

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ANTONIO CHIFFI

**Sulla esistenza degli integrali curvilinei. Applicazioni**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 14, n° 2 (1960), p. 195-205*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1960\\_3\\_14\\_2\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_195_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA ESISTENZA DEGLI INTEGRALI CURVILINEI. APPLICAZIONI

ANTONIO CHIFFI (Pisa)

In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> abbiamo dimostrato, nella ipotesi che  $F$  e  $G$  siano funzioni  $\mu_e$ -quasi continue (vedi il seguente N. 1) e limitate in un insieme chiuso e limitato  $H$  del piano  $(x, y)$ , che l'integrale:

$$\mathcal{I}_{F,G}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F dx + G dy$$

è una funzione continua in ogni classe  $\mathcal{J}$  di curve continue e rettificabili  $\mathcal{C}$  per le quali siano equi-assolutamente continui gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach (vedi il N. 1) ad esse associate.

Nel presente lavoro si dimostra l'esistenza e la continuità dell'integrale  $\mathcal{I}_{F,G}(\mathcal{C})$  in più generali ipotesi (N. 2 e 3); in particolare nella ipotesi che  $F$  sia  $\mu_e^1$ -quasi continua e  $G$  sia  $\mu_e^2$ -quasi continua in  $H$  (per la definizione vedi il N. 1) ed entrambe limitate.

I precedenti risultati si rivelano utili per stabilire (N. 4) la validità della formula di Green nella ipotesi che  $F$  sia  $\mu_e^1$ -quasi continua e  $G$  sia  $\mu_e^2$ -quasi continua in  $\bar{A} = A \cup FA$ , anzichè entrambe  $\mu_e$ -quasi continue, come precedentemente era stato fatto <sup>(2)</sup>.

## N. 1. — Definizioni preliminari.

Indichiamo con  $\mu_e^1$  [rispettivamente:  $\mu_e^2$ ] la *misura esterna* <sup>(3)</sup> definita nell'insieme  $\mathcal{L}$  degli insiemi limitati del piano  $(x, y)$  associando ad ogni

---

<sup>(1)</sup> A. CHIFFI: *Sulla continuità degli integrali curvilinei*. Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 29 (1959); pp. 411-430; prop. 2,5 a pag. 426.

<sup>(2)</sup> A. CHIFFI: *Sulla formula di Green nel piano*. Ricerche di Matematica, vol. IX (1960). pp. 3-19.

<sup>(3)</sup> Cfr. ad es., F. CAFIERO: *Misura e Integrazione*. Monografie Matematiche del CNR, n. 5; ed. Cremonese, Roma, 1959. Cap. IV, § 3, pag. 230 e sgg.

$I \in \mathfrak{I}$  il numero:

$$\mu_e^1(I) = \text{mis}_e(pr_1 I)$$

[rispettivamente:  $\mu_e^2(I) = \text{mis}_e(pr_2 I)$  ovvero:  $\mu_e(I) = \mu_e^1(I) + \mu_e^2(I)$ ]

dove con  $\text{mis}_e$  abbiamo indicato la misura esterna ordinaria e con  $pr_1 I$  e  $pr_2 I$  le proiezioni di  $I$  sull'asse delle  $x$  e sull'asse delle  $y$  rispettivamente.

Una funzione  $F$  reale, definita in un insieme chiuso e limitato  $H$  del piano  $(x, y)$  si dirà  $\mu_e^1$ -quasi continua [rispettivamente:  $\mu_e^2$ -quasi continua; ovvero:  $\mu_e$ -quasi continua] in  $H$  quando ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  si può associare un insieme  $I$  aperto su  $H$ , di misura esterna  $\mu_e^1$  [rispett.:  $\mu_e^2$ ; ovvero:  $\mu_e$ ] minore di  $\varepsilon$  e tale che la restrizione di  $F$  ad  $H - I$  sia continua<sup>(4)</sup>. Se  $F$  è  $\mu_e$ -quasi continua è anche  $\mu_e^1$  e  $\mu_e^2$ -quasi continua.

Sia  $f$  una funzione reale definita in un insieme  $I$  di numeri reali e sia  $J$  un sottoinsieme di  $I$ . Detta  $f_J$  la restrizione di  $f$  al sottoinsieme  $J$  di  $I$ , sia  $N(t, f_J)$  la funzione reale che ad ogni  $t$  appartenente all'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali associa lo zero, il numero dei punti del sottoinsieme  $\{x: f_J(x) = t\}$  di  $J$  oppure  $+\infty$ , a seconda che il sottoinsieme  $\{x: f_J(x) = t\}$  sia vuoto, finito, oppure non finito.

Sia  $\mathcal{C}$  una curva continua e rettificabile di equazioni parametriche:

$$(1) \quad x = f(s), \quad y = g(s), \quad 0 \leq s \leq l$$

date in funzione dell'ascissa curvilinea  $s$ . Le funzioni  $N(t, f)$  e  $N(t, g)$  si dicono *funzioni di Banach* associate a  $\mathcal{C}$ .

Indicheremo con  $T_{\mathcal{C}}$  l'applicazione continua di  $[0, l]$  nel piano  $(x, y)$  che ad ogni punto  $s \in [0, l]$  associa il punto di coordinate:  $(f(s), g(s))$ .

Indicheremo con  $T_{\mathcal{C}}^{-1}(I)$  l'immagine reciproca di un insieme  $I$  secondo  $T_{\mathcal{C}}$ .

$$\text{N. 2. — Esistenza dell'integrale: } \mathcal{I}_{F,G}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F dx + G dy.$$

Si ha la proposizione seguente:

I. Sia  $F$  [rispettivamente:  $G$ ] una funzione reale, definita e limitata nell'insieme chiuso e limitato  $H$  del piano  $(x, y)$  e sia  $\mathcal{C}$  una curva continua e

---

<sup>(4)</sup> Cfr. G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto a una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. Rend. Sem. Matem. Padova, vol. 17 (1948), pp. 102-106; E. BAIADA: *Sulle funzioni continue rispetto alle variabili separatamente e gli integrali curvilinei*. Ibidem, pp. 201-218.

rettificabile contenuta in  $H$ , di equazioni parametriche (1); fissato  $\sigma > 0$  si possa in corrispondenza a questo determinare un insieme  $I$  aperto su  $H$ , tale che la restrizione di  $F$  [risp.  $G$ ] ad  $H - I$  risulti continua e tale che, posto:  $E = T_{\mathcal{C}}^{-1}(I)$  si abbia:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E) dt < \sigma$$

$$(3) \quad \left[ \text{rispett. } \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E) dt < \sigma \right].$$

In tali ipotesi la funzione:

$$\Phi(s) = F[f(s), g(s)] f'(s)$$

$$[\text{rispett. } \Psi(s) = G[f(s), g(s)] g'(s)]$$

risulta misurabile e limitata in  $[0, l]$  e conseguentemente ha senso l'integrale:

$$(4) \quad \mathcal{J}_F^1(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F dx = \int_0^l \Phi(s) ds$$

$$(5) \quad \left[ \text{rispettivamente: } \mathcal{J}_F^2(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} G dy = \int_0^l \Psi(s) ds \right].$$

Sia  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri maggiori di zero, non crescente e convergente a zero. Ad ognuno di essi si potrà associare, a norma delle ipotesi fatte, un insieme  $I_n$  aperto su  $H$ , tale che la restrizione di  $F$  a  $H - I_n$  risulti continua e tale che per esso valga la (2). Gli insiemi  $I_n$  si possono scegliere in modo tale che la successione  $(I_n)$  risulti non crescente. L'insieme  $E_n = T_{\mathcal{C}}^{-1}(I_n)$  è un insieme di Borel e, per una proposizione già nota <sup>(5)</sup>, si ha:

$$(6) \quad V_f(E_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{E_n}) dt < \sigma_n$$

---

<sup>(5)</sup> Loc. cit. (4), prop. 1,5 a pag. 414.

dove si è indicata con  $V_f(E_n)$  la variazione totale di  $f$  su  $E_n$ . Posto:  $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$  si ha, per l'assoluta continuità della  $f$  e per la (6):

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f'(s)| ds = \int_E |f'(s)| ds = 0.$$

Da ciò segue che  $f'(s)$  e, di conseguenza  $\Phi(s)$ , sono nulle quasi ovunque in  $E$ . La restrizione della funzione  $F[f(s), g(s)]$  all'insieme chiuso  $[0, l] - E_n$  è continua; pertanto la funzione  $\Phi_n(s)$  così definita:

$$\Phi_n(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{per } s \in [0, l] - E_n \\ 0 & \text{per } s \in E_n \end{cases}$$

è misurabile in  $[0, l]$ . Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{per } s \in [0, l] - E \\ 0 & \text{per } s \in E. \end{cases}$$

La funzione  $\Phi$  è quasi ovunque nulla in  $E$  e pertanto essa risulta misurabile in  $[0, l]$  perchè limite quasi ovunque di funzioni misurabili<sup>(6)</sup>. Inoltre  $\Phi$  è limitata, perchè lo sono  $F$  e  $f'(s)$ .

Scambiando poi l'ufficio delle variabili si dimostra l'altra parte della proposizione.

II. Se  $F$  [rispettivamente  $G$ ] è una funzione  $\mu_e^1$ -quasi continua [risp.  $\mu_e^2$ -quasi continua] e limitata in  $H$  e  $C$  è una curva continua, di equazioni parametriche (1), rettificabile e contenuta in  $H$ , risulta verificata la condizione espressa dalla (2) [risp. dalla (3)] e conseguentemente ha senso l'integrale (4) [risp. (5)]<sup>(7)</sup>.

Fissato  $\sigma > 0$  ad arbitrio si potrà determinare<sup>(8)</sup> un  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni insieme misurabile  $D$  di misura minore di  $\varepsilon$  si abbia:

$$(8) \quad \int_D N(t, f) dt < \sigma.$$

<sup>(6)</sup> Cfr., ad es., F. CAFIERO, loc. cit. <sup>(3)</sup>, cap. IV, § 1, prop. 15 a pag. 293.

<sup>(7)</sup> Cfr. sull'argomento E. BAIADA: loc. cit. <sup>(4)</sup> a pag. 211 e: J. CECCONI: *Un complemento al teorema di Stokes*. Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 22 (1953), pp. 23-37; n. 8 a pag. 30.

<sup>(8)</sup> Cfr. S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. Fundamenta Mathematicae, vol. 7 (1925), pp. 225-236; théor. 2 a pag. 228.

Sia  $I$  un insieme aperto su  $H$ , di misura esterna  $\mu_\varepsilon^1$  minore di  $\varepsilon$  e tale che la restrizione di  $F$  a  $H - I$  risulti continua e sia  $D_1$  un insieme lineare aperto contenente la proiezione di  $I$  sull'asse delle  $x$  e avente misura minore di  $\varepsilon$ . Posto:  $E = T_{\mathcal{C}}^{-1}(I)$  e:  $E_1 = f^{-1}(D_1)$ , dalla relazione di inclusione:  $E \subseteq E_1$ , segue:

$$\int_{D_1} N(t, f) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{E_1}) dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E) dt$$

e risulta verificata per la (8) la condizione espressa dalla (2).

Scambiando poi l'ufficio delle variabili  $x$  e  $y$  si dimostra l'altra parte della proposizione. È evidente che la proposizione II sussiste se  $F$  e  $G$  si suppongono  $\mu_\varepsilon$ -quasi continue.

Diremo che la curva  $\mathcal{C}$ , assegnata mediante le sue equazioni parametriche in funzione di un parametro  $u$ :

$$(9) \quad x = f_1(u), \quad y = g_1(u), \quad a \leq u \leq b,$$

è *semirettificabile* se le funzioni  $f_1$  e  $g_1$  sono continue in  $[a, b]$  e soltanto la funzione  $f_1$  a variazione limitata.

III. Sia  $\mathcal{C}$  una curva continua e semirettificabile, contenuta nell'insieme chiuso e limitato  $H$ . Sia  $F$  [risp.  $G$ ] una funzione reale, definita e limitata in  $H$ ; fissato  $\sigma > 0$  si possa in corrispondenza determinare un insieme  $I$  aperto su  $H$ , tale che la restrizione di  $F$  [risp.  $G$ ] ad  $H - I$  sia continua e tale che, posto:  $E = T_{\mathcal{C}}^{-1}(I)$  si abbia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{1E}) dt < \sigma$$

$$\left[ \text{risp.} : \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, g_{1E}) dt < \sigma \right].$$

In tali ipotesi la funzione di  $u$ :  $\Phi_1(u) = F[f_1(u), g_1(u)]f_1'(u)$  [risp.:  $\Psi_1(u) = G[f_1(u), g_1(u)]g_1'(u)$ ] risulta sommabile in  $[a, b]$ . In particolare le precedenti ipotesi sono verificate se  $\mathcal{C}$  è continua e semirettificabile e  $F$   $\mu_\varepsilon^1$ -quasi continua [risp.:  $G$   $\mu_\varepsilon^2$ -quasi continua] e limitata; oppure  $\mu_\varepsilon$ -quasi continua e limitata in  $H$ .

Si possono ripetere le dimostrazioni delle proposizioni I e II, sostituendo  $f_1$  al posto di  $f$  e tenendo conto della sommabilità di  $f_1'$  ed anche, per ottenere l'analoga della (7), della disuguaglianza :

$$V_{f_1}(E_n) \geq \int_{E_n} |f_1'| \, du.$$

La  $\Phi_1(u)$  risulta poi sommabile perchè la  $F$  è limitata e  $f_1'$  è sommabile.

Scambiando al solito l'ufficio delle variabili  $x$  e  $y$  si dimostra l'altra parte della proposizione.

IV. Sia  $C$  una curva continua e rettificabile, contenuta in  $H$ , assegnata mediante le equazioni parametriche (9) e siano le (1) le sue equazioni parametriche assegnate in funzione della ascissa curvilinea. Se le funzioni  $f_1$  e  $g_1$  sono assolutamente continue, se  $F$  [risp.  $G$ ] è una funzione definita in  $H$  e se la funzione:  $F[f_1(u), g_1(u)]$  [risp.  $G[f_1(u), g_1(u)]$ ] risulta misurabile e limitata in  $[a, b]$ , è :

$$(10) \quad \int_0^l F[f(s), g(s)] f'(s) \, ds = \int_a^b F[f_1(u), g_1(u)] f_1'(u) \, du.$$

$$\left[ \text{risp. : } \int_0^l G[f(s), g(s)] g'(s) \, ds = \int_a^b G[f_1(u), g_1(u)] g_1'(u) \, du \right].$$

La funzione  $s(u)$ , che per ogni  $u \in [a, b]$  dà la lunghezza dell'arco di  $C$  corrispondente per le (9) all'intervallo  $[a, u]$ , è assolutamente continua e pertanto si può applicare nel primo membro della (10) il teorema di integrazione per sostituzione, ottenendo :

$$\int_a^b F[f_1(u), g_1(u)] \frac{df[s(u)]}{ds} s'(u) \, du,$$

e immediatamente la (10). Scambiando  $x$  con  $y$  si ha l'altra parte della proposizione.

### N. 3. — Continuità di $\mathcal{I}_F$ .

V. Sia  $F$  [rispettivamente:  $G$ ] definita e limitata nell'insieme chiuso e limitato  $H$  e sia  $\mathfrak{F}$  una famiglia di curve  $C$  contenute in  $H$ , continue, rettific-

cabili e aventi lunghezza egualmente limitata: fissato  $\sigma > 0$  si possa in corrispondenza a questo determinare un insieme  $I$  aperto su  $H$ , tale che la restrizione di  $F$  [risp.  $G$ ] a  $H - I$  sia continua e tale che, posto:

$$E = T_{\mathcal{C}}^{-1}(I),$$

si abbia:

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E) dt < \sigma$$

$$\left[ \text{rispettivamente: } \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, g_E) dt < \sigma \right]$$

uniformemente per  $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ . Allora la funzione  $\mathcal{J}_F^1$  [rispett.:  $\mathcal{J}_G^2$ ] è continua<sup>(9)</sup> in  $\mathfrak{F}$ .

Fissato  $\sigma > 0$ , sia  $I$  l'insieme per il quale, a norma delle ipotesi fatte, è verificata la (11). Detto  $M$  l'estremo superiore di  $|F(x, y)|$  per  $(x, y) \in H$ , sia  $\bar{F}$  una funzione continua in  $H$ , avente restrizione a  $H - I$  uguale alla restrizione di  $F$  a  $H - I$  e tale che sia:  $|\bar{F}(x, y)| \leq M$  per  $(x, y) \in H$ . La funzione  $\mathcal{J}_{\bar{F}}$  è continua<sup>(10)</sup> in  $\mathfrak{F}$  e pertanto per ogni curva  $\mathcal{C}_0 \in \mathfrak{F}$  di equazioni parametriche:

$$x = f_0(s_0), y = g_0(s_0), \quad 0 \leq s_0 \leq l_0$$

si può determinare un  $\varrho_0 > 0$  in guisa tale che risulti:

$$|\mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0)| < \sigma$$

per ogni curva  $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$  che abbia distanza secondo Fréchet minore di  $\varrho_0$  da  $\mathcal{C}_0$ . Si ha poi:

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_F(\mathcal{C}_0)| &\leq |\mathcal{J}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C})| + \\ &+ |\mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0)| + |\mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0) - \mathcal{J}_F(\mathcal{C}_0)| \end{aligned}$$

<sup>(9)</sup> La funzione  $\mathcal{J}_F$  risulta continua nel senso che, considerata una curva  $\mathcal{C}_0 \in \mathfrak{F}$  e fissato un  $\sigma > 0$ , si può determinare un  $\varrho > 0$  tale che per ogni curva  $\mathcal{C}$  avente da  $\mathcal{C}_0$  distanza secondo Fréchet minore di  $\varrho$  si abbia:  $|\mathcal{J}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_F(\mathcal{C}_0)| < \sigma$ .

<sup>(10)</sup> Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Zanichelli, Bologna, (1921); vol. I, cap. VII, n. 108; a pag. 293.

ed anche, con evidente significato dei simboli :

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C})| &= \left| \int_E \{F(f, g) - \bar{F}(f, g)\} f' ds \right| \leq \\ &\leq 2M \int_E |f'| ds = 2M V_f(E) = 2M \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_E) dt. \end{aligned}$$

In modo analogo si ha :

$$|\mathcal{J}_F(\mathcal{C}_0) - \mathcal{J}_{\bar{F}}(\mathcal{C}_0)| \leq 2M \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_{0E}) dt.$$

Si ha infine, per la (11) e le precedenti disuguaglianze :

$$|\mathcal{J}_F(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_F(\mathcal{C}_0)| < \sigma(4M + 1),$$

che esprime quanto si voleva dimostrare.

Scambiando tra loro  $x$  e  $y$  si dimostra l'altra parte della proposizione.

VI. Sia  $F$  [risp.  $G$ ] una funzione  $\mu_e^1$ -quasi continua [risp.  $\mu_e^2$ -quasi continua] e limitata in  $H$  e sia  $\mathfrak{F}$  una classe di curve  $\mathcal{C}$  contenute in  $H$ , continue, rettificabili e di lunghezza egualmente limitata. Se gli integrali indefiniti delle funzioni  $N(t, f)$  [risp.  $N(t, g)$ ] sono equi-assolutamente continui è verificata la condizione espressa dalla (11).

Fissato  $\sigma > 0$  ad arbitrio si potrà determinare un  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni insieme misurabile  $D$  di misura minore di  $\varepsilon$  si abbia :

$$(12) \quad \int_D N(t, f) dt < \sigma.$$

Sia  $A$  un insieme aperto su  $H$ , di misura esterna  $\mu_e^1$  minore di  $\varepsilon$  e tale che la restrizione di  $F$  ad  $H - I$  risulti continua e sia  $A_1$  un insieme lineare aperto contenente la proiezione di  $A$  sull'asse delle  $x$  e avente misura minore di  $\varepsilon$ . Detto  $I$  il prodotto cartesiano di  $A_1$  e dell'asse delle  $y$  risulta subito verificata per la (12) la condizione espressa dalla (11). Scambiando al solito la  $x$  con la  $y$  si dimostra l'altra parte della proposizione<sup>(11)</sup>.

---

<sup>(11)</sup> La tesi della presente proposizione sussiste se  $F$  è  $\mu_e^1$ -quasi continua [rispettiva-

VII. Sia  $F$   $\mu_\epsilon^1$ -quasi continua [risp.  $G$   $\mu_\epsilon^2$ -quasi continua] e limitata in  $H$ . Se la successione di curve  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge in lunghezza alla curva  $C$ , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_F^1(C_n) = \mathcal{J}_F^1(C); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_G^2(C_n) = \mathcal{J}_G^2(C).$$

La dimostrazione si fa in modo eguale all'analogia proposizione 2,7 del lavoro già richiamato<sup>(12)</sup>, sfruttando la prop. VI anzichè la 2,5.

#### N. 4. — Applicazioni.

Indichiamo con  $N_x(t, FA)$  e  $N_y(t, FA)$  le due funzioni reali che esprimono, per ogni  $t$  reale, il numero (finito, nullo o infinito) dei punti di intersezione dell'insieme  $FA$  con le rette  $x = t$  e  $y = t$  rispettivamente. Indichiamo con  $\bar{A}$  l'unione dell'insieme  $A$  e della sua frontiera. In un precedente lavoro abbiamo dimostrato che<sup>(13)</sup>:

VIII. Sia  $A$  un insieme aperto del piano  $(x, y)$  non vuoto, limitato e semplicemente connesso e supponiamo che le funzioni  $N_x(t, FA)$  e  $N_y(t, FA)$  siano sommabili nell'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali; siano  $F$  e  $G$  funzioni definite in  $\bar{A}$  ivi limitate e  $\mu_\epsilon$ -quasi continue; esse soddisfino inoltre ad ipotesi atte ad assicurare la validità della formula di Green:

$$\int_{FR} F dx + G dy = \iint_R (G'_x - F'_y) dx dy$$

per ogni rettangolo  $R$  interno a  $A$ ; la funzione:  $G'_x - F'_y$  esista finita quasi ovunque in  $A$  e sia ivi sommabile. Per ogni curva  $C$  che sia bordo orientato

mente: se  $G$  e  $\mu_\epsilon^2$ -quasi continua] e limitata in  $H$  e, fissato  $\sigma > 0$  ad arbitrio, si può determinare un insieme  $A$  aperto su  $H$ , tale che la restrizione di  $F$  a  $H - A$  sia continua e tale che per ogni  $C \in \mathfrak{F}$  si abbia:

$$\int_{A_1} N(t, f) dt < \sigma \quad \left[ \text{risp.} : \int_{A_1} N(t, g) dt < \sigma \right]$$

dove  $A_1$  è un insieme lineare aperto contenente la proiezione di  $A$  sull'asse delle  $x$  [risp. delle  $y$ ].

<sup>(12)</sup> Loc. cit. (1), a pag. 420.

<sup>(13)</sup> Loc. cit. (2), prop. 2.I a pag. 14.

di  $A$  ha luogo la formula di Green :

$$(13) \quad \int_{\mathcal{C}} F dx + G dy = \iint_A (G'_x - F'_y) dx dy .$$

Le considerazioni che abbiamo svolto permettono di precisare, lasciando inalterate le dimostrazioni, questa ed altre proposizioni del richiamato lavoro<sup>(14)</sup>, nel modo seguente :

IX. Se  $F$  e  $G$ , anzichè  $\mu_e$ -quasi continue, si suppongono rispettivamente  $\mu_e^1$ - e  $\mu_e^2$ -quasi continue in  $\bar{A}$  e se  $F$  e  $G$  soddisfano in  $A$  alle altre ipotesi precisate nella precedente proposizione VIII, ha luogo la (13).

X. Sia  $\mathcal{C}$  una curva continua, chiusa, rettificabile e semplice e  $A$  l'insieme dei punti ad essa interni. Se  $F$  e  $G$ , anzichè  $\mu_e$ -quasi continue, si suppongono rispettivamente  $\mu_e^1$  e  $\mu_e^2$ -quasi continue in  $\bar{A}$  e se  $F$  e  $G$  soddisfano in  $A$  alle altre ipotesi precisate nella prop. VIII, ha luogo la (11).

XI. Sia  $\mathcal{C}$  una curva continua, chiusa e rettificabile e  $A$  l'unione delle componenti connesse e limitate dell'insieme dei punti del piano che non appartengono a  $\mathcal{C}$ . Se  $F$  e  $G$ , anzichè  $\mu_e$ -quasi continue, si suppongono rispettivamente  $\mu_e^1$  e  $\mu_e^2$ -quasi continue in  $\bar{A}$  e  $F$  e  $G$  soddisfano in  $A$  alle altre ipotesi precisate nella proposizione VIII, esiste una famiglia finita o numerabile di curve continue, chiuse e rettificabili:  $(\mathcal{C}_i)_{i \in N}$  per le quali è:

$$\sum_i \int_{\mathcal{C}_i} F dx + G dy = \iint_A (G'_x - F'_y) dx dy .$$

OSSERVAZIONE. Una funzione  $F$ , pur soddisfacendo alle ipotesi indicate nelle precedenti proposizioni IX - XI, può non risultare  $\mu_e$ -quasi continua. Infatti la validità della formula di Green :

$$\int_{FR} F dx = - \iint_R F'_y dx dy$$

per ogni rettangolo  $R$  contenuto in  $A$  è assicurata, ad esempio, se  $F$  è assolutamente continua, considerata come funzione di  $y$ , in ogni insieme chiuso contenuto in  $A_x$  (intersezione di  $A$  con la retta i cui punti hanno ascissa uguale a  $x$ ) per quasi ogni  $x$  e se la derivata  $F'_y$  è sommabile in  $A$ . Una tale funzione può risultare  $\mu_e^1$ -quasi continua in  $A$  senza essere  $\mu_e$ -quasi continua.

<sup>(14)</sup> Loc. cit. (2), prop. 2.II e 2.III a pag. 17.

Questa ultima affermazione si può precisare osservando che: se  $F$  è definita nell'unione  $\bar{A}$  di un insieme aperto e limitato  $A$  e della sua frontiera ed è continua in  $(\bar{A})_x$  per quasi ogni  $x$  e misurabile in  $A_y$  per quasi ogni  $y$ ; se  $A$  è tale che l'insieme  $(\bar{A})_x$  è costituito, per quasi ogni  $x$ , da un numero finito di intervalli non degeneri i punti interni dei quali sono tutti punti di  $A$ ; allora la funzione  $F$  risulta  $\mu_e^1$ -quasi continua in  $\bar{A}$ .

Sia  $Q$  un quadrato a lati paralleli agli assi contenente  $\bar{A}$  e sia  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione non decrescente di plurirettangoli chiusi contenuti in  $A$ , tale che:  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = A$  e tale che sui lati di  $R_n$  paralleli all'asse delle  $x$  la  $F$  sia misurabile. Costruiamo la successione di funzioni  $(F_n)$  definite in  $Q$  nel modo seguente:  $F_n$  sia uguale a zero sulle rette parallele all'asse  $y$  non intersecanti  $R_n$ ; sulle rette parallele all'asse delle  $y$  intersecanti  $R_n$  si definisca nel modo seguente: sugli intervalli che cadono in  $R_n$  sia uguale a  $F$ ; sugli intervalli che non cadono in  $R_n$ , ma i cui estremi si trovano su  $R_n$ , sia lineare e uguale a  $F$  negli estremi; sugli intervalli che hanno un solo estremo su  $R_n$  si definisca costantemente uguale al valore di  $F$  in quell'estremo. La funzione  $F_n$  così definita è continua in  $Q_x$  per quasi ogni  $x$  e si verifica che è misurabile in  $Q_y$  per quasi ogni  $y$ . La funzione  $F_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  è uguale a  $F$  in ogni intervallo di  $(\bar{A})_x$  i cui punti interni siano punti di  $A$  e pertanto, per le ipotesi fatte su  $A$ , è uguale a  $F$  in  $(\bar{A})_x$  per quasi ogni  $x$ . Inoltre  $F_0$  risulta misurabile in  $Q_y$  per quasi ogni  $y$ , e, sempre per le ipotesi fatte su  $A$ , continua in  $Q_x$  per quasi ogni  $x$ . Pertanto  $F_0$  è  $\mu_e^1$ -quasi continua in  $Q$  e la sua restrizione a  $A$  ivi  $\mu_e^1$ -quasi continua. L'asserto risulta così dimostrato. *Le ipotesi fatte su  $A$  sono certamente verificate se  $A$  è l'insieme dei punti interni ad una curva  $\mathcal{C}$  continua, rettificabile e semplice* (ipotesi della prop. X). Per quasi ogni  $x$  infatti le rette i cui punti hanno ascissa uguale a  $x$  incontrano la curva  $\mathcal{C}$  in un numero finito di punti in ognuno dei quali la derivata  $f'(s)$  esiste ed è diversa da zero<sup>(45)</sup>. In un intorno di ognuno di tali punti la curva ammette una rappresentazione del tipo:  $y = \varphi(x)$  e ciò esclude che si tratti di punti isolati dell'insieme  $(\bar{A})_x$ .

<sup>(45)</sup> Cfr. loc. cit. (4), prop. 1,7 a pag. 416.