

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

L. BERS

Uniformizzazione e moduli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 14,
n° 4 (1960), p. 309-316

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_309_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNIFORMIZZAZIONE E MODULI (*)

di L. BERS (New York)

Le equazioni di Beltrami a coefficienti discontinui furono considerate per la prima volta da Morrey (cfr. [3] anche per i riferimenti bibliografici); esse si sono dimostrate utili nello studio dell'uniformizzazione e dei moduli delle superficie di Riemann. Nella teoria dei moduli che se ne deduce, ci si è limitati naturalmente al « caso classico »; tuttavia alcuni teoremi possono essere dimostrati anche per il caso di superficie di Riemann aperte.

Una presentazione completa dell'argomento è ovviamente impossibile in poche pagine. Ci limiteremo perciò solo ad enunciare il risultato centrale per le superficie di Riemann chiuse (§ 1), risultato che commenteremo al § 2; quindi al § 3 daremo un teorema di uniformizzazione che è essenziale per la dimostrazione e che è di per sé interessante. Le dimostrazioni saranno date per sommi capi nei § 6, 7, 8. Una esposizione completa sarà pubblicata in seguito.

§ 1. — Enunciato del teorema fondamentale.

Il teorema che enunceremo assicura in sostanza la possibilità dell'uniformizzazione simultanea di tutte le curve algebriche di dato genere $g > 1$. Esso è da ravvicinarsi al teorema corrispondente per le funzioni di Weierstrass $p(z, 1, \tau)$ e $p'(z, 1, \tau)$, $|z| < \infty$, $\Im \tau > 0$ che dà l'uniformizzazione delle curve di genere 1.

(*) Lavoro eseguito col contratto No. DA — 30 — 069 — 0Rd — 2153 dell'« *Office of Ordnance Research* » dell'Esercito degli Stati Uniti. Questo lavoro uscirà in inglese nei Rendiconti del « *Symposium on function theory* » del « *Tata International Institute* ». Il contenuto di questo lavoro è stato esposto in un ciclo di conferenze tenute presso la Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1 al 10 settembre 1958 in occasione del corso internazionale organizzato dal CIME e tenuto sotto gli auspici della Scuola Normale Superiore e dell'Istituto Matematico dell'Università di Pisa.

TEOREMA : Sia $g > 1$ un intero fissato. Esiste :

1) un dominio limitato T nello spazio numerico complesso \mathbb{C}^{3g-3} (ove $\tau_1, \dots, \tau_{3g-3}$ sono le coordinate) omeomorfo ad una cella

2) un dominio $M \subset \mathbb{C}^{3g-2}$ (ove $Z, \tau_1, \dots, \tau_{3g-3}$ sono le coordinate) omeomorfo ad una cella e olomorficamente equivalente ad un dominio limitato.

3) una funzione continua $\sigma(t, \tau)$ a valori complessi, $-\infty < t < +\infty$, $\tau \in T$ tale che $\sigma(t, \tau)$ è olomorfa in τ per ogni fissato t , $\sigma(t, \tau) \rightarrow \infty$ per τ fissato e $|t| \rightarrow \infty$, $\sigma(t_1, \tau) \neq \sigma(t_2, \tau)$ se $t_1 < t_2$.

4) un gruppo G di automorfismi analitici complessi di M che opera su M senza punti fissi e in modo propriamente discontinuo.

5) un gruppo Γ di automorfismi analitici complessi di T , propriamente discontinuo (ma non privo di punti fissi).

6) una applicazione olomorfa $\tau \rightarrow Z(\tau)$ di T nello spazio di Siegel delle coppie $Z = X + iY$ di matrici $g \times g$ simmetriche X, Y con $Y > 0$. ed infine

7) un numero finito di funzioni meromorfe $F_j(z, \tau)$ definite su M automorfe rispetto a G .

tali che le seguenti conclusioni siano verificate :

8) per ogni $\tau \in T$ la curva $\gamma(\tau) : z = \sigma(t, z)$, $-\infty < t < +\infty$ è la curva frontiera di un dominio semplicemente connesso $D(\tau)$ nel piano della variabile z .

9) un punto $(z, \tau_1 \dots \tau_{3g-3}) = (z, \tau)$ è in M se e solo se $\tau \in T$ e $z \in D(\tau)$.

10) ogni elemento di G è della forma

$$\tau \rightarrow \tau$$

$$z \rightarrow \frac{a(\tau)z + b(\tau)}{c(\tau)z + d(\tau)}$$

ove a, b, c, d , sono funzioni olomorfe in T e $ad - bc = 1$. G è generato da $2g$ elementi $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ tali che $\Pi[A_j, B_j] = 1$ ove $[A, B] = = A B A^{-1} B^{-1}$

11) $G(\tau)$, la « restrizione » di G per τ fissato, è un gruppo di trasformazioni di Möbius del dominio $D(\tau)$ in sè. La superficie di Riemann $S(\tau) = D(\tau)/G(\tau)$ è una superficie chiusa di genere g .

12) Ogni superficie di Riemann chiusa di genere g è conformemente equivalente ad una $S(\tau)$, $S(\tau')$ e $S(\tau'')$ sono conformemente equivalenti se e solo se τ' e τ'' sono equivalenti rispetto a Γ .

13) La matrice $Z(\tau)$ è una matrice di Riemann di periodi per $S(\tau)$, corrispondente ad una base dell'omologia definita da A_i, B_i ,

e finalmente

14) Le restrizioni delle funzioni F_j per τ fissato generano il corpo delle funzioni automorfe di $D(\tau)$ rispetto a $G(\tau)$ cioè il *corpo delle funzioni meromorfe* su $S(\tau)$.

Osserviamo il seguente

COROLLARIO I. Lo spazio T/G è uno spazio analitico complesso normale.

Questo segue da 5) e da un teorema di H. Cartan [9]. Dimostrazioni essenzialmente diverse sono dovute a Röhrl [12] e Baily [4]. Baily ha anche dimostrato che T/G è un aperto di Zariski di una varietà algebrica. Lo spazio T/G è, com'è ovvio, lo spazio delle classi di superficie di Riemann di genere g conformemente equivalenti (cfr. 12)).

COROLLARIO II. Lo spazio M/G è una varietà complessa, l'applicazione naturale $M/G \rightarrow T$ è olomorfa, l'immagine inversa di $\tau \in T$ è una sottovarietà regolarmente immersa in M/G e conformemente equivalente a $S(\tau)$.

In modo analogo si possono costruire dei fissati complessi su T per i quali la fibra su τ è $S(\tau) \times \dots \times S(\tau)$ ovvero la varietà di Jacobi di $S(\tau)$.

§ 2. — Osservazioni.

Descriveremo in questo § gli elementi necessari alla dimostrazione.

A) Notazioni. La lettera S denoterà una superficie di Riemann astratta. Si dirà che S è eccezionale se S ammette automorfismi non identici conformi omotopi all'automorfismo identico. Una S non eccezionale si può rappresentare come U/G ove U è il semipiano di Poincaré e G è un gruppo Fuchsiano privo di trasformazioni ellittiche; diremo che S è di *prima specie* se i punti fissi di G sono densi sull'asse reale.

In particolare sia S di tipo (g, n) , cioè ottenuta da una superficie di Riemann chiusa di genere $g \geq 0$ sopprimendovi $n \geq 0$ punti distinti. Allora S non è eccezionale (e di prima specie) se $3g - 3 + n > 0$.

Sia m un differenziale di tipo $(-1, 1)$ su S_0 . Localmente $m = \mu(\xi) \frac{d\bar{\xi}}{d\xi}$ ove μ è una funzione misurabile e ξ una uniformizzazione locale. Poichè $|\mu|$ è uno scalare possiamo definire $\|m\| =$ estremo superiore essenziale di $|\mu|$. Se $\|m\| < 1$ scriveremo $m \in B(S_0)$ e diremo che m è un *differenziale di Beltrami*. In tal caso S_0^m denota la superficie S_0 munita della struttura conforme definita dalla condizione: ogni soluzione dell'equazione di Beltrami $\xi_{\bar{\xi}} = \mu \xi_{\xi}$ è una funzione olomorfa su S_0^m (Si richiede che la soluzione sia continua ed abbia derivate generalizzate localmente a quadrato integrabile). L'applicazione naturale $S_0^m \rightarrow S_0$ si noterà con l .

Un omeomorfismo $S \xrightarrow{f} S_0$ si dice *quasi-conforme* se può essere fattorizzato nel modo seguente $S \xrightarrow{h} S_0^m \xrightarrow{l} S_0$, h essendo conforme. Supponiamo f quasiconforme e sia $[f]$ la classe d'omotopia di f . Diremo che $(S, [f], S_0)$ è

una *coppia pari*. Due tali coppie $(S, [f], S_0)$ ed $(S', [f'], S'_0)$ si diranno equivalenti se esistono applicazioni conformi $S' \xrightarrow{h} S$, $S'_0 \xrightarrow{h'_0} S_0$ tali che $[h_0^{-1} f h] = [f']$; fortemente equivalenti se $S'_0 = S_0$, mentre h_0 può essere assunta eguale all'identità. Oggi coppia pari è equivalente ad una del tipo $(S_0^m, [l], S_0)$. Per abuso di linguaggio identificheremo spesso coppie con le corrispondenti classi di equivalenza.

B) Sia S_0 non eccezionale. L'insieme delle classi di equivalenza forte di coppie pari $(S, [f], S_0)$ è lo spazio di Teichmüller $T(S_0)$. La distanza di Teichmüller tra $(S, [f], S_0)$ ed $(S', [g], S_0)$ è data da $\log \{(1+k)/(1-k)\}$ ove

$$k = \inf \|m\| \quad \text{per} \quad m \in B(S),$$

$(S^m, [l], S)$ fortemente equivalente a $(S', [f^{-1}g], S)$. Questa distanza definisce una topologia su $T(S_0)$.

Una funzione continua Φ a valori complessi su $T(S_0)$ sarà chiamata *analitica-complessa* o *olomorfa* se, per ogni insieme $(m_1, \dots, m_r) \subset B(S)$, ove $(S_1 [f], S_0) \in T(S_0)$, la rappresentazione di un intorno di $0 \in \mathcal{O}^r$ in \mathcal{C} espressa dalla

$$(\xi_1, \dots, \xi_r) \rightarrow p(S^{\xi_1 m_1 + \dots + \xi_r m_r}, [f], S_0) \rightarrow \Phi(p)$$

è olomorfa. In modo analogo definiremo l'*analiticità reale*.

Una rappresentazione quasi conforme $S_1 \xrightarrow{g} S_0$ induce una « rappresentazione lecita » g^* di $T(S_1)$ su $T(S_0)$:

$$g^*((S, [f], S_1)) = (S, [gf], S_0);$$

g^* dipende soltanto da $[g]$ e conserva la distanza di Teichmüller e l'analiticità reale e complessa. Il gruppo delle rappresentazioni lecite di $T(S_0)$ in sè sarà denotato con $\Gamma(S_0)$.

Ricorrendo all'uniformizzazione mediante gruppi Fuchsiani si dimostra che $T(S_0)$ è uno spazio metrico completo; se il gruppo fondamentale di S_0 è generato in modo finito, $\Gamma(S_0)$ è propriamente discontinuo; le funzioni analitiche reali su $T(S_0)$ separano i punti. In base al nuovo teorema di uniformizzazione enunciato nel § 3 si dimostra che: se S_0 è di prima specie, le funzioni olomorfe su $T(S_0)$ separano i punti.

c) Se S_0 è di tipo (g, n) scriveremo $T(S_0) = T_{g,n}$, $\Gamma(S_0) = \Gamma_{g,n}$. Questa notazione è giustificata dal fatto che due qualunque superficie di tipo (g, n) sono quasi-conformemente equivalenti. Porremo $\rho = 3g - 3 + n$, ed assumeremo $\rho > 0$.

La teoria di Teichmüller [1, 5, 13, 14] delle rappresentazioni quasi conformi estremali implica che $T_{g,n}$ sia una 2ρ -cella. Inoltre è noto che $T_{g,n}$ è

una *varietà analitica complessa* (ciò è stato dimostrato per la prima volta da Ahlfors [2]; cfr. anche [6, 10, 11, 15]).

Nel nostro teorema fondamentale, T , Γ e M tengono il luogo, rispettivamente, di $T_{g,0}$, $\Gamma_{g,0}$ e $T_{g,1}$. Le osservazioni precedenti giustificano alcuni dei nostri enunciati. L'esistenza della rappresentazione descritta in (6), (13) segue, ad esempio, dalla formula variazionale di Rauch [11].

d) nell'enunciato del nostro teorema, $T = T_g$ non appare come una varietà analitica complessa astratta ma come un dominio limitato. Questo è un caso particolare di un risultato più generale: $T_{g,n}$ è (olomorficamente equivalente ad) un *dominio limitato in C^e* . La dimostrazione (indicata sommariamente in [7]) è piuttosto complicata. Essa è basata sulla possibilità di uniformizzare ogni superficie di Riemann chiusa mediante gruppi di Schottky, ed involge una analisi geometrica dettagliata dello spazio di Schottky » di cui T_g è il ricoprimento universale. La dimostrazione procede per induzione su g e su n ; in tale induzione le superficie iperellittiche rivestono un ruolo particolare.

e) la rappresentazione di $T_{g,1}$ nella forma M , cioè nella forma descritta negli enunciati 8) e 9) e la costruzione del gruppo G avente le proprietà 4), 10), 11) è basata sul teorema di uniformizzazione del § 3.

Supponendo di aver compiuto le tappe precedenti, non è difficile concludere la dimostrazione, cioè costruire le funzioni F_j aventi le proprietà 7), 14). Fissiamo un insieme di generatori A_j, B_j di G (cfr. 10)), e definiamo su ogni $S(\tau)$ una base di omologia, che denotiamo con le stesse lettere. Sia ω_j il differenziale abeliano di prima specie avente periodo δ_{jk} su A_k (sicchè, fra l'altro, il periodo di ω_j su B_k è l'elemento Z_{jk} di $Z(\tau)$). Sia Ω_{jk} il differenziale abeliano di terza specie su $S(\tau)$ avente periodi 0 sugli A_j e tale che in ogni punto di $S(\tau)$ il residuo di Ω_{jk} eguagli l'ordine di ω_j/ω_k . L'insieme delle funzioni $\{\omega_j/\omega_k, \Omega_{jk}/\omega_l, j, k, e = 1, 2, \dots, g\}$, considerate come funzioni $\mathcal{D}(\tau)$ ha le proprietà richieste.

OSSERVAZIONE. Il teorema del § 1 è sfortunatamente di carattere piuttosto « esistenziale ». Sarebbe utile avere espressioni esplicite per i dominî e le funzioni descritte. Io esito ad affermare che vi sia molta speranza di ottenere tali formule.

§ 3. — Un nuovo teorema di uniformizzazione.

Un gruppo G di trasformazioni di Möbius sarà chiamato *quasi Fuchsiano* se esiste sulla sfera di Riemann una curva di Jordan orientata γ_G tale che γ_G sia invariante rispetto a G , e quest'ultimo sia privo di punti fissi e propriamente discontinuo nei domini $I(\gamma_G)$ e $E(\gamma_G)$ rispettivamente interno ed esterno a γ_G .

TEOREMA I. Siano S_1 e S_2 due superficie di Riemann. Supponiamo che S_1 e S_2 abbiano superficie di ricoprimento universale iperboliche, e che S_1 sia *quasi conformemente* equivalente all'immagine speculare \bar{S}_2 di S_2 . In queste ipotesi, esiste un gruppo quasi-fuchsiano G tale che $I(\gamma_G)/G$ sia *conformemente equivalente* a S_1 e $E(\gamma_G)/G$ a S_2 .

OSSERVAZIONE. \bar{S} è definita sostituendo ciascuna uniformizzazione locale ξ su S con la sua complessa coniugata $\bar{\xi}$. Le ipotesi per il teorema 1 sono soddisfatte se S_1 e S_2 sono chiuse e dello stesso genere > 1 .

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $S_0 = \bar{S}_2$. Ne segue che $S_1 = S_0^m$ per un opportuno $m \in B(S_0)$. Per ipotesi $S_0 = \mathcal{U}/G_0$, ove \mathcal{U} è il semipiano superiore e G_0 è un gruppo fuchsiano privo di punti uniti. Pertanto $L/G_0 = \bar{S}_0$, L essendo il semipiano inferiore. Poniamo $\mu(z) \equiv 0$ per $\Im_m z \leq 0$, e definiamo $\mu(z)$ per $\Im_m z > 0$ mediante la condizione: $\mu(z)\bar{d}z/dz = m$. Risulta $|\mu(z)| \leq k < 1$, e

$$\mu(A(z)) = \mu(z) \overline{A'(z)} \quad \text{per} \quad A \in G_0.$$

Esiste uno ed uno solo omeomorfismo ω_μ del piano in sè che lascia 0 e 1 invarianti ed è μ -conforme, ossia è una soluzione dell'equazione di Beltrami.

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \mu(z) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}.$$

Se $A \in G_0$, l'equazione funzionale per μ implica che $\omega^\mu(A(z))$ è un automorfismo μ -conforme della sfera di Riemann, di guisa che

$$A^\mu = \omega^\mu A (\omega^\mu)^{-1}$$

è una trasformazione di Möbius. Si verifica che $G = \omega^\mu G_0 (\omega^\mu)^{-1}$ è il gruppo quasi fuchsiano richiesto.

Indicheremo con ι la rappresentazione naturale di S_0 su \bar{S}_0 . Un omeomorfismo $S \xrightarrow{h} \bar{S}_0$ è detto anti-quasiconforme se può essere fattorizzato nel modo seguente: $S \xrightarrow{h} S_0^m \xrightarrow{\iota} \bar{S}_0$, h essendo conforme. Un f siffatto definisce una *coppia dispari* $(S, [f], \bar{S}_0)$. Ogni coppia dispari è equivalente, nel senso del § 2, a), ad una coppia della forma $(S_0^m, [\iota], S_0)$.

Sia G un gruppo quasi-fuchsiano, e poniamo $A = A_1/A_0$, ove A_1 è il gruppo degli automorfismi di G e A_0 è il sottogruppo degli automorfismi interni. Poichè G può essere identificato ai gruppi fondamentali di $I(\gamma_G)/G$ e di $E(\gamma_G)/G$, ogni omeomorfismo

$$I(\gamma_G)/G \xrightarrow{\Phi} E(\gamma_G)/G$$

induce un elemento $\lambda(\Phi)$ di A , e $\lambda(\Phi) = \lambda(\psi)$ se, e soltanto se, $[\Phi] = [\psi]$. Se $\lambda(\Phi) = 1$ e se Φ è anti-quasiconforme, diremo che G rappresenta la coppia $(I(\gamma_G)/G, [\Phi], E(\gamma_G)/G)$ ed ogni coppia equivalente a quest'ultima.

Riesaminando la dimostrazione del Teorema I si vede che di fatto abbiamo dimostrato la prima parte del

TEOREMA II. Ogni coppia dispari $(S, [f], \bar{S}_0)$ può essere rappresentata da un gruppo quasi fuchsiano G , purchè S_0 abbia una superficie di ricoprimento universale iperbolica. Se S_0 è di prima specie, ogni gruppo quasi-fuchsiano G_1 rappresentante questa coppia è della forma $G_1 = QGQ^{-1}$, Q essendo una trasformazione di Möbius.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato possiamo supporre che sia $S = S_0^m, f = \iota$, e che G sia il gruppo costruito dianzi. L'ipotesi fatta su G_1 implica l'esistenza di omeomorfismi conformi

$$I(\gamma_G) \cup \gamma_G \xrightarrow{\Phi} I(\gamma_{G_1}) \cup \gamma_{G_1}, \quad E(\gamma_G) \cup \gamma_G \xrightarrow{\psi} E(\gamma_{G_1}) \cup \gamma_{G_1}$$

con

$$\Phi A \Phi^{-1} = \psi A \psi^{-1} \quad \text{su } \gamma_G \quad \text{su } A \in G.$$

L'ultima relazione implica che $\Phi = \psi$ in tutti i punti fissi di G e quindi, per continuità, in ogni punto di γ_G . Poniamo $Q(z) = \Phi(z)$ per $z \in I(\gamma_G) \cup \gamma_G$, $Q(z) = \psi(z)$ per $z \in E(\gamma_G)$. Q è un automorfismo del piano e $G_1 = QGQ^{-1}$.

Resta da dimostrare che $Q(z)$ è olomorfo. Questo sarebbe immediato se γ_G fosse rettificabile. Nelle attuali circostanze, tuttavia, dobbiamo considerare $Q(z)$ come funzione di $\xi = \omega^\mu(z)$ ed utilizzare le proprietà di ω^μ date, ad esempio, in [3]. Da queste proprietà si trae che $\text{mis } \gamma_G = 0$ e che $Q(z)$ ha derivate generalizzate in L_2 in un intorno di γ_G . Poichè $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0$ fuori di γ_G , la analicità di Q ovunque segue da ben note considerazioni.

Siamo ora in grado di costruire il dominio M descritto nel § 1. Nella dimostrazione del Teorema I, sia S_0 una superficie prefissata, chiusa e di genere $g > 1$. Supponiamo che per ogni

$$(S_0^m, [f], S_0) = \tau \in T_g = T(S_0),$$

ω^μ, A^μ e G abbiano lo stesso significato di prima. Se scegliamo S_0 in guisa che $0, 1, \omega$ siano punti fissi, la parte del Teorema II relativa all'unicità mostra che A e G dipendono soltanto da τ e non dalla scelta particolare di m . Possiamo porre $G = G(\tau), \gamma_G = \gamma(\tau), I(\gamma_G) = D(\tau)$. Vale la 11), e $\sigma(t, \tau) = \omega^\mu(t)$. Il fatto che A^μ e σ dipendano olomorficamente da τ segue da un risultato

provato in [3]: se μ dipende oloedicamente da parametri complessi, altrettanto accade per $\omega^\mu(z)$.

Concludiamo enunciando due problemi: Ogni gruppo quasi-fuchsiano rappresenta una coppia? È possibile dimostrare il Teorema I « classicamente », cioè usando soltanto trasformazioni conformi?

BIBLIOGRAFIA

1. L. V. AHLFORS, Journ. d'Analyse Math., 3 (1945), pp. 1-58.
2. L. V. AHLFORS, Analytic functions, Princeton Univ. Press (1959), 45-66.
3. L. V. AHLFORS e L. BERS, In corso di stampa.
4. W. L. BAILY. In corso di stampa.
5. L. BERS, *Analytic functions*, Princeton Univ. Press, (1959), pp. 89-119.
6. L. BERS, Proc. Int. Congr. Math. Edinburg 1958, pp. 309-361.
7. L. BERS, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), pp. 98-103.
8. L. BERS, *ibid.*, pp. 94-97.
9. H. CARTAN, Lefschetz Volume, Princeton Univ. Press (1957), pp. 90-108.
10. K. KODAIRA e D. C. SPENCER, Ann. of Math., 70 (1959), pp. 145-166.
11. R. H. RAUCH, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 41 (1955), pp. 42-49.
12. R. RÖHRLI, In corso di stampa.
13. O. TEICHMÜLLER, Preussische Akad., 22 (1940).
14. O. TEICHMÜLLER, *Ibid.* 4 (1943).
15. A. WEIL, Seminaire Bourbaki 1958 (No. 168).