ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

NATALIA BERRUTI ONESTI

Un teorema di esistenza per l'equazione $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 1 (1959), p. 89-114

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_1_89_0>

UN TEOREMA DI ESISTENZA PER L'EQUAZIONE

$$F\left(x\,,y\,,z\,,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

di NATALIA BERRUTI ONESTI (a Pavia)

Il problema di Cauchy per l'equazione

$$\text{(I)} \qquad F(x\,,y\,,z\,,p\,,q)=0$$

$\left(\text{dove } p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ è già da tempo argomento di ricerca e in noti trattati d'Analisi [1] figura il teorema d'esistenza della soluzione di tale problema, valido quando la funzione $F(x\,,y\,,z\,,p\,,q)$ è continua assieme alle sue derivate parziali dei primi due ordini, mentre la soluzione della (I) è ricercata nella classe delle funzioni $z(x\,,y)$ continue assieme alle loro derivate parziali dei primi due ordini. Tra gli Autori che in data più recente hanno trattato il problema di Cauchy per la (I) ricordiamo R. SAUER [2], che, seguendo il metodo delle caratteristiche, dimostra tale teorema d'esistenza per la (I), sotto le ipotesi ora indicate. Citiamo anche, sebbene non tratti direttamente il problema di Cauchy per la (I), una recente Nota di A. OSTROWSKI [3] sopra la teoria delle caratteristiche per l'equazione (I).

---

(1) E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, T. II, ediz. V, (1929), Cap. XXII, n. 446 e n. 447, pp. 612-627.

R. COURANT-D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen phisik*, II, B. XLVIII, (1937), Cap. II, § 3, n. 1 e n. 2, pp. 63-69.

(2) R. SAUER, *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen*, B. LXII, (1952), Cap II, § 8, n. 1 - n. 4, pp. 36-43.

(3) A. OSTROWSKI, *Zur theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Mathematische Zeitschrif, B. 66 (1956/57), pp. 71-87,

Nel presente lavoro si dimostra un teorema d'esistenza di almeno una soluzione della (I) soddisfacente le condizioni di Cauchy, sotto ipotesi che presentano, rispetto a quelle che figurano nei trattati classici, una maggiore generalità. La funzione $F(x, y, z, p, q)$ è supposta continua e lipschitziana assieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in un campo

$$\Omega_\infty: \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty, \quad |p| \leq \Omega_1, |q| \leq \Omega_2,$$

dove Ω_1 e Ω_2 sono numeri reali positivi, e la soluzione della (I) è ricercata nella classe delle funzioni $z(x, y)$ lipschitziane assieme alle proprie derivate parziali del prim'ordine; inoltre il procedimento seguito ci ha portato a precisare il campo in cui è assicurata l'esistenza della funzione $z(x, y)$ soluzione della (I) (vedi Oss. del n. 2), campo che non era stato messo in luce nelle ricerche anteriori.

La dimostrazione, che si attiene al metodo delle caratteristiche, si ispira al procedimento seguito da M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI in una Memoria [4] di qualche anno fa, come appare dalle prime considerazioni. Peraltro l'equazione (I) ha dato luogo a nuove difficoltà, le quali hanno richiesto una delicata indagine ed hanno reso più laborioso il procedimento. Infatti mentre nella Memoria dei citati Autori è sufficiente, da un'equazione del tipo $y = Y(x, \eta)$ ricavare η in funzione di x e y (dove x varia in un intervallo $(0, a)$ e y ed η possono assumere ogni valore reale), nel presente lavoro abbiamo dovuto risolvere il sistema

$$x = X(t, \xi), \quad y = Y(t, \xi),$$

dove (t, ξ) varia in un rettangolo, e costruire le due funzioni

$$t = T(x, y), \quad \xi = \xi(x, y)$$

definite in un campo limitato del piano (x, y) che corrisponde biunivocamente al rettangolo (cfr. capoverso c)).

Inoltre ha carattere di novità la dimostrazione (che forma oggetto del capoverso e)) che è

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q(x, y).$$

---

(4) M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$, «Annali di Matematica pura ed applicata», T. XXXII, (1951).

1. TEOREMA. *Sia $F(x, y, z, p, q)$ una funzione definita per ogni quintupla (x, y, z, p, q) del campo*

$$\Omega_\infty: \quad -\infty < x + \infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$|p| \leq \Omega_1, \quad |q| \leq \Omega_2,$$

la quale sia in tale campo continua assieme alle sue derivate parziali F_x, F_y, F_z, F_p, F_q; si supponga che le funzioni F_p ed F_q non si annullino contemporaneamente per alcuna quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_∞, e che esistano dieci costanti non negative M_i, L_i, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ tali che sia

$$(1) \qquad \begin{cases} |F_x(x, y, z, p, q)| \leq M_1, & |F_y(\dots)| \leq M_2, \quad |F_z(\dots)| \leq M_3, \\ |F_p(\dots)| \leq M_4, & |F_q(\dots)| \leq M_5 \end{cases}$$

per ogni quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_∞, e

$$(2) \qquad \begin{cases} |F_x(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) - F_x(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)| \leq L_1 \{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|\} \\ |F_y(\dots\dots) - F_y(\dots\dots)| \leq L_2 \{\dots\dots\dots\dots\} \\ |F_z(\dots\dots) - F_z(\dots\dots)| \leq L_3 \{\dots\dots\dots\dots\} \\ |F_p(\dots\dots) - F_p(\dots\dots)| \leq L_4 \{\dots\dots\dots\dots\} \\ |F_q(\dots\dots) - F_q(\dots\dots)| \leq L_5 \{\dots\dots\dots\dots\} \end{cases}$$

per ogni coppia di quintuple $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$, $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ di Ω_∞. Siano inoltre $f(x)$, $\zeta(x)$, $\pi(x)$, $\chi(x)$ quattro funzioni definite e continue in un intervallo (α, β), $f(x)$ e $\zeta(x)$ abbiano derivate $f'(x)$ e $\zeta'(x)$ continue in tale intervallo e sia in tutto (α, β)

$$(3) \qquad |\pi(x)| \leq \mu_1 < \Omega_1, \quad |\chi(x)| \leq \mu_2 < \Omega_2, \quad |f'(x)| \leq k_2, \quad |\zeta'(x)| \leq k_3;$$

esistano tre costanti non negative k_4, k_5, λ, tali che sia

$$(4) \qquad |\pi(x_1) - \pi(x_2)| \leq k_4 |x_1 - x_2|, \quad |\chi(x_1) - \chi(x_2)| \leq k_5 |x_1 - x_2|,$$

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|$$

per ogni coppia di valori reali x_1, x_2 *di* (α, β); *sia infine*

$$(5) \quad \begin{cases} \zeta'(x) = \pi(x) + \chi(x) f'(x) \\ F(x, f(x), \zeta(x), \pi(x), \chi(x)) = 0 \\ F_p(x, f(x), \zeta(x), \pi(x), \chi(x)) - F_q(x, f(x), \zeta(x), \pi(x), \chi(x)) f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

per ogni valore reale x *di* (α, β).

Sotto tali ipotesi esiste almeno una funzione $z(x, y)$ *definita in un campo* C *del piano* (x, y) *(che si determinerà in seguito)* (5) *la quale:*

1°) *è continua in* C *assieme alle sue derivate parziali* $p(x, y) = \dfrac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $q(x, y) = \dfrac{\partial z(x, y)}{\partial y}$;

2°) *su ogni segmento* $x = x_0$ *appartenente al campo* C *è, assieme a* $p(x, y)$ *e* $q(x, y)$, *a rapporto incrementale limitato rispetto a* y *con costante di Lipschitz indipendente da* x;

3°) *su ogni segmento* $y = y_0$ *appartenente al campo* C *è, assieme a* $p(x, y)$ *e* $q(x, y)$, *a rapporto incrementale limitato rispetto a* x *con costante di Lipschitz indipendente da* y;

4°) *soddisfa in tutto il campo* C *la*

$$(\mathrm{I}) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

e soddisfa inoltre la condizione

$$(\mathrm{II}) \qquad z(x, f(x)) = \zeta(x),$$

per $\alpha \leq x \leq \beta$.

a) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie (delle caratteristiche)

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d X(t, \xi)}{d t} = F_p(X(t, \xi), Y(t, \xi), Z(t, \xi), P(t, \xi), Q(t, \xi)) \\ \dfrac{d Y(t, \xi)}{d t} = F_q(\dots) \\ \dfrac{d Z(t, \xi)}{d t} = F_p(\dots) P(t, \xi) + F_q(\dots) Q(t, \xi) \\ \dfrac{d P(t, \xi)}{d t} = -[F_x(\dots) + F_z(\dots) P(t, \xi)] \\ \dfrac{d Q(t, \xi)}{d t} = -[F_y(\dots) + F_z(\dots) Q(t, \xi)]. \end{cases}$$

---

(5) Cfr. capoverso c) del n. 1 e Osservazione del n. 2.

dove t e ξ sono due parametri reali, e ricerchiamone la soluzione $X(t, \xi)$, $Y(t, \xi)$, $Z(t, \xi)$, $P(t, \xi)$, $Q(t, \xi)$ soddisfacente le condizioni iniziali

$$(7) \qquad X(0, \xi) = \xi, \quad Y(0, \xi) = f(\xi), \quad Z(0, \xi) = \zeta(\xi), \quad P(0, \xi) = \pi(\xi),$$
$$Q(0, \xi) = \chi(\xi), \quad (a \leq \xi \leq \beta).$$

Osserviamo che se $P(t, \xi)$ e $Q(t, \xi)$ soddisfano il sistema (6), in virtù delle prime tre delle (1), dalle ultime due delle (6) si ha

$$\left| \frac{d\, P(t, \xi)}{d\, t} \right| \leq M_1 + M_3 \, | P(t, \xi) |,$$

$$\left| \frac{d\, Q(t, \xi)}{d\, t} \right| \leq M_2 + M_3 \, | Q(t, \xi) |$$

dalle quali, tenuto conto delle ultime due delle (7) e delle prime due delle (3) segue, per ogni ξ fissato di (a, β) e per ogni valore reale t non negativo [6],

$$| P(t, \xi) | \leq \omega_1(t),$$

$$| Q(t, \xi) | \leq \omega_2(t),$$

dove

$$\omega_j(t) = e^{M_3 t} \left(- \frac{M_j}{M_3} (e^{-M_3 t} - 1) + \mu_j \right), \qquad (j = 1, 2).$$

Allora, se a_0 è il massimo numero reale positivo tale che sia

$$a_0 \leq \frac{1}{M_3} \log \frac{M_1 + M_3 \, \Omega_1}{M_1 + M_3 \, \mu_1}, \qquad a_0 \leq \frac{1}{M_3} \log \frac{M_2 + M_3 \, \Omega_2}{M_2 + M_3 \, \mu_2},$$

in tutto il rettangolo

R_0: $\qquad 0 \leq t \leq a_0, \quad a \leq \xi \leq \beta$

è

$$(8) \qquad | P(t, \xi) | \leq \Omega_1, \qquad | Q(t, \xi) | \leq \Omega_2.$$

---

(6) Si perviene alle disuguaglianze che seguono usufruendo di una nota disuguaglianza di PEANO. Vedi L. GIULIANO, *Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una disuguaglianza di Peano*, Rend. Acc. dei Lincei, Vol. I, (1946), pp. 1264-1271, n. 1.

Posto per ogni quintupla (x, y, z, p, q) di Ω_∞

$$\Psi_1(x, y, z, p, q) = F_p(x, y, z, p, q)$$

$$\Psi_2(x, y, z, p, q) = F_q(\ldots)$$

$$\Psi_3(x, y, z, p, q) = F_p(\ldots)\,p + F_q(\ldots)\,q$$

$$\Psi_4(x, y, z, p, q) = -\,[F_x(\ldots) + F_z(\ldots)\,p]$$

$$\Psi_5(x, y, z, p, q) = -\,[F_y(\ldots) + F_z(\ldots)\,q]\,,$$

definiamo per ogni terna di numeri reali x, y, z le funzioni $\overline{\Psi}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ nel seguente modo

$$\overline{\Psi}_i(x, y, z, p, q) = \Psi_i(x, y, z, p, q) \quad \text{per} \quad |p| \leq \Omega_1\,,\ |q| \leq \Omega_2\,,$$

$$\overline{\Psi}_i(x, y, z, p, q) = \Psi_i(x, y, z, \Omega_1, q) \quad \text{per} \quad p > \Omega_1\,,\ |q| \leq \Omega_2\,,$$

$$\overline{\Psi}_i(x, y, z, p, q) = \Psi_i(x, y, z, -\Omega_1, q) \quad \text{per} \quad p < -\Omega_1\,,\ |q| \leq \Omega_2\,,$$

$$\overline{\Psi}_i(x, y, z, p, q) = \Psi_i(x, y, z, p, \Omega_2) \quad \text{per} \quad -\infty < p < +\infty\,,\quad q > \Omega_2\,,$$

$$\overline{\Psi}_i(x, y, z, p, q) = \Psi_i(x, y, z, p, -\Omega_2) \quad \text{per} \quad -\infty < p < +\infty\,,\ q < -\Omega_2\,,$$

e consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$(6') \quad \begin{cases} \dfrac{d\,X(t, \xi)}{d\,t} = \overline{\Psi}_1(X(t, \xi), Y(t, \xi), Z(t, \xi), P(t, \xi), Q(t, \xi)) \\[2ex] \dfrac{d\,Y(t, \xi)}{d\,t} = \overline{\Psi}_2(\ldots) \\[2ex] \dfrac{d\,Z(t, \xi)}{d\,t} = \overline{\Psi}_3(\ldots) \\[2ex] \dfrac{d\,P(t, \xi)}{d\,t} = \overline{\Psi}_4(\ldots) \\[2ex] \dfrac{d\,Q(t, \xi)}{d\,t} = \overline{\Psi}_5(\ldots)\,. \end{cases}$$

Osserviamo che, in virtù delle (1) e per il modo in cui sono state definite le funzioni $\overline{\Psi}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, per ogni quintupla di numeri reali x, y, z, p, q è

$$(1') \quad \begin{cases} |\overline{\Psi}_1(x,y,z,p,q)| \leq M_4, \quad |\overline{\Psi}_2(\ldots)| \leq M_5, \quad |\overline{\Psi}_3(\ldots)| \leq M_4\,\Omega_1 + M_5\,\Omega_2, \\ |\overline{\Psi}_4(\ldots)| \leq M_1 + M_3\,\Omega_1, \qquad |\overline{\Psi}_5(\ldots)| \leq M_2 + M_3\,\Omega_2\,; \end{cases}$$

inoltre per ogni coppia di quintuple reali $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$, $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$, in virtù delle (2) e delle ultime tre delle (1), è

$$(2') \quad \begin{cases} |\overline{\Psi}_1(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1) - \overline{\Psi}_1(x_2,y_2,z_2,p_2,q_2)| \leq L_4\{|x_1-x_2| + |y_1-y_2| + |z_1-z_2| + |p_1-p_2| + |q_1-q_2|\} \\ |\overline{\Psi}_2(\,\ldots\ldots\,) - \overline{\Psi}_2(\,\ldots\ldots\,)| \leq L_5\{\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\} \\ |\overline{\Psi}_3(\,\ldots\ldots\,) - \overline{\Psi}_3(\,\ldots\ldots\,)| \leq \Lambda_1\{\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\} \\ |\overline{\Psi}_4(\,\ldots\ldots\,) - \overline{\Psi}_4(\,\ldots\ldots\,)| \leq \Lambda_2\{\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\} \\ |\overline{\Psi}_5(\,\ldots\ldots\,) - \overline{\Psi}_5(\,\ldots\ldots\,)| \leq \Lambda_3\{\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\}, \end{cases}$$

dove $\Lambda_1 = L_4\,\Omega_1 + L_5\,\Omega_2 + M_4 + M_5$, $\Lambda_2 = L_1 + L_3\,\Omega_1 + M_3$, $\Lambda_3 = L_2 + L_3\,\Omega_2 + M_3$.

Tenuto conto delle (1′) e delle (2′), risultati classici relativi alla teoria delle equazioni differenziali([7]) assicurano che esiste un unico sistema di funzioni

$$(9) \qquad X(t,\xi), \quad Y(t,\xi), \quad Z(t,\xi), \quad P(t,\xi), \quad Q(t,\xi)$$

definite e continue nel campo R_0 assieme alle loro derivate $\dfrac{d\,X(t,\xi)}{d\,t}$, $\dfrac{d\,Y(t,\xi)}{d\,t}$, $\dfrac{d\,Z(t,\xi)}{d\,t}$, $\dfrac{d\,P(t,\xi)}{d\,t}$, $\dfrac{d\,Q(t,\xi)}{d\,t}$, le quali soddisfano in tutto R_0 il sistema (6′) e, per ogni ξ di (α, β), le condizioni (7).

Inoltre si dimostra([8]) che, per il modo in cui sono state definite le funzioni $\overline{\Psi}_4$ e $\overline{\Psi}_5$, le (9) soddisfano anche il sistema (6).

([7]) V., per es., G. SANSONE, « *Equazioni differenziali nel campo reale* », Parte prima, Cap. I, § 3, n. 1 e n. 4, § 5, n. 1.

([8]) Per dimostrare quanto segue si procede come al n. 2 *b*) della Memoria di M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una nuova estensione di un teorema di esistenza per equazioni a derivate parziali*, « Annali di Matematica pura ed applicata », T. XLIII (1957), p. 58.

Infatti se $|P(t, \xi)| \leq \Omega_1$, e comunque sia $|Q(t, \xi)|$, in virtù della prima e della terza delle (1) e per il modo in cui è stata definita la funzione $\overline{\Psi}_4$, dalla quarta delle (6′) si ha in tutto R_0

$$\left| \frac{d\, P(t, \xi)}{d\, t} \right| \leq M_1 + M_3 \, | P(t, \xi) | ;$$

se $|P(t, \xi)| > \Omega_1$, e comunque sia $|Q(t, \xi)|$, l'ultima disuguaglianza segue dalla quarta delle (1′).

Analogamente si dimostra che dalla quinta delle (6′) si ha in tutto R_0

$$\left| \frac{d\, Q(t, \xi)}{d\, t} \right| \leq M_2 + M_3 \, | Q(t, \xi) | .$$

Segue che in tutto il campo R_0 le funzioni $P(t, \xi)$ e $Q(t, \xi)$ soddisfano le (8); pertanto la soluzione (9) del sistema (6′) appartiene al campo in cui i secondi membri delle (6′) coincidono rispettivamente con i secondi membri delle (6), ed è quindi soluzione anche del sistema (6).

Tenendo presenti le (1′) e le (2′), le (7), le ultime due delle (3) e le prime due delle (4), come caso particolare del lemma contenuto nella Memoria citata in (4) ([9]), si dimostra che le funzioni (9) per ogni t fissato di $(0, a_0)$, considerate come funzioni della sola ξ nell'intervallo (α, β) sono a rapporto incrementale limitato con costante di Lipschitz indipendente da t; e precisamente si ha per ogni coppia di valori reali ξ', ξ'' di (α, β) e per ogni t di $(0, a_0)$

$$(10) \quad \left| \frac{X(t, \xi') - X(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| + \left| \frac{Y(t, \xi') - Y(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| + \left| \frac{Z(t, \xi') - Z(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| +$$
$$+ \left| \frac{P(t, \xi') - P(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| + \left| \frac{Q(t, \xi') - Q(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq (1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\, e^{\Lambda t} \leq$$
$$\leq (1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\, e^{\Lambda a_0},$$

dove

$$\Lambda = L_4 + L_5 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$$

([9]) Vedi luogo citato in (4), § 1, n. 1; si ha qui un caso particolare, essendo le funzioni che sono a secondo membro del sistema (6′) lipschitziane.

e

$$
(11) \quad \begin{cases}
1 - L_4\, g(t) \leq \dfrac{X(t\,,\xi') - X(t\,,\xi'')}{\xi' - \xi''} \leq 1 + L_4\, g(t) \leq 1 + L_4\, g(a_0)\,, \\[2ex]
\left| \dfrac{Y(t\,,\xi') - Y(t\,,\xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq k_2 + L_5\, g(t) \leq k_2 + L_5\, g(a_0)\,, \\[2ex]
\left| \dfrac{Z(t\,,\xi') - Z(t\,,\xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq k_3 + A_1\, g(t) \leq k_3 + A_1\, g(a_0)\,, \\[2ex]
\left| \dfrac{P(t\,,\xi') - P(t\,,\xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq k_4 + A_2\, g(t) \leq k_4 + A_2\, g(a_0)\,, \\[2ex]
\left| \dfrac{Q(t\,,\xi') - Q(t\,,\xi'')}{\xi' - \xi''} \right| \leq k_5 + A_3\, g(t) \leq k_5 + A_3\, g(a_0)\,,
\end{cases}
$$

dove

$$
g(t) = \frac{1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5}{A} (e^{At} - 1)\,.
$$

Osserviamo inoltre che in tutto R_0 è

$$
(12) \qquad F(X(t\,,\xi)\,,\ Y(t\,,\xi)\,,\ Z(t\,,\xi)\,,\ P(t\,,\xi)\,,\ Q(t\,,\xi)) = 0\,.
$$

Infatti poichè le (9) costituiscono una soluzione del sistema (6), in tutto R_0 è, come si può verificare, $\dfrac{d\,F(X(t,\xi), Y(t,\xi), Z(t,\xi),\ P(t,\xi),\ Q(t,\xi))}{d\,t} = 0$, e quindi, per ogni ξ fissato di $(\alpha\,,\beta)$, è

$$
F(X(t\,,\xi)\,,\ Y(t\,,\xi)\,,\ Z(t\,,\xi)\,,\ P(t\,,\xi)\,,\ Q(t\,,\xi)) = \text{cost.}
$$

per $0 \leq t \leq a_0$; dunque in virtù della seconda delle (5) e delle (7), segue la (12).

b) Determiniamo ora un numero reale positivo a_1 non superiore ad a_0 e sufficientemente piccolo in modo che sia

$$
1 - L_4\, g(a_1) > 0\,,
$$

e consideriamo le funzioni (9) nel campo

$$
R_1: \quad 0 \leq t \leq a_1\,, \quad \alpha \leq \xi \leq \beta\,;
$$

posto

$$
(13) \qquad 1 - L_4\, g(a_1) = m_1\,, \qquad 1 + L_4\, g(a_1) = m_2\,,
$$

dalla prima delle (11) segue, per ogni t di $(0\,,a_1)$ ed ogni coppia di valori reali ξ', ξ'' di (α, β),

$$0 < m_1 \leq \frac{X(t, \xi') - X(t, \xi'')}{\xi' - \xi''} \leq m_2 . \tag{13'}$$

Dunque la funzione $x = X(t, \xi)$ per ogni t fissato di $(0, a_1)$, considerata come funzione della sola ξ, è crescente in (α, β), e, posto

$$X(t, \alpha) = A(t), \qquad X(t, \beta) = B(t),$$

per ogni t fissato di $(0, a_1)$ esiste la funzione inversa $\xi = \Phi(t, x)$ definita per $A(t) \leq x \leq B(t)$. Tale funzione, per ogni t fissato di $(0, a_1)$, considerata come funzione della sola x nell'intervallo $(A(t), B(t))$, è ivi a rapporto incrementale limitato con costante di Lipschitz indipendente da t, e crescente: infatti, in virtù della (13'), per ogni t fissato di $(0, a_1)$ e per ogni coppia di valori reali x', x'' di $(A(t), B(t))$ è

$$0 < \frac{1}{m_2} \leq \frac{\Phi(t, x') - \Phi(t, x'')}{x' - x''} \leq \frac{1}{m_1} . \tag{14}$$

Inoltre se $t, \bar{t}, x$ sono tre qualsiasi valori reali, tali che i punti (t, x), $(\bar{t}, x)$ appartengano al campo

$$\Delta_1 : \qquad 0 \leq t \leq a_1 , \qquad A(t) \leq x \leq B(t)$$

nel quale è definita la funzione $\xi = \Phi(t, x)$, per la corrispondenza biunivoca che esiste tra Δ_1 ed R_1 è

$$x = X(t, \Phi(t, x)), \qquad x = X(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x));$$

posto

$$\xi = \Phi(t, x), \qquad \bar{\xi} = \Phi(\bar{t}, x),$$

si ha dunque

$$\frac{X(t, \xi) - X(\bar{t}, \xi)}{t - \bar{t}} + \frac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} \, \frac{\Phi(t, x) - \Phi(\bar{t}, x)}{t - \bar{t}} = 0 . \tag{15}$$

D'altra parte, scritto il sistema differenziale delle caratteristiche sotto forma integrale (per il quale si tenga conto delle (7))

$$(16)\quad \begin{cases} X(t,\xi) = \xi + \int_0^t F_p(X(\tau,\xi), Y(\tau,\xi), Z(\tau,\xi), P(\tau,\xi), Q(\tau,\xi))\, d\tau \\[2ex] Y(t,\xi) = f(\xi) + \int_0^t F_q(\ldots)\, d\tau \\[2ex] Z(t,\xi) = \zeta(\xi) + \int_0^t [F_p(\ldots)\, P(\tau,\xi) + F_q(\ldots)\, Q(\tau,\xi)]\, d\tau \\[2ex] P(t,\xi) = \pi(\xi) - \int_0^t [F_x(\ldots) + F_z(\ldots)\, P(\tau,\xi)]\, d\tau \\[2ex] Q(t,\xi) = \chi(\xi) - \int_0^t [F_y(\ldots) + F_z(\ldots)\, Q(\tau,\xi)]\, d\tau \end{cases}$$

dalla prima equazione, per la quarta delle (1), si ha

$$\left| \frac{X(t,\xi) - X(\bar{t},\xi)}{t - \bar{t}} \right| \leq \frac{1}{|t - \bar{t}|} \int_{\bar{t}}^{t} |F_p(X(\tau,\xi), \ldots)|\, d\tau \leq M_4 .$$

Allora, tenendo presente anche la prima delle (11) e la prima delle (13), dalla (15) si ottiene

$$(17)\qquad \left| \frac{\Phi(t,x) - \Phi(\bar{t},x)}{t - \bar{t}} \right| \leq \frac{M_4}{1 - L_4\, g(\bar{t})} \leq \frac{M_4}{m_1} .$$

Osserviamo infine che è $\Phi(0,x) = x$, per $\alpha \leq x \leq \beta$.

c) Consideriamo ora la funzione $y = Y(t, \Phi(t,x))$ definita nel campo Δ_1, e dimostriamo che è possibile determinare un numero reale positivo $a \leq a_1$, in modo che per qualsiasi terna di valori reali $t, \bar{t}, x$, tali che i punti (t,x), $(\bar{t},x)$ appartengano al campo

$$\Delta: \qquad 0 \leq t \leq a, \qquad A(t) \leq x \leq B(t),$$

sia sempre

$$\frac{Y(t, \Phi(t, x)) - Y(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x))}{t - \bar{t}} > 0.$$

A tale scopo osserviamo innanzi tutto che, posto ancora

$$\xi = \Phi(t, x), \qquad \bar{\xi} = \Phi(\bar{t}, x),$$

si ha

$$\frac{Y(t, \Phi(t, x)) - Y(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x))}{t - \bar{t}} = \frac{Y(t, \xi) - Y(\bar{t}, \xi)}{t - \bar{t}} +$$

$$+ \frac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} \frac{\Phi(t, x) - \Phi(\bar{t}, x)}{t - \bar{t}},$$

e, tenuto conto della (15),

$$\frac{Y(t, \Phi(t, x)) - Y(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x))}{t - \bar{t}} = \frac{Y(t, \xi) - Y(\bar{t}, \xi)}{t - \bar{t}} - \tag{18}$$

$$- \frac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} \frac{\dfrac{X(t, \xi) - X(\bar{t}, \xi)}{t - \bar{t}}}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}}.$$

D'altra parte, in virtù della terza delle (5) e della continuità delle funzioni $F_p(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi))$, $F_q(\ldots), f'(\xi)$ nell'intervallo (α, β), si può supporre che per ogni ξ di (α, β) sia [10]

$$0 < \gamma_1 \leq F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) - F_p(\ldots) f'(\xi) \leq \gamma_2. \tag{19}$$

Per fissare le idee si supponga $\bar{t} < t$, e si consideri la differenza

$$I = \frac{Y(t, \Phi(t, x)) - Y(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x))}{t - \bar{t}} - [F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) - F_p(\ldots) f'(\xi)].$$

---

[10] Se in tutto (α, β) fosse $F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) - F_p(\ldots) f'(\xi) < 0$, basterebbe cambiare segno alla funzione $F(x, y, z, p, q)$.

Tenendo presente la (18), le prime due equazioni del sistema (16), ed applicando il primo teorema della media ai due integrali $\int_{\bar{t}}^{t} F_p(X(\tau, \xi), \dots) \, d\tau$, $\int_{\bar{t}}^{t} F_q(X(\tau, \xi), \dots) \, d\tau$ si ha

$$I = \frac{1}{t - \bar{t}} \int_{\bar{t}}^{t} F_q(X(\tau, \xi), \dots) \, d\tau -$$

$$- \frac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} \frac{\dfrac{1}{t - \bar{t}} \displaystyle\int_{\bar{t}}^{t} F_p(X(\tau, \xi), \dots) \, d\tau}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}} -$$

$$- [F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) - F_p(\dots) f'(\xi)] =$$

$$= F_q(X(t', \xi), \dots) - \frac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} \frac{F_p(X(t'', \xi), \dots)}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}} -$$

$$- [F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) - F_p(\dots) f'(\xi)],$$

dove t' e t'' sono due opportuni valori appartenenti all'intervallo $(\bar{t}, t)$; e possiamo anche scrivere

$$I = F_q(X(t', \xi), \dots) - F_q(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) -$$

$$- [F_p(X(t'', \xi), \dots) - F_p(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi))] \frac{\dfrac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - (\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}} -$$

$$- F_p(\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) \left[\frac{\dfrac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}} - f'(\xi) \right].$$

Ora, in virtù delle ultime due delle (2), delle (1), delle (8), e tenendo presente il sistema (16), è

$$
\begin{aligned}
& | F_p (X(t'', \xi), \ldots) - F_p (\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) | \leq \\
& \leq L_4 \{ | X(t'', \xi) - \xi | + | Y(t'', \xi) - f(\xi) | + | Z(t'', \xi) - \zeta(\xi) | + \\
& + | P(t'', \xi) - \pi(\xi) | + | Q(t'', \xi) - \chi(\xi) | \} \leq \\
& \leq L_4 \int_0^{t'} [| F_p(\ldots) | + | F_q(\ldots) | + | F_p(\ldots) P(\tau, \xi) + F_q(\ldots) Q(\tau, \xi) | + \\
& + | F_x(\ldots) + F_z(\ldots) P(\tau, \xi) | + | F_y(\ldots) + F_z(\ldots) Q(\tau, \xi) |] \, d\tau \leq \\
& \leq L_4 M t
\end{aligned}
$$

$$
| F_q (X(t', \xi), \ldots) - F_q (\xi, f(\xi), \zeta(\xi), \pi(\xi), \chi(\xi)) | \leq L_5 M t
$$

ove si è posto

$$
M = M_4 (1 + \Omega_1) + M_5 (1 + \Omega_2) + M_1 + M_2 + M_3 (\Omega_1 + \Omega_2) .
$$

Inoltre, tenendo presenti la prima delle (11), le prime due equazioni del sistema (16), le ultime due delle (2) e la (10), ed infine la terza delle (3), si ha

$$
\left| \frac{\dfrac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}} - f'(\xi) \right| \leq \frac{\left| \dfrac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} - f'(\xi) \dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} \right|}{1 - L_4 g(\bar{t})} =
$$

$$
\begin{aligned}
& = \frac{1}{1 - L_4 g(\bar{t})} \left| \frac{f(\xi) - f(\bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}} + \frac{1}{\xi - \bar{\xi}} \int_0^{\bar{t}} [F_q(X(\tau, \xi), \ldots) - F_q(X(\tau, \bar{\xi}), \ldots)] \, d\tau - \right. \\
& \qquad \left. - f'(\xi) \left\{ 1 + \frac{1}{\xi - \bar{\xi}} \int_0^{\bar{t}} [F_p(X(\tau, \xi), \ldots) - F_p(X(\tau, \bar{\xi}), \ldots)] \, d\tau \right\} \right| \leq
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{1 - L_4\, g(\bar{t})} \Big[|f'(\bar{\xi} + \vartheta(\xi - \bar{\xi})) - f'(\xi)| + L_5(1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\int_0^{\bar{t}} e^{A\tau} d\tau +$$

$$+ k_2 L_4 (1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\int_0^{\bar{t}} e^{A\tau}\, d\tau \Big],$$

ove $0 < \vartheta < 1$. Tenuto conto dell'ultima delle (4), della (17), del modo in cui è stata definita la funzione $g(t)$ ed inoltre dell'ipotesi fatta $\bar{t} < t$ segue

$$\left| \frac{\dfrac{Y(\bar{t}, \xi) - Y(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}}{\dfrac{X(\bar{t}, \xi) - X(\bar{t}, \bar{\xi})}{\xi - \bar{\xi}}} - f'(\xi) \right| \leq \frac{\lambda\, |\Phi(t, x) - \Phi(\bar{t}, x)| + (L_5 + k_2 L_4)\, g(\bar{t})}{1 - L_4\, g(\bar{t})} \leq$$

$$\leq \frac{\lambda M_4 t}{(1 - L_4 g(t))^2} + \frac{(L_5 + k_2 L_4)\, g(t)}{1 - L_4\, g(t)}.$$

Dunque, tenendo presente anche la seconda delle (11) e posto

$$G(t) = \left[L_5 + L_4 \frac{k_2 + L_5\, g(t)}{1 - L_4\, g(t)} \right] M t + \frac{\lambda M_4^2\, t}{(1 - L_4\, g(t))^2} + \frac{M_4 (L_5 + k_2 L_4)\, g(t)}{(1 - L_4\, g(t))},$$

è

$$|I| \leq G(t);$$

allora, in virtù della (19), si ha

$$\gamma_1 - G(t) \leq \frac{Y(t, \Phi(t, x)) - Y(\bar{t}, \Phi(\bar{t}, x))}{t - \bar{t}} \leq \gamma_2 + G(t).$$

Osserviamo che, poichè la funzione $g(t)$ è non negativa e crescente nell'intervallo $(0, a_1)$ e in tale intervallo è $1 - L_4\, g(t) > 0$, anche la funzione $G(t)$ è non negativa e crescente in $(0, a_1)$, ed è $G(0) = 0$.

Se ora determiniamo un numero reale positivo a non superiore ad a_1 e tale che sia

$$\gamma_1 - G(a) > 0,$$

per ogni coppia di punti (t, x), $(\bar{t}, x)$ del campo

Δ: $\quad 0 \leq t \leq a,\ A(t) \leq x \leq B(t)$

è

$$(20) \qquad 0 < \gamma_1 - G(a) \leq \frac{Y(t\,,\,\Phi\,(t\,,\,x)) - Y(\bar{t}\,,\,\Phi\,(\bar{t}\,,\,x))}{t-\bar{t}} \leq \gamma_2 + G(a).$$

Dalla (20) segue che se $t\,,\bar{t}\,,\,x$ sono tre qualsiasi valori reali, tali che i punti $(t\,,x)\,,\,(\bar{t}\,,x)$ appartengano al campo $\varDelta$, posto $y = Y(t\,,\,\Phi\,(t\,,\,x))$, $\bar{y} = Y(\bar{t}\,,\,\Phi\,(\bar{t}\,,x))$, è $y \gtreqless \bar{y}$, secondoche $t \gtreqless \bar{t}$; dunque per ogni $\bar{x}$ fissato in modo che la retta $x = \bar{x}$ abbia punti in comune con il campo $\varDelta$ si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i valori t, tali che i punti $(t\,,\bar{x})$ appartengano al campo $\varDelta$, e i valori $y = Y(t\,,\,\Phi\,(t\,,\bar{x}))$. Quindi esiste la funzione inversa $t = T(\bar{x}\,,y)$, e sostituendo $T(\bar{x}\,,y)$ a t in $\xi = \Phi\,(t\,,\bar{x})$ si ottiene $\xi = \Phi\,(T(\bar{x}\,,y)\,,\bar{x}) = \xi\,(\bar{x}\,,y)$. Facendo variare x in modo che i punti $(t\,,x)$ appartengano al campo $\varDelta$, si giunge in tal modo a costruire le due funzioni

$$(21) \qquad \begin{cases} t = T\,(x\,,y) \\ \xi = \xi\,(x\,,y) \end{cases};$$

tali funzioni sono definite in un campo C del piano $(x\,,y)$ limitato dalle curve [11]

$$y = f(x)\,,\ (\alpha \leq x \leq \beta)\,,\ y = Y\,(a\,,\,\Phi\,(a\,,\,x))\,,\ (A\,(a) \leq x \leq B\,(a))\,,$$

e dalle altre due curve

$$\begin{cases} x = X\,(t\,,\,\alpha) \\ y = Y\,(t\,,\,\alpha) \end{cases} (0 \leq t \leq a)\,, \qquad \begin{cases} x = X\,(t,\,\beta) \\ y = Y\,(t\,,\,\beta) \end{cases} (0 \leq t \leq a)$$

(le equazioni delle quali si possono anche scrivere rispettivamente $\xi\,(x\,,y) = \alpha$, $\xi\,(x\,,y) = \beta)$.

Le (21) permettono di invertire il cambiamento di variabili determinato dalle funzioni

$$(22) \qquad \begin{cases} x = X\,(t\,,\,\xi) \\ y = Y\,(t\,,\,\xi) \end{cases}$$

definite nel campo

$$R: \quad 0 \leq t \leq a\,, \quad \alpha \leq \xi \leq \beta\,,$$

---

[11] Si osservi che $Y(0\,,\,\Phi\,(0\,,x)) = Y\,(0\,,x) = f\,(x)$, poichè, come già s'è rilevato, è $\Phi\,(0\,,x) = x$ e per la seconda delle (7).

e, assieme alle (22), stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti del campo R del piano (t, ξ) e quelli del campo C del piano (x, y).

Dalla (20) segue inoltre che per ogni coppia di punti (x, y), $(x, \overline{y})$ di C è

$$\frac{1}{\gamma_2 + G(a)} \leq \frac{T(x, y) - T(x, \overline{y})}{y - \overline{y}} \leq \frac{1}{\gamma_1 - G(a)}.$$

Le funzioni $T(x, y)$ e $\xi(x, y)$ sono continue in tutto il campo C. Infatti siano (x_1, y_1), (x_2, y_2) due punti di C e sia

$$t_i = T(x_i, y_i), \quad \xi_i = \xi(x_i, y_i), \quad (i = 1, 2).$$

Tenendo presente che per la corrispondenza biunivoca tra i campi R e C è

$$x_i = X(t_i, \xi_i), \quad y_i = Y(t_i, \xi_i), \quad (i = 1, 2),$$

si ha

$$(23) \quad \begin{cases} y_1 - y_2 = \dfrac{Y(t_1, \xi_1) - Y(t_2, \xi_1)}{t_1 - t_2} (T(x_1, y_1) - T(x_2 y_2)) + \\[2ex] \qquad + \dfrac{Y(t_2, \xi_1) - Y(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} (\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2)) \\[2ex] x_1 - x_2 = \dfrac{X(t_1, \xi_1) - X(t_2, \xi_1)}{t_1 - t_2} (T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)) + \\[2ex] \qquad + \dfrac{X(t_2, \xi_1) - X(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} (\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2 y_2)). \end{cases}$$

Tale sistema di due equazioni lineari in $(T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2))$ e $(\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2))$ ha come determinante dei coefficienti l'espressione

$$D = \frac{X(t_2, \xi_1) - X(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} N,$$

dove si è posto

$$N = \frac{Y(t_1, \xi_1) - Y(t_2, \xi_1)}{t_1 - t_2} - \frac{Y(t_2, \xi_1) - Y(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\dfrac{X(t_1, \xi_1) - X(t_2, \xi_1)}{t_1 - t_2}}{\dfrac{X(t_2, \xi_1) - X(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}}.$$

Ricordando la (18) (nella quale a $t, \bar{t}, \xi, \bar{\xi}$ si sostituiscano rispettivamente t_1, t_2, ξ_1, ξ_2) e la (20) si ha

$$0 < \gamma_1 - G(a) \leq N \leq \gamma_2 + G(a)$$

e, tenendo presente la (13′),

$$0 < m_1 (\gamma_1 - G(a)) \leq D \leq m_2 (\gamma_2 + G(a)) . \tag{23′}$$

Dunque il determinante dei coefficienti del sistema (23) è diverso da zero per ogni coppia di punti (t_1, ξ_1), (t_2, ξ_2) del rettangolo R; risolvendo tale sistema otteniamo

$$T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & \dfrac{Y(t_2, \xi_1) - Y(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \\ x_1 - x_2 & \dfrac{X(t_2, \xi_1) - X(t_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \end{vmatrix}}{D},$$

$$\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{Y(t_1, \xi_1) - Y(t_2, \xi_1)}{t_1 - t_2} & y_1 - y_2 \\ \dfrac{X(t_1, \xi_1) - X(t_2, \xi_1)}{t_1 - t_2} & x_1 - x_2 \end{vmatrix}}{D};$$

tenuto conto della seconda delle (11) e della (13′), delle prime due equazioni del sistema (16), delle ultime due delle (1) e della (23′), segue

$$\tag{24} \begin{cases} |T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)| \leq \dfrac{1}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [m_2 |y_1 - y_2| + (k_2 + L_5 g(a_0)) |x_1 - x_2|] \\ |\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2)| \leq \dfrac{1}{m_1(\gamma_1 - G(a))} [M_4 |y_1 - y_2| + M_5 |x_1 - x_2|] \end{cases}$$

e anche

$$\tag{25} \begin{cases} |T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)| \leq \dfrac{m_2 + k_2 + L_5 g(a_0)}{m_1(\gamma_1 - G(a))} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ |\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2)| \leq \dfrac{M_4 + M_5}{m_1(\gamma_1 - G(a))} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} . \end{cases}$$

d) Definiamo nel campo C le funzioni $z(x,y)$, $p(x,y)$, $q(x,y)$ nel seguente modo

$$(26)\qquad \begin{cases} z(x,y) = Z(T(x,y), \xi(x,y)) \\ p(x,y) = P(T(x,y), \xi(x,y)) \\ q(x,y) = Q(T(x,y), \xi(x,y)). \end{cases}$$

Tali funzioni sono continue in tutto il campo C. Inoltre per ogni coppia di punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) di C, posto ancora

$$t_i = T(x_i, y_i), \quad \xi_i = \xi(x_i, y_i), \qquad (i = 1, 2)$$

e tenuto conto della terza delle (11), della terza equazione del sistema (16), delle ultime due delle (1) e delle (8), ed inoltre delle (24), si ha

$$(27)\qquad |z(x_1,y_1) - z(x_2,y_2)| \leq |Z(t_1,\xi_1) - Z(t_1,\xi_2)| + |Z(t_1,\xi_2) - Z(t_2,\xi_2)| \leq$$

$$\leq (k_3 + A_1 g(a_0)) |\xi_1 - \xi_2| + (M_4 \Omega_1 + M_5 \Omega_2) |t_1 - t_2| \leq$$

$$\leq \frac{1}{m_1(\gamma_1 - G(a))} \{[M_4(k_3 + A_1 g(a_0)) + m_2(M_4 \Omega_1 + M_5 \Omega_2)] |y_1 - y_2| +$$

$$+ [M_5(k_3 + A_1 g(a_0)) + (k_2 + L_5 g(a_0))(M_4 \Omega_1 + M_5 \Omega_2)] |x_1 - x_2|\}.$$

Analogamente, tenendo presenti le ultime due delle (11), le ultime due equazioni del sistema (16), le prime tre delle (1) e le (8), ed infine le (24), si dimostra che per ogni coppia di punti $(x_1 y_1)$, (x_2, y_2) di C è

$$(28)\qquad |p(x_1, y_1) - p(x_2, y_2)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{m_1(\gamma_1 - G(a))} \{[M_4(k_4 + A_2 g(a_0)) + m_2(M_1 + M_3 \Omega_1)] |y_1 - y_2| +$$

$$+ [M_5(k_4 + A_2 g(a_0)) + (k_2 + L_5 g(a_0))(M_1 + M_3 \Omega_1)] |x_1 - x_2|\}$$

e

$$(29)\qquad |q(x_1, y_1) - q(x_2, y_2)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{m_1(\gamma_1 - G(a))} \{[M_4(k_5 + A_3 g(a_0)) + m_2(M_2 + M_3 \Omega_2)] |y_1 - y_2| +$$

$$+ [M_5(k_5 + A_3 g(a_0)) + (k_2 + L_5 g(a_0))(M_2 + M_3 \Omega_2)] |x_1 - x_2|\}.$$

In conclusione su ogni segmento $y = y_0$ appartenente al campo C le funzioni $z(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ sono, rispetto a x, a rapporto incrementale limitato con costante di Lipschitz indipendente da y, e quindi in quasi tutti i punti di tale segmento esistono finite le derivate parziali $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial p(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$; e su ogni segmento $x = x_0$ appartenente al campo C sono, rispetto ad y, a rapporto incrementale limitato con costante di Lipschitz indipendente da x, e quindi in quasi tutti i punti di tale segmento esistono finite le derivate parziali $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial q(x, y)}{\partial y}$.

Ricordando la (12) e per la corrispondenza biunivoca tra i campi R e C, in tutto il campo C è

$$F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) = 0. \tag{30}$$

Inoltre, tenuto conto di quanto si è osservato nella nota (11), e in virtù della terza delle (7) è

$$z(x, f(x)) = Z(0, \Phi(0, x)) = \zeta(x), \qquad (\alpha \leq x \leq \beta).$$

e) Rimane ora da provare che in tutto il campo C esistono finite le derivate parziali $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ e che è

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q(x, y).$$

A tale scopo, considerati due punti qualsiasi (x_1, y_1), (x_2, y_2) del campo C e posto, come al solito,

$$t_i = T(x_i, y_i), \; \xi_i = \xi(x_i, y_i), \qquad (i = 1, 2),$$

consideriamo l'espressione

$$D_1 = Z(t_1, \xi_1) - Z(t_2, \xi_2) - P(t_2, \xi_2)[X(t_1, \xi_1) - X(t_2, \xi_2)] -$$
$$- Q(t_2, \xi_2)[Y(t_1, \xi_1) - Y(t_2 \xi_2)];$$

posto

$$H(t) = Z(t, \xi_1) - Z(t, \xi_2) - P(t, \xi_2)[X(t, \xi_1) - X(t, \xi_2)] - \tag{31}$$
$$- Q(t, \xi_2)[Y(t, \xi_1) - Y(t, \xi_2)]$$

e

$$D_2 = Z(t_1, \xi_1) - Z(t_2, \xi_1) - P(t_2, \xi_2)[X(t_1, \xi_1) - X(t_2, \xi_1)] -$$
$$- Q(t_2, \xi_2)[Y(t_1, \xi_1) - Y(t_2, \xi_1)],$$

possiamo scrivere

$$D_1 = D_2 + H(t_2).$$

Tenendo presenti le (16), le (1) e le (8), e le ultime due delle (11), si ha

$$(32)\quad |D_2| = \left| \int_{t_2}^{t_1} [F_p(X\tau, \xi_1), \ldots) P(\tau, \xi_1) + F_q(X(\tau, \xi_1), \ldots) Q(\tau, \xi_1)] \, d\tau - \right.$$

$$\left. - P(t_2, \xi_2) \int_{t_2}^{t_1} F_p(X(\tau, \xi_1), \ldots) \, d\tau - Q(t_2, \xi_2) \int_{t_2}^{t_1} F_q(X(\tau, \xi_1), \ldots) \, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_{t_2}^{t_1} [|F_p(X(\tau, \xi_1), \ldots)|| P(\tau, \xi_1) - P(t_2, \xi_2)| +$$

$$+ |F_q(X(\tau, \xi_1), \ldots)|| Q(\tau, \xi_1) - Q(t_2, \xi_2)|] \, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_2}^{t_1} \{M_4 [| P(\tau, \xi_1) - P(t_2, \xi_1)| + | P(t_2, \xi_1) - P(t_2, \xi_2)|] +$$

$$+ M_5 [| Q(\tau, \xi_1) - Q(t_2, \xi_1)| + | Q(t_2, \xi_1) - Q(t_2, \xi_2)|]\} \, d\tau \leq$$

$$\leq |t_1 - t_2| \{M_4 [|t_1 - t_2| (M_1 + M_3 \Omega_1) + |\xi_1 - \xi_2| (k_4 + A_2 g(a_0))] +$$

$$+ M_5 [|t_1 - t_2| (M_2 + M_3 \Omega_2) + |\xi_1 - \xi_2| (k_5 + A_3 g(a_0))]\}.$$

D'altra parte per tutti i t di $(0, a)$ e per ogni coppia ξ_1, ξ_2 di (α, β) dalla (31), derivando, si ottiene

$$H'(t) = F_p(X(t, \xi_1), \ldots) P(t, \xi_1) + F_q(X(t, \xi_1), \ldots) Q(t, \xi_1) -$$

$$- F_p(X(t, \xi_2), \ldots) P(t, \xi_2) - F_q(X(t, \xi_2), \ldots) Q(t, \xi_2) -$$

$$- P(t, \xi_2)[F_p(X(t, \xi_1), \ldots) - F_p(X(t, \xi_2), \ldots)] -$$

$$- Q(t, \xi_2)[F_q(X(t, \xi_1), \ldots) - F_q(X(t, \xi_2), \ldots)] +$$

$$+ [F_x(X(t, \xi_2), \ldots) + F_z(X(t, \xi_2), \ldots) P(t, \xi_2)] [X(t, \xi_1) - X(t, \xi_2)] +$$

$$+ [F_y(X(t, \xi_2), \ldots) + F_z(X(t, \xi_2), \ldots) Q(t, \xi_2)] [Y(t, \xi_1) - Y(t, \xi_2)] =$$

$$= F_p(X(t, \xi_1), \ldots) [P(t, \xi_1) - P(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_q(X(t, \xi_1), \ldots) [Q(t, \xi_1) - Q(t, \xi_2)] -$$

$$- F_p(X(t, \xi_2), \ldots) [P(t, \xi_1) - P(t, \xi_2)] -$$

$$- F_q(X(t, \xi_2), \ldots) [Q(t, \xi_1) - Q(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_p(X(t, \xi_2), \ldots) [P(t, \xi_1)) - P(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_q(X(t, \xi_2), \ldots) [Q(t, \xi_1) - Q(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_x(X(t, \xi_2), \ldots) [X(t, \xi_1) - X(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_y(X(t, \xi_2), \ldots) [Y(t, \xi_1) - Y(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_z(X(t, \xi_2), \ldots) [Z(t, \xi_1) - Z(t, \xi_2)] -$$

$$- F_z(X(t, \xi_2), \ldots) [Z(t, \xi_1) - Z(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_z(X(t, \xi_2), \ldots) P(t, \xi_2) [X(t, \xi_1) - X(t, \xi_2)] +$$

$$+ F_z(X(t, \xi_2), \ldots) Q(t, \xi_2) [Y(t, \xi_1) - Y(t, \xi_2)];$$

ricordando la (31) e posto, per ogni t di $(0, a)$,

$$(33) \quad \begin{cases} \Gamma(t) = [F_p(X(t,\xi_1), \ldots) - F_p(Xt, \xi_2), \ldots)] [P(t,\xi_1) - P(t,\xi_2)] + \\ + [F_q(X(t, \xi_1), \ldots) - F_q(X(t, \xi_2), \ldots)] [Q(t,\xi_1) - Q(t, \xi_2)], \\ \Delta(t) = F_x(X(t, \xi_2), \ldots) [X(t, \xi_1) - X(t, \xi_2)] + \\ + F_y(X(t, \xi_2), \ldots) [Y(t, \xi_1) - Y(t, \xi_2)] + \\ + F_z(X(t, \xi_2), \ldots) [Z(t, \xi_1) - Z(t, \xi_2)] + \\ + F_p(X(t, \xi_2), \ldots) [P(t, \xi_1) - P(t, \xi_2)] + \\ + F_q(X(t, \xi_2), \ldots) [Q(t, \xi_1) - Q(t, \xi_2)], \end{cases}$$

si ha

$$H'(t) = \Gamma(t) + \Delta(t) - F_z(X(t, \xi_2), \ldots) H(t).$$

Risolvendo tale equazione differenziale in $H(t)$, per ogni t di $(0, a)$ è

$$(34) \qquad H(t) = e^{-\int_0^t F_z(X(\tau, \xi_2), \ldots) d\tau} \left[\int_0^t [\Gamma(\tau) + \Delta(\tau)] e^{\int_0^\tau F_z(X(\nu, \xi_2), \ldots) d\nu} d\tau + H(0) \right].$$

Poichè la funzione $F(x, y, z, p, q)$ per ogni quintupla di numeri reali (x, y, z, p, q) di Ω_∞ è differenziabile, posto, per ogni t di $(0, a)$ e per ogni coppia ξ_1, ξ_2 di (α, β),

$$(35) \qquad \sigma = | X(t, \xi_1) - X(t, \xi_2) | + | Y(t, \xi_1) - Y(t, \xi_2) | +$$

$$+ | Z(t, \xi_1) - Z(t, \xi_2) | + | P(t, \xi_1) - P(t, \xi_2) | + | Q(t, \xi_1) - Q(t, \xi_2) |,$$

è (ricordando la seconda delle (33))

$$(36) \qquad F(X(t, \xi_1), \ldots) - F(X(t, \xi_2), \ldots) = \Delta(t) + \sigma \cdot \varepsilon(\sigma)$$

dove $\varepsilon(\sigma)$ è infinitesimo con σ e anche, in virtù della (35) e della (10), con $(\xi_1 - \xi_2)$. Dalla (36), ricordando la (12), segue

$$\Delta(t) = -\sigma \cdot \varepsilon(\sigma).$$

Allora, tenuto conto della (35) e della (10), per ogni t di $(0, a)$ e per ogni coppia di valori reali ξ_1, ξ_2 di (α, β) si ha

$$(37) \qquad | \Delta(t) | \leq (1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) e^{A a_0} | \xi_1 - \xi_2 | \cdot \varepsilon_0(\xi_1 - \xi_2),$$

dove, essendo $\varepsilon(\sigma)$ infinitesimo con $(\xi_1 - \xi_2)$, abbiamo posto

$$\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon_0(\xi_1 - \xi_2),$$

e $\varepsilon_0(\xi_1 - \xi_2)$ è infinitesimo con $(\xi_1 - \xi_2)$. D'altra parte, in virtù delle ultime due delle (2), della (10), e delle ultime due delle (11) è (ricordando la prima delle (33))

$$(38) \qquad | \Gamma(t) | \leq (1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) e^{A a_0} [L_4 (k_4 +$$

$$+ A_2 g(a_0)) + L_5 (k_5 + A_3 g(a_0))] (\xi_1 - \xi_2)^2.$$

Tenendo infine presenti la terza delle (1) e le (7), dalla (34) segue, per le (37) e (38),

$$| H(t) | \leq e^{M_3 a} \{(1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\, e^{A a_0} [(\xi_1 - \xi_2)^2 (L_4 (k_4 + A_2\, g\,(a_0)) +$$

$$+ L_5 (k_5 + A_3\, g\,(a_0))) + | \xi_1 - \xi_2 |\, \varepsilon_0 (\xi_1 - \xi_2)] \int_0^a e^{M_3 t}\, d\, t +$$

$$+ \zeta(\xi_1) - \zeta(\xi_2) - \pi(\xi_2)(\xi_1 - \xi_2) - \chi(\xi_2)(f(\xi_1) - f(\xi_2))\} \,.$$

Poichè le funzioni $\zeta(\xi)$ ed $f(\xi)$ sono differenziabili in (α, β) è

$$\zeta(\xi_1) - \zeta(\xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)\, \zeta'(\xi_2) + (\xi_1 - \xi_2)\, \varepsilon_1 (\xi_1 - \xi_2) \quad \text{e}$$

$$f(\xi_1) - f(\xi_2) = (\xi_1 - \xi_2) f'(\xi_2) + (\xi_1 - \xi_2)\, \varepsilon_2 (\xi_1 - \xi_2) \,,$$

dove $\varepsilon_1 (\xi_1 - \xi_2)$ ed $\varepsilon_2 (\xi_1 - \xi_2)$ sono infinitesimi con $(\xi_1 - \xi_2)$; inoltre, in virtù della prima delle (5), è

$$\zeta'(\xi_2) = \pi(\xi_2) + \chi(\xi_2) f'(\xi_2) \,.$$

Allora si ha, ricordando la seconda delle (3),

$$(39) \qquad | H(t) | \leq | \xi_1 - \xi_2 |\, e^{M_3 a} \{(1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\, e^{A a_0} \cdot$$

$$\cdot [| \xi_1 - \xi_2 | (L_4 (k_4 + A_2\, g\,(a_0)) + L_5 (k_5 + A_3\, g\,(a_0))) +$$

$$+ \varepsilon_0 (\xi_1 - \xi_2)] \frac{e^{M_3 a} - 1}{M_3} + \varepsilon_1 (\xi_1 - \xi_2) + \mu_2\, \varepsilon_2 (\xi_1 - \xi_2)\} \,.$$

Dunque per ogni coppia di valori reali ξ_1, ξ_2 di $(\alpha\, \beta)$, tenuto conto delle (32) e (39), è

$$(40) \qquad | Z(t_1, \xi_1) - Z(t_2, \xi_2) - P(t_2, \xi_2) [X(t_1, \xi_1) - X(t_2 . \xi_2)] -$$

$$- Q(t_2, \xi_2) [Y(t_1\, \xi_1) - Y(t_2, \xi_2)] | \leq | t_1 - t_2 | \{M_4 [| t_1 - t_2 | (M_1 + M_3\, \Omega_1) +$$

$$+ | \xi_1 - \xi_2 | (k_4 + A_2\, g\,(a_0))] + M_5 [| t_1 - t_2 | (M_2 + M_3\, \Omega_2) +$$

$$+ | \xi_1 - \xi_2 | (k_5 + A_3\, g\,(a_0))]\} + | \xi_1 - \xi_2 |\, e^{M_3 a} \{(1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\, e^{A a_0} \cdot$$

$$\cdot [| \xi_1 - \xi_2 | (L_4 (k_4 + A_2\, g\,(a_0)) + L_5 (k_5 + A_3\, g\,(a_0))) +$$

$$+ \varepsilon_0 (\xi_1 - \xi_2)] \frac{e^{M_3 a} - 1}{M_3} + \varepsilon_1 (\xi_1 - \xi_2) + \mu_2 \varepsilon_2 (\xi_1 - \xi_2) \} .$$

Dalla (40) segue quanto ci siano proposti di dimostrare all'inizio del presente capoverso.

Infatti osserviamo che per le (26) e per la corrispondenza biunivoca tra i campi R e C è

$$X(t_i, \xi_i) = x_i, \quad Y(t_i, \xi_i) = y_i, \quad Z(t_i, \xi_i) = z(x_i, y_i),$$

$$P(t_i, \xi_i) = p(x_i, y_i), \quad Q(t_i, \xi_i) = q(x_i, y_i), \qquad (i = 1, 2);$$

inoltre, in virtù delle (25), $|t_1 - t_2|$ e $|\xi_1 - \xi_2|$ sono infinitesimi con $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Pertanto dalla (40), ancora tenendo presenti le (25), segue che per ogni coppia di punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) di C si ha

$$z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2) - p(x_2, y_2)(x_1 - x_2) - q(x_2, y_2)(y_1 - y_2) =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \cdot \eta(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}),$$

dove $\eta(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})$ è infinitesimo con $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Dunque poichè $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ sono due punti qualsiasi di C, in tutto il campo C la funzione $z(x, y)$ ha derivate parziali $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ finite ed è

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \qquad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q(x, y);$$

tali derivate sono quindi continue in tutto C. Infine, ricordando la (30), si può concludere che la funzione $z(x, y)$ soddisfa l'equazione (I) in tutto C.

2. Osservazione. Il campo C in cui è assicurata l'esistenza della funzione $z(x, y)$ soluzione della (I) è, come si è visto, limitato dalle curve

$$\begin{cases} x = X(t, \alpha) \\ y = Y(t, \alpha) \end{cases} (0 \leq t \leq a), \quad \begin{cases} x = X(t, \beta) \\ y = Y(t, \beta) \end{cases} (0 \leq t \leq a), \; y = f(x), \; (\alpha \leq x \leq \beta),$$

$$y = Y(a, \Phi(a, x)), \; (A(a) \leq x \leq B(a)) \; (\text{con } A(a) = X(a, \alpha), \; B(a) = X(a, \beta)),$$

che le (22) fanno corrispondere, nel piano (x, y), rispettivamente ai segmenti

$$\xi = \alpha, \; (0 \leq t \leq a), \quad \xi = \beta, \; (0 \leq t \leq a), \quad t = 0, \; (\alpha \leq \xi \leq \beta), \quad t = a, \; (\alpha \leq \xi \leq \beta)$$

del piano (t, ξ); le (22) stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra il campo C del piano (x, y) e il rettangolo

$$R: \qquad 0 \leq t \leq a, \quad \alpha \leq \xi \leq \beta$$

del piano (t, ξ).

3. COMPLEMENTO. Se nel teorema del n. 1 si considerano le funzioni (9) definite nel rettangolo

$$R_0^*: \qquad - a_0 \leq t \leq 0, \quad \alpha \leq \xi \leq \beta,$$

si può dimostrare l'esistenza di una soluzione $z(x, y)$ della (I) soddisfacente le condizioni 1^0) - 4^0) del teorema indicato, in un campo C^* del piano (x, y) limitato dalle curve

$$\begin{cases} x = X(t, \alpha) \\ y = Y(t, \alpha) \end{cases} (- a \leq t \leq 0), \quad \begin{cases} y = X(t, \beta) \\ y = Y(t, \beta) \end{cases} (- a \leq t \leq 0), \; y = f(x), \; (\alpha \leq x \leq \beta),$$

$$y = Y(- a, \Phi(- a, x)), \; (A(- a) \leq x \leq B(- a)),$$

dove si è posto, per ogni t di $(- a_0, 0)$, $X(t, \alpha) = A(t)$, $X(t, \beta) = B(t)$.