione di V-ellitticità della forma (3.10):

Definizione 5.1.: La forma (3.10) è V-ellittica se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che, qualunque sia $\mathbf{u} \in V(\Omega)^n$ risulti

$$| ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) | \geq \alpha \, \| \mathbf{u} \|^2_{H^1(\Omega)^n} \, . \tag{5.1}$$

Se è verificata la (5.1) si può, secondo un noto ragionamento (v. [18] n. 6) stabilire il seguente teorema di esistenza e unicità:

TEOREMA 5.1: Se la forma è V-ellittica, esiste uno ed un solo vettore $\mathbf{u} \in V(\Omega)^n$ che risolve la (4.4).

Tuttavia, per ricercare condizioni di risolubilità di più immediata verifica, sono importanti le eventuali condizioni algebriche necessarie e sufficienti (o almeno soltanto sufficienti) che assicurano la validità della (5.1) (per λ sufficientemente grande) in termini degli operatori $A(\mathbf{u})$, $B(\mathbf{u})$ di $V(\Omega)^n$ e di Ω.

Rinviando a [18] (n. 7) per quanto riguarda lo studio delle condizioni algebriche atte ad assicurare la V-ellitticità della forma $((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, esaminiamo sotto quali condizioni la (5.1) è equivalente alla seguente:

$$| ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) | \geq \alpha \, \| \mathbf{u} \|^2_1 \, , \tag{5.2}$$

con α costante > 0 per ogni $\mathbf{u} \in V(\Omega)^n$. A tale scopo si possono utilizzare i due seguenti lemmi di immediata dimostrazione:

LEMMA 5.I: Per λ sufficientemente grande la (5.2) equivale alla (5.1) qualunque sia Ω e $V(\Omega)^n$. [5]

(9) Cioè in un aperto che contiene $\partial_1\Omega$.

LEMMA 5.II: Se λ è zero e Ω è tale che, per ogni $\mathbf{u} \in V(\Omega)^n$, vale la seguente maggiorazione (di tipo Poincarè):

$$\| \mathbf{u} \|_0 \leq c_1 \| \mathbf{u} \|_1 , \tag{5.3}$$

dove c_1 è una costante dipendente solo da Ω e da $A(\mathbf{u})$, allora la (5.3) implica la (5.1).

La condizione del lemma 5.I è particolarmente utile per risolvere il problema di Neumann (v. [24], n. 2), mentre la verifica della (5.3) è ovvia nel caso del problema di Dirichlet. Infine, per il problema 4.III in [5] ([10]) (cap. I) sono studiate le condizioni geometriche relative a Ω che assicurano la (5.3).

Supposto dunque che siano verificate le condizioni richieste dai lemmi 5.I o 5.II è facile dare una condizione algebrica sufficiente per la validità della (5.2), fondata sulla seguente definizione, del resto ben nota [5]:

Definizione 5.II: L'operatore $A(u)$ si dice uniformemente fortemente ellittico in Ω se, per quasi tutti gli $x \in \Omega$ e per ogni n^{-pla} di vettori complessi $\{\boldsymbol{\lambda}^i\}$ $(i = 1, \dots, n)$, si ha:

$$\mathcal{Re}\, c_{hk} \boldsymbol{\lambda}^k \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}}^h = \mathcal{Re}\, (A_{hk} + B_{hk}) \boldsymbol{\lambda}^k \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}}^h \geq \alpha \, | \lambda_h^k \bar{\lambda}_h^k | , \tag{5.4}$$

con α costante > 0 indipendente da x.

Si vede allora che la validità della (5.4) è condizione sufficiente affinchè valga la (5.2) qualunque sia la classe $V(\Omega)^n$ del tipo I, II, III.

6. Teoremi di esistenza in domini non limitati.

L'estensione dei risultati ottenuti al caso in cui Ω sia un aperto non limitato si compie, sulla base dei risultati di [5], modificando opportunamente la classe delle funzioni in cui si intende ricercare la soluzione del problema.

([10]) In [5] (cap. I) si introduce una classificazione degli insiemi in primo, secondo, terzo tipo secondo che valgano le seguenti disuguaglianze (c_1, c_2, c_3 costanti > 0):

$$\| \mathbf{u} \|_0 \leq c_1 ||| \mathbf{u} ||| , \quad \| \mathbf{u} \|_0 \leq c_2 \| \mathbf{u} \|_1 , \quad \| \mathbf{u} \|_1 \leq c_3 ||| \mathbf{u} ||| ,$$

per ogni $\mathbf{u} \in V(\Omega)^n$, avendo designato con $||| \mathbf{u} |||$ « l'integrale dell'energia ». Gli insiemi che si considerano sono pertanto di « secondo tipo » nella classificazione di [5]. I teoremi 2.I, 2.II, 2.III, 2.IV, 2.V oltre alle condizioni geometriche su Ω mettono in evidenza le relazioni tra la classificazione adottata e le nozioni di aperto di Friedrichs [10] e di Sobolev [17].

Assunti come operatori elementari le singole derivate parziali $D_k \mathbf{u}$ di $\mathbf{u}$, designano con $B^1(\Omega)^n$ lo spazio dei vettori $\mathbf{u}$ tali che $\mathbf{u} \in L^q(\Omega)^n$, $D_k \mathbf{u} \in L^q(\Omega)^n$ e munito della norma

$$\| \mathbf{u} \|_{B^1(\Omega)^n} = \| \mathbf{u} \|_{L^q(\Omega)^n} + \| \mathbf{u} \|_1 \tag{6.1}$$

dove

$$q = \frac{2n}{n-2} \text{ se } n > 2 \text{ e } q = +\infty \text{ se } n = 2.$$

Indicato con $B_0^1(\Omega)^n$ il sottospazio di $B^1(\Omega)$ costituito da vettori $\mathbf{u}$, aventi traccia $\gamma \mathbf{u} \equiv 0$, la soluzione del problema al contorno si ricerca in un sottospazio chiuso $W(\Omega)^n$ di $B^1(\Omega)^n$ tale che $B_0^1(\Omega)^n \subset W(\Omega)^n \subset B^1(\Omega)$.

La sostanziale differenza fra gli spazi $B^1(\Omega)^n, B_0^1(\Omega)^n$, $W(\Omega)^n$ e gli analoghi spazi $H^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)$, $V(\Omega)^n$ è che i primi non sono spazi di Hilbert ma di Banach, onde è necessario, nello svolgimento della presente teoria esistenziale, imporre all'aperto Ω opportune limitazioni che permettano di sostituire la (6.1) con una norma equivalente ma hilbertiana.

La condizione è che il dominio Ω sia tale che:

$$| \mathbf{u} |_{L^q(\Omega)} \leq c_1 | \mathbf{u} |_1, \text{ per ogni } \mathbf{u} \in W(\Omega)^n, \tag{6.2}$$

condizione che risulta verificata sotto ipotesi alquanto generali su Ω e su $\mathbf{u}$ ([11]).

Anche in questo caso la scelta di $W(\Omega)^n$ consente di inquadrare volta per volta i più interessanti problemi al contorno. Per esempio si avrà il problema di Dirichlet avendo scelto $W(\Omega)^n \equiv B_0^1(\Omega)^n$; il problema di Neumann con la posizione $W(\Omega)^n \equiv B^1(\Omega)^n$; e il problema misto quando $B_0^1(\Omega)^n$ è la chiusura rispetto alla norma (6.1) di $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})^n$ e $W(\Omega)^n$ un sottospazio di $B^1(\Omega)^n$ tale che $B_0^1(\Omega)^n \subset W(\Omega)^n \subset B^1(\Omega)^n$.

Esposto così il procedimento che permette di formulare il problema in forma debole, ci proponiamo di esaminare sotto l'aspetto algebrico e meccanico la condizione (5.4), che assicura la risolubilità sia nel caso di dominio limitato, sia illimitato. I risultati che andremo a trovare costituiscono dei «criteri sufficienti di stabilità» di un sistema elastico.

7. Criteri sufficienti di stabilità di un sistema elastico.

Ci limiteremo a rendere esplicite le condizioni sotto le quali la forma quadratica simmetrica (5.4) risulta definita positiva nei due casi di interesse

---

([11]) Sussiste in proposito il seguente risultato: se Ω gode della proprietà di cono vale la (5.6).

applicativo in cui $n = 2, 3$, essendo immediata l'estensione dei risultati ottenuti al caso di n variabili indipendenti.

Introdotte per semplicità le quantità

$$a_{ik} = \frac{\sigma^0_{ik}}{\mu} \tag{7.1}$$

che diremo « tensioni ridotte », la forma (5.4) risulterà equivalente, a meno della costante μ, alla forma

$$\mathcal{R}e\, \bar{c}_{hk}\, \lambda^k \cdot \bar{\lambda}^h \tag{7.2}$$

dove le matrici $\bar{c}_{hk}$ sono così definite:

$$\bar{c}_{hk,ij} \equiv \begin{cases} 1 + k + a_{ij} & \text{per} \quad i = j = h = k \\ 1 + a_{ij} & \text{per} \quad h = k,\ i = j,\ \text{ma}\ h \neq i \\ a_{ij} & \text{per} \quad h \neq k,\ i = j \\ k - 1 & \text{per} \quad h \neq k,\ h = i,\ k = j \\ 1 & \text{per} \quad h \neq k,\ h = j,\ k = i \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \tag{7.3}$$

Per $n = 2$ risulta ad esempio

$$\bar{c}_{11} \equiv \begin{bmatrix} 1 + k + a_{11} & 0 \\ 0 & 1 + a_{11} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_{12} \equiv \begin{bmatrix} a_{12} & k - 1 \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_{21} \equiv \begin{bmatrix} a_{21} & 1 \\ k - 1 & a_{21} \end{bmatrix},$$

$$\bar{c} \equiv \begin{bmatrix} 1 + a_{22} & 0 \\ 0 & 1 + k + a_{22} \end{bmatrix}.$$

La matrice (7.3) quadrata, simmetrica a coefficienti reali è definita positiva se la matrice triangolare dedotta dalla (7.3) mediante un procedimento ad eliminazione successiva ha tutti i termini ad indici uguali positivi. Per esempio, applicando il metodo di Cholesky [28](12) i termini della matrice ridotta sono dati dalla seguente formula ricorrente

$$\left.\begin{aligned} r_{hk,ij} &= (\bar{c}_{hk,ij} - r_{1i}\, r_{1j} - \dots - r_{n-1,i}\, r_{n-1,j}) : r_{hk,ii} \\ r^2_{hk,ii} &= \bar{c}_{hk,ii} - r^2_{1i} - \dots - r^2_{i-1,i} \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

(12) v. Zürmühl [28] II, pag. 70.

e la condizione in questione è

$$r^2_{hk,ii} > 0\,, \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{7.5}$$

Per $n = 2$ la (7.5) diviene:

$$1 + k \quad + a_{11} > 0 \tag*{$(7.6)_1$}$$

$$1 + a_{11} \qquad > 0 \tag*{$(7.6)_2$}$$

$$1 + a_{22} - \frac{a_{12}^2}{1 + k + a_{11}} - \frac{1}{1 + a_{11}} > 0 \tag*{(7.6)}$$

$$1 + k + a_{22} - (k - 1)^2 (1 + k + a_{11})^{-1} - a_{12}^2 (1 + a_{11})^{-1} -$$

$$- a_{12}^2 \left(\frac{k - 1}{1 + k + a_{11}} + \frac{1}{1 + a_{11}}\right) \left(1 + a_{22} - \frac{a_{12}^2}{1 + k + a_{11}} - \frac{1}{1 + a_{11}}\right)^{-1} > 0 \tag*{$(7.6)_4$}$$

e poichè la prima delle (7.6) è ovviamente implicata nella seconda delle (7.6), nel caso in cui $k \geq 1\ 0$ si può concludere:

TEOREMA 7.1: Se lo stato di tensione di un sistema elastico bidimensionale è tale che in ogni punto risultano soddisfatte le $(7.6)_2$, $(7.6)_3$, $(7.6)_4$ l'equilibrio è stabile.

In particolare se $a_{12} = 0$ e in tal caso a_{11} e a_{22} sono tensioni principali, la condizione di stabilità si riduce alla

$$\left.\begin{aligned} & 1 + a_{11} > 0 \\ & 1 + a_{22} > (1 + a_{11})^{-1} \\ & (1 + k + a_{11})(1 + k + a_{22}) > (k - 1)^2 \end{aligned}\right\}. \tag{7.7}$$

Le (7.6) non sono tuttavia di immediata verifica, onde, seguendo il criterio di cercare condizioni sufficienti di stabilità, conviene sostituirle con le seguenti, che si deducono da alcune maggiorazioni evidenti sfruttando la proprietà che $k \geq 1 > 0$:

$$\left.\begin{aligned} & 1 + a_{11} > 0 \\ & (1 + a_{11})(1 + a_{22}) > 1 + a_{12}^2 \end{aligned}\right\}. \tag{7.8}$$

Pertanto si può formulare il seguente criterio di stabilità dell'equilibrio di un sistema elastico bidimensionale.

COROLLARIO 7.I : Condizione sufficiente di stabilità di un sistema piano è che in ogni punto le quantità $(1 + a_{11})$, $(1 + a_{22})$ risultino positive e il loro prodotto sia maggiore di $1 + a_{12}^2$. In particolare se $a_{12} \equiv 0$, e in tal caso a_{11}, a_{22} sono tensioni principali, la condizione in questione diviene

$$\left.\begin{aligned} &1 + a_{11} > 0 \\ &(1 + a_{11})(1 + a_{22}) > 1 \end{aligned}\right\}, \tag{7.9}$$

da cui si deduce che la presenza di tensioni principali tutte di trazione è condizione sufficiente di stabilità.

L'estensione dei risultati al caso $n = 3, 4$, dà luogo a un insieme di condizioni del tipo (7.5) alquanto complicate per una verifica immediata. Quindi sempre nello spirito di istituire condizioni algebriche anche meno restrittive delle (7.5), ma sempre sufficienti per assicurare il carattere definito positivo della forma (7.2), si può enunciare il seguente teorema fondato su una nota proprietà [23] delle matrici definite positive:

TEOREMA 7.II : Condizione sufficiente di stabilità di un corpo elastico è che in ogni punto tra le componenti del tensore degli sforzi intercedano le condizioni :

$$\left.\begin{aligned} &1 + k + a_{ii} > \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| + (n-1)\,|k-1| \\ &1 + a_{ii} \qquad > \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| + 1 \end{aligned}\right\}, (i \neq k = 1, \dots, n) \tag{7.10}$$

che, per $n = 3$ e $k \geq 1 > 0$ divengono

$$\left.\begin{aligned} &a_{ii} > \sum_{k=1}^{3} |a_{ik}| + k - 3 \\ &a_{ii} > \sum_{k=1}^{3} |a_{ik}| \end{aligned}\right\}, (i \neq k = 1, 2, 3) \tag{7.11}$$

dove si dovranno alternativamente imporre le prime o le seconde delle (7.11): secondo che $k \gtrless 3$. In particolare, se $a_{ik} \equiv 0$ per $i \neq k$ e in tal caso le a_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ sono tensioni principali, le (7.11) si scrivono :

$$a_{ii} > \begin{cases} k - 3 & \text{se} \quad k > 3 \\ 0 & \text{se} \quad k < 3 \end{cases} \tag{7.12}$$

e quindi, poichè in generale nei solidi elastici $k \leq 3$, si può enunciare il seguente :

COROLLARIO 7.II : Condizione sufficiente di stabilità di un corpo elastico è che, in ogni punto, le tre componenti principali del tensore degli sforzi siano di trazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON, S. « *The coerciveness problem for integro-differential forms* » Jour. d'Analyse Math. vol. VI-1958 p. 183-223.

[2] BALDACCI, R.: « *Problemi di stabilità dinamica* » Atti d'Ist. di Sc. delle Costr. Univ. di Pisa n° (1954).

[3] BIEZENO, C. B. u. GRAMMEL R.: « *Technische Dynamik* » 2ª ed. Berlin 1955.

[4] CAMPANATO, S.: « *Sul problema di M. Picone relativo all'equilibrio di un corpo elastico incastrato* » Ricerche di Matem. vol. VI 1957, p. 125-149.

[5] CAMPANATO, S: « *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità* » (parte I, II). Ann. di Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie III, vol. XXIII, Fasc. III (1959).

[6] COLLATZ, L.: « *Eigenwert probleme und ihre numerische Behandlung* » Leipzig 1945.

[7] COURANT, R. u. HILBERT, D.: « *Methoden der Mathematischen Physik* » vol. I, II. Springer Vrgl 1937.

[8] COURANT,: R.: « *Dirichlet's Principle, conformal mapping, and minimal surfaces* ». Interscience publish., New York 1950.

[9] FICHERA, G.: « *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico* ». Ann. d. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Serie III, Vol. IV. Fasc. I-II (1950).

[10] FRIEDRICHS, K. O.: « *On the Boundary-value problems of the theory of Elasticity and Korn's inequality* », Ann. of Mathem. serie III. Vol. 48-1947 p. 441-471.

[11] FRIEDRICHS, K. O.: « *An inequality for potential functions* ». American Journ. of Mathem. Vol. LXVII, 1946 p. 581-592.

[12] GREEN, A. E. and ZERNA W.: « *Theorical Elasticity* ». London: Oxford University Press 1954.

[13] GECKELER, J. W.: « *Elastostatik* » cap. 3, Vol. VI di « *Handbuch der Physik* » ed. 1928. Leipzig. pag. 277 e segg.

[14] KANTOROWITSCH, L. W. und KRILLOW, W. I.: « *Näherungsmethoden der Höheren Analysis* » VEB Deutscher verlag der Wissenschaften. Berlin (1956).

[15] KRALL, G.: « *Stabilità dell'equilibrio elastico* ». Ann. di Mat. pura e Appl. (5) v. 29 (1949).

[16] KREUTZER, K.: « *Die Stabilität des gedrückten Stabes* ». Zeitschr. für angew. Math. Mech. Bd. 12, Nr 6 Dez. 1932 pp. 351-368.

[17] LIONS, J. L.: « *Problemes aux limites en théorie des distributions* ». Acta Matematica. n. 94 (1955) p. 13-153.

[18] MAGENES, E. e STAMPACCHIA, G.: « *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico* ». Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Serie III, Vol. XII, Fasc. III (1958) p. 257-358.

[19] PAYNE, L. E. a. WEINBERGER, H. F.: « *An optimal Poincaré Inequality for Convex Domains* ». Archive for Rat. Mech. and. Anal. Vol. 5 n. 4 (1960). pp. 286-293.

[20] PEARSON, C. E.: « *General theory of elastic stability* ». Quart. of Appl. Math. Vol. XIV, 1956 pag. 133.

[21] PFLÜGER, A.: « *Stabilitäts probleme der Elastostatik* ». Springer Verlag Berlin/Göttingen Heidelberg.

[22] SCHLEICHER, F.: « *Stabilitätsfälle* » Sonderabdruck aus « *Taschenbuch für Bauingeniere* ». Zweite Auflage (1955). Springer Verlag Berlin Göttingen Heidelberg.

[23] SCHÖNHARDT, E.: « *Uber positiv definite Matrizen* ». Zeit. für angew. Math. Mech. Bd. 23 Nr 4/5 April/Mai 1982, pag. 157-158.

[24] STAMPACCHIA, G.: « *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine* ». Ric. di Mat. 5 (1956) pp. 2-24.

[25] TIMOSHENKO, S.: « *Theory of elastic stability* ». New York a. London 1936.

[26] TREFFTZ, E.: « *Uber die Ableitung der Stabilitäts Kriterien des elastischen Gleichgewichts aus der Theorie endlicher Deformationen* ». Internationaler Kongress fnr Technische Mechanik 1930, Stockolm teil III S. 44.

[27] TREFFTZ, E.: « *Zur Theorie der Stabilität der elastischen Gleichgewichts* ». Zeitschr. angew Math. und Mech., Bd. 13, p. 160 (1933).

[28] ZURMÜHL, R.: « *Matrizen* ». Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.