ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO DOLCHER

Topologie e strutture di convergenza

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 1 (1960), p. 63-92

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_1_63_0>

TOPOLOGIE E STRUTTURE DI CONVERGENZA

Memoria di MARIO DOLCHER (a Trieste)

1. Introduzione.

La nozione di *convergenza di una successione,* che è stata forse la principale idea-guida nella fondazione della Topologia generale ([1]), è decaduta poi d'importanza col precisarsi del concetto, prima vago e oscillante, di *spazio astratto* nella nozione di *spazio topologico*: basta la facile constatazione che non ogni topologia può venire descritta in termini di convergenza di successioni a render ragione dell'opportunità di disancorare la Topologia generale dagli *spazi*-($\mathcal{L}$) di FRÉCHET-KURATOWSKI.

Ma anche un'altra circostanza ha contribuito a sminuire la parte che la convergenza delle successioni ebbe inizialmente nella Topologia, ed è la seguente. Assegnate che siano, in un insieme E, le successioni convergenti, è parso naturale dedurne una nozione di chiusura poggiata sulla convenzione di considerare aderenti ad un insieme tutti *e soli* i punti di E verso i quali convergono successioni tratte dall'insieme stesso ([2]). Una siffatta legge di chiusura non è in generale idempotente ([3]), come invece è richiesto per potersi parlare di spazio topologico. Ne venne che ad un'assegnata convergenza

---

([1]) Vedasi M. FRÉCHET: *Sur quelques points du calcul fonctionnel,* Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906), p. 1-74, e, dello stesso A., *Les espaces abstraits,* Paris, Gauthier-Villars, 1928. Si noti che proprio in relazione alle esigenze dell'Analisi funzionale il FRÉCHET assegnava una posizione preminente agli « spazi ($\mathcal{L}$) », sebbene gli si presentassero meno maneggevoli degli « spazi ($\mathcal{V}$) » e degli « spazi ($\mathcal{D}$) ».

([2]) Così in P. ALEXANDROFF - H. HOFF, *Topologie I,* Berlin (1935), p. 27, e in C. KURATOWSKI, *Topologie I,* Warszawa (1948), p. 83 e segg.

([3]) Si pensi alla situazione che si presenta per l'insieme E dell funzioni f a valore reale, definite p. es. per ogni x reale, quando la convergenza s'intenda *puntuale* ($\lim f_n = f$ se e solo se per ogni x è $\lim f_n(x) = f(x)$). Detto A l'insieme delle funzioni continue, la « chiusura » di A è la prima classe di Baire, la quale non costituisce « insieme chiuso » (sempre nel senso menzionato nel testo).

si associò un tipo di struttura più generale di quella di spazio topologico: *allgemein-topologischer Raum* di ALEXANDROFF-HOPF, *espace*-($\mathcal{L}^*$) di KURATOWSKI. Altri Autori, in considerazione della successione degl'insiemi che da uno dato si ottengono per iterazione dell'operazione di chiusura, hanno denominato *mehrstufige Topologie* una siffatta generalizzazione (in realtà, soltanto apparente, come si constaterà al n. **15**) della nozione di spazio topologico ([4]). In seguito ad un tale orientamento, la possibilità di una deduzione canonica di una (vera e propria) topologia da una convergenza non è stata oggetto — per quanto mi consti — di adeguato studio.

Le generalizzazioni della nozione di convergenza (MOORE-SMITH e altre, fra le quali la più recente e più generale è quella mediante filtri) hanno concorso a situare le successioni in una posizione del tutto secondaria nella Topologia generale ([5]).

Malgrado tutto ciò, l'importanza che la convergenza delle successioni riveste per l'Analisi giustifica a priori la considerazione in astratto delle *strutture di convergenza,* indipendentemente da ogni possibile intendimento di fondare sulle stesse la Topologia degli spazi. Chè se poi, come nei fatti avviene, esse si mostrano vicine alle *strutture di spazio topologico*, tanto maggiore rilievo acquista il problema del confronto delle une con le altre.

L'istituzione di un tale confronto è l'oggetto del presente lavoro.

Qui di seguito accenno al modo nel quale il problema viene impostato e a qualche risultato più significativo.

([4]) Sull'argomento, il lavoro più esauriente è J. NOVAK, *Sur les espaces* ($\mathcal{L}$) *et sur les produits cartésiens* ($\mathcal{L}$), Publ. Fac. Sciences Univ. Masaryk, fasc. 273 (1939), p. 1-28. L'Autore chiama *spazio topologico* anche uno spazio nel quale l'operazione di chiusura non sia idempotente.

([5]) Fra i lavori recenti nei quali si studiano forme più generali di convergenza, menzioniamo: H.-J. KOWALSKY, *Limesräume und Komplettierung,* Math. Nachr. **12** (1954), p. 301-339; H. SONNER, *Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen,* Archiv der Math. **4** (1953), p. 461-469; G. BRUNS-J. SCHMIDT, *Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern,* Math. Nachr. **13** (1955), p. 169-186; K. HARBARTH, *Über die Äquivalenz verschiedener Axiomensysteme für Limesräume,* Math. Nachr. **17** (1959), p. 261-272. Nel citato lavoro di G. BRUNS-J. SCHMIDT trovasi un elenco bibliografico dei precedenti lavori sulle varie generalizzazioni della convergenza mediante successioni.

Va peraltro notato che nessuno dei detti lavori si prefigge lo scopo di un confronto fra la struttura cui la convergenza dà luogo e la struttura di spazio topologico: resta quindi aperto il problema di estendere i risultati che nel presente lavoro si dànno per la convergenza mediante successioni ordinarie, al caso della convergenza mediante successioni generalizzate (p. es. successioni transfinite, convergenza alla Moore-Smith, filtri). Risultati parziali per la convergenza mediante filtri si possono presumibilmente dedurre dall'approfondita trattazione contenuta nel citato lavoro di H.-J. KOWALSKY.

* * *

Le *strutture di convergenza* vengono definite nel modo abituale (che chiamo di FRÉCHET-KURATOWSKI) ma prescindendo, a differenza dalle altre trattazioni, dall'esigenza dell'unicità del limite. Esse, unitamente alle applicazioni che conservano la convergenza, costituiscono una categoria, $\mathcal{L}$[6] (n. **4**): interessano alcune sottocategorie della $\mathcal{L}$, in particolare quella, $\mathcal{L}_2$, delle convergenze con unicità del limite. Gli spazi topologici e le loro applicazioni continue costituiscono oggetti e mappe di un'altra categoria, $\mathcal{T}$ (n. **5**): $\mathcal{T}_2$ è la sottocategoria costituita dagli spazi di Hausdorff.

La legge L che ad ogni topologia τ associa, nel modo abituale, una convergenza $L(\tau)$ è un funtore $L: \mathcal{T} \to \mathcal{L}$ (n. **6**). Un altro funtore $T: \mathcal{L} \to \mathcal{T}$ (n. **7**) viene definito, in modo da soddisfare all'esigenza seguente: per ogni convergenza λ, sia $T(\lambda)$ la più fine fra le topologie dalle quali, tramite L, si deduce una convergenza meno fine [7] della λ. Si può anche osservare che la topologia $T(\lambda)$ è la più fine fra quelle nelle quali per ogni insieme A la chiusura $\overline{A}$ contiene quella pseudochiusura dell'insieme stesso della quale si è parlato all'inizio. Rileviamo qui che è proprio l'adozione di *due* leggi univoche in luogo di *una* legge (magari plurivoca) che si è mostrata lo strumento più idoneo al confronto delle due categorie.

Ciascuno dei due funtori composti $TL: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ ed $LT: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ dà luogo ad una retrazione della relativa categoria. Tale circostanza consente di formulare condizioni necessarie e sufficienti sia per la deducibilità di una data topologia da convergenze, sia per la deducibilità di una data convergenza da topologie (n. **8**). Si tratta di condizioni di agevole applicazione.

Dopo avere stabilito una nozione di *sottocategorie associate* (risp. in $\mathcal{T}$ e in $\mathcal{L}$) intesa a precisare le possibili restrizioni dei funtori L e T a sottocategorie notevoli (n. **9**), ed averne data applicazione alle sottocategorie costituite dagli spazi (T_0) e (T_1) (nn. **10, 11**), l'attenzione viene rivolta alle $\mathcal{T}_2$ ed $\mathcal{L}_2$: le convergenze con unicità del limite ammettono una sottocategoria associata in $\mathcal{T}$ (n. **12**), mentre le topologie di Hausdorff non ammettono sottocategoria associata in $\mathcal{L}$ (n. **14**). Nel confronto in questione non ci si può dunque restringere alle sole topologie di Haudorff; ci si potrebbe invece restringere alle sole convergenze con unicità del limite, ma le topologie as-

---

(6) *Categoria* nel senso di EILENBERG-MACLANE, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), p. 231-294.

(7) Si noti che, relativamente alle strutture di convergenza e alle topologie, adoperiamo le locuzioni « *più fine di* » e « *meno fine di* » nel loro senso più debole, ossia non escludendo la coincidenza. Conformemente a tali espressioni, usiamo anche i segni $>$ e $<$: l'essere, per topologie, $\tau = \tau'$ implica sia $\tau > \tau'$ sia $\tau < \tau'$.

sociate costituiscono una sottocategoria (leggermente più ampia di quella di Hausdorff) assai poco significativa per ogni altro riguardo. È tale constatazione che mi ha indotto a prescindere dall'unicità del limite per le convergenze.

Il risultato di maggiore rilievo viene ottenuto al n. **14**, dopo aver stabilito attraverso un lemma (n. **13**) l'identità $LT(\lambda) = \lambda$ per $\lambda \in \mathcal{L}_2$. Precisamente, dimostro che, mentre in generale il passaggio mediante T da una convergenza λ alla topologia $T(\lambda)$ può comportare un impoverimento della struttura dell'insieme, ciò non può avvenire per $\lambda \in \mathcal{L}_2$: *dalla topologia dedotta da una convergenza con unicità del limite può in ogni caso ricostruirsi la convergenza stessa.* Il risultato permette un'interessante constatazione riguardo alle «mehrstufige Topologien» menzoniate all'inizio: non soltanto da ogni siffatta struttura può canonicamente dedursi una topologia, ma l'operazione di pseudochiusura è definibile in termini della struttura di spazio topologico da essa dedotta (n. **15**).

Ai nn. **16** e **17** sono riassunti in termini più precisi altri risultati relativi alla deducibilità di una convergenza da una topologia e viceversa. Inoltre, al n. **16** si dimostra che ogni convergenza, salvo una ristretta classe di poca importanza, è deducibile da *infinite* topologie distinte; e al n. **17** viene stabilita una condizione sufficiente, espressa in termini di struttura dei filtri d'intorni, affinchè una topologia sia deducibile da una convergenza. Resta aperto il problema di formulare in analoghi termini una condizione che sia all'uopo anche necessaria, ma ritengo che ciò interesserebbe sostanzialmente soltanto lo studio della struttura locale degli spazi topologici (8), chè ad ogni effetto applicativo risulterebbe meno maneggevole della condizione $TL(\tau) = \tau$ qui stabilita (n. **8**).

2. Successioni.

Una *successione* è una funzione degl'interi positivi, a valori in un insieme arbitrario E (che spesso verrà sottointeso), i cui elementi chiameremo *punti* (senza con ciò voler significare che E sia dotato di una qualche struttura topologica).

---

(8) Su tale ordine di ricerche, vedasi G. BRUNS, *Die Struktur der unverzweigten punktalen Raumtypen*, Math. Japon. **4** (1957), p. 123-132 e G. BRUNS-J. SCHMIDT, *Die punktalen Typen topologischer Räume*, Math. Japon. **4** (1957) p. 133-177. In quest'ultimo lavoro trovasi anche un ricco elenco bibliografico.

Indicheremo una successione con $\{p_n\}$ o, quando sia il caso, con $\{p_n\}_n$: così $\{p_{r,s}\}_r$ è la successione $p_{1,s}, p_{2,s}, \dots, p_{n,s}, \dots$. Detta S una successione, indicheremo con $|\,S\,|$ l'insieme dei punti che vi compaiono.

Dette S, S' due successioni, scriveremo $S' \subset S$ per indicare che la S' è una sottosuccessione della S. In particolare, diremo che la $S' = \{p'_n\}$ è un *resto* della $S = \{p_n\}$ se per un opportuno intero k è $p'_n = p_{k+n}$ per ogni valore di n. Diremo *costante* una $\{p_n\}$ quando sia $p_r = p_s$ per ogni coppia d'interi r, s: così, ad esempio, $\{p_{r,s}\}_n$ indica una costante.

Introduciamo ora tre operazioni che da una o più successioni assegnate consentono di dedurne determinate altre.

(α) Data una $\{p_n\}$, ne consideriamo dedotta ogni successione della quale la data è un resto.

(β) Data la $\{p_n\}$, ne consideriamo dedotta ogni successione $\{p_{r_n}\}$ con $\lim r_n = \infty$ (ossia: ogni $\{p_{r_n}\}$ tale che per ogni intero s sia $r_i = s$ al più per un numero finito di valori di i); in particolare dunque, ogni sottosuccessione.

(γ) Date un numero finito di successioni $S^i = \{p^i_n\}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, consideriamo dedotta dalle S^i ogni successione S la quale ammetta $h\,(\leq k)$ sottosuccessioni $S'^j = \{p_{r^j_n}\}$ rispettivamente uguali ad h delle S^i e tali che gl' interi r^j_n $(j = 1, 2, \dots, h;\ n = 1, 2, \dots)$ siano tutti distinti, ed ogni intero vi compaia.

Indichiamo con $(\alpha\beta\gamma)$ l'operazione attraverso la quale, da una data famiglia $\mathcal{S}$ di successioni si ricavano quant'altre è possibile mediante applicazione successiva di operazioni (α), (β), (γ), in numero e in ordine arbitrario: diremo *dedotta da una famiglia* $\mathcal{S}$ (sottointendendo: mediante $(\alpha\beta\gamma)$) ogni successione così ottenibile; diremo *$(\alpha\beta\gamma)$-chiusura della famiglia* $\mathcal{S}$ la totalità $\mathcal{S}^*$ delle successioni dedotte da $\mathcal{S}$.

È ovvio che ogni successione dedotta da una famiglia $\mathcal{S}$ è anche dedotta da un'opportuna sottofamiglia finita della $\mathcal{S}$. Osserviamo inoltre che una successione la quale sia dedotta da una famiglia $\mathcal{S}'$ di successioni, ciascuna delle quali sia dedotta da una famiglia $\mathcal{S}$, è dedotta dalla $\mathcal{S}$; in altre parole, l'operazione di $(\alpha\beta\gamma)$-chiusura per le famiglie di successioni è idempotente:

$$(\mathcal{S}^*)^* = \mathcal{S}^*. \text{ (9)}$$

È utile per il seguito notare le due proposizioni seguenti.

Se una successione S è dedotta da una famiglia $\mathcal{S} = \{S^i : i \in I\}$, la S ha una sottosuccessione comune con almeno una delle S^i.

(9) Si noti peraltro che, per due famiglie $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ di successioni, non si ha in generale $(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)^* = \mathcal{S}_1^* \cup \mathcal{S}_2^*$: non si tratta dunque di un'operazione di *chiusura* di tipo topologico.

DIM. — Per l'ipotesi fatta, la S ha almeno una sottosuccessione dedotta mediante (α) e (β) da *una* delle S^i; e quest'ultima ha una sottosuccessione comune con la S, essendo che da ogni successione d'interi $\{r_n\}$ con $\lim r_n = \infty$ si può estrarre una sottosuccessione crescente.

Detta S una successione, ogni successione S' priva di sottosuccessioni costanti e tale che $|S'| \subset |S|$ è dedotta dalla S.

DIM. — Posto $S = \{p_n\}$, la S' può designarsi con $\{p_{r_n}\}$ (senza che, in generale, gl'interi r_n siano univocamente determinati): il supporre che la successione d'interi $\{r_n\}$ non diverga implicherebbe l'esistenza di una sottosuccessione costante di quest'ultima, epperò implicherebbe lo stesso anche per la S', contro l'ipotesi.

3. Strutture di convergenza.

L'assunzione di una legge che dichiara *convergenti* certe successioni di elementi di un insieme E associando a ciascuna di esse uno o più punti-limite dà luogo ad una *struttura di convergenza* (brevemente: *convergenza*) *su* E quando siano rispettate le tre condizioni seguenti:

(FK1) ogni successione costante $\{p\}$ converge verso p;

(FK2) se una successione converge verso p, ogni sua sottosuccessione converge verso p;

(FK3) se una successione non converge verso p, se ne può estrarre una sottosuccessione, nessuna sottosuccessione della quale converge verso p [10].

Parlando di una convergenza su E, diremo che E è l'*insieme-sostegno* della convergenza stessa.

Data che sia, sopra un insieme E, una struttura di convergenza, indichiamo con $\mathcal{S}_p$, per ogni $p \in E$, la famiglia delle successioni convergenti verso p. Nel caso che $\mathcal{S}_p$ consti delle sole successioni aventi come resto la costante $\{p\}$, diremo che p è un *punto isolato* nella convergenza data.

In ogni struttura di convergenza, ciascuna delle famiglie $\mathcal{S}_p$ è chiusa rispetto all'operazione ($\alpha\beta\gamma$).

---

(10) La nozione di spazio di convergenza è stata introdotta da M. FRÉCHET, nel primo dei lavori citati in (1), a mezzo delle sole condizioni (FK1), (FK2). Peraltro, lo stesso FRÉCHET ne constatava più tardi l'insufficienza (M. FRÉCHET, *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits*, Bull. Sci. Math. **42** (1918), p. 1-19). La formulazione della condizione (FK3) trovasi in P. ALEXANDROFF-P. URYSOHN, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace ($\mathcal{L}$) soit une classe ($\mathcal{D}$)*. C. R. Acad. Sci. Paris **177** (1923), p. 1274. Trattazioni dell'argomento trovansi nel libro di M. FRÉCHET citato in (1), in P. URYSOHN, *Sur les classes (L) de M. Fréchet*, L'Enseign. Math. **25** (1926), p. 77-83, e in C. KURATOWSKI, op. cit. in (2).

DIM. — Sia $S^i \in \mathcal{S}_p$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ e sia S dedotta dalle S^i: proviamo che è $S \in \mathcal{S}_p$. Ogni sottosuccessione S' della S ammette una sottosuccessione S'' dedotta mediante $(\alpha\beta\gamma)$ da *una* delle S^i; esiste allora una sottosuccessione S''' comune della S e di quella S^i. In virtù della (FK2) si ha $S''' \in \mathcal{S}$, e, stante l'arbitrarietà di S' $(\subset S)$, dalla (FK3) si deduce $S \in \mathcal{S}$.

Sia data sopra un insieme E una struttura di convergenza. Chiameremo *base locale di convergenza* relativa ad un punto $p \in E$ ogni famiglia $\mathcal{B}_p$ di successioni la quale: (1) contenga la costante $\{p\}$; (2) le successioni convergenti verso p siano tutte e sole quelle dedotte dalla $\mathcal{B}_p$. Con le notazioni di sopra:

$$\{p\} \in \mathcal{B}_p\,, \quad \mathcal{B}_p^* = \mathcal{S}_p\,.$$

È importante peraltro osservare che ove si assegni, in corrispondenza ad ogni punto $p \in E$, una famiglia $\mathcal{B}_p$ soddisfaciente alla (1), è bensì vero che in ogni eventuale struttura di convergenza nella quale ogni successione di $\mathcal{B}_p$ converga verso p, debbono convergere verso p anche tutte le successioni di $\mathcal{B}_p^*$ (e ciò per la (FK1) e per l'ultimo teorema provato); ma $\mathcal{B}_p$ non costituirà, in generale, una base locale per alcuna struttura di convergenza: può infatti non essere soddisfatta la (FK3), come proviamo con un esempio.

ESEMPIO. — Sia $E = \{p_n : n = 1, 2, \ldots\}$ e sia $\mathcal{B}_p$ la famiglia costituita dalle successioni aventi come resto la costante $\{p_0\}$ e dalle successioni $\{p_{r_n}\}$ tali che:

(1) la successione d'interi che si ottiene dalla $\{r_n\}$ sopprimendo gli eventuali termini nulli risulti divergente;

(2) detta $\{s_n\}$ la successione *crescente* formata con tutti e soli gl'interi r_n non nulli, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n}$ risulti convergente.

È facile constatare che ciascuna delle tre operazioni (α), (β), (γ) conserva il carattere di divergenza della successione degl'indici non nulli e il carattere di convergenza della serie associata. Si ha dunque, nel nostro caso, addirittura $\mathcal{B}_p^* = \mathcal{B}_p$. La condizione (FK3) non è peraltro verificata: da ogni sottosuccessione S della $\{p_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione appartenente a $\mathcal{B}_p$ (bastando all'uopo che gl'indici siano abbastanza rarefatti affinchè la serie dei loro reciproci converga), mentre la S, non soddisfaciendo alla (2), non appartiene alla famiglia $\mathcal{B}_p$, come vorrebbesi per la (FK3).

La nozione di base locale di convergenza si presenta come analoga alla nozione di base locale di una topologia [11]. Vi è peraltro una diversità es-

---

(11) Per rendere più precisa l'analogia, giova qui intendere come *base locale di una topologia* piuttosto un *sistema di generatori del filtro degl'intorni* (di un punto) che non, com'è nell'uso, una *base del filtro* stesso. (Cfr. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Ch. 1, § 5).

senziale : l'assegnazione, per ogni punto $p \in E$, di un filtro $\mathcal{U}_p$ non dà luogo ad una topologia se non sia rispettata un'opportuna condizione di compatibilità fra i filtri che così risultano associati ai singoli punti; per le strutture di convergenza invece, le condizioni (FK1), (FK2), (FK3) — le sole che si postulano — vengono imposte singolarmente a ciascuna delle famiglie $\mathcal{S}_p$. Inoltre : per le strutture di spazio topologico una base locale è del tutto arbitraria (salvo la condizione che il punto interessato appartenga ad ogni insieme della base), ottenendosi da una tale famiglia il filtro degl'intorni col chiudere rispetto alle operazioni di intersezione finita e di riunione arbitraria; per le strutture di convergenza invece, una base locale non è arbitraria (nè assoggettata alla sola condizione di contenere la costante $\{p\}$), almeno se si vuole che da essa la famiglia $\mathcal{S}_p$ si ottenga come $(\alpha\beta\gamma)$-chiusura. Può porsi allora il problema di individuare un'operazione (necessariamente più generale delle $(\alpha\beta\gamma)$) attraverso la quale si possa ottenere, partendo da una famiglia $\mathcal{B}_p$ *arbitraria* di successioni (tale che $\{p\} \in \mathcal{B}_p$) la famiglia minima (che, presumibilmente, in ogni caso esiste) contenente la $\mathcal{B}_p$ e soddisfaciente le (FK1), (FK2), (FK3). Per gli scopi del presente lavoro, un tale approfondimento non è essenziale, dato che la nozione di base locale è qui impiegata al solo scopo di evitare di dover menzionare in ogni caso esplicitamente la totalità $\mathcal{S}_p$, cosa in genere molto malagevole.

Convenzione. Per assegnare una convergenza su E, ci limiteremo in ogni caso ad assegnare una base locale; per brevità, ometteremo di constatare caso per caso che la $(\alpha\beta\gamma)$-chiusura della base assegnata soddisfa, com'è necessario, anche alla (FK3). In generale ometteremo di menzionare, fra le successioni convergenti verso p, la costante $\{p\}$.

4. La categoria $\mathcal{L}$.

Riguardiamo come *oggetto* λ ogni insieme dotato di una struttura di convergenza, e come *mappa* $f: \lambda_1 \to \lambda_2$ ogni applicazione dell'insieme-sostegno E_1 di λ_1 nell'insieme-sostegno E_2 di λ_2 la quale porti ogni successione di E_1 convergente verso un punto p in una successione di E_2 convergente verso il punto $f(p)$.

Si verifica immediatamente che sono soddisfatte le condizioni per le quali gli oggetti e le mappe costituiscono una *categoria* nel senso di EILENBERG-MACLANE : la indicheremo con $\mathcal{L}$.

La legge E che ad ogni oggetto λ di $\mathcal{L}$ associa il relativo insieme-sostegno e che ad ogni mappa $f: \lambda_1 \to \lambda_2$ associa l'applicazione stessa pensata per gl'insiemi-sostegno $E(f): E(\lambda_1) \to E(\lambda_2)$ è, come subito si vede, *un funtore covariante della categoria $\mathcal{L}$ nella categoria $\mathcal{E}$ degl'insiemi e applicazioni* (*funtore-sostegno*).

Per ogni fissato insieme-sostegno E, la totalità dei relativi oggetti della categoria può pensarsi ordinata, intendendo che

$$\lambda_1 < \lambda_2 \qquad (\lambda_1 \textit{ meno fine di } \lambda_2)$$

significhi che dalla λ_2-convergenza di una successione verso un punto p si deduce che la λ_1-convergenza della stessa verso p; ossia, che l'applicazione identica dell'insieme-sostegno funge da mappa $\lambda_2 \to \lambda_1$ in $\mathcal{L}$.

In tale ordine vi sono due elementi estremi: *la struttura di convergenza discreta*, più fine di tutte, nella quale convergono soltanto le successioni definitivamente costanti, con unicità del limite; e *la struttura di convergenza nulla*, meno fine di tutte, nella quale ogni successione converge verso tutti i punti di E.

Sottocategorie notevoli della $\mathcal{L}$ sono quelle costituite rispettivamente dalle convergenze soddisfacienti alle condizioni:

(FKT_0') Per ogni coppia di punti distinti, esiste almeno una successione convergente verso uno solo dei due.

(FKT_0'') Per ogni coppia di punti distinti p, q, almeno una delle due successioni costanti $\{p\}$, $\{q\}$ non converge verso entrambi i punti.

(FKT_1) Ogni successione costante converge verso un unico limite.

(FKT_2) Nessuna successione converge verso due punti distinti.

Indicheremo con $\mathcal{L}_0'$, $\mathcal{L}_0''$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ tali sottocategorie, che penseremo *complete*, ossia dotate di tutte le mappe di $\mathcal{L}$ fra gli oggetti che vi compaiono. Ciascuna delle sottocategorie $\mathcal{L}_0''$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ è *superiormente satura,* ossia contiene con ogni convergenza anche tutte quelle più fini di essa: lo si constata immediatamente. (Non così per la $\mathcal{L}_0'$).

Ciascuna delle quattro sottocategorie considerata è inclusa nella precedente: che si tratti di inclusioni proprie è facile vederlo, e ci limitiamo a provare con un esempio che è $\mathcal{L}_0' \neq \mathcal{L}_0''$.

ESEMPIO. Sia

$$E = \{p_r : r = 1, 2, ...\} \cup \{q_r : r = 1, 2, ...\} \cup p \cup q.$$

I punti p_r e q_r $(r = 1, 2, ...)$ siano isolati; verso p convergano la $\{p_n\}$ e la $\{q\}$; verso q convergano la $\{q_n\}$ e la $\{p\}$. Come subito si vede, è soddisfatta la (FKT_0') ma non la (FKT_0'').

Nel seguito (n. **10**) verrà considerata un'ulteriore sottocategoria $\mathcal{L}_0$, intermedia fra le $\mathcal{L}_0''$ ed $\mathcal{L}_1$.

5. La categoria $\mathcal{T}$.

Indichiamo così la categoria i cui oggetti sono gli *spazi topologici* e le mappe sono le *applicazioni continue.*

Interessa considerare, anche per questa categoria, il funtore-sostegno, il cui significato è manifesto.

Per ogni fissato insieme-sostegno E, la totalità dei relativi oggetti di $\mathcal{T}$ (topologie su E) si penserà ordinata nel modo usuale, per finezza. Vi sono, anche qui, due elementi estremi: la *topologia discreta* e la *topologia nulla.*

Indicheremo con $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ le sottocategorie (complete) della $\mathcal{T}$ costituite rispettivamente dagli spazi topologici soddisfacienti alle note condizioni (T_0), (T_1), (T_2). Si tratta, anche qui, di sottocategorie superiormente sature.

6. Il funtore L.

Sia τ uno spazio topologico avente come insieme-sostegno E: pensiamo τ come oggetto della categoria $\mathcal{T}$ e stabiliamo una legge L che consente di dedurne una struttura di convergenza $\lambda = L(\tau)$ sopra lo stesso insieme E. Si tratta dell'ordinaria definizione di convergenza in uno spazio topologico, e precisamemente:

(L) *una successione è $L(\tau)$-convergente verso un punto p se e solo se finisce in ogni intorno di p* (12).

Le condizioni (FK1), (FK2), (FK3) per la struttura λ così definita si verificano immediatamente.

L'operazione L, così definita per gli oggetti della categoria $\mathcal{T}$, si penserà estesa in modo ovvio alle mappe della stessa: data $f: \tau \to \tau'$ la $L(f)$ è quell'applicazione di $L(\tau)$ in $L(\tau')$ la quale dà luogo alla medesima $E(f)$ fra gl'insiemi-sostegno.

Proviamo che *l'operazione L è un funtore covariante*, $L: \mathcal{T} \to \mathcal{L}$.

DIM. — Sia $f: \tau \to \tau'$, e sia S una successione $L(\tau)$-convergente verso un punto $p\,(\in E)$: proviamo che la $f(S)$ (13) è $L(\tau')$-convergente verso $f(p)$. Detto U' un τ'-intorno arbitrario di $f(p)$, l'insieme $f^{-1}(U')$ è, per l'ipotesi fatta sulla f, un τ-intorno di p. La S, essendo $L(\tau)$-convergente verso p, finisce in $f^{-1}(U')$, epperò la $f(S)$ finisce in $f(f^{-1}(U'))$, ossia in $U' \cap f(E)$; quindi la $f(S)$ finisce in U'. Data l'arbitrarietà di U', ne viene che la $f(S)$ è $L(\tau')$-convergente verso $f(p)$, come asserito.

---

(12) Usiamo, qui e nel seguito, questa locuzione per intendere che esiste un resto della successione, tutti i termini del quale sono punti di A.

(13) Ci permettiamo qualche lieve abuso di notazione, al sicuro da ogni possibilità di equivoco; qui, ad es., f sta per $E(f)$.

Fissato che sia un insieme E, si pensino, per ciascuna delle due categorie $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, ordinati per finezza gli oggetti aventi E come insieme-sostegno. L'essere, per due topologie su E, $\tau < \tau'$ equivale all'appartenenza a $\mathcal{G}$ della mappa $\tau' \to \tau$ avente mappa sostegno identica: dunque, l'applicazione stessa è mappa della $\mathcal{L}$, il che equivale all'essere $L(\tau) < L(\tau')$. Il funtore L è dunque monotono, ossia

(1) $\qquad$ *da* $\quad \tau < \tau' \quad$ *segue* $\quad L(\tau) < L(\tau')$.

7. Il funtore *T*.

Data che sia sopra un insieme E una struttura di convergenza λ, ne vogliamo dedurre, mediante una legge T, una topologia $T(\lambda)$.

L'esigenza cui vogliamo soddisfare con una tale legge è la seguente. Ogni topologia τ dà luogo ad una convergenza $L(\tau)$; fra le topologie τ possibili su E nelle quali viene conservata la λ-convergenza (ossia, fra le topologie τ tali che $L(\tau) < \lambda$) vogliamo chiamare $T(\lambda)$ la più fine. Che lo scopo ora detto venga effettivamente raggiunto, lo proveremo più avanti (n. 8, (5)).

Data dunque λ, definiamo la topologia $T(\lambda)$ al modo seguente:

(T) *un insieme $A\ (\subset E)$ è $T(\lambda)$-aperto se e solo se per ogni punto $p \in A$, ogni successione convergente verso p finisce in A.*

Proviamo anzitutto che si tratta di una topologia.

DIM. — Se A_i, per ogni $i \in I$, è aperto, posto $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, ogni successione convergente verso un punto $p \in A$ finisce, supposto $p \in A_{i_0}$, in A_{i_0}, epperò in A; dunque A è aperto. Se A, B sono aperti, ogni successione convergente verso un punto p di $A \cap B$ finisce in A ed anche in B, dunque in $A \cap B$, che pertanto risulta aperto. Infine, l'insieme vuoto è ovviamente aperto ([14]).

Un insieme $B\ (\subset E)$ risulta $T(\lambda)$-chiuso se e solo se nessuna successione costituita di soli punti di B ha punti-limite fuori di B.

DIM. — Se B è chiuso, ossia se il complementare $\mathcal{C}(B)$ è aperto, una successione di punti di $B\ (= \mathcal{C}(\mathcal{C}(B)))$ non può convergere verso un punto di $\mathcal{C}(B)$. Inversamente, se B non è chiuso, $\mathcal{C}(B)$ non è aperto, dunque esiste una successione S con un punto-limite in $\mathcal{C}(B)$, la quale non finisce

---

([14]) Si osservi che nella dimostrazione non si utilizzano in alcun modo le proprietà (FK1), (FK2), (FK3) delle λ. Pertanto, la legge T fornisce una topologia anche a partire da strutture molto più generali di quelle che qui ed usualmente si denominano *convergenze* in particolare dunque, da convergenze nel senso originario di M. FRÉCHET (vedi ([10])).

in $\mathcal{C}(B)$: essa contiene allora una sottosuccessione tutta in B e convergente, per la (FK2), verso un punto non appartenente a B.

Importa osservare, a chiarimento del significato della legge T, che un insieme nel quale finisca ogni successione λ-convergente verso un punto non costituisce necessariamente un intorno del punto stesso.

ESEMPIO. — Sia

$$E = \{p_{r,s} : r, s = 1, 2, ...\} \cup \{p_r : r = 1, 2, ...\} \cup p.$$

La convergenza λ sia definita come segue: i punti $p_{r,s}$ $(r, s = 1, 2, ...)$ sono tutti isolati; verso p_r $(r = 1, 2, ...)$ converge la $\{p_{r,s}\}_s$; verso p converge la $\{p_n\}$.

Detto P l'insieme $\{p_r : r = 1, 2, ...\} \cup p$, ogni successione λ-convergente verso p finisce, ovviamente, in P; ma P non è un intorno di p, dappoichè nessun insieme aperto contenente p è contenuto in P.

In modo ovvio, come già si è osservato per L, anche T può pensarsi esteso alle mappe: accertiamone il carattere di funtore.

L'operazione T è un funtore covariante, $T : \mathcal{L} \to \mathcal{T}$.

DIM. — Sia $f : \lambda \to \lambda'$ una mappa della categoria $\mathcal{L}$; proviamo che l'applicazione degl'insiemi-sostegno individuata da f è una mappa della categoria $\mathcal{T}$. Sia A' $(\subset E')$ un insieme $T(\lambda')$-aperto. Detto p un punto qualunque di $f^{-1}(A')$ e detta S una successione qualunque λ-convergente verso p, dall'ipotesi fatta sulla f si ha che la $f(S)$ è λ'-convergente verso $f(p)$; dall'essere $f(p) \in A'$ e dall'essere A' $T(\lambda')$-aperto segue, a norma della T, che la $f(S)$ finisce in A', epperò la S finisce in $f(A')$. Stante l'arbitrarietà di p e tenuta presente la legge T, l'insieme $f^{-1}(A')$ risulta $T(\lambda)$-aperto, donde la tesi.

In modo perfettamente analogo a quello seguito per il funtore L, si prova che *per ogni insieme-sostegno E, il funtore T è monotono rispetto all'ordine per finezza delle due categorie:*

$$\text{(2)} \qquad \textit{da} \quad \lambda < \lambda' \quad \textit{segue} \quad T(\lambda) < T(\lambda').$$

8. Composizione dei funtori L e T.

Interessa essenzialmente per il seguito considerare i funtori

$$TL : \mathcal{T} \to \mathcal{T}, \qquad LT, \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

Proviamo anzitutto che si ha:

$$(3) \qquad TL(\tau) > \tau, \qquad \textit{per ogni} \qquad \tau \in \mathcal{T};$$

$$(4) \qquad LT(\lambda) < \lambda, \qquad \textit{per ogni} \qquad \lambda \in \mathcal{L}.$$

DIM. — Proviamo la (3). Detto A un insieme τ-aperto, ogni successione $L(\tau)$-convergente verso un punto p di A finisce, a norma della L, in A (che è τ-intorno di p); ed allora, a norma della T, l'insieme A risulta $TL(\tau)$-aperto.

Proviamo la (4). Una successione che sia λ-convergente verso un punto p finisce necessariamente, a norma della T, in ogni $T(\lambda)$-intorno di p; e allora, a norma della L, ogni siffatta successione risulta $LT(\lambda)$-convergente verso p.

Le proposizioni (3) e (4) ora dimostrate ci permettono ora di stabilire quanto annunciato all'inizio del n. 7, a titolo di caratterizzazione (e, in un certo senso, di giustificazione) del funtore T, ed anche, di stabilire un'analoga proposizione per il funtore L.

Per ogni convergenza λ, la topologia $T(\lambda)$ è la più fine fra le topologie nelle quali tutte le successioni λ-convergenti permangono convergenti (nel senso della L) verso tutti i loro λ-limiti; ossia

$$(5) \qquad \textit{da} \quad L(\tau) < \lambda \quad \textit{segue} \quad T(\lambda) > \tau.$$

DIM. — Sia $L(\tau) < \tau$; dalla (2) segue $T(\lambda) > TL(\tau)$, dalla (3) segue $TL(\tau) > \tau$ e la tesi resta provata.

Per ogni topologia τ, la convergenza $L(\tau)$ è la meno fine fra le convergenze dalle quali, tramite T, si deduce una topologia più fine della τ; ossia

$$(6) \qquad \textit{da} \quad T(\lambda) > \tau \quad \textit{segue} \quad L(\tau) < \lambda.$$

DIM. — Sia $T(\lambda) > \tau$; si ha allora, per la (1), $L(\tau) < LT(\lambda)$ e, per la (4), $LT(\lambda) < \lambda$; ne segue dunque la tesi.

Proviamo poi che si ha

$$(7) \qquad LTL = L, \qquad TLT = T.$$

DIM. — Per ogni $\tau \in \mathcal{T}$ si ha, in virtù della (4), $LTL(\tau) = LT(L(\tau)) < < L(\tau)$ e dalle (3), (1) si ha $LTL(\tau) = L(TL(\tau)) > L(\tau)$, donde la prima delle (7). Per provare la seconda, osserviamo che per ogni $\lambda \in \mathcal{L}$ si ha, per la (3), $TLT(\lambda) = TL(T(\lambda)) > T(\lambda)$; dalle (4), (2) si ha $TLT(\lambda) = T(LT(\lambda)) < < T(\lambda)$. Ne segue la tesi.

Da quanto ora dimostrato segue immediatamente che:
per ogni topologia τ si ha

$$TLTL(\tau) = TL(\tau); \tag{8}$$

per ogni struttura di convergenza λ si ha

$$LTLT(\lambda) = LT(\lambda). \tag{9}$$

Dunque, i due funtori TL ed LT sono idempotenti; essi dànno luogo quindi a retrazioni risp. sulle categorie $\mathcal{T}$ ed $\mathcal{L}$:

$$T(\mathcal{L}) \xrightarrow{J} \mathcal{T} \xrightarrow{TL} TL(\mathcal{T}),$$

$$L(\mathcal{T}) \xrightarrow{J'} \mathcal{L} \xrightarrow{LT} LT(\mathcal{L})$$

(dove J, J' indicano mappe d'inclusione).

Ne segue che: si ha $TL(\tau) = \tau$ se e solo se è $\tau \in T(\mathcal{L})$; si ha $LT(\lambda) = \lambda$ se e solo se è $\lambda \in L(\mathcal{T})$.

Ossia:
sono deducibili da convergenze [15] *tutte e sole le topologie τ per le quali si ha*

$$TL(\tau) = \tau; \tag{*}$$

sono deducibili da topologie tutte e sole le convergenze λ per le quali si ha

$$TL(\lambda) = \lambda. \tag{**}$$

Si osservi ancora che per ogni fissato insieme-sostegno E, i due funtori TL ed LT inducono retrazioni per le relative sottocategorie risp. $\mathcal{T}_E$ ed $\mathcal{L}_E$; in forza delle (3), (4), la retrazione così indotta su $\mathcal{T}_E$ ha carattere *progressivo*, mentre quella indotta su $\mathcal{L}_E$ ha carattere *regressivo* (s'intende, rispetto all'ordine per finezza delle sottocategorie stesse).

9. Sottocategorie associate in $\mathcal{T}$ e in $\mathcal{L}$.

Dette $\mathcal{T}'$, $\mathcal{L}'$ due sottocategorie risp. di $\mathcal{T}$ e di $\mathcal{L}$, diremo che esse sono *associate* se per esse si ha simultaneamente

$$L^{-1}(\mathcal{L}') = \mathcal{T}', \qquad T^{-1}(\mathcal{T}') = \mathcal{L}'. \tag{10}$$

---

[15] Qui e nel seguito, dicendo che una topologia è deducibile da una convergenza sottointenderemo: mediante T. Analogamente verrà sottointeso: mediante L.

Per ogni siffatta coppia di sottocategorie si ha $(LT)^{-1}(\mathcal{L}') = \mathcal{L}'$ e $(TL)^{-1}(\mathcal{T}') = \mathcal{T}'$.

Inversamente, dall'essere p. es. per una sottocategoria $\mathcal{L}', (LT)^{-1}(\mathcal{L}') = \mathcal{L}'$, segue che essa ammette un'associata in $\mathcal{T}$, e precisamente la $L^{-1}(\mathcal{L}')$: e infatti, posto $L^{-1}(\mathcal{L}') = \mathcal{T}'$, dall'essere $(LT)^{-1}(\mathcal{L}') = T^{-1}(L^{-1}(\mathcal{L}'))$ segue anche la seconda delle (10).

L'interesse di tale nozione risiede nel fatto che se $\mathcal{T}'$ ed $\mathcal{L}'$ sono associate, allora, dette risp. $\mathcal{T}''$ e $\mathcal{L}''$ le sottocategorie complementari in $\mathcal{T}$ e in $\mathcal{L}$ (ossia quelle costituite risp. dai rimanenti oggetti di $\mathcal{T}$ e di $\mathcal{L}$, con le mappe esistenti fra di essi), anche le $\mathcal{T}''$ e $\mathcal{L}''$ risultano associate, come subito si vede. Sicchè i due funtori L e T potranno pensarsi ristretti alle $\mathcal{T}'$ ed $\mathcal{L}'$ (oppure alle $\mathcal{T}''$ ed $\mathcal{L}''$) senza perdere alcun risultato che interessi il confronto della $\mathcal{L}'$ con la $\mathcal{T}$, oppure della $\mathcal{T}'$ con la $\mathcal{L}$.

Esamineremo, nei nn. **10**, **11**, **12** alcune sottocategorie notevoli di $\mathcal{T}$ e di $\mathcal{L}$ dal detto punto di vista.

10. Sottocategorie associate alle $\mathcal{L}_0'$, $\mathcal{L}_0''$ e alla $\mathcal{T}_0$.

Stabiliamo anzitutto le relazioni che intercorrono, tramite L e T, fra la condizione (T_0) che usualmente s'impone agli spazi topologici e le condizioni (FKT′), (FKT″) che abbiamo formulato al n. **4** per le convergenze.

Proviamo che si ha:

$$L^{-1}(\mathcal{L}_0') = L^{-1}(\mathcal{L}_0'') = \mathcal{T}_0. \tag{11}$$

Dim. — Sia $\tau \in \mathcal{T}_0$; detti p, q due punti arbitrari di E, esiste ad es. un intorno U di p non contenente q; la costante $\{q\}$ non è dunque $L(\tau)$-convergente verso p, ossia per la $L(\tau)$ sussiste la (FKT_0''), epperò anche la (FKT_0'). Si ha dunque $L(\mathcal{T}_0) \subset \mathcal{L}_0'' \subset \mathcal{L}_0'$.

Suppongasi invece che una τ non soddisfi alla (T_0); esistono allora due punti p, q i cui filtri d'intorni coincidono: sono pertanto $L(\tau)$-convergenti verso p tutte e sole le successioni che lo sono verso q, sicchè viene meno la (FKT_0'), epperò anche la (FKT_0''), per la convergenza $L(\tau)$. Si ha dunque $\mathcal{T}_0 \supset L^{-1}(\mathcal{L}_0'') \supset L^{-1}(\mathcal{L}_0')$.

Dalla prima delle relazioni dimostrate segue $\mathcal{T}_0 \subset L^{-1}(\mathcal{L}_0'') \subset L^{-1}(\mathcal{L}_0')$ che, confrontata con la seconda, porge la tesi.

Proviamo poi che si ha

$$T^{-1}(\mathcal{T}_0) \subset \mathcal{L}_0'' \subset \mathcal{L}_0'. \tag{12}$$

DIM. — Sia $\lambda \in T^{-1}(\mathcal{I}_0)$, cioè $T(\lambda) \in \mathcal{I}_0$; ne viene, per la (11), $LT(\lambda) \in L(\mathcal{I}_0) \subset \mathcal{L}_0''$. Dalla (4), tenuto conto che la sottocategoria $\mathcal{L}_0''$ è satura superiormente (cfr. n. **4**) segue allora $\lambda \in \mathcal{L}_0''$.

Si noti peraltro che non sussiste l'inclusione opposta della (12): può aversi cioè $\lambda \in \mathcal{L}_0''$ senza che $T(\lambda)$ soddisfi alla (T_0), ossia, senza che λ appartenga a $T^{-1}(\mathcal{I}_0)$. Lo proviamo con un esempio.

ESEMPIO. — Consti l'insieme E di tre punti: x, y, z. Sia λ^* la convergenza definita come segue: verso y converge la costante $\{x\}$, verso z converge la costante $\{y\}$, verso x converge la costante $\{z\}$. Manifestamente λ^* soddisfa alla (FKT_0''). Nella $T(\lambda^*)$, sono aperti soltanto l'insieme vuoto ed E: dunque la $T(\lambda^*)$ non soddisfa alla (T_0).

È facile provare, in base alle (11), (12) e alla constatazione fatta con l'Esempio precedente, che

nè la $\mathcal{L}_0''$ nè la $\mathcal{L}_0'$ ammettono in $\mathcal{I}$ una sottocategoria associata.

DIM. — Tenuta presente la (11), l'eventuale associata vuoi di $\mathcal{L}_0''$ vuoi di $\mathcal{L}_0'$ non potrebbe essere (in base alla prima delle (10)) se non $\mathcal{I}_0$. Senonchè la seconda delle (10) non è soddisfatta nè da $\mathcal{L}_0''$ nè da $\mathcal{L}_0'$: e invero, la λ^* dell'Esempio di sopra appartiene ad $\mathcal{L}_0''$, quindi anche ad $\mathcal{L}_0'$ ma non a $T^{-1}(\mathcal{I}_0)$, duque è $T^{-1}(\mathcal{L}_0'') \neq \mathcal{I}_0$, $T^{-1}(\mathcal{L}_0') \neq \mathcal{I}_0$.

Passiamo infine a provare che

la $\mathcal{I}_0$ ammette in $\mathcal{L}$ una sottocategoria associata.

DIM. — Proviamo che si ha

$$(TL)^{-1}(\mathcal{I}_0) = \mathcal{I}_0\,; \tag{13}$$

ossia che, posto

$$\mathcal{L}_0 = T^{-1}(\mathcal{I}_0)\,, \tag{14}$$

si ha $L^{-1}(\mathcal{L}_0) = \mathcal{I}_0$.

Sia $\lambda = L(\tau)$, con $\tau \in \mathcal{I}_0$; allora, attesa la (3), si ha $T(\lambda) > \tau$, dunque $T(\lambda) \in \mathcal{I}_0$ e $\lambda \in T^{-1}(\mathcal{I}_0) = \mathcal{L}_0$. È dunque $L(\mathcal{I}_0) \subset \mathcal{L}_0$; ne consegue $\mathcal{I}_0 \subset L^{-1} L(\mathcal{I}_0) \subset L^{-1}(\mathcal{L}_0)$.

Per provare l'inclusione opposta, osserviamo anzitutto che la (12) porge $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0''$; dopo di che, dalla (11) segue $L^{-1}(\mathcal{L}_0) \subset L^{-1}(\mathcal{L}_0'') \subset \mathcal{I}_0$. È dunque $L^{-1}(\mathcal{L}_0) = \mathcal{I}_0$. Attesa la (14), si ha dunque la (13), ossia la tesi.

In armonia con le denominazioni introdotte al n. **4**, designiamo con (FKT_0) la condizione, per le strutture di convergenza, di appartenenza alla sottocategoria $\mathcal{L}_0$ definita dalla (14), ossia:

$$T(\lambda) \in \mathcal{L}_0\,. \tag{FKT_0}$$

Dalla (12) risulta che si tratta di una condizione più forte della (FKT_0''); l'Esempio portato in questo n. **10** sta a comprovare che le due condizioni (FKT_0) ed (FKT_0'') non sono equivalenti.

La sottocategoria $\mathcal{L}_0$ *è superiormente satura* (nel senso detto al n. **4**).

DIM. — Sia $\lambda_0 \in \mathcal{L}_0$, $\lambda > \lambda_0$; allora, per la (2), è $T(\lambda) > T(\lambda_0)$ $(\in \mathcal{T}_0)$, e, tenuto conto che la $\mathcal{T}_0$ è superiormente satura, si ha $T(\lambda) \in \mathcal{T}_0$, dunque $\lambda \in \mathcal{L}_0$.

Stante l'importanza della (FKT_0) in connessione con le proprietà degli spazi topologici, apparirebbe desiderabile una formulazione della condizione stessa in termini propri delle strutture di convergenza; ma non pare che ciò possa farsi in modo abbastanza espressivo.

Notiamo da ultimo, a titolo di corollario dei risultati precedenti, che *nessuna delle convergenze intermedie fra le sottocategorie* $\mathcal{L}_0'$ *ed* $\mathcal{L}_0$ (ossia, soddisfacienti alla (FKT_0') e non (FKT_0)) *è deducibile da una topologia.*

DIM. — Sia λ una siffatta convergenza. Dal fatto che λ non appartiene ad $\mathcal{L}_0$ segue, per la (13), che l'equazione (in τ) $L(\tau) = \lambda$ non ha soluzioni in $\mathcal{T}_0$. Dall'essere poi $\lambda \in \mathcal{L}_0'$ segue, per la (11), che l'equazione stessa non ha soluzioni fuori di $\mathcal{T}_0$.

11. Le sottocategorie associate $\mathcal{T}_1$ ed $\mathcal{L}_1$.

Proviamo che le sottocategorie $\mathcal{T}_1$ ed $\mathcal{L}_1$ (definite risp. ai nn. **5** e **4**) *sono associate*, cioè che si ha

$$L^{-1}(\mathcal{L}_1) = \mathcal{T}_1\,, \qquad T^{-1}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{L}_1\,. \tag{15}$$

DIM. — Suppongasi τ tale che la convergenza $L(\tau)$ non appartenga ad $\mathcal{L}_1$; esiste allora una successione costante $\{p\}$ la quale, oltre che verso p, è $L(\tau)$-convergente anche verso un altro punto q. Allora, a norma della L, la p finisce in ogni τ-intorno di q: ciò comporta che q è τ-aderente a p, e per la τ non può sussistere la (T_1). Si ha dunque $L(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{L}_1$. Ne segue $L^{-1}L(\mathcal{T}_1) \subset L^{-1}(\mathcal{L}_1)$, e a fortiori $\mathcal{T}_1 \subset L^{-1}(\mathcal{L}_1)$.

Per stabilire l'inclusione opposta, suppongasi τ non soddisfaciente alla (T_1); esistono allora due punti distinti p, q tali che ogni τ intorno di q contiene p. Essendo che, dunque, la $\{p\}$ finisce in ogni τ-intorno di q, essa risulta, a norma della L, $L(\tau)$-convergente verso q: la $L(\tau)$ non soddisfa quindi alla (FKT_1). Ne viene $L^{-1}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{T}_1$, e, tenuta presente l'inclusione provata sopra, la prima delle (15) è provata.

Proviamo ora la seconda.

Sia λ una convergenza tale che $T(\lambda)$ non soddisfi alla (T_1), e sia p un punto non costituente insieme $T(\lambda)$-chiuso. Allora, a norma della T, esiste una successione di punti dell'insieme stesso, necessariamente la costante $\{p\}$, λ-convergente verso un punto q distinto da p. La λ non soddisfa dunque alla (FKT_1). Ne viene $T(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{T}_1$, donde $T^{-1}\,T(\mathcal{L}_1) \subset T^{-1}(\mathcal{T}_1)$, e a fortiori $\mathcal{L}_1 \subset T^{-1}(\mathcal{T}_1)$.

Inversamente, supposto che una convergenza $\mathcal{L}_1$ non soddisfi alla (FKT_1), ossia supposta l'esistenza di una successione costante $\{p\}$ la quale, oltre che verso p, converga verso un altro punto q, a norma della T si ha che p non costituisce insieme $T(\lambda)$-chiuso, assia che la $T(\lambda)$ non soddisfa alla (T_1). Se ne trae $T^{-1}(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{L}_1$, e, tenuto conto dell'inclusione già stabilita, anche la seconda delle (15) resta dimostrata.

12. Confronto delle sottocategorie $\mathcal{T}_2$ ed $\mathcal{L}_2$.

Data l'importanza che rivestono le sottocategorie $\mathcal{T}_2$ (topologie di Hausdorff) ed $\mathcal{L}_2$ (convergenze con unicità del limite), interessa particolarmente il loro confronto. Sebbene qualcuno dei risultati che otterremo ripeta proposizioni già note, il metodo di ricerca adottato permetterà di addivenire anche a conclusioni presumibilmente nuove e significative.

Per ogni struttura di convergenza dedotta (tramite L) da una topologia di Hausdorff sussiste l'unicità del limite.

DIM. — Sia τ una topologia tale che $L(\tau)$ non appartenga ad $\mathcal{L}_2$; ossia esista una successione $L(\tau)$-convergente verso due punti distinti p', p''; allora, a norma della L, ogni τ-intorno di p' contiene un resto della successione, e lo stesso avviene per ogni τ-intorno di p''. Si ha quindi, per ogni coppia d'intorni U', U'' risp. dei due punti, $U' \cap U'' \neq 0$: la τ non appartiene dunque a $\mathcal{T}_2$.

Resta dunque stabilita l'inclusione

(16) $$L(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{L}_2\,,$$

ossia

$$\mathcal{T}_2 \subset L^{-1}(\mathcal{L}_2)\,.$$

Per ogni struttura di convergenza dalla quale si deduca (tramite T) una topologia di Hausdorff, sussiste l'unicità del limite.

DIM. — Sia $T(\lambda) \in \mathcal{T}_2$. Dal teorema precedente segue allora $LT(\lambda) \in \mathcal{L}_2$; essendo che, per la (4), $LT(\lambda)$ è meno fine di λ, e tenuto conto che una topologia più fine di una topologia di Hausdorff è essa stessa necessariamente di Hausdorff, ne viene $\lambda \in \mathcal{L}_2$.

Resta dunque stabilita l'inclusione

(17) $$T^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{L}_2$$

ossia, passando alle T-imagini in $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_2 \cap T(\mathcal{L}) \subset T(\mathcal{L}_2).$$

Alle due proposizioni ora dimostrate vanno aggiunte due ulteriori constatazioni:

una topologia che sia dedotta, tramite T, da una convergenza con unicità del limite non è necessariamente di Hausdorff;

una topologia dalla quale si deduca, tramite L, una convergenza con unicità del limite non è necessariamente di Hausdorff.

Daremo l'esempio di una convergenza $\lambda^* \in \mathcal{L}_2$ tale che $T(\lambda^*)$ non è di Hausdorff, provando così la prima affermazione. La stessa topologia $T(\lambda^*)$ potrebbe venire utilizzata per dimostrare la seconda affermazione, essendo $LT(\lambda^*) = \lambda^*$ $(\in \mathcal{L}_2)$: la verifica diretta di quest'ultima uguaglianza è alquanto laboriosa (almeno nelle formalità dimostrative), ed inutile in quanto seguirebbe immediatamente dalla (17) del n. **14.** Per questa ragione, ed anche per presentare una topologia cui faremo riferimento nel seguito, non ci varremo, come sarebbe possibile, di un unico esempio per ambedue gli scopi.

ESEMPIO. Sia

$$E = \{p_{r,s}: \ r = 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots\} \cup p' \cup p''.$$

La convergenza λ^* sia definita come segue: i punti $p_{r,s}$ siano tutti isolati; verso p' convergano le successioni $\{p_{r,s}\}_s$, per ogni r; verso p'' convergano le successioni $\{p_{r,f(r)}\}_r$, qualunque sia la funzione $f(r)$. Sussiste, oltre alle (FK1), (FK2), anche la (FK3): per brevità ne omettiamo la facile verifica. È soddisfatta anche la condizione (FKT$_2$), dappoichè l'incompatibilità delle condizioni richieste per la convergenza di una successione risp. verso p' e verso p'' assicurano l'unicità del limite.

Descriviamo ora la topologia $T(\lambda^*)$. I punti $p_{r,s}$ sono tutti isolati. Posto

$$U_f = \{p_{r,s}: \ r = 1, 2, \ldots; \ s \geq f(r)\} \cup p',$$

la famiglia degl'insiemi U_f così ottenuta al variare arbitrario della funzione f costituisce una base d'intorni per p': ciò segue dalla constatazione, immediata, che si tratta di insiemi $T(\lambda^*)$-aperti, e che ogni insieme $T(\lambda)$ aperto contenente p', dovendo contenere un resto di ogni successione convergente verso p', contiene almeno uno degli U_f. Una base d'intorni di p'' è costituita dalla famiglia d'insiemi

$$\{V_{\bar{r}}: \bar{r} = 1, 2, \ldots\}, \text{ con } V_{\bar{r}} = \{p_{r,s}: \ r \geq \bar{r}, s = 1, 2, \ldots\} \cup p''.$$

Omettiamo, per brevità, la facile constatazione.

Orbene, la topologia $T(\lambda^*)$ non è di Hausdorff, essendo, per ogni coppia d'intorni (di base) risp. di p' e di p'':

$$U_f \cap V_{\bar{r}} = \{p_{r,s} : r \geq \bar{r}, s \geq f(r)\} \neq 0 .$$

ESEMPIO. ([16]) Sia

$$E = \{p_{r,s} : r = 1, 2, \ldots ; s = 1, 2, \ldots\} \cup p' \cup p''.$$

La topologia τ sia definita come segue: i punti $p_{r,s}$ siano tutti isolati; posto

$$U^i_{\bar{r},f} = \{p_{r,s} : r \geq \bar{r}, s \geq f(r)\} \cup p^i \qquad (i = ', ''),$$

una base d'intorni di p^i sia costituita dagl'insiemi $U^i_{\bar{r},f}$, al variare dell'intero $\bar{r}$ e della funzione f assoggettata alla condizione $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$. Per ogni coppia di τ-intorni risp. di p' e di p'' si ha $U'_{\bar{r}',f'} \cup U''_{\bar{r}'',f''} \neq 0$: ed infatti il punto $p_{r,s}$ con $r = \max(\bar{r}', \bar{r}'')$ ed $s = \max(f'(r), f''(r))$ appartiene ad ambo gl'intorni. La τ non soddisfa dunque alla condizione di Hausdorff.

Nella convergenza $L(\tau)$, ogni punto di E è isolato. Per i punti $p_{r,s}$ la cosa è ovvia; proviamo che nessuna successione non definitivamente costante converge verso p'. Sia S una siffatta successione: è lecito supporre che p' non vi compaia. Se essa ha come un resto la costante $\{p''\}$, la tesi è banale; altrimenti, supposto che la S sia costituita di soli punti del tipo $p_{r,s}$, se l'indice r ha lo stesso valore per infiniti dei suoi termini, la S non finisce in $U'_{r+1,f}$ (quale che sia la f), epperò non converge verso p'. Altrimenti, per ogni valore r tale che $p_{r,s}$ compare (per almeno un valore di s) nella successione, sia $\bar{s}(r)$ il massimo degl'interi s tali che $p_{r,s} \in |S|$. Poniamo allora $f(r) = \bar{s}(r) + 1$ per i detti valori di r, ed $f(r) = 1$ per gli eventuali altri valori di r. Manifestamente, la nostra successione non finisce nell'intorno $U'_{1,f}$ di p', quindi non converge verso p'. Poichè la medesima

---

([16]) Un altro esempio, più immediato, allo stesso scopo potrebbe ottenersi assumendo come E l'insieme degli ordinali della I e della II classe, coll'aggiunta di due ulteriori elementi Ω', Ω'' (in luogo del primo ordinale Ω della III classe): la topologia degl'intorni sinistri, anche per i due punti aggiunti (supposti non confrontabili) dà luogo ad una struttura di convergenza nella quale tanto Ω' quanto Ω'' risultano isolati. L'unicità del limite è dunque assicurata.

Abbiamo preferito tuttavia l'esempio riportato nel testo, ritenendo interessante attenersi, quando sia possibile, all'esemplificazione su insiemi numerabili.

constatazione può ripetersi per il punto p'', si conclude che la $L(\tau)$ è la convergenza discreta, che appartiene ad $\mathcal{L}_2$. Notiamo che, essendo $TL(\tau)$ la topologia discreta, si ha $TL(\tau) \neq \tau$.

La constatazione fatta attraverso quest'ultimo esempio ci permette di dimostrare che *la sottocategoria* $\mathcal{T}_2$, *degli spazi di Hausdorff, non ammette una sottocategoria associata* (nel senso detto al n. 9) *fra le strutture di convergenza.*

DIM. Si tratta di provare che è

$$(TL)^{-1}(\mathcal{T}_2) \neq \mathcal{T}_2 .$$

Sia τ una topologia non di Hausdorff, tale che $L(\tau)$ sia la convergenza discreta (cfr. esempio precedente). Allora $TL(\tau)$ è, ovviamente, la topologia discreta, dunque $TL(\tau) \in \mathcal{T}_2$, ossia $\tau \in (TL)^{-1}(\mathcal{T}_2)$.

Attraverso il lemma che segue potremo invece constatare che la $\mathcal{L}_2$ ammette una associata fra le topologie.

13. Un lemma.

Le relazioni che intercedono fra i funtori T ed L per le convergenze con unicità del limite, verranno precisate attraverso il seguente lemma.

Se una struttura di convergenza soddisfa alla condizione (FKT_2), *una successione la quale finisce in ogni* $T(\lambda)$*-intorno di un punto* p *converge necessariamente verso* p.

DIM. — Proviamo che se una successione S non converge verso p, esiste un $T(\lambda)$-intorno di p nel quale la S non finisce.

Per la (FK3), la non convergenza della S verso p implica l'esistenza di una sottosuccessione $S' \subset S$ tale che nessuna $S'' \subset S'$ converge verso p. Allora, dalla (FK1) segue che nella S' il punto p non compare infinite volte: è legittimo supporre che non vi compaia affatto.

Distinguiamo due casi.

I caso. Nessuna successione di punti di $|S'|$ converge verso un punto non appartenente ad $|S'|$. Ciò significa, a norma della legge T, che $|S'|$ è $T(\lambda)$-chiuso e quindi l'insieme complementare U, al quale p appartiene, è un $T(\lambda)$-intorno di p nel quale la S non finisce.

II caso. Esiste una successione S'' di punti di $|S'|$, convergente verso un punto q non di $|S'|$. Per l'ipotesi fatta sulla S' è $q \neq p$. Diciamo allora U l'insieme complementare di $|S''| \cup q$ e proviamo che U è $T(\lambda)$-aperto. Per assurdo: se non lo fosse, esisterebbe una successione convergente verso un punto x di U, la quale non finisce in U, epperò anche una S^*

convergente verso x, priva di punti di U; ossia $|S^*| \subset |S''| \cup q$. Il punto q non compare infinite volte nella S^*: altrimenti, in forza della (FK2), la costante $\{q\}$ convergerebbe verso $x (\neq q)$. È legittimo dunque supporre $|S^*| \subset |S''|$. Nè può la S^* avere sottosuccessioni costanti, e ciò sempre per l'ipotesi dell'unicità del limite, tenuto conto della (FK2) e del fatto che x non appartiene ad S^*. Dunque, nella S^* compaiono infiniti punti distinti di $|S''|$. Ciò implica l'esistenza di una S^{**}, sottosuccessione comune della S^* e della S'', la quale dovrebbe dunque convergere verso x e verso q contro l'ipotesi (FKT_2). Dunque l'insieme U è $T(\lambda)$-aperto e costituisce un intorno di p nel quale la S non finisce.

Mostriamo che fuori dell'ipotesi (FKT_2) la tesi del lemma può cadere in difetto; e ciò, anche quando sia soddisfatta la condizione (FKT_1).

ESEMPIO. — Sia

$$E = \{p_r : r = 1, 2, ...\} \cup \{p'_r : r = 1, 2, ...\} \cup p .$$

La convergenza λ sia definita come segue: i punti p_r siano isolati; verso p'_r ($r = 1, 2, ...$) converga la successione $\{p_n\}$; verso p converga la $\{p'_n\}$. Le condizioni (FK1), (FK2), (FK3), ed anche la (FKT_1) sono soddisfatte, come facilmente si vede. La topologia $T(\lambda)$ è la seguente: i punti p_r sono isolati; per p'_r ($r = 1, 2, ...$) una base d'intorni è costituita dagl'insiemi

$$U'_{r,s} = \{p_n : n \geq s\} \cup p'_r$$

per $s = 1, 2, ...$; per p una base d'intorni è costituita dagl'insiemi

$$U_{r,s} = \{p'_n : n \geq r\} \cup \{p_n : n \geq s\} \cup p ,$$

al variare degl'interi r, s. Orbene, in tale topologia la successione $\{p_n\}$ finisce in ogni intorno di p, pur senza essere λ-convergente verso p.

14. Restrizione di LT ad $\mathcal{L}_2$.

È importante constatare che *la restrizione di LT alla sottocategoria $\mathcal{L}_2$ è l'identità su questa:*

$$LT(\lambda) = \lambda, \quad \textit{per ogni} \quad \lambda \in \mathcal{L}_2 . \tag{17}$$

In altre parole, proviamo che: *se da una struttura di convergenza con unicità del limite si deduce (mediante T) una topologia, la struttura di convergenza dedotta (mediante L) da questa coincide con quella iniziale.*

Dim. — Si è già provato ((4) del n. 8) che per ogni λ è $LT(\lambda) < \lambda$. Per provare l'inversa, suppongasi che una successione S non sia λ-convergente verso un punto p. Dal lemma segue allora l'esistenza di un $T(\lambda)$-intorno di p in cui la S non finisce; resta allora esclusa, a norma della legge L, la $LT(\lambda)$-convergenza della S verso p. Si ha dunque $LT(\lambda) > \lambda$ che, congiuntamente alla precedente, dà la tesi.

Fuori dell'ipotesi (FKT_2) per la λ, può effettivamente aversi $LT(\lambda) \neq \lambda$. Lo si constata mediante l'esempio dato al n. precedente.

La proposizione ora dimostrata ci permette di constatare che *la sottocategoria $\mathcal{L}_2$ ammette una sottocategoria associata in $\mathcal{T}$.*

Dim. — In base alla nozione formulata al n. 9, si tratta di constatare che è

$$(LT)^{-1}(\mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_2. \tag{18}$$

Se è $\lambda \in (LT)^{-1}(\mathcal{L}_2)$, ossia $LT(\lambda) \in \mathcal{L}_2$, allora, in virtù della (4) e atteso che la $\mathcal{L}_2$ è superiormente satura (n. 4), si ha $\lambda \in \mathcal{L}_2$.

Inversamente, suppongasi $\lambda \in \mathcal{L}_2$. Dalla (17) si ha allora $LT(\lambda)\ (= \lambda) \in \mathcal{L}_2$. dunque $\lambda \in (LT)^{-1}(\mathcal{L}_2)$.

Dalla stessa (17) risulta che *ogni struttura di convergenza con unicità del limite è deducibile, mediante L, da una topologia:* e infatti la (17) mostra che ogni $\lambda \in \mathcal{L}_2$ è deducibile mediante L almeno dalla topologia $T(\lambda)$. Si ha dunque

$$\mathcal{L}_2 \subset L(\mathcal{T}). \tag{18}$$

15. Sulle *chiusure parziali* dedotte da una convergenza.

Detta λ una struttura di convergenza su un insieme E, per ogni $A\ (\subset E)$ indichiamo con $\overline{A}$ la $T(\lambda)$-chiusura, e con $\widehat{A}$ l'insieme dei punti di E verso i quali convengono successioni costituite da punti di A. Dalla (FK1) e dalla definizione della $T(\lambda)$ si ha

$$A \subset \widehat{A} \subset \overline{A}. \tag{19}$$

L'essere $\widehat{A} = \overline{A}$ equivale alla

$$\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A} \qquad (\textit{condizione di Hedrick}\ ^{(17)}). \tag{20}$$

---

(17) Così denominata per essere stata considerata, *ante litteram,* in R. Hedrick, *On properties of a domain for which any derived set is closed,* Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911). Vedasi al proposito anche il libro di Fréchet citato in (1), alle pagine 211 e segg.

DIM. — Che dalla prima segua la seconda segue dalle (19), tenuto conto che è $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; inversamente, il sussistere della (20) significa, a norma della T, che $\widehat{A}$ è $T(\lambda)$-chiuso e contiene A, dunque $\overline{A} \subset \widehat{A}$, donde $\overline{A} = \widehat{A}$.

(L'esempio dato al n. 7 mostra che la seconda inclusione della (19) può essere propria: si ponga ivi $A = \{p_{r,s} : r, s = 1, 2, \dots\}$).

La legge $\widehat{\ }$ non è dunque, in generale, idempotente: assumendola come «chiusura» non se ne ottiene, in generale, una topologia. Sebbene lo studio di tale operazione, già effettuato da altri Autori (come si è accennato all'inizio dell'Introduzione), non rientri negli scopi del presente lavoro, ne vogliamo far cenno affinchè emergano le relazioni dei nostri risultati con quelli che riguardano la struttura ottenuta mediante la legge $\widehat{\ }$, struttura denominata *mehrstufige Topologie* da alcuni: il prescindere dalla condizione (20) fa sì che ad ogni insieme viene associata una successione transfinita non-decrescente d'insiemi, indiciata nella I e nella II classe degli ordinali. Chiameremo *chiusure parziali* (prima, seconda, ... ω-ima, ...) tali insiemi, che vengono definiti al modo seguente.

Poniamo $\widehat{A}^{(0)} = A$, e denotiamo con $\widehat{A}^{(\eta)}$, per ogni ordinale $\eta\,(> 0)$ della I e dalla II classe, l'insieme $\widehat{\bigcup_{\alpha<\eta} \widehat{A}^{(\alpha)}}$: viene così associata ad A la successione

$$\widehat{A}^{(0)}, \widehat{A}^{(1)}, \widehat{A}^{(2)}, \dots \widehat{A}^{(\omega)}, \widehat{A}^{(\omega+1)}, \dots \widehat{A}^{(\eta)}, \dots . \tag{21}$$

Detto Ω il primo ordinale della III classe, e posto ancora $\widehat{A}^{(\Omega)} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \widehat{A}^{(\alpha)}$, proviamo che si ha

$$\widehat{A}^{(\Omega)} = \overline{A} \tag{22}$$

DIM. — Sia $S = \{p_n\}$ una successione arbitraria di punti di $\widehat{A}^{(\Omega)}$, convergente verso p_0: proviamo che è $p_0 \in \widehat{A}^{(\Omega)}$. Sia η_n (per $n = 1, 2, \dots$) un ordinale $< \Omega$ e tale che $p_n \in \widehat{A}^{(\eta_n)}$: posto $\eta = \min\{\alpha : \alpha \geq \eta_n\}$, è $|S| \subset \bigcup_{\alpha<\eta} \in \widehat{A}^{(\alpha)}$, quindi $p_0 \in \widehat{A}^{(\eta)}$. Ne viene che $\widehat{A}^{(\Omega)}$ è un insieme $T(\lambda)$-chiuso contenente A, epperò $\widehat{A}^{(\Omega)} \supset \overline{A}$.

Per provare l'inclusione opposta, osserviamo che: un insieme $T(\lambda)$-chiuso contenente $\widehat{A}^{(\alpha)}$, contiene necessariamente anche $\widehat{A}^{(\alpha+1)}$; un insieme $T(\lambda)$-chiuso contenente $\widehat{A}^{(\alpha)}$ per ogni $\alpha < \eta$, contiene necessariamente $\widehat{A}^{(\eta)}$. Per induzione transfinita si conclude che ogni insieme $T(\lambda)$-chiuso contenente A, contiene necessariamente $\widehat{A}^{(\Omega)}$; dunque $\widehat{A}^{(\Omega)} \subset \overline{A}$.

Ci si può porre il problema di ricercare sotto quali condizioni un'assegnata convergenza dà luogo, in base alla legge $\widehat{\ }$, ad una *topologia*. Ci limitiamo ad una condizione sufficiente, presumibilmente già nota.

Se per una struttura di convergenza λ è soddisfatta la «condizione diagonale»:

«per ogni successione

$$\{p_n^1\}, \{p_n^2\}, \dots \{p_n^r\}, \dots$$

di successioni convergenti verso un medesimo punto p_0, esiste una successione $\{p_{n_r}^r\}_r$ convergente verso p_0»,

allora sussiste la (20).

Dim. — Sia $p \in \widehat{\widehat{A}}$; esista dunque una successione $\{q^r\}$ convergente verso p_0, costituita di punti di $\widehat{A}$. Per ogni r, esiste allora una successione $\{p_n^r\}_n$ convergente verso q^r, costituita di punti di A. Detta allora, con riguardo all'ipotesi fatta, $\{p_{n_r}^r\}_r$ una successione convergente verso p_0, dall'essere questa costituita di punti A segue $p_0 \in A$.

Peraltro, può aversi $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$ per ogni $A (\subset E)$, anche senza che la λ soddisfi alla «condizione diagonale». Lo proviamo con un esempio.

Esempio. — Sia $E = \{p_s^r : r, s = 1, 2, \dots\} \cup q$, e sia λ definita come segue: i punti $p_s^r (r, s = 1, 2, \dots)$ sono tutti isolati; verso q convergono le successioni $\{p_s^r\}_s (r = 1, 2, \dots)$. Nessuna successione del tipo $\{p_{s_r}^r\}_r$ converge; tuttavia è $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$ per ogni insieme A: e infatti, se A contiene infiniti punti di almeno una delle successioni $\{p_s^r\}_s (r = 1, 2, \dots)$, è $\widehat{A} = A \cup q$, ed è anche $\widehat{\widehat{A}} = A \cup q$ (poichè se un punto p_s^r non appartiene ad A, nessuna successione di punti di $A \cup q$ vi converge); se invece A contiene, di ogni successione $\{p_s^r\}_s$, al più un numero finito di punti, è ovviamente $\widehat{A} = A$, e quindi anche $\widehat{\widehat{A}} = A$.

Dopo questo cenno informativo sulla struttura di *mehrstufige Topologie* dedotta da una convergenza, veniamo alle conclusioni preannunziate.

Anzitutto, è evidente che tale struttura, conseguente ad una convergenza, è equivalente alla stessa struttura di convergenza: e invero, l'assegnazione, per ogni insieme $A (\subset E)$, della sua chiusura parziale $\widehat{A}$ permette di ricostruire tutti i dati relativi alla convergenza.

Quanto alle relazioni delle dette strutture con la topologia $T(\lambda)$ (la quale è ottenibile dalla legge di chiusura parziale, mediante la (22)), si potrebbe ritenere che la legge di chiusura parziale comporti qualche dato di struttura supplementare rispetto alla $T(\lambda)$, ossia che la struttura di convergenza λ possa essere effettivamente più ricca della topologia che se ne deduce.

Orbene, la (17) mostra che per $\lambda \in \mathcal{L}_2$, la stessa λ resta canonicamente individuata dalla $T(\lambda)$, ossia che *sotto l'ipotesi dell'unicità del limite, ogni dato di struttura fornito dalla convergenza λ è contenuto nella topologia $T(\lambda)$.* In particolare, *la legge $\widehat{\ }$ di chiusura parziale e quindi la successione transfinita* (21) *sono deducibili dalla legge $^{-}$ di $T(\lambda)$-chiusura.*

Per quanto riguarda, in particolare, la struttura di *mehrstufige Topologie,* ne risulta che: *l'assegnazione, per ogni insieme A, dall'insieme* $\bigcup_{\alpha<\Omega} \widehat{A}^{(\alpha)}$, *permette d'individuare, per ogni insieme A, la relativa successione transfinita* (21).

Alla luce di tale constatazione, la teoria delle *mehrstufige Topologien* dedotte da convergenza con unicità del limite diviene pleonastica, poichè s'inquadra in quella degli spazi topologici. Resta aperto il problema, circa le strutture di « topologia generalizzata » (ossia, con chiusura soddisfaciente soltanto alle condizioni $\widehat{0} = 0$, $\widehat{A} \subset A$, $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$), che su un insieme si possono definire indipendentemente da preesistenti strutture di convergenza.

16. Deducibilità di una convergenza da topologie.

Consideriamo, per ogni assegnata $\lambda \in \mathcal{L}$, l'equazione in τ

$$L(\tau) = \lambda . \tag{23}$$

I risultati conseguiti al riguardo sono i seguenti.

La (23) ammette soluzioni se e soltanto se λ soddisfa alla condizione $LT(\lambda) = \lambda$ (n. **8**, (**)) ; ossia : *condizione necessaria e sufficiente affinchè una struttura di convergenze sia deducibile da topologie, è che lo sia dalla topologia che da essa si deduce.*

Per ogni $\lambda \in \mathcal{L}_2$ la (23) ammette soluzioni (n. **14**, (18)) ; ossia : *ogni struttura di convergenza con unicità del limite è deducibile da topologie.*

Fuori di tale condizione, possono non esservi soluzioni (esempio al n. **13**) ossia : *vi sono strutture di convergenza non deducibili da topologie.*

Se la (23) ammette soluzioni, la $T(\lambda)$ è la più fine di esse (n. **8**, (3)), ossia : *fra le topologie dalle quali una data struttura di convergenza è deducibile ve ne è una di massima finezza, e precisamente la topologia dedotta dalla convergenza stessa.*

Ci possiamo ora porre il problema circa l'unicità delle soluzioni della (23) : passiamo a provare che essa non sussiste, salvo che per alcune convergenze assai banali.

TEOREMA. — *Ogni struttura di convergenza su un insieme infinito E la quale soddisfi alla condizione*

« esiste almeno una successione i cui termini siano punti tutti distinti, la quale non sia simultaneamente convergente verso tutti i punti di E »,

se è deducibile da una topologia, è deducibile da infinite topologie distinte.

DIM. — Sia λ una convergenza deducibile da topologia e soddisfaciente alla condizione in enunciato. Vogliamo provare che l'insieme $L^{-1}(\lambda)$ è infinito. Dalla (**) del n. 8 si ha $LT(\lambda) = \lambda$, ossia λ è deducibile (almeno) dalla topologia $\tau = T(\lambda)$.

Proviamo anzitutto che esiste almeno un punto di E, il quale ammette un τ-intorno il cui complementare è infinito. Se per la τ così non fosse, ogni successione i cui termini siano tutti distinti finirebbe in ogni τ-intorno di ogni punto di E; sarebbe quindi $L(\tau)$-convergente, ossia λ-convergente, verso ogni punto di E, contro quanto si è supposto.

Sia dunque p_0 un punto di E il quale ammetta un intorno U_0, il cui complementare $\mathcal{C}(U_0)$ sia infinito.

Sia P un insieme numerabile di punti di $\mathcal{C}(U_0)$, che designeremo con $p_{r,s}$ $(r = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots)$. Per ogni intero $\bar{r}$ e per ogni funzione f d'intero, poniamo

$$V_{\bar{r},f} = \{p_{r,s} :\ r \geq \bar{r},\ s \geq f(r)\}$$

e diciamo φ_0 il filtro-intersezione [18] del filtro avente come base gl'insiemi $V_{\bar{r},f}$ (al variare di $\bar{r}$ e di f) col filtro degl'intorni U di p_0; ossia, assumiamo come base di φ_0 la famiglia degl'insiemi $V_{\bar{r},f} \cup U$. Ciò posto, definiamo su E una nuova topologia al modo seguente. Dichiariamo τ'-intorni di p_0 tutti e soli gl'insiemi del filtro φ_0; ad ogni punto di E non appartenente alla τ-chiusura di p_0 attribuiamo come τ'-intorni tutti e soli i suoi τ-intorni; ad ogni punto della τ chiusura $\bar{p}_0$ attribuiamo come τ'-intorni gl'insiemi del filtro-intersezione del filtro dei τ-intorni del punto stesso col filtro φ_0. Che si tratta di una topologia è subito visto, e ne omettiamo per brevità la constatazione. La τ' è propriamente meno fine della τ: infatti, ogni τ'-intorno di un punto qualsiasi è un τ-intorno del punto stesso, mentre il τ-intorno U_0 di p_0 non è un τ'-intorno di p_0.

Si tratta ora di provare che la convergenza dedotta dalla τ' è la medesima dedotta dalla τ, ossia che τ' è, al pari di τ, soluzione della (23). Manifestamente, dall'essere $\tau' < T(\lambda)$ segue $L(\tau') < LT(\lambda)$, ossia $L(\tau') < L(\tau)$. Resta da provare che è $L(\tau) < L(\tau')$, ossia che ogni successione $L(\tau')$-convergente verso un punto è $L(\tau)$-convergente verso il punto stesso.

---

(18) Cfr. N. BOURBAKI, *Topologie générale*. Ch. 1, § 5.

Sia S una successione non $L(\tau)$-convergente verso p_0. Esiste allora un τ-intorno U^* di p_0 nel quale la S non finisce; è legittimo supporre $U^* \subset U_0$ (chè altrimenti si seguiterebbe il ragionamento sull'intersezione dei due). Sia S' una sottosuccessione di S priva di punti di U^*: a norma della (FK2), basta provare che la S' non è $L(\tau')$-convergente verso p_0. Essendo $U^* \cup P$ un τ'-intorno di p_0, la $L(\tau')$-convergenza della S' verso p_0 non può aversi se la stessa non finisce in P: consideriamo dunque una tale eventualità, supponendo addirittura $|S'| \subset P$.

Se esiste un intero r_0 tale che $p_{r_0,s} \in |S'|$ per infiniti valori di s, la S' non finisce nell'intorno $V_{\bar{r},f} \cup U^*$ quando sia $\bar{r} > r_0$. Altrimenti, per ogni intero r è finito l'insieme dei valori di s per i quali si ha $p_{r,s} \in |S'|$; diciamo $g(r)$ il massimo dei detti valori di s per quei valori di r per i quali esso esiste, e poniamo $g(r) = 0$ per gli altri valori di r. Allora, quando sia $f(r) > g(r)$ per ogni r, l'insieme $V_{1,f}$ non contiene alcun punto di S'; questa pertanto non finisce (anzi, non ha alcun punto) nell'intorno $V_{1,f} \cup U^*$ di p_0. In nessun caso dunque la S', epperò neanche la S, converge verso p_0.

In modo del tutto analogo si perviene alla conclusione stessa per ogni (eventuale) punto p distinto da p_0 ed appartenente alla τ-chiusura di p_0. Detta S una successione la quale non sia $L(\tau)$-convergente verso p, sia W^* un intorno di p in cui la S non finisce, e sia S' una sottosuccessione della S tale che $|S'| \cap W^* = 0$. Essendo $W^* \cup P$ un τ'-intorno di p, basta considerare l'eventualità $|S'| \subset P$. Il medesimo ragionamento svolto sopra, a proposito della convergenza verso p_0, porta ad escludere la $L(\tau')$-convergenza della S', epperò anche della S, verso p.

Quanto poi agli altri punti di E, i loro τ'-intorni sono precisamente i τ-intorni, sicchè la $L(\tau)$-convergenza e la $L(\tau')$-convergenza si equivalgono.

Il medesimo ragionamento che ha permesso di costruire la τ' a partire della τ, può venire applicato alla τ': ed infatti, il punto p_0 ammette anche nella τ' intorni il cui complementare è infinito. Se ne ottiene una nuova topologia τ'', meno fine della τ' e distinta da essa, e quindi anche dalla τ. Così seguitando si ha una successione di topologie

$$\tau, \tau', \tau'', \ldots$$

strettamente decrescenti per finezza, sicchè la tesi resta provata.

Dopo tale risultato, resterebbe aperto ancora il problema di caratterizzare, in termini di struttura di convergenza, le convergenze prive di unicità del limite le quali sono deducibili da topologie. Dopo il risultato generale rappresentato, al riguardo, dalla (**) del n. 8, non ci sembra che uno studio più approfondito del problema rivesta soverchio interesse, e non ce ne occupiamo.

17. Deducibilità di una topologia da convergenze.

Consideriamo, per ogni assegnata $\tau \in \mathcal{T}$, l'equazione in λ

(24) $$T(\lambda) = \tau .$$

Riassumiamo, anche per questa, i risultati già ottenuti.

L'equazione ammette soluzioni se e soltanto se τ soddisfa alla condizione $TL(\tau) = \tau$ (n. 8, (*)); ossia: *condizione necessaria e sufficiente affinchè una topologia sia deducibile da convergenze, è che lo sia dalla convergenza che da essa si deduce.*

Dal secondo degli esempi dati al n. **12** appare che *non ogni topologia, e neppure ogni topologia di Hausdorff* [19] *è deducibile da convergenza.*

Quanto all'unicità delle soluzioni della (24), si ha che: *ogni topologia di Hausdorff la quale sia deducibile da convergenza, lo è da un'unica convergenza.* E invero, dall'essere $T(\lambda) = T(\lambda') = \tau \in \mathcal{T}_2$, per la (17) del n. **12** segue $\lambda, \lambda' \in \mathcal{L}_2$; e allora, per la (18) del n. **14** si ha $\lambda = LT(\lambda) [= L(\tau)]$, e $\lambda' = LT(\lambda') [= L(\tau)]$, dunque $\lambda = \lambda'$.

Sussiste, anzi, il teorema seguente, leggermente più forte: *ogni topologia che sia dedecibile da una convergenza con unicità del limite, lo è da un'unica convergenza.*

Dim. — Sia $T(\lambda) = T(\lambda') = \tau$, e sia $\lambda \in \mathcal{L}_2$. Dall'essere $LT(\lambda) = \lambda$ segue allora anche $LT(\lambda') = \lambda$; ed avendosi $LT(\lambda') < \lambda'$ ((4) del n. 8) ne viene $\lambda < \lambda'$, relazione che, stante $\lambda \in \mathcal{L}_2$, implica $\lambda' \in \mathcal{L}_2$ essendo che la sottocategoria $\mathcal{L}_2$ è superiormente satura (n. **4**). E allora, il ragionamento fatto per provare la proposizione precedente conduce alla tesi.

Dopo di tutto ciò, appare degno di studio il problema circa l'esistenza di soluzioni della (24). Il risultato già ottenuto (condizione $TL(\tau) = \tau$) può non apparire del tutto esaurente vista l'importanza, anche applicativa, della questione: esso non si presenta infatti come una condizione espressa direttamente, in termini di anatomia di spazio topologico, per la topologia τ in questione. Non pare facile peraltro una formulazione in termini siffatti di una condizione necessaria e sufficiente, se non in modo troppo palesemente tautologico; comunque, la trattazione del problema richiede — lo riteniamo — un'indagine approfondita della struttura dei filtri.

---

[19] Un esempio di topologia di Hausdorff non deducibile da convergenza può ottenersi dal secondo degli esempi dati al n. **12**, considerando il sottospazio che si ha togliendo a quell'insieme E il punto p''. Un altro esempio può aversi da quello in [16] in modo analogo, ossia togliendo il punto Ω''.

Ci limitiamo qui ad assegnare una condizione sufficiente nel senso detto, abbastanza espressiva anche se lontana dall'esaurire la questione.

Sono deducibili da strutture di convergenza tutte le topologie nelle quali, per ogni punto, il relativo filtro degl'intorni o ha base finita, oppure è intersezione di una famiglia (di potenza arbitraria) di filtri a base numerabile.

DIM. — Sia τ una topologia soddisfaciente alla condizione in enunciato: in virtù dei risultati precedenti, basta provare che per essa si ha $TL(\tau) = \tau$; anzi, sapendosi che in ogni caso è $TL(\tau) > \tau$, basta provare che è $TL(\tau) < \tau$, ossia che ogni insieme $TL(\tau)$-aperto è anche τ-aperto.

Sia A ($\subset E$) un insieme non τ-aperto, ossia esista un punto $p \in A$, del quale A non sia un τ-intorno. Detto φ^p il filtro dei τ-intorni di p, sia $\varphi^p = \bigcap_{i \in I(p)} \varphi_i^p$, con φ_i^p filtro a base numerabile per ogni $i \in I(p)$. Allora il non appartenere A al filtro φ^p implica l'esistenza di un indice j ($\in I(p)$), tale che A neppure appartenga al filtro φ_j^p. Poichè questo filtro ammette una base numerabile, esso ammette anche una base monotona decrescente (non necessariamente in senso stretto)

$$U_j', \; U_j'', \; \ldots, \; U_j^n, \; \ldots .$$

Ciascuno degl'insiemi-differenza $U_j^n \cap \complement(A)$ è allora non vuoto: ne sia p_n un punto. La successione $\{p_n\}$ è $L(\tau)$-convergente verso p, poichè finisce in ogni τ-intorno di p. Essa non ha punti in A: dunque A, un punto del quale è $L(\tau)$-limite di una successione che non finisce in A, risulta non essere $TL(\tau)$-aperto.

Ne segue, in base a quanto sopra osservato, la tesi.