Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Fernando Bertolini

La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica - Nota II

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 2 (1959), p. 259-274

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_2_259_0>

LA TEORIA ALGEBRICA DELLA MISURA E DELLA INTEGRAZIONE, E SUO RAPPORTO CON LA TEORIA CLASSICA - Nota II.

di FERNANDO BERTOLINI (a Roma)

In una nota di egual titolo della presente ([1]) ho istituito un confronto tra la teoria algebrica della misura e della integrazione dovuta a C. CARATHÉODORY (teoria « *a* » ; v. [4]) e la teoria *classica* (teoria « *c* »), introducendo come termine medio (teoria « *b* ») una opportuna generalizzazione della teoria classica. Precisamente, ho dimostrato che le due teorie « *a* » e « *b* » possono esser considerate reciprocamente *duali*, e quindi equivalenti nel senso che ciascun risultato dell'una può immediatamente esser tradotto in un risultato dell'altra.

La presente nota è dedicata al confronto tra la teoria « *b* » e la « *c* », ed in essa si dimostra che:

— la teoria « *c* » è un effettivo caso particolare della « *b* »;

— tuttavia, ammessi certi teoremi della « *b* » che in ultima analisi esprimono la dualità tra la « *b* » e la « *a* », tutti gli altri possono dedursi dalla teoria « *c* » nel suo complesso;

e ciò prova l'equivalenza della teoria « *b* » con la « *c* », a meno di quei risultati (tutti di tipo locale) che dipendono dal modo con cui si realizza la dualità tra « *a* » e la « *b* », e che di fatto rendono la « *b* » la più semplice tra le teorie pensabili, duali della « *a* ».

Questo risultato conferma una osservazione sulla quale richiamò la mia attenzione il prof. C. Y. PAUC, mentre era in corso la stesura della presente nota; nel trattato [5] si osserva che le due teorie « *a* » e « *c* » (che ivi sono esposte « in parallelo ») sono equivalenti, nel senso che i risultati di ciascuna di esse sono deducibili dall'altra presa nel suo complesso: e ciò in base ad un teorema di rappresentazione di L. H. LOOMIS (v. [6]). Nella presente nota non faremo uso di questo teorema, che in un esempio particolare.

1. Spazio mensurale secondo la teoria « b » e secondo la teoria « c ». Secondo la teoria « b » si dice *spazio mensurale* (measure space) un insieme U, nel quale sia data una classe $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi, da dirsi misurabili ($\mathcal{B}$), la quale goda delle proprietà seguenti:

i) *$\mathcal{B}$ è un anello d'insiemi* (1),

ii) *data in $\mathcal{B}$ ad arbitrio una successione $\{\mathcal{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$, tra gl'insiemi della classe $\mathcal{B}$ inclusi in $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ve n'è uno massimo* (2) $\prod_{k=1}^{\infty} B_k$ (3).

Se s'impone alla classe $\mathcal{B}$ di essere un δ-anello d'insiemi, ossia di soddisfare la *i*) ed in luogo della *ii*) la più restrittiva

ii') *$\mathcal{B}$ è chiusa rispetto alla operazione d'intersezione numerabile* (4), otteniamo la definizione di spazio mensurale secondo la teoria « c »; in tal caso si ha $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty}$, $\prod_{k=1}^{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty}$.

1.1 Banalmente, uno spazio mensurale secondo la teoria « c », è mensurale anche secondo la « b »; non è vera la proposizione reciproca, come si dimostra con esempi (5). Tuttavia, ad ogni spazio mensurale secondo la « b », $(U, \mathcal{B})$, si può associare uno spazio mensurale secondo la « c » che *ne faccia le veci*, $(U, \mathcal{C})$, ed avente lo stesso sostegno U.

Per costruirlo, consideriamo la minima classe $\mathcal{N}$ di sottoinsiemi di U, verificante le condizioni seguenti:

---

(1) Ossia è chiusa rispetto alle operazioni d'unione finita (d'intersezione finita) e di differenza, e contiene pertanto come elemento l'insieme vuoto $\varnothing$.

(2) Ossia includente tutti gli altri.

(3) Ne consegue che, data in $\mathcal{B}$ ad arbitrio una successione $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, tra gli eventuali insiemi della classe $\mathcal{B}$ includenti $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ ve n'é uno minimo (ossia incluso in tutti gli altri) $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Le operazioni $\bigsqcup$, $\prod$ verificano le leggi seguenti:

$$B - \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k = \prod_{k=1}^{\infty} (B - B_k), \qquad B - \prod_{k=1}^{\infty} B_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (B - B_k),$$

$$B \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (B \cap B_k), \qquad B \cup \prod_{k=1}^{\infty} B_k = \prod_{k=1}^{\infty} (B \cup B_k),$$

ammesso che sian definiti i primi membri (v. [1]).

(4) Ne segue che se è $B_k \in \mathcal{B}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ e $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset B_0$, allora è anche $\bigcup_{h=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}$.

(5) V. ad es. [2], teor. I.

1) se è $B_k \in \mathcal{B}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ e $\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$, allora è $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{N}$ (6);

2) se è $N' \subset N \in \mathcal{N}$, allora è $N' \in \mathcal{N}$;

3) se è $N_k \in \mathcal{N}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ed $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset B \in \mathcal{B}$, allora è $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \in \mathcal{N}$;

ciò premesso, $\mathcal{C}$ sarà il δ-anello generato da $\mathcal{B} \cup \mathcal{N}$ nell'ambiente U (7).

La relazione tra i due spazi $(U, \mathcal{B})$ ed $(U, \mathcal{C})$ sono espresse dal seguente teorema:

I. *Detti equivalenti modulo $\mathcal{N}$ due insiemi la cui differenza simmetrica* (8) *appartenga alla classe $\mathcal{N}$, la classe $\mathcal{C}$ si suddivide in classi d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$, a ciascuna delle quali appartiene almeno un insieme misurabile* ($\mathcal{B}$).

Inoltre, ogni insieme misurabile ($\mathcal{C}$) *è incluso in un insieme misurabile* ($\mathcal{B}$).

1) Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, chiamiamo $\mathcal{C}_*$ la totalità degli insiemi misurabili ($\mathcal{C}$) che sono inclusi in qualche insieme misurabile ($\mathcal{B}$). Banalmente, si ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}_*$; dalle 1), 2), 3) si deduce facilmente che è $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}_*$; infine è chiaro che $\mathcal{C}_*$ è un δ-anello: dalla $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} \subset \mathcal{C}_* \subset \mathcal{C}$ segue dunque $\mathcal{C}_* \equiv \mathcal{C}$.

2) Per dimostrare la prima parte, fissiamo ad arbitrio un insieme $B_0 \in \mathcal{B}$ e poniamo

$$\mathcal{N}_0 = \{N : B_0 \supset N \in \mathcal{N}\}, \quad \mathcal{B}_0 = \{B : B_0 \supset B \in \mathcal{B}\}, \quad \mathcal{C}_0 = \{C : B_0 \supset C \in \mathcal{C}\};$$

---

(6) Ne consegue, data una successione $\{B_k\}$ in $\mathcal{B}$: $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k - \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{N}$; difatti posto $B = \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k$, si ha $\emptyset = \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k - B = \bigsqcap_{k=1}^{\infty} (B_k - B)$, e quindi $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k - \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k - B = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B_k - B) \in \mathcal{N}$. Inoltre, se $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ è definito, allora $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{N}$; difatti, ponendo $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ si ha $\emptyset = B - \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigsqcap_{k=1}^{\infty} (B - B_k)$ e quindi $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = B - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B - B_k) \in \mathcal{N}$.

(7) Ossia, il minimo δ-anello d'insiemi includente $\mathcal{B} \cup \mathcal{N}$.

(8) Indicheremo con il segno Δ l'operazione di *differenza simmetrica*: $A' \Delta A'' = (A' \cup A'') - (A' \cap A'')$; si tratta d'una operazione commutativa ed associativa; rispetto ad essa l'interferenza risulta distributiva; infine è $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta \emptyset = A$. Di qui è immediato che la relazione tra gl'insiemi A' ed A'' espressa dalla: $A' \Delta A'' \in \mathcal{N}$, è effettivamente riflessiva, simmetrica e transitiva.

evidentemente $\mathcal{N}_0$ è un σ-ideale (9), e $\mathcal{C}_0$ è il σ-anello (10) generato da $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{N}_0$; sia ancora $\mathcal{C}_0'$ il σ-anello generato da $\mathcal{B}_0$. Cominciamo col provare, col metodo d'induzione transfinita, che ad ogni insieme $C \in \mathcal{C}_0'$ si può associare un insieme $B \in \mathcal{B}_0$ in modo che sia $C \varDelta B \in \mathcal{N}_0$.

In primo luogo, se C, rispetto a $\mathcal{B}_0$, è della categoria boreliana 0, vuol dire che è $C \in \mathcal{B}_0$ e la tesi è banalmente vera, con $B = C$.

In secondo luogo, se C, rispetto a $\mathcal{B}_0$, è della categoria boreliana $\eta > 0$, vuol dire che è $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ ovvero $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$, con C_k della categoria boreliana $\xi_k < \eta$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$; supponendo la tesi già provata per gli insiemi delle categorie boreliane inferiori a η, a ciascun insieme C_k si può associare un insieme $B_k \in \mathcal{B}_0$, con $C_k \varDelta B_k \in \mathcal{N}_0$; di conseguenza

nel caso $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ si avrà:

$$C \varDelta \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \varDelta \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \varDelta C_k) \cup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \in \mathcal{N}_0 ;$$

nel caso $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ si avrà:

$$C \varDelta \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \varDelta \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \varDelta C_k) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k - \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) \in \mathcal{N}_0 \text{ (11)} ;$$

ciò dimostra l'asserto, essendo $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}_0$, $\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}_0$.

---

(9) ossia: se ad esso appartiene un insieme N, vi appartengono anche tutti gl'insiemi contenuti in N, ed inoltre se ad esso appartiene una successione d'insiemi, vi appartiene anche la loro unione.

(10) un σ-anello d'insiemi è una famiglia d'insiemi chiusa alla operazione d'unione numerabile e di differenza (e quindi anche a quella d'intersezione numerabile).

(11) L' inclusione $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \varDelta \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \varDelta C_k) \cup (\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)$ si dimostra così: se $u \in \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k - \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, sarà anche $u \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, quindi esiste un indice h tale da aversi

3) È subito dimostrato, che al variare dell'insieme C in $\mathcal{C}_0'$ e dell'insieme N in $\mathcal{N}_0$, l'insieme $C \Delta N$ descrive un σ-anello includente $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{N}_0$ ed incluso in $\mathcal{C}_0$, dunque coincidente con $\mathcal{C}_0$. Perciò, com'è d'altronde ben noto, ad ogni insieme $C \in \mathcal{C}_0$ si può associare un insieme $C_0' \in \mathcal{C}_0'$ con $C \Delta C' \in \mathcal{N}_0$; ma (per quanto dimostrato al comma 2)) all'insieme C' si può associare un insieme $B \in \mathcal{B}_0$ con $B \Delta C' \in \mathcal{N}_0$; dunque avremo: $C \Delta B = (C \Delta C') \Delta (C' \Delta B) \in \mathcal{N}_0$. E ciò, per l'arbitrarietà di B_0 e per quanto provato al comma 1), completa la dimostrazione del teorema.

1.2. Un caso particolare notevole si ha quando (12), dato ad arbitrio un ultrafiltro di insiemi misurabili $(\mathcal{B})$, non è vuota l'intersezione degli insiemi appartenenti a tale ultrafiltro (13); diremo, convenzionalmente, che lo spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$ è di Stone. Ebbene, a complemento del teorema I, si ha che

I'. *Se lo spazio mensurale* $(U, \mathcal{B})$ *è di* Stone, *allora* $\mathcal{C}$ *si suddivide in classi d'equivalenza modulo* $\mathcal{N}$, *a ciascuna delle quali appartiene un solo insieme misurabile* $(\mathcal{B})$.

Supponiamo che vi siano due insiemi, B' e B'', misurabili $(\mathcal{B})$ ed equivalenti modulo $\mathcal{N}$; avremo $B = B' \Delta B'' \in \mathcal{N}$. Ne segue l'esistenza d'una successione doppia $\{B_{hk}\}$ d'insiemi misurabili $(\mathcal{B})$, tali che $B \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{hk}$,

---

$u \in C_h - B_h \subset C_h \Delta B_h \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \Delta C_k)$; se $u \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, potrà essere $u \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, nel qual caso esiste un indice h tale da aversi $u \in B_h - C_h \subset B_h \Delta C_h \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \Delta C_k)$; potrà essere invece $u \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, nel qual caso è $u \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. L'inclusione $\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k \Delta \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \Delta C_k) \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k - \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_k)$ si dimostra in modo analogo.

Va poi ricordata la nota (6).

(12) v. [3], n. 3.

(13) In questo contesto, un ultrafiltro d'insiemi è una classe d'insiemi che:

1) non contenga come elemento l'insieme vuoto,

2) se contiene due insiemi, ne contiene un terzo, incluso nella loro intersezione,

3) non è incluso in alcuna *altra* classe d'insiemi verificante la (1) e la (2).

$\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} = \emptyset \quad (h = 1, 2, \ldots), \quad \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{hk} \subset B' \smile B''$ (14); possiamo anche pensare, senza restrizione effettiva, che sia $B_{h,k} \supset B_{h,k+1}$ per $h, k = 1, 2, 3, \ldots$. Fissata ad arbitrio una successione $\{k_h\}_{h=1}^{\infty}$ di numeri naturali, si ha $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} \subset B_{h,k_h}$ e quindi $B \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} B_{h,k_h} \subset \bigsqcup_{h=1}^{\infty} B_{h,k_h}$, da cui

$$(*) \qquad B = \bigsqcup_{h=1}^{\infty} (B \frown B_{h,k_h}).$$

D'altronde, essendo $\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} = \emptyset$ si ha anche $B \frown \bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} = \emptyset$ per $h = 1, 2, \ldots$; la successione d'insiemi $\{B \frown \bigsqcap_{k=1}^{n} B_{hk}\}_{n=1}^{\infty} = \{B \frown B_{hn}\}_{n=1}^{\infty}$ costituisce una successione non crescente, la cui complessiva intersezione è vuota: essendo $(U, \mathcal{B})$ uno spazio di STONE, ciò implica che non v'è alcun ultrafiltro d'insiemi misurabili ($\mathcal{B}$) il quale includa la successione $\{B \frown B_{hn}\}_{n=1}^{\infty}$, e questo è possibile solo se esiste un indice n_h tale che sia $B \frown B_{h,n_h} = \emptyset$ (15). Dalla relazione $(*)$ segue dunque $B \doteq \emptyset$ e infine $B' = B''$, c. d. d. (16).

Si conclude col teorema di LOOMIS, nella seguente forma:

II'. *Se* $(U, \mathcal{B})$ *è uno spazio mensurale di* STONE, *allora, assumendo l'inclusione* $\subset$ *come relazione d'ordine* $\sqsubseteq$, *la classe d'insiemi* $\mathcal{B}$ *è un reticolo isomorfo al reticolo quoziente* $\mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Per la dimostrazione, d'altronde immediata, rinviamo alla [6].

In generale potremo solo dire che:

II. *Assunta l'inclusione* $\subset$ *come relazione d'ordine,* $\mathcal{B}/\mathcal{N}$ *e* $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ *risultano due reticoli isomorfi.*

Dimostrazione ovvia.

---

(14) È immediato, da una parte, che se $\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} = \emptyset$ per $h = 1, 2, \ldots$, ed inoltre è $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{hk}$ incluso in qualche insieme misurabile ($\mathcal{B}$), dev'essere $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} \in \mathcal{N}$; viceversa, è evidente che la totalità degli insiemi inclusi in uno del tipo $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{hk}$ (con $\bigsqcap_{k=1}^{\infty} B_{hk} = \emptyset$, $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{hk}$ incluso in qualche insieme misurabile ($\mathcal{B}$)) soddisfa le condizioni 1), 2) e 3) del testo, e quindi deve coincidere con $\mathcal{N}$.

(15) v. [7], p. 23, teor. 4. 3.

(16) La dimostrazione di questo teorema è una variante di quella del LOOMIS, v. [6].

2. **Funzioni misurabili di punto, secondo la teoria «*b*» e secondo la teoria «*c*».** Secondo la teoria «*b*», in uno spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$ una funzione di punto $f(u)$ si dice *misurabile* $(\mathcal{B})$, quando:

i) *il suo insieme di definizione è misurabile* $(\mathcal{B})$;

ii) *per ogni valore reale* y, *esiste un insieme* $B_f(y)$, *misurabile* $(\mathcal{B})$, *tale da aversi:* $\{u : f(u) < y\} \subset B_f(y) \subset \{u : f(u) \leqq y\}$.

In particolare, se lo spazio $(U, \mathcal{B})$ è mensurale anche secondo la teoria «*c*», cioè se $\mathcal{B}$ è un δ-anello, la ii) si riduce alla:

ii') *per ogni valore reale* y, *l'insieme* $\{u : f(u) < y\}$ *è misurabile* $(\mathcal{B})$,

ritrovandosi così la definizionè di funzione misurabile secondo la teoria «c». Difatti, la ii') implica direttamente la ii), mentre, se $\mathcal{B}$ è un δ-anello, dalla ii) si deduce, per ogni y reale,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_f\left(y - \frac{1}{k}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{u : f(u) \leqq y - \frac{1}{k}\right\} = \{u : f(u) < y\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{u : f(u) < y - \frac{1}{k}\right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_f\left(y - \frac{1}{k}\right),$$

e quindi

$$\{u : f(u) < y\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_f\left(y - \frac{1}{k}\right) \in \mathcal{B}.$$

2.1. Consideriamo ora uno spazio $(U, \mathcal{B})$ mensurale secondo la teoria «*b*», ed accanto ad esso lo spazio $(U, \mathcal{C})$ costruito al n. 1.1, mensurale secondo la teoria «*c*». Per brevità, diremo $F^{\mathcal{B}}$ $[F^{\mathcal{C}}]$ la totalità delle funzioni misurabili $(\mathcal{B})$ (misurabili $(\mathcal{C})$).

Date due funzioni g_1 e g_2, definite rispettivamente in C_1 ed in C_2, diremo che esse sono equivalenti modulo $\mathcal{N}$. quando si ha $g_1(u) = g_2(u)$ in un insieme C, incluso in $C_1 \cap C_2$ ed equivalente modulo $\mathcal{N}$ sia a C_1 che a C_2.

Il teorema seguente esprime la relazione intercorrente tra $F^{\mathcal{B}}$ ed $F^{\mathcal{C}}$:

III. *In primo luogo,* $F^{\mathcal{B}} \subset F^{\mathcal{C}}$; *in secondo luogo* $F^{\mathcal{C}}$ *si suddivide in classi d'equivalenza modulo* $\mathcal{N}$, *a ciascuna delle quali appartiene almeno una funzione della classe* $F^{\mathcal{B}}$ (17).

Per dimostrare la prima parte dell'enunciato, basta ricordare che è $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ e che nello spazio $(U, \mathcal{C})$ la definizione «*b*» e la definizione «*c*» di misurabilità sono equivalenti (n. 2).

---

(17) Tra le funzioni si considera anche la cosiddetta *funzione vuota,* definita simbolicamente sull'insieme vuoto.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, consideriamo una funzione $g \in F^{\mathcal{C}}$, con insieme di definizione C_0 e con $C(y) = \{u : g(u) < y\}$. Per il teorema I, per ogni valore y esiste un insieme $B(y) \in \mathcal{B}$ tale che $B(y) \Delta C(y) \in \mathcal{N}$ ed esiste altresì un insieme $B_0 \in \mathcal{B}$ tale che $B_0 \Delta C_0 \in \mathcal{N}$. Dati due valori reali $y' < y''$, si ha $C(y') \subset C(y'')$, e quindi $B(y') - B(y'') = [B(y') - B(y'')] \Delta [C(y') - C(y'')] \subset [B(y') \Delta C(y')] \cup [B(y'') \Delta C(y'')] \in \mathcal{N}$, da cui $B(y') - B(y'') \in \mathcal{N}$; analogamente, si trova $B(y) - B_0 \in \mathcal{N}$ per ogni valore reale y. Ne segue, con un ragionamento visto in altra sede ([18]), che gli insiemi $B(y)$ possono esser scelti in modo da soddisfare la condizione di monotonia: per $y' < y''$, $B(y') \subset B(y'') \subset B_0$. Ciò premesso, ponendo $f(u) = \inf\{y : u \in B(y)\}$ si definisce su B_0 una funzione misurabile ($\mathcal{B}$), con $B_f(y) \equiv B(y)$ ([19]); per la parte già dimostrata del teorema, si ha $f \in F^{\mathcal{C}}$. Dimostriamo ora che è f equivalente a g modulo $\mathcal{N}$. Data una successione $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ovunque densa di valori reali, avremo

$$\{u : f(u) \neq g(u)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\{u : f(u) < y_k < g(u)\} \cup \{u : g(u) < y_k < f(u)\}] \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [B(y_k) \Delta C(y_k)] \subset \mathcal{N} \ (^{20}),$$

quindi $\{u : f(u) \neq g(u)\} \in \mathcal{N}$, c. d. d.

2.2. Le proprietà fondamentali delle funzioni misurabili possono dividersi in due categorie; quelle in cui hanno rilevanza i valori assunti dalle singole funzioni nei singoli punti, e quelle di tipo *globale*, relative non tanto alle singole funzioni quanto alle rispettive classi d'equivalenza.

Le proprietà del secondo tipo possono (come ora vedremo) dedursi in base ai risultati della teoria « c »; non così le proprietà del primo tipo.

In base alla teoria « c », sappiamo che entro $F^{\mathcal{C}}$ la relazione di equivalenza modulo $\mathcal{N}$ è una *congruenza* rispetto alla relazione $\leqq$ ed alle operazioni aritmetiche, ciò che consente di introdurre tale relazione $\leqq$ e tali operazioni tra le classi d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$ in cui $F^{\mathcal{C}}$ si suddivide; per il teorema III, la relazione $\leqq$ e le operazioni aritmetiche risultano introdotte anche tra le classi d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$ in cui si suddivide $F^{\mathcal{B}}$; pertanto, le proprietà fondamentali delle funzioni della classe $F^{\mathcal{C}}$

(18) Cfr. [3], p. 188, 2').

(19) Cfr. [4].

(20) Si osservi (teor. I) che esiste un insieme $B_* \in \mathcal{B}$ includente $B_0 \cup C_0$ e quindi anche (quale che sia y_k) $B(y_k) \cup C(y_k)$.

(proprietà note attraverso la teoria « *c* ») si traducono nelle seguenti, relative alla classe $F^{\mathcal{B}}$:

1) *dati i numeri reali* y_k *e gl'insiemi* B_k $(k = 1, 2, \dots n)$ *disgiunti e misurabili* ($\mathcal{B}$), *la funzione* f *così definita su* $\bigcup_{k=1}^{n} B_k : f(u) = y_k$ *per* $u \in B_k$ $(k = 1, 2, \dots n)$ [21], *è equivalente modulo* $\mathcal{N}$ *ad una funzione misurabile* ($\mathcal{B}$);

2) *date due funzioni* f *e* g *misurabili* ($\mathcal{B}$) *e definite in uno stesso insieme* B, *le funzioni seguenti:* $f \cup g$, $f \cap g$ [22], $f + g$, $f - g$, $f \times g$ *e* (*per* $g \neq 0$ *su* B) $f : g$, *sono equivalenti modulo* $\mathcal{N}$ *ad altrettante funzioni misurabili* ($\mathcal{B}$);

3) *data una successione* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *di funzioni misurabili* ($\mathcal{B}$) *in uno stesso insieme* B, *le due funzioni* $\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k$ *e* $\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k$ *sono equivalenti modulo* $\mathcal{N}$ *a due funzioni misurabili* ($\mathcal{B}$) [23];

4) *Data una funzione* f *misurabile* ($\mathcal{B}$) *su un insieme* B, *esiste una successione* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *di funzioni costanti a tratti* ($\mathcal{B}$) *definite su* B, *tali che* f *sia equivalente modulo* $\mathcal{N}$ *ad* $\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k \left[ad \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k \right]$.

Tutto ciò si deduce in base alla teoria « *c* », e tanto basta, come vedremo, per la teoria dell'integrazione; la precisazione, che in effetti sono misurabili ($\mathcal{B}$) la funzione definita in 1) e le funzioni elencate in 2), può solo ottenersi direttamente dalle proprietà della $\mathcal{B}$, e quindi in base alla teoria « *b* » [24]; invece, i punti 3) e 4) sono suscettibili d'una precisazione come ora esponiamo.

2.3. Nel caso che $(U, \mathcal{B})$ sia uno spazio di STONE le cose si semplificano molto, perchè sussiste il seguente teorema:

III'. *Se* $(U, \mathcal{B})$ *è uno spazio mensurale di Stone, allora la totalità* $F^{\mathfrak{C}}$ *si suddivide in classi d'equivalenza modulo* $\mathcal{N}$, *a ciascuna delle quali appartiene una ed una sola funzione misurabile* ($\mathcal{B}$).

Per il teorema III, basta dimostrare l'unicità, e questa è immediata consequenza del lemma:

---

(21) Funzione *costante a tratti* ($\mathcal{B}$).

(22) Riprendo le notazioni usate in [4]:

$$f_1 \cup f_2 = \frac{1}{2}[f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|], \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(u) = \sup\{f_k(u) : k = 1, 2, \dots\},$$

$$f_1 \cap f_2 = \frac{1}{2}[f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|], \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k(u) = \inf\{f_k(u) : k = 1, 2, \dots\}.$$

(23) Cfr. [4], nn. 4 e 7.

(24) Cfr. n. 2. 3.

IV. *Date in* $F^{\mathcal{B}}$ *due funzioni* f *e* g, *definite rispettivamente su* B' *e* B'', *se è* $f \leqq g$ *quasi ovunque modulo* $\mathcal{N}$, *allora è* $B' = B''$, *ed* $f \equiv g$ *su tutto* $B' = B''$.

In queste ipotesi, difatti, dovrà essere $B' \Delta B'' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{N}$, e quindi (teor. I') $B' = B''$; in secondo luogo, per ogni valore reale y (e per $k = 1, 2, \ldots$) si avrà $B_g\left(y - \frac{1}{k}\right) - B_f\left(y + \frac{1}{k}\right) \subset \{u : g(u) < f(u)\} \in \mathcal{N}$, e quindi $B_g\left(y - \frac{1}{k}\right) \subset$ $\subset B_f\left(y + \frac{1}{k}\right)$ (teor. I), ciò che implica appunto $f \leqq g$ su tutto $B' = B''$.

In base a questo teorema, i punti 1) 2) del n. 2.2 si possono precisare così:

1') *Ogni funzione costante a tratti* ($\mathcal{B}$) *è equivalente modulo* $\mathcal{N}$ *ad una ed una sola funzione misurabile* ($\mathcal{B}$), *che potremo chiamare «semplice»; la corrispondenza tra funzioni costanti a tratti* ($\mathcal{B}$) *e funzioni semplici* ($\mathcal{B}$) *è biunivoca.*

2') *Date due funzioni* f *e* g *misurabili* ($\mathcal{B}$), *sullo stesso insieme* B, *risultano univocamente definite le funzioni* $f \sqcup g$, $f \sqcap g$, $f \oplus g$, $f \ominus g$, $f \otimes g$, *e* (per $g \neq 0$ su B) $f \odot g$, *tutte misurabili* ($\mathcal{B}$) *e rispettivamente equivalenti ad* $f \cup g$, $f \cap g$, $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $f : g$ *modulo* $\mathcal{N}$.

Osserviamo che nel punto 2'), la funzione $f \sqcup g$ $[f \sqcap g]$ è la minima funzione misurabile ($\mathcal{B}$) e maggiorante (la massima funzione misurabile ($\mathcal{B}$) e minorante) tanto f che g su B, in base al lemma IV. Lo stesso lemma IV ed il punto 2') ci permettono di dire che:

V. *La totalità* $F^{\mathcal{B}}$, *munita della relazione* $\leqq$ *e delle operazioni* $\sqcup$, $\sqcap$, $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$, $\odot$, *è una struttura isomorfa a quella rappresentata dalle classi d'equivalenza modulo* $\mathcal{N}$ *in cui* $F^{\mathfrak{C}}$ *si suddivide, munita della relazione* $\leqq$ *e delle operazioni* $\cup$, $\cap$, $+$, $-$, $\times$, $:$.

Ne segue, subito:

3') *data una successione* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *di funzioni misurabili* ($\mathcal{B}$), *definite in uno stesso insieme* B, *esiste una funzione misurabile* ($\mathcal{B}$) *da chiamare* $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} f_k \left[\bigsqcap_{k=1}^{\infty} f_k\right]$ *che in* $F^{\mathcal{B}}$ *rappresenta la minima maggiorante comune (la massima minorante comune) della successione* $\{f_k\}$: *essa è equivalente a* $\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k$ (*a* $\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k$) *modulo* $\mathcal{N}$.

4') *Data una funzione* f *misurabile* ($\mathcal{B}$), *in un insieme* B, *esiste una successione di funzioni semplici* ($\mathcal{B}$), $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *definite su* B, *tali da aversi* $f = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} f_k \left[f = \bigsqcap_{k=1}^{\infty} f_k\right]$.

Questo è quanto si può dedurre dalla teoria «*c*» con l'ausilio del teorema III', nel caso che abbiamo detto di STONE. Come nel caso generale, così anche ora per dimostrare che le funzioni semplici ($\mathcal{B}$) altro non sono che le funzioni costanti a tratti ($\mathcal{B}$), per dimostrare che le operazioni $\sqcup$, $\sqcap$, $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$, $\odot$ altro non sono, rispettivamente, che le $\cup$, $\cap$, $+$, $\times$, $-$, $:$, bisogna risalire direttamente alla ipotesi che $\mathcal{B}$ è un *anello d'insiemi*, e quindi restare entro l'ambito della teoria «*b*».

Per convincersi di ciò, basti il seguente

Esempio. — Dati tre elementi (distinti) α, β, γ, sia

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

$$\mathcal{B} = \{\varnothing, A_1, A_2, U\} \quad \text{con} \quad A_1 = \{\alpha\},\ A_2 = \{\gamma\},$$

$$\mathcal{N} = \{\varnothing, N\} \qquad \text{con} \quad N = \{\beta\},$$

$$\mathcal{C} = \{\varnothing, A_1, A_2, N, A_1 \cup A_2, A_1 \cup N, A_2 \cup N, U\};$$

com'è chiaro, $\mathcal{C}$ è un σ-anello, $\mathcal{N}$ è un σ-ideale, $\mathcal{B}$ *non* è un anello, però (rispetto all'inclusione $\subset$ assunta come relazione d'ordine) è ancora un reticolo completo di Boole (con $A_1 \sqcap A_2 = \varnothing$, $A_1 \sqcup A_2 = U$), isomorfa a $\mathcal{C}/\mathcal{N}$, il che permette di costruire la teoria «*a*», e quindi una teoria ***duale*** analoga alla «*b*»; è subito visto che $F^{\mathcal{C}}$ è semplicemente la totalità delle funzioni definite in qualche sottoinsieme di U, e che $F^{\mathcal{B}}$ è la totalità delle funzioni definite in $\varnothing$, in A_1, in A_2 e di quelle definite in U verificanti la condizione: $f(\beta) = f(\alpha) \cup f(\gamma)$. Con ciò le tesi dei due teoremi I′ e III′ sussistono ancora, e così pure le proprietà 1′), 2′), 3′) e 4′), senza tuttavia che le operazioni $\sqcup$, $\sqcap$, $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$ e $\odot$ vengano a coincidere rispettivamente con le $\cup$, $\cap$, $+$, $\times$, $-$, $:$; ad esempio, ponendo

$$f(\alpha) = -1,\ f(\beta) = f(\gamma) = 1,\ g(\alpha) = 1 = g(\beta),\ g(\gamma) = -1,$$

si ottiene

$$f \oplus g \equiv 0$$

mentre è

$$f(\alpha) + g(\alpha) = f(\gamma) + g(\gamma) = 0,\ f(\beta) + g(\beta) = 2.$$

Quanto alle funzioni costanti a tratti ($\mathcal{B}$), esse non sono neanche tutte misurabili ($\mathcal{B}$), in questo esempio.

Le proprietà 3′) e 4′), a differenza delle 1′) e 2′), non possono precisarsi ulteriormente usando l'ipotesi che $\mathcal{B}$ è un anello: nella teoria «*b*» sarà pur sempre, in generale

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} f_k \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k \quad \text{e} \quad \bigsqcap_{k=1}^{\infty} f_k \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k .$$

3. **Misure nella teoria «*b*» e nella teoria «*c*».** Secondo la teoria «*b*», in uno spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$ si chiama *misura assoluta* una funzione $\mu(B)$ finita e non negativa, definita nell' insieme $\mathcal{B}$, tale che sia

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$ per $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ con $B_i \sqcap B_j = \emptyset$ $(i, j = 1, 2, \ldots; i \neq j)$;

misura relativa sarà poi la differenza tra due misure assolute [25].

Se $(U, \mathcal{B})$ è uno spazio mensurale secondo la teoria «*c*», ossia se $\mathcal{B}$ è un δ-anello, questa definizione di misura viene a coincidere con quella classica, perchè allora si ha

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k .$$

3.1. In generale accanto allo spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$ vi sarà lo spazio $(U, \mathcal{C})$ costruito al n. 1.1. Si ha allora:

VI. *Ogni misura nello spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$ è la traccia su $\mathcal{B}$ di una misura nello spazio mensurale $(U, \mathcal{C})$ nulla su $\mathcal{N}$; viceversa ogni misura nello spazio mensurale $(U, \mathcal{C})$, se è nulla su $\mathcal{N}$ ammette come traccia su $\mathcal{B}$ una misura nello spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$.*

1) Il viceversa è chiaro; sia μ una misura nello spazio $(U, \mathcal{C})$, sia μ nulla su $\mathcal{N}$; possiamo senza restrizione ammettere che sia $\mu \geqq 0$ su $\mathcal{C}$. Per $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, con $B_i \cap B_j = \emptyset$, $B_i \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$ $(i, j = 1, 2, \ldots; i \neq j)$, avremo allora $B - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{N}$ [26], e quindi:

$$\mu(B) = \mu\left(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k), \qquad \text{c. d. d.}$$

---

(25) Mi limito a considerare, perciò, le misure nel loro « campo di finitezza e misurabilità » ed a considerare simultaneamente solo misure che abbiano tale campo a comune. Ciò è ragionevole, avendo supposto che $\mathcal{B}$ sia numerabilmente $\sqcap$-completo.

(26) v. nota (6).

2) Sia μ una misura nello spazio $(U, \mathcal{B})$, che possiamo senza restrizione supporre non negativa. Poichè $\mathcal{B}$ è un anello d'insiemi, e su di esso la funzione μ è σ-additiva nel senso ordinario del termine ([27]), questa funzione μ può *prolungarsi* in una funzione non negativa e σ-additiva sul δ-anello $\mathcal{B}_*$ generato da $\mathcal{B}$. Se $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione d'insiemi misurabili $(\mathcal{B})$, tali che $\prod_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$, allora si ha anche $\lim_{n\to\infty} \mu(\prod_{k=1}^{n} B_k) = 0$, come conseguenza della condizione ii); ne segue, per ogni n, $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) \leqq \mu(\prod_{k=1}^{n} B_k)$, e quindi $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$. Si può concludere che, *completando* il prolungamento della μ ([28]), si ottiene appunto una misura definita su $\mathcal{C}$ (nel senso classico) almeno, e nulla su $\mathcal{N}$, c. d. d.

In base a questo teorema VI ed ai teoremi I e II, le proprietà di una misura μ secondo la teoria «*d*», possono venir dedotte dai risultati della teoria «*c*». Consideriamo ad esempio il teorema di HAHN.

Sia μ una misura relativa nello spazio $(U, \mathcal{B})$, e intendiamo ch'essa sia prolungata su tutto $\mathcal{C}$, a tenore del teorema VI.

Allora, in base alla teoria «*c*», ogni insieme $B_0 \in \mathcal{B}$ è l'unione di due insiemi disgiunti C_+ e C_-, misurabili $(\mathcal{C})$, tali da aversi $\mu(\mathcal{C}) \geqq 0$ per $C \subset C_+$, $\mu(C) \leqq 0$, per $C \subset C_-$. Per il teorema I, esistono due insiemi B'_+ e B'_- misurabili $(\mathcal{B})$ ed equivalenti modulo $\mathcal{N}$ rispettivamente a C_+ e C_-; ponendo $B_+ = B_0 \cap B'_+$, $B_- = B_0 - B_+$, avremo ancora ([29]) $B_+ \Delta C_+ \in \mathcal{N}$, $B_- \Delta C_- \in \mathcal{N}$, e quindi $\mu(B) = \mu(B - C_-) \geqq 0$ per $B \subset B_+$, $\mu(B) = \mu(B - C_+) \leqq 0$ per $B \subset B_-$, $B \in \mathcal{B}$.

4. L'integrazione nella teoria «*b*» e nella teoria «*c*». Potremo limitarci a considerare funzioni di punto *non negative* (quasi ovunque modulo $\mathcal{N}$) e misure *assolute*, che a tenore del teorema VI saranno prolungate su tutto $\mathcal{C}$ e nulle su tutto $\mathcal{N}$. Inoltre ammetteremo, senza re-

---

([27]) Data una successione $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ d'insiemi disgiunti della famiglia $\mathcal{B}$, se è $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}$, allora è anche $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, e quindi $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$.

([28]) Ossia attribuendo misura nulla a qualunque insieme già incluso in uno di misura nulla.

([29]) $B_+ \Delta C_+ = (B_+ \Delta B'_+) \Delta (B'_+ \Delta C_+) = (B'_+ - B_0) \Delta (B'_+ \Delta C_+) \subset$

$$\subset (B'_+ - C_+) \cup (B'_+ \Delta C_+) \in \mathcal{N}.$$

Analogamente, si vede che $B_- \Delta C_- \in \mathcal{N}$.

strizione essenziale, che U sia misurabile $(\mathcal{B})$, considerando poi funzioni di punto definite su tutto U (salvo al più un insieme appartenente ad $\mathcal{N}$).

Ciò premesso, data una funzione di punto f misurabile $(\mathcal{B})$ ed una misura μ, nella teoria « b » si definisce come $\int_B f(u)\, d\, \mu$ una misura $\psi(B)$ la quale:

i) sia nulla su ciascun insieme misurabile $(\mathcal{B})$ su cui è nulla la misura μ;

ii) verifichi la proprietà di media:

$$\alpha(B) \cdot \mu(B) \leqq \psi(B) \leqq \beta(B) \cdot \mu(B) \quad \text{per } B \in \mathcal{B}, \mu(B) > 0,$$

dove $\alpha(B)$ rappresenta l'estremo inferiore, $\beta(B)$ l'estremo superiore ([30]) della funzione f nell'insieme B.

È chiaro che questa definizione coincide con quella classica, nel caso che $\mathcal{B}$ sia un δ-anello. Nel caso generale, possiamo dire che una siffatta misura $\psi(B)$ può essere prolungata (teorema VI) su tutto $\mathcal{C}$, risultando nulla su $\mathcal{N}$; poichè ogni insieme $C \in \mathcal{C}$ si può scrivere sotto la forma $C = B \Delta N$ con $B \in \mathcal{B}$ ed $N \in \mathcal{N}$ (teorema I), avremo:

i') se $\mu(B \Delta N) = 0$, allora, successivamente, $\mu(B) = 0$, $\psi(B) = 0$, $\psi(B \Delta N) = 0$;

$$\text{ii}') \qquad \alpha(B \Delta N) \cdot \mu(B \Delta N) = \alpha(B) \cdot \mu(B) \leqq \psi(B) = \psi(B \Delta N),$$

$$\psi(B \Delta N) = \psi(B) \leqq \beta(B) \cdot \mu(B) = \beta(B \Delta N) \cdot \mu(B \Delta N).$$

In base alla teoria « c » una siffatta funzione di C esiste ed è unica, ed è appunto $\int_C f\, d\, \mu$, intendendo la integrazione nel senso classico, nello spazio mensurale $(U, \mathcal{C})$.

Ciò prova senz'altro che la definizione della teoria « b » è accettabile, e che, se $f \in F^{\mathcal{B}}$, $B \subset \mathcal{B}$, e μ è nulla su $\mathcal{N}$, il segno $\int_B f\, d\, \mu$ ha lo stesso valore numerico sia inteso seguendo la teoria « b », nello spazio $(U, \mathcal{B})$, sia seguendo la teoria « c », nello spazio $(U, \mathcal{C})$.

È ora evidente che i risultati della teoria « c », in base ai teoremi I, III, VI, permettono di dedurre le proprietà fondamentali dell'integrale.

([30]) A meno d'insiemi di misura μ nulla, com'è chiaro, per la i).

Mi limito al teorema di RADON-NIKODYM, a titolo d'esempio.

Siano μ e ν due misure nello spazio mensurale $(U, \mathcal{B})$ che suppongo *assolute* per semplicità. Esse possono prolungarsi su $\mathcal{C}$, dando luogo a due misure omonime nello spazio mensurale $(U, \mathcal{C})$. In base al teorema di RADON-NIKODYM della teoria « c », esiste una funzione (non negativa) e misurabile $(\mathcal{C})$, f, esiste un insieme $C_0 \in \mathcal{C}$, tal che sia

$$\nu(C) = \nu(C_0 \cap C) + \int_C f(u)\, d\mu \,, \; \mu(C_0) = 0 \qquad \text{per ogni } C \in \mathcal{C};$$

detti allora B_0 un insieme misurabile $(\mathcal{B})$ ed equivalente a C_0 modulo $\mathcal{N}$, detta g una funzione misurabile $(\mathcal{B})$ equivalente ad f modulo $\mathcal{N}$, sarà ancora

$$\nu(B) = \nu(B_0 \cap B) + \int_B g(u)\, d\mu \,, \; \mu(B_0) = 0 \qquad \text{per ogni } B \in B\,.$$

6. — **Conclusione.** — Non vale la pena di continuare questa esposizione, forse già troppo diffusa. In conclusione:

1) Poichè ogni reticolo del tipo considerato da C. CARATHEODORY può rappresentarsi mediante uno spazio mensurale del tipo di STONE ([31]), tutti i risultati della teoria « a » possono dedursi dalla teoria « c », la quale a sua volta si presenta come un caso particolare della prima; pertanto, a meno del citato teorema di rappresentazione, le due teorie son da considerare come equivalenti.

2) La teoria « c » è un effettivo caso particolare della « b »; tuttavia i teoremi di tipo *globale* di quest'ultima (non quelli di tipo *locale*) possono esser dimostrati coi soli mezzi della teoria « c »: sembrerebbe dunque che la « b » sia lievemente più generale della « c ».

3) In realtà la teoria « b » è solo una delle possibili teorie *duali* della « a », quali si possono ottenere da questa mercè il teorema di rappresentazione di STONE. Essa presenta la particolarità (a differenza delle altre teorie possibili) di ammettere un *anello* come famiglia d'insiemi misurabili: è chiaro che i teoremi dipendenti da questa circostanza non possono dedursi dalla teoria « a » — e quindi neppure dalla « c » che le è equivalente — ed anzi esprimono (in ultima analisi) la *dualità* tra la « a » e la « b ».

La particolarità presentata dalla teoria « b » in confronto delle altre teorie pensabili *duali* della « a », la rende particolarmente semplice, permettendo di usare i nomi delle operazioni aritmetiche tra funzioni misurabili, nel loro significato elementare.

([31]) v. [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] F. BERTOLINI, *La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica,* in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie III, vol. XI, fasc. III. IV (1957).

[2] F. BERTOLINI, *Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura,* in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » serie III, vol. XII, fasc. I. II (1958).

[3] F. BERTOLINI, *Le funzioni misurabili di punto (d'ultrafiltro) e la derivazione delle funzioni d'insieme (di somma) nella teoria algebrica della misura,* in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » serie III, vol. XII, fasc. III (1958).

[4] C. CARATHEODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung,* Birkhäuser, Basel (1956).

[5] O. HAUPT, E. AUMANN, C. Y. PAUC, *Differential und Integralrechnung,* III Bd., de Gruyter, Berlin (1955).

[6] L. H. LOOMIS, *On the representation of σ-complete Boolean algebras,* in « Bulletin of the American Mathematical Society », vol. 53, n. 8, p. 757 sgg. (1947)

[7] G. NÖBELING, *Grundlagen der analytischen Topologie,* Springer Verlag, Berlino (1955).

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 3 agosto 1959