ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PHAM TAN HOANG

La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en théorie du champ unifié

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 4 (1958), p. 425-477

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_425_0>

LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET EN THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ

par PHAM TAN HOANG (Paris)

INTRODUCTION

Ce travail concerne principalement la détermination des équations du mouvement par la méthode des singularités. Il est consacré d'une part à l'exposé de cette méthode, d'autre part à son application à la relativé générale et à son extension à la théorie du champ unifié. En liaison avec le problème du mouvement, nous essayons de préciser les grandeurs que l'on peut considérer comme métrique et comme champ dans la théorie du champ unifié. Nous étudions aussi les conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie que l'on extrait des équations du champ.

La propriété importante de l'interdépendance entre équations de champ et équations de mouvement en relativité générale a été montrée par EINSTEIN et GROMMER en 1927. Ces auteurs établirent que le principe des géodésiques est une conséquence des équations du champ. Plus tard, le problème du mouvement pour des masses finies a été résolu par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN (1938) et indépendamment par FOCK (1939). On conçoit que le champ extérieur et le champ intérieur soient tous les deux capables de nous renseigner sur l'état de mouvement des masses, puisque la présence des masses modifie la structure de l'univers à l'intérieur des tubes d'univers comme à l'extérieur. En fait les deux points de vue ont été considérés : EINSTEIN [25] et ses collaborateurs utilisent les équations du cas extérieur, la matière étant représentée par les singularités ponctuelles du champ extérieur ; la méthode de FOCK [15] au contraire est basée sur les équations du cas intérieur avec la représentation explicite de la matière par un tenseur d'impulsion-énergie. Cependant, si les deux méthodes présentent certainement des relations, elles ne peuvent probablement pas se ramener tout à fait l'une à l'autre. Car le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur existe et il est unique; mais cela n'est pas vrai pour le problème inverse: un ds^2 extérieur étant donné, il peut ne correspondre à aucune distribution énergétique, ou au contraire à une infinité. On peut dire que la méthode du tenseur d'énergie, la plus directe, est aussi la plus claire.

A) Le développement de la méthode du tenseur d'énergie a été amorcé par les travaux de G. DARMOIS et de Th. de DONDER. Le calcul des solutions nécessite des approximations qui ont été effectuées notamment dans les travaux de V. A. FOCK [15], de PETROVA [21], d'A. PAPAPETROU [20] et de Mme F. HENNEQUIN [17].

Tous ces auteurs utilisent des coordonnées isothermes qui apportent une indispensable simplification dans les équations approchées. Ils prennent comme paramètre de développement $1/c^2$ (c, vitesse de la lumière) et obtiennent des développements limités des solutions. FOCK et PETROVA forment alors les équations de mouvement en écrivant que les conditions d'isothermie sont vérifiées pour la solution approchée trouvée. PAPAPETROU les tire des identités de conservation. On constate que les résultats sont équivalents à l'approximation obtenue, sans préciser les raisons profondes de cette équivalence. Mme HENNEQUIN a montré que la vérification des identités de conservation à l'ordre p entraîne automatiquement la validité des conditions d'isothermie à cette même approximation. En raison des identités de conservation il existe donc une équivalence entre les conditions d'isothermie et les équations de mouvement pour une solution approchée d'ordre donné.

La méthode du tenseur d'énergie a été appliquée récemment per L. INFELD [18] à un modèle d'univers (qu'on peut considérer comme un cas limite) dans lequel les domaines intérieurs se réduisent à des lignes d'univers, le long de chacune d'elles le tenseur $T_{\alpha\beta}$ ayant une valeur proportion. nelle à la distribution de DIRAC. L. INFELD pense que sa méthode permet de faire la jonction entre les deux points de vue du champ intérieur et du champ extérieur. En tout cas, les calculs des équations de mouvement sont grandement simplifiés.

B) Les théories précédentes exigent l'introduction du tenseur d'énergie. Pourtant EINSTEIN n'a admis la présence de ce tenseur qu'avec réticence: Il a toujours pensé que le développement le plus souhaitable de la relativité générale devrait éliminer des équations du champ le tenseur $T_{\alpha\beta}$ relatif aux sources, tenseur dont l'origine phénoménologique lui semble inconciliable avec le principe d'une théorie du champ pur.

EINSTEIN [25] et ses collaborateurs ont donc cherché à déduire les équations de mouvement d'une particule matérielle neutre des équations du champ

$$G_{\alpha\beta} = 0\,,$$

valables en dehors des singularités ou, plus exactement, en dehors de surfaces entourant les singularités, qui sont ponctuelles par hypothèse. Ils prennent pour paramètre de développement λ^2 (qui n'est autre que $1/c^2$) et font les approximations dans le cas quasi-statique.

Ces auteurs montrent que dans la détermination des champs par approximation, l'intégrabilité des équations du champ n'est assurée que sous certaines conditions, à partir desquelles les équations de mouvement peuvent précisément s'obtenir. Ces conditions consistent dans l'annulation, d'après les équations du champ, de certaines intégrales. Celles-ci portent sur une combinaison assez arbitraire du tenseur de RICCI; elles sont étendues à une surface fermée à deux dimensions entourant une singularité.

Cette méthode est souvent appelée « méthode des singularités ». En réalité, il s'agit du cas limite de modèle d'univers dont nous avons parlé tout à l'heure.

L. INFELD et P. R. WALLACE [29] ont étudié par la même méthode le cas matière chargée en ajoutant au second membre un tenseur électromagnétique de type classique, la matière restant représentée par des singularités du champ.

Enfin la méthode des singularités a été appliquée, sans justification, à la théorie unitaire par L. INFELD [35] et J. CALLAWAY [34]. Ces auteurs arrivent au résultat négatif que le mouvement des particules chargées n'est pas influencé par le champ électromagnétique.

* * *

En nous inspirant des travaux d'EINSTEIN et ses collaborateurs, nous exposerons une méthode générale, basée sur les équations du cas extérieur, pour la détermination des équations de mouvement. Pour plus de généralité et pour l'extension éventuelle de la méthode à la théorie pentadimensionnelle du champ unifié, nous considérons une variété différentiable à n dimensions V_n, de classe (C^2, C^4 par morceaux), sur laquelle est définie une métrique riemannienne partout de type hyperbolique normal. La structure géométrique de cette variété est supposée déterminée par des équations analogues aux équations d'EINSTEIN de la relativité générale.

Notre point de départ est alors le suivant: Nous considérons le tenseur conservatif $S_{\alpha\beta}$ et les équations du cas extérieur:

$$S_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha\,, \beta = 0\,, 1\,, \ldots\,, n-1).$$

Sur une section W_{n-1} déterminée (section $x^0 = \text{const.}$ de V_n, x^0 désignant la variable temporelle), le tenseur $S_{\alpha\beta}$ induit un vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ de composantes $S_{(\alpha)i}(i = 1, \ldots, n-1)$, l'indice α ayant une valeur fixée quelconque.

Nous supposons que les domaines intérieurs de V_n sont représentés dans W_{n-1} par des domaines à $(n-1)$ dinensions connexes et bornés. Nous prenons un domaine singulier déterminé de W_{n-1}; nous considérons des (n — 1)-champs d'intégration quelconques de W_{n-1} qui contiennent ce domaine singulier et nous étudions le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ à travers la frontière d'un tel $(n-1)$-champ.

L'approximation des équations du champ permet d'obtenir les équations de mouvement. Il faut admettre des développements limités du tenseur métrique. A l'aide des identités de conservation du tenseur $S_{\alpha\beta}$ et de l'hypothèse quasi-statique, nous montrons que le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ possède les deux propriétés suivantes, qui semblent essentielles dans la méthode. Le flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ d'ordre m:

— a une valeur indèpendante du choix du $(n-1)$-champ d'intégration;

— ne dépend que des champs d'ordre $(m-1)$.

Grâce à ces deux propriétés, les équations suivantes:

$$\text{flux } \vec{S}_{(\alpha)} = 0 \,, \tag{i}$$

au lieu d'être de simples conséquences des équations du champ, imposent réellement des conditions à la solution approchée obtenue. De là vient la possibilité de déduire les équations du mouvenent des équations (i).

La méthode précédente s'étend de façon immédiate à la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. A la place du tenseur $S_{\alpha\beta}$, il suffit de considérer maintenant le tenseur M^{λ}_{ϱ} qui entre dans la formation des identités de conservation en théorie du champ unifié. L'étude d'une intégrale portant sur une forme differentielle extérieure définie à partir du tenseur M^{λ}_{ϱ}, montre que cette intégrale possède aussi les deux propriétés fondamentales du flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$. On en déduit que les équations qui expriment la nullité de cette intégrale peuvent servir d'équations de définition du mouvement dans la théorie du champ unifié.

Le sommaire de ce travail est donc le suivant.

Le chapitre I rappelle les notions fondamentales de relativité générale et précise les notations utilisées.

Au chapitre II, nous étudions la déduction des équations de mouvement à partir des équations du cas extérieur. Après avoir exposé la méthode dans le cas d'une variété à n dimensions, nous l'appliquons à la relativité générale. Les coordonnées isothermes sont employées en raison de leur signification physique importante. Les calculs sont effectués dans le cas simple du problème de N corps (singularités du champ ponctuelles et à symétrie sphérique). On peut alors prendre comme solution de l'équation de LAPLACE la solution élémentaire $1/r$. A la seconde approximation, nous obtenons le même résultat que celui d'EINSTEIN et de ses collaborateurs.

Les chapitres suivants sont consacrés à la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. Nous commençons par rappeler quelques notions sur les variétés à connexion affine, et la déduction des équations du champ par le principe variationnel. Puis nous faisons quelques considérations au sujet du tenseur métrique et d'un tenseur rotationnel lié à $g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$. Le problème de CAUCHY conduit à penser que le tenseur métrique est défini par $g^{\underline{\alpha\beta}}$ à un invariant près $\frac{1}{\mathcal{J}}$. Nous montrons comment les conditions d'isothermie permettent de préciser la valeur de cet invariant $\left(\frac{1}{\mathcal{J}}=\sqrt{h/g}\,,\ \frac{1}{h}=\text{dét}(g^{\underline{\alpha\beta}})\right)$. Dans la métrique ainsi déterminée, le tenseur $q^{\alpha\beta}=\frac{1}{\mathcal{J}}\,g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$ a une signification simple : il est l'adjoint d'un tenseur rotationnel. Ces rappels et ces développements font l'objet du chapitre III.

L'extension de la méthode des singularités à la théorie du champ unifié est effectuée dans le chapitre IV. Le principe de la méthode est exposé, et le rôle de la partie antisymétrique $R_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$ se trouve éclairci. On constate que la théorie du champ unifié ne donne que les équations de mouvement des particules non chargées. Toutefois il convient de noter que cette conclusion négative n'est pas rigoureuse, car elle dépend en partie des approximations quasi-statiques habituellement considérées. Ce chapitre contient en outre une étude du potentiel électromagnétique dans l'hypothèse quasi-statique. Cette étude fournit directement une solution des équations des champs anti-symétriques. Elle nous permet aussi de montrer que l'interprétation du tenseur $\overset{*}{q}_{\alpha\beta}$ comme tenseur champ électromagnétique est impossible au delà de la première approximation.

Le problème du tenseur d'énergie est esquissé au chapitre IV qui termine notre travail. Dans ce domaine il semble que rien de valable n'ait encore été fait. Nous montrons comment les identités de conservation pour le tenseur d'énergie extrait des équations du champ suggère justement la métrique à laquelle le problème de Cauchy et les conditions d'isothermie nous ont déjà conduit. Nous formons ensuite, par la méthode de Mme M. A. TONNELAT, les équations approchées de la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER, et nous en déduisons une forme explicite du tenseur d'énergie.

NOTATIONS ET SYMBOLES.

V_4 : variété espace-temps.
(x^α) : système de coordonnées locales.
∂_α , $\partial_{\alpha\beta}$: dérivées partielles.
d : symbole de différentiation extérieure.
δ^α_β : symbole de KRONECKER.

Convention d'EINSTEIN: Toutes les fois que dans un monôme figure deux fois le même indice, une fois en indice supérieur, une fois en indice inférieur, on doit, sauf avis contraire, sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.

Leu indices grecs α , β , etc ... prennent les valeurs $0, 1, 2, 3$; les indices latins i, j, etc ... prennent les valeurs $1, 2, 3$.

VARIÉTÉ A CONNEXION AFFINE.

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$: connexion affine quelconque.
Γ_α : vecteur de torsion de la connexion affine.
D_α : opérateur de dérivation covariante dans la connexion affine.
$R_{\lambda\mu}$ est le tenseur de RICCI de la connexion affine Γ, déduit du tenseur de courbure :

$$R^\alpha_{\lambda,\mu\beta} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\lambda\beta} ,$$

par contraction des indices α , β :

$$R_{\lambda\mu} \doteq \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} .$$

$g_{\alpha\beta}$: tenseur fondamental défini sur la variété à connexion affine.
$g_{\alpha\beta} = g_{\underline{\alpha\beta}} + g_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$: le « $\_\_$ » est le symbole de symétrisation, le « $\smile$ » celui d'antisymétrisation.

Les lettres gothiques représentent des densités tensorielles. Exemple:

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}, \qquad \mathfrak{M}^\lambda_\varrho = \sqrt{|g|}\, M^\lambda_\varrho .$$

VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

Forme quadratique fondamentale:

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

$a_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental ou tenseur de gravitation.
$\delta_{\alpha\beta}$: valeurs galiléennes.
$\eta_{\alpha\beta}$: écarts du tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ aux valeurs galiléennes.
$[\alpha\,\beta\,,\gamma]$: symbole de CHRISTOFFEL de première espèce

$$[\alpha\beta\,,\gamma] = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\, a_{\beta\gamma} + \partial_\beta\, a_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma\, a_{\alpha\beta}).$$

$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = a^{\gamma\delta}[\alpha\beta\,,\delta]$: symbole de CHRISTOFFEL de seconde espèce.
Les coefficients de la connexion riemannienne sont égaux aux symboles de CHRISTOFFEL de seconde espèce.
∇_α: opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne.

Le tenseur de courbure et le tenseur de RICCI de la connexion riemannienne sont désignés respectivement par $G^\alpha_{\lambda\mu\beta}$ et par $G_{\lambda\mu}$.

$$G_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\} - \partial_\mu \left\{ {\alpha \atop \lambda\alpha} \right\} + \left\{ {\alpha \atop \sigma\alpha} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\mu} \right\} - \left\{ {\alpha \atop \sigma\mu} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\alpha} \right\}.$$

Par contraction de $G_{\lambda\mu}$ on obtient l'invariant G:

$$G = a^{\alpha\beta}\, G_{\alpha\beta}\,.$$

$S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G a_{\alpha\beta}$: tenseur d'EINSTEIN.

CHAPITRE I.

NOTIONS SUR L'AXIOMATIQUE DE LA RELATIVITE GÉNÉRALE

1. — La variété espace-temps.

La relativité générale est d'abord une théorie de la gravitation à laquelle viennent s'ajouter les théories de l'électromagnétisme. Dans toute théorie relativiste de la gravitation, l'élément primitif est constitué par une variété espace-temps V_4 à quatre dimensions, douée d'une structure de variété différentiable.

Nous prenons pour variété espace-temps V_4 une variété à quatre dimensions douée d'une structure de variété différentiable de classe C^2, et satisfaisant en outre à l'hypothèse suivante qui complète $A2.$: dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées locales, les dérivées secondes du changement de coordonnées sont des fonctions de classe C^2 par morceaux. C'est ce que nous traduirons en disant que la variété V_4 est une variété différentiable de classe (C^2, C^4 par morceaux). (Cf. A. LICHNEROWICZ [9], p. 3-5).

Sur la variété V_4 nous supposons définie une métrique riemannienne ds^2 partout de type hyperbolique normal par la donnée d'un champ de tenseurs covariants symétriques à deux indices $a_{\alpha\beta}$, appelé tenseur de gravitation. L'expression locale de cette métrique est :

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}(x^\lambda)\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \lambda = 0, 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

les coefficients $a_{\alpha\beta}(x^\lambda)$ sont dits les potentiels de gravitation pour le système de coordonnées envisagées. Nous supposons que les $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de classe C^1, et les $\partial_\gamma a_{\alpha\beta}$ des fonctions de classe C^2 par morceaux, ce qui est strictement compatible avec la structure imposée à V_4.

L'hypothèse faite sur le type de la métrique revient à dire qu'en chaque point x de V_4, le ds^2 peut se mettre sous la forme :

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 \tag{1.2}$$

où les ω^α sont un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes.

2. — Orientations dans l'espace et dans le temps.

L'équations $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 un cône réal C_x de directions tangentes à V_4. Ce cône sera dit le cône élémentaire en x.

a) Une direction $\vec{dx}$, tangente en x à V_4, sera dite orientée dans le temps ou dans l'espace selon qu'elle est intérieure ou extérieure au cône C_x, c'est-à-dire selon que le signe de $a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ est positif ou négatif.

b) Un k plan élémentaire ($k = 2$ ou 3), tangent en x à V_4 est dit orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps s'il admet des directions orientées dans le temps.

Une hypersurface S à trois dimensions de V_4 est dite orientée dans l'espace si ses éléments plans tangents aux différents points sont orientés dans l'espace. Si S est localement définie par l'équation :

$$f(x^\alpha) = 0\,,$$

on a alors en tout point de S:

$$\Delta_1 f = a^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f > 0\,.$$

Si $\Delta_1 f < 0$, l'hypersurface S sera orientée dans le temps.

3. — Temps et espace associé. Systèmes de coordonnées physiquement admissibles.

Sur l'espace vectoriel T_x, tangent en x à V_4, la métrique ds^2 introduite définit une structure d'espace-temps de Minkowski c'est-à-dire une structure d'espace-temps de la relativité restreinte.

A toute décomposition en carrés de la métrique :

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - \sum_i (\omega^i)^2 \qquad\qquad i = 1\,, 2\,, 3$$

correspondent une base (ω^0, ω^i) pour les formes linéaires en x et un repère $(x\,, \vec{e}_0\,, \vec{e}_i)$ de T_x, avec :

$$\vec{dx} = \omega^\alpha\, \vec{e}_\alpha\,.$$

Le repère $(x\,, \vec{e}_0\,, \vec{e}_i)$ satisfait aux relations :

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta\,, \qquad (\vec{e}_0)^2 = +1\,, \qquad (\vec{e}_i)^2 = -1\,.$$

Un tel repère sera dit un repère orthonormé en x; le vecteur $\vec{e_0}$ et le 3-plan des $\vec{e_i}$ définissent un temps et un espace associés.

L'interprétation des grandeurs en x se déduit de la considération de l'espace-temps de MINKOWSKI tangent en x. Rapporté à un repère orthonormé, cet espace doit être identifié à un espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un repère galiléen, ce qui fournit immédiatement, en termes d'espace et de temps associés à ce repère, les interprétations physiques.

Un système de coordonnées sera dit physiquement admissible ou interprétable dans l'espace et le temps si :

1) les hypersurfaces à trois dimensions $x^0 =$ const. sont orientées dans l'espace (ce qui entraine $a^{00} > 0$);

2) les lignes déterminées par les seules variations de x_0 sont orientées dans le temps (ce qui entraine $a_{00} > 0$).

Dans un tel système de coordonnées nous dirons que x^0 est une variable temporelle, x^1, x^2, x^3 désignant les variables spatiales correspondantes. Les variétés $x^0 =$ const. sont appelées sections d'espace. Nous les désignerons par W_3.

Considérons la décomposition en carrés du ds^2, et faisons apparaitre le carré correspondant à la variable x^0. On a :

$$ds^2 = \frac{(a_{00}\, dx^0 + a_{0i}\, dx^i)^2}{a_{00}} + \left(a_{ij} - \frac{a_{0i}\, a_{0j}}{a_{00}}\right) dx^i\, dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Il résulte de la condition $a_{00} > 0$ que les deux formes quadratiques associés de coefficients :

$$a^*_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{0i}\, a_{0j}}{a_{00}}, \qquad a^{*ij} = a^{ij}$$

sont définies négatives.

Les sections d'espace W_3 peuvent être envisagées comme des variétés différentiables satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4 et formant un système homéomorphe aux R^3 d'un R^4. La métrique ds^{*2} est intrinsèquement définie sur W_3 et nous pouvons choisir cette métrique dans les sections W_3.

4. — Le système des équations d'EINSTEIN.

Le cadre géométrique étant précisé, l'objet de la théorie relativiste de la gravitation consiste à choisir un système tensoriel d'équations aux dérivées partielles. Celui-ci permet de limiter la généralité du tenseur fondamental de gravitation $a_{\alpha\beta}$ et de relier ce tenseur aux distributions énergétiques de l'espace-temps. Ces équations doivent généraliser l'équation de LAPLACE-POISSON qui détermine localement le potentiel newtonien.

EINSTEIN a proposé le système d'équations:

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

dans lequel $S_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ sont deux tenseurs symétriques. χ désigne un facteur constant lié à la constante d'attraction universelle.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ dont l'interprétation est purement physique doit décrire au mieux, en chaque point de l'espace-temps V_4, l'état de la distribution énergétique (cas intérieur). Dans les régions de V_4 non balayées par l'énergie $T_{\alpha\beta}$ doit être identiquement nul (cas extérieur). Ce tenseur sera appelé tenseur d'impulsion-énergie ou, plus brièvement, tenseur d'énergie.

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ de signification purement géométrique est astreint aux deux conditions suivantes:

1. ses composantes ne dépendent que des potentiels et de leurs dérivées des deux premiers ordres; elles sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre;

2. il est conservatif, c'est-à-dire satisfait identiquement aux quatre relations suivantes appelées conditions de conservation:

$$\nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0\,. \tag{4.2}$$

Les seules équations satisfaisant à ces conditions correspondent, à la constante cosmologique près, à

$$S_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, G\, a_{\alpha\beta}$$

où $G_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la variété riemannienne:

$$G_{\alpha\beta} = \partial_\varrho \left\{ {\varrho \atop \alpha\,\beta} \right\} - \partial_\beta \left\{ {\varrho \atop \alpha\,\varrho} \right\} + \left\{ {\varrho \atop \sigma\,\varrho} \right\}\left\{ {\sigma \atop \alpha\,\beta} \right\} - \left\{ {\varrho \atop \sigma\,\beta} \right\}\left\{ {\sigma \atop \alpha\,\varrho} \right\} \tag{4.3}$$

G, l'invariant $a^{\alpha\beta}\, G_{\alpha\beta}$.

Dans le cas extérieur les équations s'écrivent:

$$S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, G\, a_{\alpha\beta} = 0 \qquad ou \qquad G_{\alpha\beta} = 0\,.$$

5. — Le tenseur d'impulsion-énergie et les identités de conservation.

La représentation de la matière peut s'effectuer en relativité générale par des schémas du type hydrodynamique. Un fluide relativiste est alors considéré comme un milieu matériel continu, déformable, doué des propriétés suivantes :

1. il possède une densité propre ϱ ;
2. il est possible de définir un vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ pour chaque point du milieu.

Considérons dans la variété espace-temps V_4 un domaine D occupé par un milieu fluide. Les trajectoires du vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, orientées dans le temps, sont appelées lignes de courant. On appelle repère propre en un point x du domaine D, un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$, orientés dans l'espace, sont normés par la condition $(\vec{V}^{(i)})^2 = -1$. Le repère propre ainsi défini doit être identifié à un repère galiléen local.

Le tenseur d'impulsion-énergie est destiné à assurer une représentation aussi complète que possible d'une distribution énergétique déterminée. Ce tenseur contiendra ainsi différents termes correspondant au différentes sortes d'énergie de la distribution et à leur interaction. La description de ces différents termes, leur importance relative, sont fournies par l'expérience.

Ainsi, le terme le plus important lorsqu'il existe, correspond toujours à l'énergie pondérable. Si l'on néglige toutes les autres formes d'énergie, on aura alors le schéma matière pure avec :

$$T_{\alpha\beta} = \varrho\, u_\alpha\, u_\beta \,. \tag{5.1}$$

On peut aussi considérer un état de la matière dont la description peut être faite à l'aide des grandeurs $\vec{u}, \varrho, p$, les deux grandeurs scalaires étant supposées liées par une relation fonctionnelle dite équation d'état $\varrho = \varphi(p)$: c'est le schéma fluide parfait. Dans ce cas :

$$T_{\alpha\beta} = \left(\varrho + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha\, u_\beta - \frac{p}{c^2}\, a_{\alpha\beta} \,. \tag{5.2}$$

S'il y a un champ électromagnétique, on introduit un tenseur d'énergie supplémentaire :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{4}\, a_{\alpha\beta}\, F_{\lambda\mu}\, F^{\lambda\mu} - F_\alpha{}^\lambda F_{\beta\lambda}\right) \tag{5.3}$$

où $F_{\alpha\beta}$ réprésente le tenseur champ électromagnétique défini sur l'espace tangent par induction du tenseur champ électromagnétique de la relativité restreinte.

Soit $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'énergie du schéma matériel considéré. Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, il en est de même du tenseur $T_{\alpha\beta}$ qui est astreint, d'après les équations d'EINSTEIN, à n'en différer que par un facteur constant:

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0 \,. \tag{5.4}$$

On déduit de (5.4) un certain nombre de propriétés de « conservation » pour les éléments physiques qui figurent dans l'expression du tenseur d'énergie considéré. Par exemple, dans le cas du schéma matière pure, les équations de conservation s'écrivent:

$$\nabla_\alpha (\varrho\, u^\alpha) = 0 \,, \tag{5.5}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0 \,. \tag{5.6}$$

La première équation est l'équation de continuité du milieu. Le système (5.6) exprime que les lignes de courant sont géodésiques de la métrique ds^2.

Dans le cas du schéma matière pure-champ électromagnétique les lignes de courant satisfont au système différentiel:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\mu}{\varrho} F_{\beta\alpha} u^\alpha$$

où μ est la densité de charge électrique propre. L'introduction du tenseur d'énergie électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ au second membre des équations d'EINSTEIN constitue une théorie « naïve » de l'électromagnétisme.

6. — Le problème de Cauchy.

Le système des équations d'EINSTEIN est un système en involution et présente le caractère hyperbolique normal. La structure locale des équations du champ peut être faite au mayen d'une analyse du problème de Cauchy. Ce problème traduit le « déterminisme relativiste », et le fait que la gravitation satisfait au schéma de la propagation par ondes résulte immédiatement de son étude [1].

---

[1] Le problème de Cauchy a été étudié par G. DARMOIS, Th. de DONDER, A. LICHNEROWICZ; l'unicité dans le cas non analytique a été montrée par STELLMACHER, l'existence et l'unicité par Mme Y. FOURES.

Considérons d'abord le problème de Cauchy relatif au système d'équations d'EINSTEIN du cas extérieur, et à des données initiales (potentiels et dérivées premières) portées par une hypersurface S quelconque. Si S n'est, en aucun de ses points, tangente à une variété caractéristique et si les données de Cauchy satisfont à quatre conditions supplémentaires provenant des équations du champ, le problème de Cauchy admet relativement au système $G_{\alpha\beta} = 0$ une solution physiquement unique.

Les variétés caractéristiques du système des équations d'EINSTEIN sont les variétés tangentes en chacun de leurs points au cône élémentaire C_x associé a ce point, qui est cône caractéristique pour ces équations. Elles jouent le rôle de surface d'ondes gravitationnelles. Les bicaractéristiques des équations d'EINSTEIN, géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne V_4, son les rayons gravitationnels correspondants.

Le problème de Cauchy pour un schéma champ électromagnétique pur montre que les variétés caractéristiques que prévoient les équations d'EINSTEIN sont identiques à celles que définissent les équations de MAXWELL. Ainsi peut être démontrée en toute rigueur l'identité des ondes gravitationnelles et des ondes électromagnétiques et par suite l'identité des lois de propagation des deux champs, tout au moins en l'absence d'induction.

Appliqué à l-étude du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur (ou inversement) le problème de Cauchy permet de mettre en évidence les conditions de raccordement de SCHWARZCHILD relatives à la continuité des potentiels et de leurs dérivées premières. Si l'on considère une masse d'épreuve dans un champ de gravitation extérieur donné, la nécessité d'un raccordement entre champ intérieur et champ extérieur fait que la masse d'épreuve doit décrire une géodésique du ds^2 extérieur.

7. — Les coordonnées isothermes.

Au système des équations d'EINSTEIN on peut associer une équation à une seule fonction inconnue f qui admet les mêmes variétés caractéristiques que ce système. La manière la plus simple d'y parvenir est de considérer l'équation de LAPLACE dans V_4:

$$\Delta_2 f \equiv a^{\alpha\beta} \left(\partial_{\alpha\beta} f - \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\,\beta \end{Bmatrix} \partial_\varrho f\right) = 0 . \tag{7.1}$$

L'équation (7.1) admet les mêmes caractéristiques et bicaractéristiques que le système des équations d'EINSTEIN. Le premier membre $\Delta_2 f = \nabla_\alpha (a^{\alpha\beta}\, \partial_\beta f)$ est la divergence du gradient de f et généralise ainsi le second paramètre différentiel de BELTRAMI. Les variétés à trois dimensions, solutions de l'équation (7.1), généralisent les variétés isothermes de l'espace ordinaire, ou les hypersurfaces équipotentielles de la propagation des ondes. Elles jouent dans la théorie un rôle important.

Un système (x^α) de coordonnées locales dans V_4 est dit isotherme si les expressions

$$\Delta_2 x^\alpha = - a^{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \lambda\,\mu \end{Bmatrix} \tag{7.2}$$

sont nulles pour tout α.

L'espace-temps étant rapporté aux coordonnées $(x^{\beta'})$, désignons par $f(x^{\beta'})$ une solution de l'équation (7.1). Si nous effectuons le changement de variables

$$x^\varrho = f(x^{\beta'})$$

ϱ ayant une valeur déterminée d'ailleurs quelconque, la nouvelle coordonnée x^ϱ est une coordonnée isotherme.

Quatre solutions indépendantes $f^\alpha(x^{\beta'})$ de l'équation (7.1) dont l'une est orientée dans le temps et les trois autres dans l'espace, constitueront un système de coordonnées physiquement admissibles isothermes.

Prenons pour $f^\alpha(x^{\beta'})$ la solution du problème de Cauchy suivant:

$$f^\alpha(x^{\beta'}) = 0 \text{ et } \partial_{\alpha'} f^\alpha(x^{\beta'}) = 1 \text{ sur la surface initiale } x^{\alpha'} = 0 \tag{7.3}$$

($\alpha = 0, 1, 2, 3$; $\alpha' = \alpha$ numériquement).

D'après un théorème de Y. FOURES [36], il existe un voisinage de l'origine dans lequel la solution existe et est unique pourvu que les potentiels soient suffisamment différentiables. On voit donc qu'il existe un voisinage de l'origine dans lequel on peut définir des coordonnées isothermes.

Les quantités $\Delta_2 x^\alpha$ sont étroitement liées à la propagation du champ. Aussi, elles interviennent d'une manière simple dans les composantes du tenseur de RICCI. Les équations d'EINSTEIN peuvent ainsi, dans le cas général, se mettre sous la forme:

$$G_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{2} a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} a_{\lambda\alpha} \partial_\mu (\Delta_2 x^\alpha) - \frac{1}{2} a_{\mu\alpha} \partial_\lambda (\Delta_2 x^\alpha) + H_{\lambda\mu} = 0, \tag{7.4}$$

les $H_{\lambda\mu}$ désignant des polynômes par rapport aux $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ et à leurs dérivées premières. Si les coordonnées sont isothermes (7.4) devient:

$$G_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{2} a^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu} = 0 \tag{7.5}$$

et la séparation des potentiels, en ce qui concerne les dérivées secondes, est complète. C'est en mettant les équations d'EINSTEIN sous une forme équivalente qu'est appuru primitivement le caractère de propagation du champ, particulier à la théorie de la relativité.

Le groupe des équations (7.5) permet d'étudier les discontinuités possibles pour les dérivées secondes. Supposons que la surface de discontinuité ait pour équation:

$$f(x^\alpha) = 0 .$$

On sait que si les dérivées premières sont continues, le saut brusque de la dérivée seconde $\partial_{\alpha\beta}\, a_{\lambda\mu}$ est proportionnel à $\partial_\alpha f\, \partial_\beta f$. Par conséquent si les potentiels n'ont pas toutes leurs dérivées secondes continues, l'une au moins des équations (7.5) aura pour conséquence:

$$\Delta_1 f = a^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0$$

tout le long de la surface $f = 0$.

Donc la discontinuité ne peut avoir lieu que suivant une variété caractéristique (²). L'introduction des surfaces d'ondes et des rayons gravifiques se fait ainsi de la manière la plus satisfaisante. En outre les coordonnées isothermes éliminent automatiquement les discontinuités qui n'ont pas de signification intrinsèque.

La signification des coordonnées isothermes, les simplifications qu'elles apportent paraissent en imposer l'emploi dans beaucoup de questions physiques.

8. — Modèles d'univers et Problèmes globaux.

Les résultats obtenus dans l'étude du problème de Cauchy et les travaux de A. LICHNEROWICZ permettent de dégager la notion de « modèle d'univers ».

Un modèle d'univers est une variété V_4 (de type et de différentiabilité définis au paragraphe 1) munie d'une métrique partout régulière satisfaisant aux conditions:

a) Dans les domaines de V_4 balayés par une distribution énergétique et limités par des hypersurfaces frontières S, la métrique est régulière et saisfait aux équations d'EINSTEIN du cas intérieur.

(²) G. DARMOIS [4].

b) Dans les domaines de V_4 qui ne sont balayés par aucune distribution énergétique, la métrique est régulière et satisfait aux équations d'EISTEIN du cas extérieur.

c) A la traversée d'une hypersurface S, les potentiels et leurs dérivées premières sont continus conformément aux conditions de raccordement.

Quand il est possible de construire un tel modèle d'univers le champ extérieur peut être considéré comme effectivement produit par les différentes masses ou distributions énergétiques en mouvement et c'est le raccordement des champs intérieurs des différentes distributions avec un même champ qui assure l'interdépendance des mouvements.

Dans un tel modèle d'univers, il doit être impossible d'introduire de nouvelles distributions énergétiques dont les métriques associées se raccordent avec le champ extérieur. On doit donc étudier en relativité générale la validité de deux propositions suivantes dont la seconde est étroitement liée à la première:

L'introduction de distributions énergétiques dans un champ extérieur donné ne peut s'effectuer que dans des domaines où ce champ n'est pas régulier (Proposition A).

Tout ds^2 extérieur satisfaisant aux axiomes de la relativité générale et partout régulier doit être localement euclidien (Proposition B).

Ces propositions de nature globale sont extrêmement importantes pour la théorie. Elles ne sont pas valables sous les axiomes généraux de la théorie. Mais elles ont été établies sous des conditions assez larges, d'interprétation physique simple (stationnarité, sections d'espace complètes, comportement asymptotique euclidien) (³).

Nous allons rappeler cette dernière hypothèse, dont nous aurons besoin.

9. — Comportement asymptotique euclidien.

Considérons un espace euclidien $\mathcal{E}_3$ à trois dimensions, admettant une métrique définie négative $\overline{ds}^2$. Nous rapportons $\mathcal{E}_3$ à un système de coordonnées privilégié (y^i) pour lequel:

$$\overline{ds}^2 = \delta_{ij}\, dy^i\, dy^j$$

où $\delta_{ij} = -1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

(³) A. LICHNEROWICZ [9] et [38].

Nous dirons que l'espace-temps V_4 admet un comportement asymptotique euclidien sur W_3, lorsque pour un point a de W_3 et un nombre R suffisament grand:

a. — il existe un homéomorphisme h de classe C^2 du domaine $d(a, x) > R$ de W_3 sur un domaine de $\mathcal{E}_3$ homéomorphe au complémentaire d'une boule fermée de $\mathcal{E}_3$. $d(a, x)$ désigne la distance de deux points a et x de la variété riemannienne W_3;

b. — si (y^α) est un système de coordonnées privilégiées de V_4 défini dans le domaine de V_4 qui correspond au domaine $d(a, x) > R$ de W_3, par les (y^i) et la variable x^0, nous avons dans ce domaine

$$|a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r} \qquad |\delta_\gamma a_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r^2}$$

où $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, $\delta_{00} = +1$, $r = d(a, x)$, M est un nombre positif fixe et où les potentiels $a_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées sont relatifs aux coordonnées privilégiées (y^α).

Dans la suite nous n'envisageons que des éléments de la section d'espace W_3 de V_4.

Soit x_0 un point de W_3 tel que $r = d(a, x) > R$, y_0 son image par l'homéomorphisme h dans $\mathcal{E}_3$ et ϱ_0 la distance ordinaire de y_0 à l'origine 0 dans $\mathcal{E}_3$. On démontre que:

$$\varrho_0 < K r_0$$

K étant un nombre positif fixe.

Il en résulte que les points du domaine à l'infini de W_3 ne sont autres que les points à l'infini de $\mathcal{E}_3$ muni de la métrique $\overset{-2}{ds} = \delta_{ij}\, dy^i\, dy^j$. Il est donc équivalent de dire que les écarts des potentiels avec les valeurs galiléennes $\delta_{\alpha\beta}$ se comportent comme $1/r$ ou $1/\varrho$.

10. — Champ quasi-galiléen.

Nous aurons à considérer un Univers (c'est-à-dire un domaine de l'espace et un intervalle de temps) où sont contenues de faibles masses; cet Univers est quasi-euclidien et nous pouvons y prendre des variables quasi-galiléennes. Rapportés à ces variables, les dix coefficients $a_{\alpha\beta}$ du ds^2 ont, en tout point de l'Univers considéré, des valeurs voisines des valeurs galiléennes $\delta_{\alpha\beta}$.

D'une manière plus précise, nous supposerons l'existence des développements limités des potentiels jusqu'à un certain ordre, en fonction du paramètre $1/c^2$, c désignant la vitesse de la lumière dans le vide. Pour désigner un champ présentant des développements limités de ce type et admettant un comportement asymptotique euclidien, nous emploierons le terme de champ quasi-galiléen. Pour un tel champ, les valeurs absolues des coefficients des développements limités admettent toutes des majorations par M/r et les valeurs absolues de leurs dérivées, des majorations par M/r^2.

Etant donné un champ quasi-euclidien, on démontre qu'il existe toujours des changements de coordonnées tels que dans le nouveau système les coordonnées soient isothermes tout en restant quasi-galiléennes (4). Nous avons vu que pour des coordonnées isothermes, les potentiels se séparent dans les équations d'EINSTEIN, du moins dans les dérivées secondes. Si l'on tient compte dans les applications physiques de l'hypothèse quasi-galiléenne, cette séparation est effective. On peut alors déterminer les coefficients du ds^2 satisfaisant aux équations d'EINSTEIN à l'aide des méthodes d'approximation.

---

(4) J. CHAZY [3], p. 149-150.

CHAPITRE II.

LA DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT BASÉE SUR L'EMPLOI DU CHAMP EXTÉRIEUR

I. - PRINCIPE DE LA DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT.

Nous allons développer ici une étude générale d'un premier mode de déduction des équations du mouvement. La méthode d'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN s'en déduit immédiatement. Toutefois la présentation que nous adoptons ici est plus générale et peut s'appliquer aisément à une théorie pentadimensionnelle du champ unifié. D'autre part elle diffère de la présentation d'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN par les points suivants: nous partons du tenseur d'EINSTEIN au lieu du tenseur de RICCI et nous employons les coordonnées isothermes, ce qui apparaitra plus rationnel.

11. — Etude du flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$.

Considérons une variété différentiable V_n à n dimensions, de classe (C^2, C^4 par morceaux), douée d'une métrique riemannienne de type hyperbolique normal :

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha\,,\,\beta = 0\,,\,1\,,\ldots,\,n-1)\,.$$

Les $a_{\alpha\beta}(x^\lambda)$ sont des fonctions de classe (C^1 , C^3 par morceaux). Pour $n=4$, on a la variété espace-temps V_4 de la relativité générale.

$G_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de RICCI de V_n. Les équations qui déterminent la structure géométrique de V_n généralisent les équations d'EINSTEIN dans V_4. Ce sont:

$$S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, G\, a_{\alpha\beta} = \chi\, \Theta_{\alpha\beta} \qquad \text{cas intérieur} \tag{11.1}$$

$$S_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, G\, a_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{cas extérieur.} \tag{11.2}$$

En étendant les résultats de l'étude des problèmes globaux en mécanique relativiste, nous admettrons que le champ intérieur et le champ extérieur sont réguliers dans leurs domaines respectifs, et que le champ extérieur ne peut être prolongé régulièrement à l'intérieur des domaines de V_n où $\Theta_{\alpha\beta} \neq 0$ (tubes d'univers).

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ satisfait aux identités de conservation :

$$\nabla_\alpha \, S^\alpha_\beta = 0 \tag{11.3}$$

Supposons que V_n soit rapporté à un système de coordonnées dans lequel x^0 joue le rôle de variable temporelle ($a_{00} > 0$) et les (x^i), celui de variables spatiales ($a^{00} > 0$). Soit W_{n-1} une section déterminée $x^0 = \text{const.}$ de V_n. W_{n-1} est supposée douée de la structure de variété riemannienne définie par :

$$ds^{*2} = a^*_{ij} \, dx^i \, dx^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n-1)$$

avec

$$a^*_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{0i} \, a_{0j}}{a_{00}},$$

$$a^{*ij} = a^{ij} \qquad (a^{ij} \text{ désigne } a^{\alpha\beta} \text{ pour } (\alpha, \beta) = (i, j)),$$

en affectant d'une étoile toutes les quantités relatives à W_{n-1}.

Le changement de coordonnées locales

$$x^0 = x^{0'} \qquad x^i = f^i (x^{j'})$$

conserve W_{n-1}. Dans ce changement de coordonnées, les quantités $S_{\alpha i}$ où l'indice α est fixé, se transforment selon la loi tensorielle

$$S_{(\alpha)i} = A^{\lambda'}_i \, S_{(\alpha)\lambda'} = A^{j'}_i \, S_{(\alpha)j'}$$

qui est la loi de transformation d'un vecteur de W_{n-1}. A ce vecteur, que nous notons $\vec{S}_{(\alpha)}$, on peut attacher la forme différentielle extérieure d'ordre $(n-2)$:

$$\Omega_{(\alpha)} = \frac{1}{(n-2)!} \, \eta^*_{i_1 \ldots i_{n-1}} \, (a^{*i_{n-1} j} \, S_{(\alpha)j}) \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{n-1}}, \tag{11.4}$$

$\eta^*_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ tenseur antisymétrique attaché à la forme élément de volume de W_{n-1}.

Proposons-nous d'étudier le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ à travers la frontière d'un domaine simplement connexe de W_{n-1}. De cette étude, et en tenant compte des équations du champ (11.2) et des identités de conservation (11.3), résultent des relations entre les $a_{\alpha\beta}$, moyennant quelques hypothèses qui seront précisées.

Considérons dans W_{n-1} un $(n-1)$-champ C^{n-1} homéomorphe à la boule euclidienne à $(n-1)$ dimensions. Désignons par ∂C^{n-1} sa frontière, et posons:

$$\dot{\sigma}_\alpha = \text{flux*}_{\partial C^{n-1}} \vec{S}_{(\alpha)} .$$

Pour un champ C^{n-1} quelconque extérieur aux sections d'espace des tubes d'univers, il est évident, d'après le théorème de STOKES, que la condition nécessaire et suffisante pour que le flux σ_α soit nul est que la divergence du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$, calculée dans W_{n-1}, soit nulle, ce qui s'écrit:

$$\nabla_i^* \, (a^{*ij} \, S_{(\alpha)j}) = 0 \tag{11.5}$$

(la dérivation covariante ne doit pas porter sur l'indice α placé entre parenthèses).

Prenons au contraire un champ C^{n-1} quelconque contenant dans son intérieur la section d'espace d'un seul tube d'univers, le k-ème par exemple. Représentons ce champ par $\overset{k}{C}{}^{n-1}$, sa frontière par $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$ et le flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ correspondant par $\overset{k}{\sigma}_\alpha$. En appliquant le théorème de STOKES au domaine compris entre deux hypersurfaces frontières $\partial \overset{k}{C}{}'^{n-1}$ et $\partial \overset{k}{C}{}''^{n-1}$ dont l'une est intérieure à l'autre, on voit que (11.5) est la condition nécessaire et suffisante pour que le flux $\overset{k}{\sigma}_\alpha$ ait une valeur indépendante de la forme et de la grandeur de $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$. En particulier, on peut alors prendre pour valeur de ce flux sa valeur calculée sur la frontière de la section d'espace du k-ème tube d'univers.

Le flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ à travers $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$ est, par définition, l'intégrale de la $(n-2)$-forme (11.4) sur le $(n-2)$-champ constitué par $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$:

$$\overset{k}{\sigma}_\alpha = \int_{\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}} \Omega_{(\alpha)} . \tag{11.6}$$

Désignons par Δ le domaine représentatif de C^{n-1} dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_{n-1}$ à $(n-1)$ dimensions. La frontière $\partial\Delta$ de Δ a pour image ∂C^{n-1}. Exprimons la forme $\Omega_{(\alpha)}$ à l'aide des paramètres $(t^1, t^2, \ldots, t^{n-2})$ auxquels est rapporté $\partial\Delta$, nous avons

$$\Omega_{(a)} = f_{(a)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2}$$

où

$$f_{(a)} = \frac{1}{(n-2)!}\, \eta^{*}_{i_1 \ldots i_{n-1}} (a^{* i_{n-1}} S_{(a)j}) \frac{D(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-2}})}{D(t^1, \ldots, t^{n-2})}\,.$$

Le deuxième membre de (11.6) n'est autre que l'intégrale de la fonction $f_{(\alpha)}$ sur $\partial\Delta$

$$\int_{\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}} \Omega_{(a)} = \int_{\partial\Delta} f_{(a)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2}\,.$$

On sait que cette intégrale peut être mise sous la forme

$$\int_{\partial\Delta} S_{(a)i}\, \nu^i \sqrt{|a'|}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2}$$

où

$(\nu^i) =$ normale unitaire à $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$,

a' $=$ déterminant de la forme quadratique fondamentale de $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$, rapportée aux paramètres $(t^1, \ldots, t^{n-2})$ (5).

12. — Lemme préliminaire.

L'espace euclidien $\mathcal{E}_{n-1}$ étant rapporté à un système de coordonnées rectilignes (y^i), choisissons comme application amenant Δ sur $\overset{k}{C}{}^{n-1}$, celle qui fait correspondre les points de $\mathcal{E}_{n-1}$ et de W_{n-1} ayant mêmes coordonnées.

LEMME. (6) *Etant donné un système de fonctions $F_{(aa\ldots)kl}$ telles que*

$$F_{(aa\ldots)kl} = - F_{(aa\ldots)lk}$$

---

(5) Voir A. LICHNEROWICZ, *Algèbre et analyse linéaire*, Masson, Paris (1947), pp. 192-194.

(6) Ce lemme, ainsi que le théorème du paragraphe suivant, a été établi par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN dans le cas de la variété V_4. La démonstration que nous donnons ici généralise celle de ces auteurs au cas d'une variété a n dimensions.

si $\partial\Delta$ ne passe par aucun point singulier des fonctions F, on a

$$(I \equiv) \int_{\partial\Delta} \partial_l F_{(aa\ldots)kl}\, n^k\, d\,\Sigma = 0\,, \tag{12.1}$$

(n^i) étant la normale unitaire à $\partial\Delta$ et $d\Sigma$ l'élément de surface de $\partial\Delta$.

(La convention de sommation des indices est étendue aux indices répétés deux fois en bas :

$$\partial_l F_{(aa\ldots)kl} = \sum_{l=1}^{n-1} \partial_l F_{(aa\ldots)kl}\,.)$$

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Soit dans une variété différentiable V_p à p dimensions, un q-champ C^q dont la frontière est nulle et une forme différentielle extérieure α d'ordre q, telle que $\alpha = d\beta$ sur C^q (d, symbole de différentiation extérieure). Alors on a :

$$\int_{C^q} \alpha = 0\,. \tag{12.2}$$

En effet, en transformant par la formule de STOKES il vient :

$$\int_{C^q} \alpha = \int_{C^q} d\beta = \int_{\partial C^q} \beta\,.$$

Par hypothèse $\partial C^q = 0$. Il en résulte la formule (12.2).

Cela étant, on a au premier membre de (12.1) l'intégrale sur le $(n-2)$-champ $\partial\Delta$ d'une forme différentielle extérieure d'ordre $(n-2)$:

$$I = \int_{\partial\Delta} \alpha\,, \tag{12.3}$$

$$\alpha = \frac{1}{(n-2)!}\, \varepsilon_{i_1\ldots i_{n-2}}\, \partial_l F_{(aa\ldots)kl}\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_{n-2}}\,. \tag{12.4}$$

La frontière du champ $\partial\Delta$ étant nulle, il suffit pour prouver le lemme de montrer que cette forme α est la différentielle extérieure d'une autre forme β. En posant

$$F_{(aa\ldots)kl} = \varepsilon_{klj_1\ldots j_{n-3}}\, A_{j_1\ldots j_{n-3}}$$

on voit que la forme (12.4) peut s'écrire :

$$\alpha = \frac{1}{(n-3)!}\, \partial_j\, A_{i_1 \ldots i_{n-3}}\, dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_{n-3}}$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = d\beta$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{(n-3)!}\, A_{i_1 \ldots i_{n-3}}\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_{n-3}} .$$

La formule (12.1) généralise la formule classique de la géométrie élémentaire selon laquelle l'intégrale d'un rotationnel sur une surface fermée est nulle.

13. — Propriétés fondamentales du flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$.

Faisons maintenant les hypothèses suivantes :

a) Les potentiels $a_{\alpha\beta}$ sont voisins des potentiels euclidiens

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} ,$$

les écarts $\eta_{\alpha\beta}$ admettent des développements limités en fonction d'un paramètre λ ($\lambda = 1/c$, c vitesse de la lumière) :

$$\eta_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{\eta_{\alpha\beta}} + 0\,(\lambda^{q+1}) .$$

En fait dans les développements que nous utiliserons, tous les coefficients de λ^p ne sont pas différents de zéro (voir plus loin, paragraphe 18).

b) La dérivée ∂_0 est petite devant les dérivées ∂_i. On peut alors poser

$$\partial_0 = \lambda \underset{1}{\partial_0}$$

et $\underset{1}{\partial_0}$ est du même ordre de grandeur que ∂_i. b) est appelé ***hypothèse quasi-statique.***

Si l'on substitue aux $a_{\alpha\beta}$ leurs développements limités, il vient :

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{S_{\alpha\beta}} + 0\,(\lambda^{q+1}) ,$$

$$\overset{k}{\sigma}_\alpha = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{\overset{k}{\sigma}_\alpha} + 0\,(\lambda^{q+1}) , \qquad \underset{p}{\overset{k}{\sigma}_\alpha} = \int_{\partial\Delta} \underset{p}{f_{(\alpha)}}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2} ,$$

$$\nabla_i^* \,(a^{*ij}\, S_{(\alpha)j}) = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \,(\nabla_i^*\,(a^{*ij}\, S_{(\alpha)j}))_p + 0\,(^{q+1}) .$$

(Dans le développement d'une quantité Q, le coefficient de λ^p sera désigné indifféremment par $\underset{p}{Q}$ ou $(Q)_p$.)

On est amené pour déterminer les champs vérifiant $S_{\alpha\beta} = 0$, à intégrer successivement les équations $\underset{p}{S_{\alpha\beta}} = 0$ pour $p = 1, 2, \ldots, m \ldots, q$.

Nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 1. — *Les hypothèses* a) *et* b) *étant faites*

1°) ***Pour que la condition de divergence d'ordre m soit vérifiée***

$$(\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}))_m = 0 \tag{13.1}$$

il suffit que l'on ait $\underset{p}{S_{\alpha\beta}} = 0$ ***pour tous les*** $p \leq m - 1$;

2°) ***La valeur de*** $\overset{k}{\underset{m}{\sigma_\alpha}}$ ***ne dépend effectivement que des valeurs de*** $\underset{p}{\eta_{\alpha\beta}}$ $(p \leq m - 1)$. **Elle est indépendante de** $\underset{m}{\eta_{\alpha\beta}}$.

1) Etudions la condition (11.5) en mettant en évidence la divergence du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$ au premier membre des identités de conservation. Tenant compte de $a^{*ij} = a^{ij}$ et de

$$S_\alpha^i = a^{ij} S_{j\alpha} + a^{i0} S_{0\alpha}$$

il vient

$$\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}) = \partial_i S_{(\alpha)}^i + \begin{Bmatrix} i \\ l\, i \end{Bmatrix}^* S_\alpha^l - \nabla_i^* (a^{i0} S_{(\alpha)0}) .$$

En posant

$$A_\alpha = \begin{Bmatrix} \beta \\ \lambda\, \beta \end{Bmatrix} S_\alpha^\lambda - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\, \beta \end{Bmatrix} S_\lambda^\beta - \begin{Bmatrix} i \\ l\, i \end{Bmatrix}^* S_\alpha^l + \nabla_i^* (a^{i0} S_{(\alpha)0})$$

les identités de conservation peuvent donc s'écrire

$$\nabla_\beta S_\alpha^\beta = \nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}) + \partial_0 S_\alpha^0 + A_\alpha = 0. \tag{13.2}$$

On voit que la condition (11.5) ne peut pas être satisfaite identiquement. Cependant on tire de (3.2)

$$- (\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}))_m = (\partial_0 S_\alpha^0)_m + (A_\alpha)_m .$$

La dérivée partielle qui figure dans $\partial_0 S_\alpha^0$ est la dérivée par rapport à la coordonnée x^0 et A_α ne contient que les produits de $S_{\alpha\beta}$ par $\eta_{\alpha\beta}$,

$\eta^{\alpha\beta}(=a^{\alpha\beta}-\delta^{\alpha\beta})$ et par leurs dérivées partielles. Aussi la quantité $(\partial_0 \overset{0}{S}_\alpha + A_\alpha)_m$ fait intervenir seulement les $\underset{p}{S}_{\alpha\beta}$ $(p \leq m-1)$. On en déduit que les équations

$$\underset{p}{S}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (p \leq m-1)$$

entraînent $(\partial_0 \overset{0}{S}_\alpha + A_\alpha)_m = 0$, donc

$$(\nabla_i^* (a^{*ij} S_{(\alpha)j}))_m = 0\,.$$

2) Explicitons l'expression de $\underset{k}{S}_{\alpha i}$ qui figure dans l'intégrale donnant le flux σ_α.

On peut écrire

$$S_{\alpha\beta} = \left(G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\,G_{\lambda\varrho}\right) + M_{\alpha\beta}\,,$$

en posant

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,(\delta_{\alpha\beta}\,\eta^{\lambda\varrho} + \delta^{\lambda\varrho}\,\eta_{\alpha\beta})\,G_{\lambda\varrho} - \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta}\,\eta^{\lambda\varrho}\,G_{\lambda\varrho}\,.$$

$M_{\alpha\beta}$ ne contient que les produits de $G_{\alpha\beta}$ par $\eta_{\alpha\beta}$ et par $\eta^{\alpha\beta}$. Si l'on suppose provisoirement $\underset{p}{S}_{\alpha\beta} = 0$ pour tous les $p \leq m-1$, on aura $\underset{m}{M}_{\alpha\beta} = 0$, d'où

$$\underset{m}{S}_{\alpha\beta} = \left(G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\,G_{\lambda\varrho}\right)_m\,.$$

Ceci nous suggère de poser

$$n_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\,\eta_{\lambda\varrho} \tag{13.3}$$

et d'exprimer $S_{\alpha\beta}$ en fonction de $n_{\alpha\beta}$ au lieu de $\eta_{\alpha\beta}$. L'introduction des quantités $n_{\alpha\beta}$ n'est nullement indispensable, mais elle a l'avantage de simplifier l'écriture des équations. Par multiplication contractée de (13.3) par $\delta^{\alpha\beta}$, on obtient

$$\delta^{\alpha\beta}\,n_{\alpha\beta} = -\,\frac{n-2}{2}\,\delta^{\lambda\varrho}\,\eta_{\lambda\varrho}\,.$$

La relation (13.3) est donc équivalente à

$$\eta_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\,n_{\lambda\varrho}\,. \tag{13.4}$$

Substituant $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}$ dans $S_{\alpha\beta}$, puis faisant le changement de fonction défini par (13.4), il vient après calcul :

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda\varrho}\,(\partial_{\beta\lambda}\, n_{\alpha\varrho} + \partial_{\alpha\lambda}\, n_{\beta\varrho} - \partial_{\lambda\varrho}\, n_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\mu\nu}\,\partial_{\mu\lambda}\, n_{\nu\varrho}) + \Lambda'_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}\,, \tag{13.5}$$

où $\Lambda'_{\alpha\beta}$ représente les termes non linéaires de $\left(G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\, G_{\lambda\varrho}\right)$. On en déduit [7] :

$$S_{\alpha i} = \Phi_{\alpha i} + \Lambda_{\alpha i} + M_{\alpha i}, \tag{13.6}$$

où

$$\Phi_{\alpha i} = -\frac{1}{2}\,\partial_l\,(\partial_i\, n_{\alpha l} - \partial_l\, n_{\alpha i} - \delta_i^\alpha\,\partial_r\, n_{lr} + \delta_l^\alpha\,\partial_r\, n_{ir})\,, \tag{13.7}$$

$$\Lambda_{0i} = -\frac{1}{2}\,\partial_{s0}\, n_{is} + \frac{1}{2}\,\partial_{i0}\, n_{00} + \Lambda'_{0i}, \tag{13.8}$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\,\partial_{0j}\, n_{0i} + \frac{1}{2}\,\partial_{0i}\, n_{0j} - \delta_j^i\,\partial_{0s}\, n_{0s} - \frac{1}{2}\,\partial_{00}\, n_{ij} + \frac{1}{2}\,\delta_j^i\,\partial_{00}\, n_{00} + \Lambda'_{ij}\,. \tag{13.9}$$

Nous avons groupé dans $\Phi_{\alpha i}$ tous les termes linéaires de $S_{\alpha i}$ qui sont soumis à des dérivées partielles dont aucun indice n'est égal à zéro, dans $\Lambda_{\alpha i}$ les autres termes linéaires de $S_{\alpha i}$ ainsi que les termes non linéaires de $\left(G_{\alpha i} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha i}\,\delta^{\lambda\varrho}\, G_{\lambda\varrho}\right)$.

On tire de (13.6)

$$\underset{m}{S_{\alpha i}} = \underset{m}{\Phi_{\alpha i}} + \underset{m}{\Lambda_{\alpha i}} + \underset{m}{M_{\alpha i}}.$$

D'après l'hypothèse b), les seuls termes de $\underset{m}{S_{\alpha i}}$ faisant intervenir $\underset{m}{\eta_{\alpha\beta}}$ $\left(= \underset{m}{n_{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\,\underset{m}{n_{\lambda\varrho}}\right)$ sont contenus dans $\underset{m}{\Phi_{\alpha i}}$.

D'autre part, le coefficient de λ^m dans le développement de $\overset{k}{\sigma_\alpha}$ est égal à

$$\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}} = \int_{\partial\Delta} \underset{m}{f_{(\alpha)}}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2}\,, \tag{13.10}$$

---

(7) Les notations $\eta_{\alpha\beta}$ et $n_{\alpha\beta}$ correspondent à $h_{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$ dans les travaux d'EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN. Les notations $\Phi_{\alpha\beta}$ $\left(\text{au facteur } -\frac{1}{2} \text{ près}\right)$, $\Lambda_{\alpha\beta}$ et $\Lambda'_{\alpha\beta}$ (au facteur -1 près) sont celles de ces auteurs.

avec

$$\underset{m}{f_{(\alpha)}} = \underset{m}{S_{\alpha i}}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 + \sum_{p=1}^{m-1} \underset{p}{S_{\alpha i}}(\nu^i \sqrt{|a'|})_{m-p} \,.$$

Pour justifier la deuxième partie du théorème, il suffit par conséquent de montrer que la contribution de $\underset{m}{\Phi_{\alpha i}}$ dans l'intégrale (13.10) est nulle, c'est-à-dire établir

$$\int_{\partial\Delta} \underset{m}{\Phi_{\alpha i}}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 \, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2} = 0 \,. \tag{13.11}$$

Si l'on pose

$$F_{(\alpha)il} = -\frac{1}{2}(\partial_i \underset{m}{n_{\alpha l}} - \partial_l \underset{m}{n_{\alpha i}} - \delta_i^\alpha \partial_r \underset{m}{n_{lr}} + \delta_l^\alpha \partial_r \underset{m}{n_{ir}})$$

l'expression $\underset{m}{\Phi_{\alpha i}}$ se met sous la forme

$$\underset{m}{\Phi_{\alpha i}} = \partial_l F_{(\alpha)il} \,,$$

où les fonctions $F_{(\alpha)ij}$ satisfont aux conditions énoncées dans le lemme. Elles sont antisymétriques par rapport aux indices, $i\,, j$ et elles n'ont pas de singularités sur $\partial\Delta$. Comme d'autre part

$$(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 \, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2} = n^i \, d\Sigma \,, \tag{13.12}$$

on a d'après le lemme

$$\int_{\partial\Delta} \underset{m}{\Phi_{\alpha i}}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 \, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2} = \int_{\partial\Delta} \partial_l F_{(\alpha)il} n^i \, d\Sigma = 0 \,.$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que l'on peut étendre la définition de $\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}}$ à la valeur $m = q + 1$, si q est l'ordre des développements limités de $\eta_{\alpha\beta}$.

Dans la suite, lorsque nous calculons $\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}}$, les équations $\underset{p}{S_{\alpha\beta}} = 0$ ($p \leq m - 1$) sont supposées vérifiées. L'expression de $\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}}$ se réduit à

$$\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}} = \int_{\partial\Delta} \underset{m}{S_{\alpha i}}(\nu^i \sqrt{|a'|})_0 \, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-2} \,,$$

et en tenant compte de (13.11) (13.12) elle devient

$$\overset{k}{\underset{m}{\sigma_\alpha}} = \int_{\partial \Delta} \underset{m}{\Lambda_{\alpha i}}\, n^i \, d\, \Sigma \,. \tag{13.13}$$

La formule (13.13) sera utilisée pour le calcul effectif du flux.

14. — Définition des équations de mouvement.

Comment obtient-on maintenant les équations de mouvement ?

Pour tout système de $a_{\alpha\beta}$ solution des équations du champ $S_{\alpha\beta} = 0$, donc a fortiori de $S_{\alpha i} = 0$, on a nécessairement

$$\overset{k}{\sigma_\alpha} = \int_{\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}} \Omega_{(\alpha)} = 0 \,, \tag{14.1}$$

$k = 1, 2, \ldots, N$; $N =$ nombre de tubes d'univers. Si les hypothèses *a*) et *b*) sont satisfaites, chaque $\overset{k}{\underset{m}{\sigma_\alpha}}$ d'une part est fonction des $\underset{p}{\eta_{\alpha\beta}}\,(p \leq m - 1)$, d'autre part est indépendant du choix de $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$. Les conditions nécessaires (14.1), qui s'écrivent alors :

$$\overset{k}{\sigma_\alpha} = \sum_{m=1}^{q+1} \lambda^m \overset{k}{\underset{m}{\sigma_\alpha}} + 0\,(\lambda^{q+2}) = 0 \,, \tag{14.2}$$

constituent des relations que doivent vérifier les $a_{\alpha\beta}$ solution des équations du champ. Ces relations ne dépendent que de la frontière de la section d'espace du k-ème tube d'univers.

Supposons de plus que les tubes d'univers puissent être considérés comme des lignes d'univers. Alors la section d'espace du k-ème tube d'univers se réduit à un point dont nous désignerons les coordonnées par $(\overset{k}{\xi}{}^1, \ldots, \overset{k}{\xi}{}^{n-1})$, et le flux $\overset{k}{\sigma_\alpha}$, indépendant de $\partial \overset{k}{C}{}^{n-1}$, ne peut dépendre que des coordonnées $(\overset{k}{\xi}{}^i)$ et de leurs dérivées par rapport à x^0. Nous verrons, lorsque nous ferons les calculs d'approximation dans le cas $n = 4$, que les $nN = 4N$ relations (14.2) déterminent $(n - 1)\, N = 3N$ fonctions $\overset{k}{\xi}{}^i\,(x^0)$, qui ne sont donc autre chose que les équations des N lignes d'univers, c'est-à dire les équations de mouvement en relativité générale [8].

Généralisant ce résultat, nous allons postuler que les équations du mouvement sont encore données par (14.2) dans le cas où les sections d'espace des tubes d'univers ne sont plus ponctuelles ni à symétrie sphérique.

Le théorème précédent est important parce qu'il nous fait comprendre pour-quoi l'approximation des équations du champ permet d'obtenir les équations du mouvement. En effet, si $\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}}$ dépend effectivement de $\underset{m}{\eta^{\alpha\beta}}$, comme cela apparaît à première vue, le calcul de $\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}}$ sera lié à la solution de $\underset{m}{S_{\alpha\beta}} = 0$. La nullité de $\underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}}$ découlera simplement, comme une conséquence triviale, de $\underset{m}{S_{\alpha i}} = 0$. L'équation (14.2)

$$\overset{k}{\sigma_\alpha} = \sum_{m=1}^{q+1} \lambda^m \underset{m}{\overset{k}{\sigma_\alpha}} + 0\,(\lambda^{q+2}) = 0$$

ne peut conduire à aucun résultat utilisable. En effet, le premier membre sera toujours identiquement nul.

Remarquons aussi le rôle joué par l'hypothèse quasi-statique dans les deux parties de ce théorème.

15. — Application à la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann.

La méthode que nous venons d'exposer comprend comme cas particulier la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann. Elle se réduit à cette dernière pour $n = 4$ et si l'on considère des singularités ponctuelles du champ extérieur dans W_3.

En relativité générale Einstein, Infeld et Hoffmann déduisent les équations du mouvement de :

$$\overset{k}{c_\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} -2 \left(G_{\alpha i} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha i} \delta^{\lambda\varrho} G_{\lambda\varrho} \right) n^i d\,\Sigma = 0, \tag{15.1}$$

[8] D'une manière plus précise, les équations du mouvement résultent de $\overset{k}{\sigma_i} = 0$. La condition $\overset{k}{\sigma_0} = 0$ associée aux conditions de coordonnées, sert à fixer la valeur des fonctions harmoniques arbitraires qui interviennent dans la solution des équations du champ (voir plus loin).

Σ_k désignant une surface fermée quelconque de l'espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_3$, surface entourant seulement la k-ème singularité. Par la méthode d'approximation on a évidemment :

$$-2\pi \overset{k}{\underset{l}{c}}_\alpha = \overset{k}{\underset{l}{\sigma}}_\alpha \qquad (\underset{p}{S}_{\alpha\beta} = 0\,, \quad p \leq l-1) \tag{15.2}$$

les équations $\overset{k}{c}_\alpha = 0$ et $\overset{k}{\sigma}_\alpha = 0$ sont alors équivalentes.

Mais en appliquant les équations $\overset{k}{\sigma}_\alpha = 0$ pour obtenir les équations de mouvement en relativité générale, nos calculs diffèrent de ceux de ces auteurs par l'emploi d'un système de coordonnées isothermes.

16. — Rôle du tenseur d'impulsion-énergie et des équations du cas intérieur dans le problème du mouvement.

EINSTEIN et ses collaborateurs pensent que les équations de mouvement doivent être autant que possible déduites des équations du cas extérieur, qui seules sont définies sans ambiguïté, alors que toute représentation de la matière par un tenseur d'impulsion-énergie doit dépendre des hypothèses faites sur la constitution de la matière. Cette conception est sans doute née du fait que l'exposé théorique de la méthode ne fait intervenir à aucun moment le tenseur d'énergie ou les équations du cas intérieur.

Mais, pour former effectivement les équations de mouvement, il nous faut chercher une solution des équations $S_{\alpha\beta} = 0$, solution nécessaire pour évaluer le flux $\overset{k}{\sigma}_\alpha$ du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$. Il nous semble que, si on calcule un champ extérieur sans aucune supposition sur ce qui se passe à l'intérieur des singularités de ce champ, la solution obtenue correspond difficilement à une réalité physique. Sans préciser tous les éléments d'une distribution énergétique, certaines solutions extérieures dépendent cependant de certains caractères de cette distribution (par exemple la solution à symétrie sphérique). La distribution énergétique manifeste sa présence aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur des tubes d'univers. Aussi croyons-nous qu'il n'y a pas lieu d'isoler le champ extérieur et de le considérer pour lui-même indépendamment du champ intérieur. Tout ds^2 extérieur interprétable physiquement doit pouvoir être meublé dans ses domaines singuliers, en d'autres termes doit pouvoir être considéré comme effectivement produit par une certaine distribution énergétique. De ce point de vue, pour construire un ds^2 extérieur interprétable physiquement, le plus simple serait de renverser le problème en se donnant un schéma de distribution énergétique, adapté à la structure plus ou moins fine qu'on désire avoir de l'Univers, et en déduisant par prolongement le ds^2 créé à l'extérieur.

La représentation de la matière par un tenseur d'impulsion-énergie nous paraît une tentative satisfaisante pour approcher la réalité ; les hypothèses qu'on y fait, qui sont fournies par l'expérience, sont très simples. EINSTEIN et ses collaborateurs eux-mêmes, malgré leurs dires, n'ont pu éviter son emploi et celui des équations du cas intérieur. En effet ces équations interviennent implicitement pour établir, en première approximation, la propriété (9)

$$\eta_{ij} - \delta_j^i \, \eta_{00} = 0 \, . \tag{16.1}$$

D'autre part elles se manifestent d'une manière moins apparente lorsque l'on calcule une solution des équations du champ extérieur « représentant des particules matérielles ». EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN sont obligés en effet du supposer que les pôles des fonctions qui figurent dans la solution sont des pôles simples, tandis que les pôles multiples doivent être exclus « comme n'ayant pas de signification physique ». C'est seulement avec cette hypothèse que les équations $\overset{k}{c}_\alpha = 0$, à une approximation donnée, imposent réellement des conditions aux champs déterminés dans les approximations précédentes, c'est-à-dire sont susceptibles de définir les équations de mouvement. Faire l'hypothèse des pôles simples, c'est supposer que l'on a des potentiels newtoniens, et cela revient à considérer le tenseur d'énergie d'un système de points matériels. C'est ce qui apparaît clairement lorsque L. INFELD reprend le problème du mouvement par la méthode du tenseur d'énergie en introduisant des masses représentées par des distributions de DIRAC.

En définitive, la différence entre notre méthode et celle du tenseur d'énergie n'est pas tellement dans l'emploi des équations de départ du cas extérieur ou du cas intérieur. Elle réside essentiellement dans l'adoption des équations qui définissent les équations de mouvement : dans l'une des méthodes, celles-ci s'obtiennent en annulant une intégrale portant sur le premier membre des identités de conservation du tenseur d'énergie

$$\int \nabla_\alpha \, T_i^\alpha \, dV = 0 \, , \tag{16.2}$$

où l'intégrale est étendue au domaine de W_3 occupé par le k-ème corps ; dans l'autre, elles sont données par la nullité du flux d'un vecteur lié au

(9) Cf. plus loin, page 463.

tenseur $S_{\alpha\beta}$

$$\int S_{(i)j}\, \nu^j \, dS = 0, \tag{16.3}$$

l'intégrale étant prise sur une surface fermée quelconque de W_3 entourant seulement le k-ème corps, en particulier sur la frontière de ce corps elle même.

Il semble que ces deux méthodes puissent se ramener l'une à l'autre. Pour un fluide parfait, par exemple, la méthode utilisant le flux doit probablement fournir dans les équations de mouvement un terme relatif à la pression.

17. — Expression de $S_{\alpha\beta}$ en coordonnées isothermes.

Avant de passea aux calculs d'approximation, cherchons l'expression du tenseur $S_{\alpha\beta}$ lorsque le système de coordonnées employé est isotherme, c'est-à-dire satisfait aux n relations

$$F^\lambda = - a^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix} = 0 . \tag{17.1}$$

Portons notre attention sur les termes linéaires seulement. Si nous représentons par F'^λ les termes non linéaires de F^λ, les relations (17.1) s'écrivent

$$- \delta^{\mu\nu} \delta^{\varrho\lambda} [\mu\nu , \varrho] + F'^\lambda = 0 , \tag{17.2}$$

ou, d'après (13.4)

$$- \delta^{\mu\nu} \delta^{\varrho\lambda} \partial_\mu n_{\nu\varrho} + F'^\lambda = 0 . \tag{17.3}$$

D'autre part, on a

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta^{\lambda\varrho} (\partial_{\beta\lambda} n_{\alpha\varrho} + \partial_{\alpha\lambda} n_{\beta\varrho} - \partial_{\lambda\varrho} n_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} \partial_{\mu\lambda} n_{\nu\varrho}) + A'_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}. \tag{17.4}$$

Affectons de l'indice $(\mathcal{I})$ l'expression que prend une quantité lorsque les coordonnées sont isothermes. En transformant les termes linéaires de (17.4) par (17.3), on obtient

$$S^{(\mathcal{I})}_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} \Box n_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha F'^\lambda + \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta F'^\lambda - \delta_{\alpha\beta} \partial_\lambda F'^\lambda) + \tag{17.5}$$
$$+ A'^{(\mathcal{I})}_{\alpha\beta} + M^{(\mathcal{I})}_{\alpha\beta},$$

en posant $\square = \delta^{\lambda\varrho}\,\delta_{\lambda\varrho}$. On voit que les termes linéaires de $S^{(\mathcal{J})}_{\alpha\beta}$ se réduisent au dalembertien de $-\dfrac{1}{2}\,n_{\alpha\beta}$. D'où, la forme très simple des équations du champ

$$S^{(\mathcal{J})}_{\alpha\beta} = 0$$

à chaque ordre d'approximation, les termes non linéaires se comportant comme une quantité connue en vertu des approximations antérieures (10).

II. — APPLICATION A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

18. — Expression générale des équations approchées du champ.

Revenons à la variété espace-temps V_4. Nous considérons un Univers où les masses sont faibles (hypothèse *a*) et se meuvent lentement par rapport à la lumière (hypothèse *b*). Dans cet Univers quasi-galiléen il est toujours possible, par un changement de coordonnées, de rendre les coordonnées à la fois isothermes et quasi-galiléennes. Nous supposons que, rapportés à un tel système de coordonnées, les potentiels de gravitation admettent des développements limités en fonction du paramètre $1/c^2$, et se comportent comme des potentiels newtoniens dans le domaine à l'infini de W_3:

$$(18.1)\qquad \begin{cases} a_{00} = 1 + \eta_{00} = 1 + \dfrac{1}{c^2}\underset{2}{\eta_{00}} + \dots + \underset{2p}{\eta_{00}} + 0\,(1/c^{2p+2}), \\ a_{0i} = \eta_{0i} = \dfrac{1}{c^3}\underset{3}{\eta_{0i}} + \dots + \dfrac{1}{c^{2p+1}}\underset{2p+1}{\eta_{0i}} + 0\,(1/c^{2p+3}), \\ a_{ij} = -\delta^i_j + \eta_{ij} = -\delta^i_j + \dfrac{1}{c^2}\underset{2}{\eta_{ij}} + \dots + \dfrac{1}{c^{2p}}\underset{2p}{\eta_{ij}} + 0\,(1/c^{2p+2}). \end{cases}$$

---

(10) L'expression classique

$$G^{(\mathcal{J})}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,a^{\mu\nu}\,\partial_{\mu\nu}\,a_{\alpha\beta} + a^{\mu\nu}\,a^{\varrho\sigma}\,(\partial_\varrho\,a_{\alpha\mu}\,\partial_\sigma\,a_{\beta\nu} - [\mu\varrho\,,\,\alpha]\,[\nu\sigma\,,\,\beta])$$

ne convient pas au calcul du flux de $\vec{S}_{(\alpha)}$ parce que la quantité $\Lambda_{\alpha\beta}$ n'y est pas en évidence.

D'après l'hypothèse sur les vitesses des masses, on a $\partial_0 = (1/c)\,\underset{1}{\partial_0}$, où $\underset{1}{\partial_0}\,(=\partial/\partial t)$ est du même ordre de grandeur que les ∂_i.

Nous verrons dans un instant pourquoi le développement de η_{0i}, à la différence des développements de η_{00} et η_{ij}, commence avec un terme en $(1/c^3)$.

Nous allons calculer, en coordonnées isothermes, une solution approchée des équations

$$S_{\alpha\beta} = 0\,,$$

en admettant l'hypothèse où les singularités du champ extérieur dans W_3 (c'est-à-dire les masses) sont ponctuelles et à symétrie sphérique. Cette hypothèse, qui n'est pas exigée par notre méthode, est employée uniquement pour faciliter la recherche du ds^2 extérieur. Elle est réalisée, en astronomie, dans le problème des N corps.

Nous calculons la valeur approchée correspondante du flux $\overset{k}{\sigma}_\alpha$, et nous en déduisons les équations de mouvement en annulant ce flux. Les calculs seront faits dans les deux premières approximations, dont la première permet de retrouver les équations newtoniennes de la Mécanique classique, et dont la seconde met en évidence la correction relativiste.

Ecrivons les relations dont nous aurons besoin pour former les équations approchées du champ, les conditions d'isothermie et évaluer le flux du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$. On a:

$$(18.2)\qquad S^{(\mathfrak{I})}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Box n_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\delta_{\beta\lambda}\partial_\alpha F'^\lambda + \delta_{\alpha\lambda}\partial_\beta F'^\lambda - \delta_{\alpha\beta}\partial_\lambda F'^\lambda\right) + \Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{\alpha\beta} + M^{(\mathfrak{I})}_{\alpha\beta},$$

$$(18.3)\qquad F^\lambda = -a^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = -\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\lambda}\partial_\alpha n_{\beta\gamma} + F'^\lambda,$$

$$(18.4)\qquad \Lambda^{(\mathfrak{I})}_{0i} = -\frac{1}{2}\partial_{00} n_{i0} + \frac{1}{2}\partial_{i0} n_{00} - \frac{1}{2}\partial_0 F'^i + \Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{0i},$$

$$(18.5)\qquad \Lambda^{(\mathfrak{I})}_{ij} = \frac{1}{2}\partial_{0j} n_{0i} + \frac{1}{2}\left(\partial_{0i} n_{0j} - \delta^i_j \partial_{0s} n_{0s}\right) - \frac{1}{2}\partial_{00} n_{ij} - + \frac{1}{2}\delta^i_j\partial_0 F'^0 + \Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{ij}.$$

Les différentes quantités figurant aux seconds membres de ces relations peuvent être calculées à partir de:

(18.6)
$$\Lambda'_{\alpha\beta} = G'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta^{\lambda\varrho}\, G'_{\lambda\varrho},$$

(18.7)
$$G'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \eta^{\lambda\varrho}\, (\partial_{\beta\lambda}\, \eta_{\alpha\varrho} + \partial_{\alpha\varrho}\, \eta_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda\varrho}\, \eta_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta}\, \eta_{\lambda\varrho}) + \partial_\varrho\, \eta^{\lambda\varrho}\, [\alpha\, \beta\, ,\, \lambda] - \\ - \partial_\beta\, \eta^{\lambda\varrho}\, [\alpha\, \varrho\, ,\, \lambda] + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho \\ \lambda\ \varrho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho \\ \lambda\ \beta \end{Bmatrix}.$$

(18.8)
$$F'^{\lambda} = -\, \eta^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} + \delta^{\alpha\beta}\, \eta^{\gamma\lambda}\, [\alpha\, \beta\, ,\, \gamma]\, ,$$

et

(18.9)
$$\eta_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta^{\mu\nu}\, n_{\mu\nu}\, .$$

Enfin pour avoir les écarts $\eta^{\alpha\beta}$ par approximation, on se servira de la relation

(18.10)
$$a^{\alpha\lambda}\, a_{\beta\lambda} = \delta^{\alpha}_{\beta}\, ,$$

qui se transforme en

(18.11)
$$\eta^{\alpha\beta} = -\, \delta^{\alpha\lambda}\, \delta^{\varrho\beta}\, \eta_{\varrho\lambda} - \delta^{\alpha\lambda}\, \eta^{\varrho\beta}\, \eta_{\varrho\lambda}\, .$$

Il est inutile de tenir compte de la quantité $M_{\alpha\beta}$, qui disparaitra dans les équations approchées. Finalement, en posant pour simplifier

$$F'_{\alpha\beta} = \delta_{\beta\lambda}\, \partial_\alpha\, F'^{\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\, \partial_\beta\, F'^{\lambda} - \delta_{\alpha\beta}\, \partial_\lambda\, F'^{\lambda}\, ,$$

les équations du champ d'ordre l s'écrivent:

(18.12)
$$\Delta \underset{l}{n_{\alpha\beta}} = \underset{11}{\partial_{00}}\, \underset{l-2}{n_{\alpha\beta}} - \underset{l}{F'_{\alpha\beta}} - 2\, \underset{l}{\Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{\alpha\beta}}\, , \qquad (\underset{l}{M_{\alpha\beta}} = 0)$$

ou, sous forme explicite:

(18.13)
$$\Delta \underset{2p}{n_{ij}} = \underset{11}{\partial_{00}}\, \underset{2p-2}{n_{ij}} - \underset{2p}{F'_{ij}} - 2\, \underset{2p}{\Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{ij}}\, ,$$

(18.14)
$$\Delta \underset{2p}{n_{00}} = \underset{11}{\partial_{00}}\, \underset{2p-2}{n_{00}} - \underset{2p}{F'_{00}} - 2\, \underset{2p}{\Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{00}}\, ,$$

(18.15)
$$\Delta \underset{2p+1}{n_{0i}} = \underset{11}{\partial_{00}}\, \underset{2p-1}{n_{0i}} - \underset{2p+1}{F'_{0i}} - 2\, \underset{2p+1}{\Lambda'^{(\mathfrak{I})}_{0i}}\, .$$

Les équations (18.13) (18.14) (18.15) constituent ce que nous appelons le système d'équations du champ à la p-ème approximation. Les seconds membres de ces équations sont connus par les approximations antérieures; ce sont donc des équations de POISSON, qui se réduisent d'ailleurs dans la première approximation à des équations de LAPLACE.

19. — Propriété des potentiels de gravitation en première approximation.

Les développements des potentiels que nous avons posés tout à l'heure sont très généraux. Pour un ds^2 interprétable physiquement, les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas quelconques. Pour déterminer leurs propriétés il est nécessaire de considérer l'expression du tenseur d'énergie et les équations du cas intérieur.

Le terme prépondérant das un tenseur d'énergie est relatif à la matière pondérable et a pour valeur $\varrho\, u_\alpha\, u_\beta$. Pour les calculs qui suivent, il suffit donc de prendre

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha\, u_\beta\,,$$

les résultats resteront vrais si l'on considère un tenseur d'énergie plus général.

Les équations

$$S^{(\mathcal{I})}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}\,,$$

où

$$\chi = \frac{8\,\pi\, G}{c^2}\,,$$

G désignant la constante de l'attraction universelle, s'écrivent donc en première approximation

$$(19.2)\qquad \begin{cases} \Delta\, n_{00} = \dfrac{16\,\pi\, G}{c^2}\,\varrho + 0\,(1/c^4)\,, \\[2ex] \Delta\, n_{0i} = \dfrac{16\,\pi\, G}{c^3}\,\varrho\, v^i + 0\,(1/c^5)\,, & (v^i = dx^i/dt) \\[2ex] \Delta\, n_{ij} = \dfrac{16\,\pi\, G}{c^4}\,\varrho\, v^i\, v^j - \dfrac{2}{c^4}\,\Lambda'^{(\mathcal{I})}_{ij} + 0\,(1/c^6)\,. \end{cases}$$

Il résulte alors de la formule donnant la solution de l'équation de POISSON que l'on a

$$(19.3)\qquad n_{00} = 0\,(1/c^2)\,,\quad n_{0i} = 0\,(1/c^3)\,,\quad n_{ij} = 0\,(1/c^4)\,.$$

Etant données les relations entre $\eta_{\alpha\beta}$ et $n_{\alpha\beta}$, (19.3) justifie les développemens que nous avons posés en (18.1). On constate aussi, d'après (19.3) que le ds^2, aussi bien intérieur qu'extérieur, possède la propriété

$$n_{\substack{ij\\2}} = 0\,, \tag{19.4}$$

qui se traduit en fonction de $\eta_{\alpha\beta}$ par

$$\eta_{\substack{ij\\2}} - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\delta^{\mu\nu}\,\eta_{\substack{\mu\nu\\2}} = 0\,. \tag{19.5}$$

En multipliant par $-\delta^{ij}$ et contractant, on obtient

$$\eta_{\substack{00\\2}} + \frac{1}{2}\,\delta^{\mu\nu}\,\eta_{\substack{\mu\nu\\2}} = 0\,,$$

et (19.5) devient simplement

$$\eta_{\substack{ij\\2}} - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\,\eta_{\substack{00\\2}} = 0\,. \tag{19.6}$$

Tenant compte de (19.4) ou (19.6) on a donc:

$$\eta_{\substack{00\\2}} = \frac{1}{2}\,n_{\substack{00\\2}}\,, \qquad \eta_{\substack{ij\\2}} = \frac{1}{2}\,\delta^i_j\,n_{\substack{00\\2}}\,,$$

et

$$a = -1 + \frac{1}{c^2}\,(\eta_{\substack{ss\\2}} - \eta_{\substack{00\\2}}) + \frac{1}{c^4}\,(\eta_{\substack{ss\\4}} - \eta_{\substack{00\\4}}) + 0\,(1/c^6)\,,$$

$$\sqrt{|a|} = 1 - \frac{1}{c^2}\,\eta_{\substack{00\\2}} + \frac{1}{2c^4}\,(\eta_{\substack{00\\4}} - \eta_{\substack{ss\\4}} - \overset{2}{\eta}_{\substack{00\\2}}) + 0\,(1/c^6)\,,$$

$$= 1 - \frac{1}{2c^2}\,n_{\substack{00\\2}} + \frac{1}{2c^4}\left(n_{\substack{ss\\4}} - n_{\substack{00\\4}} - \frac{1}{4}\,\overset{2}{n}_{\substack{00\\2}}\right) + 0\,(1/c^6)\,.$$

20. — Formule du potentiel newtonien.

Considérons en particulier l'équation approchée (19.2) où les indices α, β, ont la valeur zéro

$$\frac{1}{c^2}\,\Delta\, n_{\substack{00\\2}} = \frac{16\,\pi\,G}{c^2}\,\varrho\,. \tag{20.1}$$

Elle exprime que la fonction $(1/4)\underset{2}{n}_{00}$ satisfait à l'équation de LAPLACE à l'extérieur des masses et à l'équation de POISSON à l'intérieur d'une masse continue. Sa solution est donnée par la formule du potentiel newtonien

$$\underset{2}{n}_{00} = -4\, G \iiint \frac{\varrho}{r}\, dV\,. \tag{20.2}$$

L'intégrale triple doit être étendue dans l'espace euclidien de représentation à tout le volume occupé par la masse. La quantité r désigne la distance d'un point de ce volume au point où l'on calcule le coefficient n_{00} du ds^2.

Si les masses se décomposent en N masses distinctes, l'intégrale triple est une somme de N intégrales partielles. Quand on assimile ces N masses à des points matériels, chaque intégrale se réduit à un seul élément, et le produit ϱdV est, pour chaque élément, remplacé en première approximation par la masse m_0 de la Mécanique classique (masse au repos relativiste). L'intégrale (20.2) se réduit à

$$\underset{2}{n}_{00} = -4\, G \sum_{k=1}^{N} \overset{k}{m}_0 / \overset{k}{r}\,, \tag{20.3}$$

avec

$$\overset{k}{r} = \sqrt{(x^1 - \overset{k}{\xi}{}^1)^2 + (x^2 - \overset{k}{\xi}{}^2)^2 + (x^3 - \overset{k}{\xi}{}^3)^2} \tag{20.4}$$

en désignant par $(\overset{k}{\xi}{}^i)$ les coordonnées d'espace du k-ème point matériel.

L'expression $-G\,\overset{k}{m}_0/\overset{k}{r}$ représente le potentiel newtonien créé par le k-ème point matériel sauf au point lui-même. Pour avoir sa signification au point $(x^i = \overset{k}{\xi}{}^i)$, il faut revenir sur la détermination de la solution $\underset{2}{n}_{00}$ de l'équation (20.2) et sur le passage à la limite réduisant un corps continu à un point matériel de masse m. Si le point (x^i) est intérieur au k-ème corps, selon des résultats classiques, l'intégrale relative à ce corps reste finie, et même tend vers zéro avec les dimensions de ce corps. Il en résulte que, si les N corps continus tendent vers des points matériels, la quantité (20.2) a pour limite, au point $(x^i = \overset{k}{\xi}{}^i)$, l'expression

$$(\underset{2}{n}_{00})_{x^i = \overset{k}{\xi}{}^i} = \Big(-4\, G \sum_{s \neq k} \overset{s}{m}_0/\overset{s}{r}\Big)_{x^i = \overset{k}{\xi}{}^i}\,. \tag{20.5}$$

21. Première approximation des équations du champ.

Supposons que les potentiels de gravitation admettent les développements limités :

$$
(21.1) \qquad \begin{cases} a_{00} = 1 + \dfrac{1}{c^2} \underset{2}{\eta}_{00} + 0\,(1/c^4)\,, \\[2ex] a_{0i} = \dfrac{1}{c^3} \underset{3}{\eta}_{0i} + 0\,(1/c^5)\,, \\[2ex] a_{ij} = -\,\delta^i_j + \dfrac{1}{c^2} \underset{2}{\eta}_{ij} + 0\,(1/c^4)\,. \end{cases}
$$

A la première approximation, seuls les termes linéaires sont différents de zéro. On a le système d'équations :

$$(21.2) \qquad \Delta\, \underset{2}{n}_{00} = 0\,,$$

$$(21.3) \qquad \Delta\, \underset{3}{n}_{0i} = 0\,,$$

$$(21.4) \qquad \underset{3}{F}{}^0 = \partial_r\, \underset{3}{n}_{r0} - \partial_0\, \underset{1}{n}_{00} = 0\,.$$

Quelle fonction harmonique faut-il prendre comme solution de (21.2)? Puisque nous cherchons un champ extérieur, dont les singularités dans W_3, supposées ponctuelles et à symétrie sphérique, représentent des particules matérielles, nous adoptons comme en (20.3) la solution :

$$(21.5) \qquad \underset{2}{n}_{00} = -\,4\,G \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{m}_0/\overset{s}{r}\,,$$

où $\overset{k}{r}$ est la distance du point (x^i) au k-ème point matériel, distance définie par (20.4).

Les équations (21.3), (21.4) et l'hypothèse sur le comportement des potentiels à l'infini, déterminent alors $\underset{3}{n}_{0i}$:

$$(21.6) \qquad \underset{3}{n}_{0i} = 4\,G \sum_{s=1}^{N} (\overset{s}{m}_0/\overset{s}{r})\, \overset{s}{\dot{\xi}}{}^i\,, \qquad\qquad (\overset{s}{\dot{\xi}}{}^i = \partial \overset{s}{\xi}{}^i/\partial t)\,.$$

Notons qu'on doit calculer les dérivées $\underset{1}{\partial_0}\, n_{\alpha\beta}$ $(\underset{1}{\partial_0} = \partial/\partial t)$ en considérant $n_{\alpha\beta}$ comme fonction de t par l'intermédiaire des coordonnées $(\overset{k}{\xi}{}^i)$ des masses données.

Nous poserons dans la suite

$$U = \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{U}, \tag{21.7}$$

$$\overset{s}{U} = - G \overset{s}{m}_0 / \overset{s}{r}, \tag{21.8}$$

d'où :

$$\underset{2}{n_{00}} = 4U,$$

$$\underset{3}{n_{0i}} = -4 \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{U} \dot{\overset{s}{\xi}}{}^{i},$$

et

$$a_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + 0\,(1/c^4),$$

$$a_{0i} = -\frac{4}{c^3} \Sigma \overset{s}{U} \dot{\overset{s}{\xi}}{}^{i} + 0\,(1/c^5),$$

$$a_{ij} = -\delta^i_j + \frac{2U}{c^2} \delta^i_j + 0\,(1/c^4);$$

$$\sqrt{|a|} = 1 - \frac{2U}{c^2} + 0\,(1/c^4).$$

22. — Equations newtoniennes du mouvement.

Nous calculons le flux $\overset{k}{\sigma}_\alpha$ du vecteur $\vec{S}_{(\alpha)}$:

$$\overset{k}{\sigma}_\alpha = \int_{\partial \overset{k}{C}{}^3} S_{(\alpha)i}\, \nu^i\, dS,$$

en prenaut dans l'espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_3$, une petite sphère Σ_k ayant pour centre la k-ème singularité du champ. Dans l'intégrale

$$\underset{l}{\overset{k}{\sigma}_\alpha} = \int_{\Sigma_k} \underset{l}{S_{(\alpha)j}}\, n^j\, d\Sigma = \int_{\Sigma_k} \underset{l}{A_{\alpha j}}\, n^j\, d\Sigma, \tag{22.1}$$

seuls les termes d'ordre -2 en $\overset{k}{r}$, lorsque $\overset{k}{r}$ tend vers zéro, donnent une contribution différente de zéro. La notation $\sim$ signifie que nous omettons d'écrire au second membre, des termes qui ne contribuent pas à l'intégrale (22.1), soit parce qu'ils ne sont pas d'ordre -2 en $\overset{k}{r}$ $(\overset{k}{r} \to 0)$, soit parce qu'ils ont la forme $\partial_l F_{(a)jl}$, $F_{(a)jl}$ étant antisymétrique en j, l (voir lemme paragraphe 13). On a alors :

$$\underset{3}{A}{}_{0j}^{(\mathcal{J})} = \frac{1}{2}\, \partial_{j0}\, \underset{1\,2}{n}_{00} \sim -2G \,\dot{\overset{k}{m}}_0\, \partial_j (1/\overset{k}{r}) \qquad (\dot{\overset{k}{m}}_0 = \partial \overset{k}{m}_0/\partial t) \tag{22.2}$$

d'où :

$$\underset{3}{\overset{k}{\sigma}}_0 = 8\pi G\, \dot{\overset{k}{m}}_0 \,. \tag{22.3}$$

L'équation

$$\overset{k}{\sigma}_0 = \frac{8\pi\, G}{c^3}\, \dot{\overset{k}{m}}_0 + 0\,(1/c^5) = 0 \tag{22.4}$$

montre qu'en première approximation, les masses sont indépendantes du temps.

On a de même :

$$\underset{4}{A}{}_{ij}^{(\mathcal{J})} = \frac{1}{2}\, \partial_{0j}\, \underset{1\,3}{n}_{0i} + \frac{1}{2}\, \partial_s \,(\delta_s^i\, \partial_0\, \underset{1\,3}{n}_{0j} - \delta_j^i\, \partial_0\, \underset{1\,3}{n}_{0s}) + \underset{4}{A}{}_{ij}^{\prime(\mathcal{J})} , \tag{22.5}$$

avec

$$\underset{4}{A}{}_{ij}^{\prime(\mathcal{J})} = 2\partial_i\, U\, \partial_j\, U + 4U\, \partial_{ij}\, U - 3\delta_j^i\, \partial_s\, U\, \partial_s\, U, \tag{22.6}$$

d'où

$$\underset{4}{A}{}_{ij}^{(\mathcal{J})} \sim \frac{1}{2}\, \partial_{0j}\, \underset{1\,3}{n}_{0i} + 2\partial_i\, U\, \partial_j\, U + 4U\, \partial_{ij}\, U - 3\delta_j^i\, \partial_s\, U\, \partial_s\, U\,. \tag{22.7}$$

Au second membre de (22.7), il y a des « termes croisés », c'est-à-dire des produits de $\overset{k}{U}$ ou de ses dérivées par $\overset{l}{U}$ $(l \neq k)$ ou par leurs dérivées. En développant les fonctions harmoniques $\overset{l}{U}$ $(l \neq k)$, analytiques en dehors de leurs pôles, en série de TAYLOR au voisinage du point $(x^i = \overset{k}{\xi}{}^i)$, nous avons :

$$\overset{l}{U} = \overset{l}{\widetilde{U}} + (x^p - \overset{k}{\xi}{}^p)\, \widetilde{\partial}_p\, \overset{l}{U} + \frac{1}{2\,!}(x^p - \overset{k}{\xi}{}^p)\,(x^q - \overset{k}{\xi}{}^q)\, \widetilde{\partial}_{pq}\, \overset{l}{U} + \ldots \qquad (l \neq k). \tag{22.8}$$

Les symboles $\overset{l}{\widetilde{U}}, \widetilde{\partial}_i\, \overset{l}{U}, \widetilde{\partial}_{ij}\, \overset{l}{U}, \ldots$ désignent les valeurs que prennent les fonctions $\overset{l}{U}\,(l \neq k)$ et leurs dérivées partielles au point $(x_i = \overset{k}{\xi}{}^i)$. Substituant

(22.8) dans (22.7) il vient:

$$\underset{4}{A}{}_{ij}^{(\mathcal{T})} \sim -2\,\partial_j \overset{k}{U}\,\ddot{\overset{k}{\xi}}{}^i + 2\,(\partial_i \overset{k}{U} \sum_{l\neq k} \widetilde{\partial}_j \overset{l}{U} + \partial_j \overset{k}{U} \sum_{l\neq k} \widetilde{\partial}_i \overset{l}{U}) \tag{22.9}$$

$$+ 4\,\partial_{ij} \overset{k}{U} \sum_{l\neq k} (x^p - \overset{k}{\xi}{}^p)\,\widetilde{\partial}_p \overset{l}{U} - 6\,\delta^i_j\,\partial_s \overset{k}{U} \sum_{l\neq k} \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U}\,.$$

En remplaçant $\overset{k}{U}$ par sa valeur (21.8) et en intégrant, on trouve:

$$\underset{4}{\overset{k}{\sigma}}{}_i = -8\,\pi\,G\,\overset{k}{m}_0\,(\ddot{\overset{k}{\xi}}{}^i + \sum_{l\neq k} \widetilde{\partial}_i \overset{l}{U})\,. \tag{22.10}$$

Les équations $\overset{k}{\sigma}_i = 0$ s'écrivent donc en première approximation:

$$-\frac{8\pi\,G}{c^4}\,\overset{k}{m}\,(\ddot{\overset{k}{\xi}}{}^i + \sum_{l\neq k} \widetilde{\partial}_i \overset{l}{U}) + 0\,(1/c^6) = 0\,. \tag{22.11}$$

Ce sont les équations de mouvement en Mécanique classique, d'un système de N points matériels soumis à des forces dérivant de la fonction de force $- U$.

23. — Deuxième approximation des équations du champ.

Supposons maintenant que les potentiels de gravitation admettent des développements jusqu'au sixième ordre:

$$a_{00} = 1 + \frac{2\,U}{c^2} + \frac{1}{c^4}\,\underset{4}{\eta}_{00} + 0\,(1/c^6)\,,$$

$$a_{0i} = -\frac{4}{c^3} \sum \overset{s}{U}\,\dot{\overset{s}{\xi}}{}^i + \frac{1}{c^5}\,\underset{5}{\eta}_{0i} + 0\,(1/c^7)\,, \tag{23.1}$$

$$a_{ij} = -\,\delta^i_j + \frac{2\,U}{c^2}\,\delta^i_j + \frac{1}{c^4}\,\underset{4}{\eta}_{ij} + 0\,(1/c^6)\,.$$

Nous trouvons d'après les relations du paragraphe 18:

$$\underset{4}{F}{}'^i = 4\,U\,\partial_i\,U\,,$$

$$\underset{5}{F}{}'^0 = -2\,\underset{3}{n}_{0s}\,\partial_s\,U + 4\,U\,\underset{1}{\partial_0}\,U\,, \quad (\underset{3}{n}_{0i} = -\frac{4}{c^3} \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{U}\,\dot{\overset{s}{\xi}}{}^i)$$

et :

$$\underset{4}{\Lambda}'^{(\mathcal{T})}_{ij} = 2\, \partial_i U\, \partial_j U + 4\, U\, \partial_{ij} U - 3\, \delta^i_j\, \partial_s U\, \partial_s U\,,$$

$$\underset{4}{\Lambda}'^{(\mathcal{T})}_{00} = 3\, \partial_s U\, \partial_s U\,,$$

$$\underset{5}{\Lambda}'^{(\mathcal{T})}_{0i} = -\, \partial_i \underset{3}{n_{0s}}\, \partial_s U + \underset{3}{n_{0s}}\, \partial_{si} U + 6\, \partial_i U\, \underset{1}{\partial_0} U\,.$$

D'où le système des équations du champ :

$$\Delta \underset{4}{n_{ij}} = 4\, \partial_i U\, \partial_j U + 2\, \delta^i_j\, \partial_s U\, \partial_s U\,, \qquad (\underset{2}{n_{ij}} = 0) \tag{23.4}$$

$$\Delta \underset{4}{n_{00}} = 4\, \underset{11}{\partial_{00}} U - 2\, \partial_s U\, \partial_s U\,, \tag{23.5}$$

$$\Delta \underset{5}{n_{0i}} = \underset{11}{\partial_{00}}\, \underset{3}{n_{0i}} + 4\, \partial_i \underset{3}{n_{0s}}\, \partial_s U - 12\, \partial_i U\, \underset{1}{\partial_0} U\,, \tag{23.6}$$

avec les conditions de coordonnées :

$$\underset{4}{F^i} = -\, \partial_r \underset{4}{n_{ri}} + \underset{1}{\partial_0}\, \underset{3}{n_{0i}} + 4\, U\, \partial_i U = 0\,, \tag{23.7}$$

$$\underset{5}{F^0} = \partial_r \underset{5}{n_{r0}} - \underset{1}{\partial_0}\, \underset{4}{n_{00}} - 2\, \underset{3}{n_{0r}}\, \partial_r U + 4\, U\, \underset{1}{\partial_0} U = 0\,. \tag{23.8}$$

Nous intégrons les équations du champ (23.4), (23.5), (23.6) en cherchant une solution particulière des équations avec second membre. Il faut ajouter à cette solution particulière la solution générale des équations homogènes. La solution générale est constituée par des fonctions harmoniques qui seront déterminées par les conditions d'isothermie (23.7), (23.8) et par la condition d'intégrabilité $\overset{k}{\underset{5}{\sigma_0}} = 0$.

Les équations du mouvement sont ainsi uniquement déterminées par les conditions

$$\overset{k}{\sigma_i} = 0 \qquad (i = 1\,, 2\,, 3)\,.$$

La solution des équations du champ n'est déterminée qu'à des fonctions harmoniques additives près. Il en résulte que les conditions d'isothermie n'ont qu'un rôle secondaire dans la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann. Elles ne conduisent pas à elles seules aux équations de mouvement. Elles interviennent alors par l'intermédiaire des fonctions harmoniques.

L'équation (23.5) s'intègre sans difficulté. Mais (23.4) pour $i \neq j$ et (23.6) ne peuvent pas être intégrées dans tout l'espace parce que leurs seconds membres contiennent des termes croisés autres que $\partial_s U \, \partial_s U \left(= \frac{1}{2} \Delta U\right)$. Cette circonstance toutefois n'a pas d'inconvénient si l'on ne considère que le problème du mouvement; en effet pour le calcul du flux du vecteur $\vec{S}_{(a)}$ il est suffisant de connaître les potentiels dans le voisinage des particules. On obtient alors aisément une solution particulière de (23.4), (23.6) dans le voisinage de la k-ème particule, en remplaçant au second membre de ces équations les fonctions $\overset{l}{U}$ $(l \neq k)$ par leurs développements (22.8) limités aux termes utiles, et en utilisant les relations suivantes déduites de (21.8):

$$
(23.9) \qquad \begin{cases} \Delta\left(\frac{1}{2} \overset{k}{U} (x^i - \overset{k}{\xi^i})\right) = \partial_i \overset{k}{U}, \\ \Delta\left(-\frac{1}{4} \overset{k}{r^2} \partial_i \overset{k}{U} \partial_j \overset{k}{U} + \frac{1}{4} \overset{k}{U^2} \delta^i_j\right) = \partial_i \overset{k}{U} \partial_j \overset{k}{U}, \\ \Delta\left(-\frac{1}{2} G \overset{k}{m_0} \overset{k}{r}\right) = \overset{k}{U}. \end{cases}
$$

1) Si l'on se place au voisinage de la k-ème particule, l'équation (23.4) peut s'écrire:

$$
(23.10) \qquad \Delta \underset{4}{n_{ij}} = 4 \, \partial_i \overset{k}{U} \partial_j \overset{k}{U} + 2 \, \delta^i_j \, \partial_s \overset{k}{U} \partial_s \overset{k}{U} + \\ + 4 \left[\partial_i \overset{k}{U} \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_j \overset{l}{U} + \partial_j \overset{k}{U} \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_i \overset{l}{U} + \delta^i_j \, \partial_s \overset{k}{U} \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U} + 0\,(1/\overset{k}{r})\right].
$$

L'intégration donne: (11)

$$
(23.11) \qquad \underset{4}{n_{ij}} = - \overset{k}{r^2} \partial_i \overset{k}{U} \partial_j \overset{k}{U} + 2 \, \overset{k}{U^2} \delta^i_j + 2 \left[\overset{k}{U} (x^i - \overset{k}{\xi^i}) \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_j \overset{l}{U} + \\ + \overset{k}{U} (x^j - \overset{k}{\xi^j}) \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_i \overset{l}{U} + \delta^i_j \, \overset{k}{U} (x^s - \overset{k}{\xi^s}) \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U} + 0\,(\overset{k}{r})\right] + \alpha_{ij} \overset{k}{U},
$$

(11) EINSTEIN ne tient pas compte dans son texte ([27], p. 230) des termes $0\left(\frac{x^m - \overset{k}{\xi^m}}{\overset{k}{r}}\right)$. Néanmoins ces termes apparaissent dans le tableau de l'intégrale $\underset{6}{\overset{k}{c_i}}$ (p. 240).

$\overset{k}{\alpha}_{ij} \overset{k}{U}$ désignant la fonction harmonique arbitraire. Nous nous servons de cet arbitraire pour satisfaire la condition d'isothermie (23.7). Portant (23.11) dans l'expression $\underset{4}{F^i}$, il vient:

$$(23.12) \qquad \underset{4}{F^i} = -4\, \partial_r \overset{k}{U} \dot{\overset{k}{\xi^r}} \dot{\overset{k}{\xi^i}} - 4\, \partial_i \overset{k}{U} \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{U}} + \overset{k}{\alpha}_{ir}\, \partial_r \overset{k}{U} + 0\left(\frac{x^m - \overset{k}{\xi^m}}{\underset{r}{k}}\right) = 0,$$

d'où la valeur du coefficient $\underset{k}{\alpha_{ij}}$:

$$(23.13) \qquad \overset{k}{\alpha}_{ij} = 4\, (\dot{\overset{k}{\xi}}_i \dot{\overset{k}{\xi^j}} + \delta^i_j \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{U}}).$$

2) Si l'on fait $i = j$ dans (23.4) on obtient l'équation

$$\Delta \underset{4}{n_{rr}} = 10\, \partial_s U\, \partial_s U,$$

dont la solution est:

$$(23.14) \qquad \underset{4}{n_{rr}} = 5\, U^2 + \sum_{k=1}^{N} \overset{k}{\alpha} \overset{k}{U},$$

La solution valable au voisinage de la k-ème particule doit être en accord avec la valeur de (23.11) pour $i = j$, ce qui donne:

$$(23.15) \qquad \overset{k}{\alpha} = 4\, \dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^s}} + 2 \sum_{l \neq k} \overset{l}{\widetilde{U}}.$$

3) On obtient de même comme solution de (23.5):

$$(23.16) \qquad \underset{4}{n_{00}} = -2\, G \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{m}_0\, \underset{11}{\partial_{00}} \overset{s}{r} - U^2 + 4 \sum_{s=1}^{N} \underset{2}{(\overset{s}{m}/\overset{s}{m}_0)} \overset{s}{U}.$$

la fonction harmonique $4 \sum_{s-1}^{N} \underset{2}{(\overset{s}{m}/\overset{s}{m}_0)} \overset{s}{U}$ sera déterminée pour que la condition

$$(23.17) \qquad \underset{5}{\overset{k}{\sigma}_0} = \int_{\Sigma_k} \underset{5}{\Lambda_{0j}}\, n^j\, d\, \Sigma = 0$$

soit satisfaite. On trouve après calcul:

$$\underset{5}{\overset{k}{\sigma}_0} = -8\, \pi\, G\, [-\underset{2}{\dot{\overset{k}{m}}} - \frac{1}{2} \underset{2}{\overset{k}{m}_0} (\sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U} \dot{\overset{l}{\xi^s}} + \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U} \dot{\overset{k}{\xi^s}})].$$

En notant que

$$\underset{1}{\partial_0}\, \overset{l}{\widetilde{U}} = \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U} (\overset{k}{\dot\xi^s} - \overset{l}{\dot\xi^s}) ,$$

$$\underset{1}{\partial_0}(\overset{k}{\dot\xi^s}\,\overset{k}{\dot\xi^s}) = -2 \sum_{l\neq k} \widetilde{\partial}_s \overset{l}{U}\,\overset{k}{\dot\xi^s} + 0\,(1/c^2),$$

on peut mettre l'expression $\underset{5}{\overset{k}{\sigma_0}}$ sous la forme :

$$\underset{5}{\overset{k}{\sigma_0}} = 8\pi G \frac{\partial}{\partial t}\Big[\underset{2}{\overset{k}{m}} - \frac{1}{2} \overset{k}{m_0}\Big(\sum_{l\neq k}\overset{l}{\widetilde{U}} + \overset{k}{\dot\xi^s}\,\overset{k}{\dot\xi^s}\Big)\Big]. \tag{23.18}$$

On tire de (23.17) (23.18) :

$$\underset{2}{\overset{k}{\dot m}} = \frac{1}{2} \overset{k}{m_0}\Big(\overset{k}{\dot\xi^r}\,\overset{k}{\dot\xi^r} + \sum_{l\neq k}\overset{l}{\widetilde{U}} + \overset{k}{A}\Big), \tag{23.19}$$

$\overset{k}{A}$ étant la constante d'intégration.

4) Enfin l'équation (23.6) se réduit dans le voisinage de la k-ème particule à :

$$\Delta \underset{5}{n_{0i}} = -4\sum_{s=1}^{N} \underset{11}{\partial_{00}}(\overset{s}{U}\,\overset{s}{\dot\xi^i}) + 4\Big[\partial_m \overset{k}{U}\sum_{l\neq k}\widetilde{\partial}_i \overset{l}{U}(3\overset{k}{\dot\xi^m} - 4\overset{l}{\dot\xi^m}) + \partial_i\overset{k}{U}\sum_{l\neq k}\widetilde{\partial}_m\overset{l}{U}(-4\overset{k}{\dot\xi^m}+3\overset{l}{\dot\xi^m}) + 0\,(1/r)\Big]. \tag{23.20}$$

On obtient en l'intégrant :

$$\underset{5}{n_{0i}} = \sum_{s=1}^{N} 2G\overset{s}{m_0}\,\underset{11}{\partial_{00}}(\overset{s}{r}\,\overset{s}{\dot\xi^i}) + \overset{k}{r}{}^2\,\partial\,\overset{k}{U}\,\partial_s\overset{k}{U}\,\overset{k}{\dot\xi^s} - \overset{k}{U}{}^2\,\overset{k}{\dot\xi^i} + 2\Big[\overset{k}{U}(x^m - \overset{k}{\xi^m})\sum_{l\neq k}\widetilde{\partial}_i\overset{l}{U}(3\overset{k}{\dot\xi^m} - 4\overset{l}{\dot\xi^m}) + \overset{k}{U}(x^i - \overset{k}{\xi^i})\sum_{l\neq k}\widetilde{\partial}^m\overset{l}{U}(-4\overset{k}{\dot\xi^m}+3\overset{l}{\dot\xi^m}) + 0\,(\overset{k}{r})\Big] + \overset{k}{\alpha_{0i}}\,\overset{k}{U}. \tag{23.21}$$

Nous disposons de la fonction harmonique arbitraire $\overset{k}{\alpha_{0i}}\,\overset{k}{U}$ pour satisfaire la condition d'isothermie (23.8). Il vient

$$\underset{5}{F}{}^{0} = \overset{k}{\alpha}_{0i}\, \partial_i \overset{k}{U} + 2\partial_i \overset{k}{U}\, \overset{k}{\dot{\xi}}{}^i (\overset{k}{\dot{\xi}}{}^s \overset{k}{\dot{\xi}}{}^s + A) - 4\partial_j \overset{k}{U} \sum_{l\neq k} \overset{l}{\widetilde{U}} (\overset{k}{\dot{\xi}}{}^i - 2\overset{l}{\dot{\xi}}{}^i) = 0\ ,$$

d'où

$$\overset{k}{\alpha}_{0i} = -\, 2\, \overset{k}{\dot{\xi}}{}^i (\overset{k}{\dot{\xi}}{}^r \overset{k}{\dot{\xi}}{}^r + A) + 4\, \overset{k}{\dot{\xi}}{}^i \sum_{l\neq k} \overset{l}{\widetilde{U}} - 8 \sum_{l\neq k} \overset{l}{\dot{\xi}}{}^i\, \overset{l}{\widetilde{U}}\ . \tag{23.22}$$

24. — Equations du mouvement.

Il nous faut maintenant calculer la quantité $\underset{6}{A}{}_{ij}^{(\mathfrak{J})}$, porter dans l'expression obtenue la solution des équations du champ, puis effectuer les calculs d'intégration conduisant à la valeur de $\underset{6}{\overset{k}{\sigma}}{}_i$:

$$\underset{6}{\overset{k}{\sigma}}{}_i = \int_{\Sigma_k} \underset{6}{A}{}_{ij}^{\prime(\mathfrak{J})}\, n^j\, d\Sigma\ . \tag{24.1}$$

Tous ces calculs sont très longs et sans intérêt. Aussi donnons-nous seulement les résultats. Des calculs analogues se trouvent dans les articles d'EINSTEIN et de ses collaborateurs, articles auxquels le lecteur pourra se reporter.

Nous obtenons [12] :

$$\begin{aligned} \underset{6}{A}{}_{ij}^{(\mathfrak{J})} &= \partial_s(\partial_s U \underset{4}{n}_{ij} - \partial_j U \underset{4}{n}_{is}) + \partial_s(U\, \partial_s \underset{4}{n}_{ij} - U\, \partial_j \underset{4}{n}_{is}) + \\ &+ \partial_s(\delta^i_j\, \partial_r U \underset{4}{n}_{rs} - \delta^i_s\, \partial_r U \underset{4}{n}_{rj}) + \partial_s(\delta^i_j U\, \partial_r \underset{4}{n}_{rs} - \delta^i_s U\, \partial_r \underset{4}{n}_{rj}) + \\ &+ \partial_s(\delta^i_s\, \partial_j U \underset{4}{n}_{,,} - \delta^i_j\, \partial_s U \underset{4}{n}_{rr}) + \frac{1}{2}\, \partial_s(\delta^i_s U\, \partial_j \underset{4}{n}_{rr} - \delta^i_j U\, \partial_s \underset{4}{n}_{rr}) + \end{aligned} \tag{24.2}$$

---

(12) L'expression (24.2) diffère de l'expression obtenue par EINSTEIN avec les conditions de coordonnées $\delta^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha n_{\beta 0} = 0$, $\partial_r n_{ri} = 0$ par les termes:

$$\partial_s(\delta^i_j U\, \partial_r \underset{4}{n}_{rs} - \delta^i_s U\, \partial_r \underset{4}{n}_{rj}) - \delta^i_j\, \partial_0 (\partial_s \underset{1}{U} \underset{3}{n}_{0s}) + 2\delta^i_j\, \partial_0 (\underset{1}{U}\, \partial_0 \underset{1}{U}) + 2\delta^i_j U\, \partial_{00} \underset{11}{U} +$$
$$+ 2\delta^i_j\, \partial_s U\, \partial_s UU.$$

$$+\frac{1}{2}\,\partial_s\,(\delta^i_s\,\underset{1}{\partial_0}\,\underset{5}{n}_{0j}-\delta^i_j\,\underset{1}{\partial_0}\,\underset{5}{n}_{0s})+\frac{1}{4}\,\partial_s(\underset{3}{n}_{0s}\,\partial_i\,\underset{3}{n}_{0j}-\underset{3}{n}_{0j}\,\partial_i\,\underset{3}{n}_{0s})+$$

$$+\,\partial_s\,(\delta^i_s\,\underset{1}{\partial_0}\,U\underset{3}{n}_{0j}-\delta^i_j\,\underset{1}{\partial_0}\,U\underset{3}{n}_{0s})+\frac{1}{2}\,\partial_s(\underset{3}{n}_{0s}\,\partial_j\,\underset{3}{n}_{0i}-\underset{3}{n}_{0j}\,\partial_s\,\underset{3}{n}_{0i})+$$

$$+\frac{1}{4}\,\partial_s(\delta^i_s\underset{3}{n}_{0r}\,\partial_r\,\underset{3}{n}_{0j}-\delta^i_j\,\underset{3}{n}_{0r}\,\partial_r\,\underset{3}{n}_{0s})+\frac{1}{2}\,\partial_s(\delta^i_j\,\underset{3}{n}_{0r}\,\partial_s\underset{3}{n}_{0r}-\delta^i_s\underset{3}{n}_{0r}\,\partial_j\,\underset{3}{n}_{0r})+$$

$$+\,\partial_s\,(\delta^i_s\,\partial_j\,U\,\underset{4}{n}_{00}-\delta^i_j\,\partial_s\,U\,\underset{4}{n}_{00})+\partial_s\,(\delta^i_s\,U\,\partial_j\,\underset{4}{n}_{00}-\delta^i_j\,U\,\partial_s\,\underset{4}{n}_{00})+$$

$$+\frac{1}{2}\,\underset{1}{\partial_{0j}}\,\underset{5}{n}_{0i}-\frac{1}{2}\,\underset{11}{\partial_{00}}\,\underset{4}{n}_{ij}-\frac{1}{2}\,\underset{3}{n}_{0s}\,\partial_{ij}\,\underset{3}{n}_{0s}\qquad[\beta_1+\beta_2+\beta_3]$$

$$+\frac{1}{4}\,\delta^i_j\,\partial_r\,\underset{3}{n}_{0s}\,\partial_r\,\underset{3}{n}_{0s}-\delta^i_j\,\underset{1}{\partial_0}\,(\partial_s\,U\,\underset{3}{n}_{0s})+\underset{1}{\partial_0}\,(\partial_j\,U\,\underset{3}{n}_{0i})\qquad[\beta_4+\beta_5+\beta_6]$$

$$+\,\underset{1}{\partial_0}\,(\partial_i\,U\,\underset{3}{n}_{0j})-\underset{1}{\partial_0}\,(U\,\partial_j\,\underset{3}{n}_{0i})-\underset{1}{\partial_0}\,(U\,\partial_i\,\underset{3}{n}_{0j})\qquad[\beta_7+\beta_8+\beta_9]$$

$$+\,5\,\delta^i_j\,\underset{1}{\partial_0}\,U\,\underset{1}{\partial_0}\,U+U\,\partial_{ij}\,\underset{4}{n}_{ss}\qquad[\beta_{10}+\beta_{11}]$$

$$-\,\partial_j\,U\,\partial_i\,\underset{4}{n}_{ss}-\partial_j\,U\,\partial_i\,\underset{4}{n}_{00}\qquad[\beta_{12}+\beta_{13}]$$

$$-\,\partial_i\,U\,\partial_j\,\underset{4}{n}_{00}+\delta^i_j\,\partial_s\,U\,\partial_s\,\underset{4}{n}_{00}\qquad[\beta_{14}+\beta_{15}]$$

$$+\,6\,U\,\underset{11}{\partial_{00}}\,U\,\delta^i_j+8\,U\,\partial_i\,U\,\partial_j\,U\qquad[\beta_{16}+\beta_{17}]$$

$$-\,9\,U\,\partial_s\,U\,\partial_s\,U\,\delta^i_j\,.\qquad[\beta_{18}]$$

Nous avons effectivement vérifié sur cette expression que la condition de divergence est satisfaite, comme il ressort de la première partie du théorème 1 (voir paragraphe 13, formule (13.1).

Bornons-nous au cas de deux particules. Soit $(l\,,k)$ une permutation des indices (1,2), les contributions des divers termes de $\underset{6}{\Lambda}{}^{(\mathfrak{I})}_{ij}$ dans l'intégrale $\overset{k}{\underset{6}{\sigma_i}}$ sont groupées dans le tableau suivant.

Tableau des intégrales de surface de

$$-\frac{1}{4\pi}\,\overset{k}{\underset{6}{\sigma_i}}=\frac{-1}{4\pi}\int_{\Sigma_k}\underset{6}{\Lambda}{}^{(\mathfrak{I})}_{ij}\;n^j\,d\,\Sigma\,.$$

	Expression	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{17}	β_{18}	Total
1	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_i \overset{l}{U} \overset{k}{\dot{\xi}^s} \overset{k}{\dot{\xi}^s}$	-1	$\frac{34}{15}$					$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{5}$			$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{15}$	$-\frac{4}{5}$			2
2	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_i \overset{l}{U} \overset{l}{\dot{\xi}^s} \overset{l}{\dot{\xi}^s}$												2	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$				3
3	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_i \overset{l}{U} \overset{k}{\dot{\xi}^s} \overset{l}{\dot{\xi}^s}$	$-\frac{8}{3}$		$\frac{16}{-3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{4}{3}$										-8
4	$\overset{k}{m}_0 \overset{l}{\tilde{U}} \overset{k}{\ddot{\xi}^i}$	-2	$-\frac{2}{3}$						-4	$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$	-7	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$\frac{32}{3}$	-6	-8
5	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_i \overset{l}{U} \overset{k}{U}$	4				$-\frac{4}{3}$	4	$\frac{4}{3}$					1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$				10
6	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_s \overset{l}{U} \overset{k}{\dot{\xi}^s} \overset{l}{\dot{\xi}^s}$	4				$-\frac{4}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$											8
7	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_s \overset{l}{U} \overset{k}{\dot{\xi}^s} \overset{k}{\dot{\xi}^i}$	$\frac{26}{-3}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$		$-\frac{8}{3}$	$\frac{-4}{15}$				$\frac{4}{15}$		$\frac{-4}{15}$	$\frac{12}{5}$			-8
8	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_s \overset{l}{U} \overset{l}{\dot{\xi}^s} \overset{k}{\dot{\xi}^i}$	4	$\frac{4}{3}$			$\frac{-4}{5}$		$\frac{8}{15}$	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{-3}$									6
9	$\overset{k}{m}_0 \tilde{\partial}_s \overset{l}{U} \overset{l}{\dot{\xi}^s} \overset{l}{\dot{\xi}^i}$	-4				$\frac{4}{3}$	-4	$-\frac{4}{3}$												-8
10	$\overset{k}{m}_0 \overset{l}{m}_0 \underset{11}{\tilde{\partial}_{00i} \overset{l}{r}}$													-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$				-1

$$\left(\underset{11}{\partial_{00i}} \overset{l}{r} = \frac{\partial^3 r}{\partial \overset{k}{\xi^s} \partial \overset{k}{\xi^r} \partial \overset{k}{\xi^i}} \dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^r}}\right).$$

On trouve:

$$(24.3) \quad \underset{6}{\overset{k}{\sigma_i}} = - 8\pi G^2 \overset{k}{m_0} \overset{l}{m_0} \left[\left(\dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^s}} + \frac{3}{2} \dot{\overset{l}{\xi^s}} \dot{\overset{l}{\xi^s}} - 4 \dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{l}{\xi^s}} - 4 \frac{G \overset{l}{m_0}}{r} - 5 \frac{G \overset{k}{m_0}}{r} + \overset{l}{A}\right) \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi^i}} \left(\frac{1}{r}\right) + \{4 \dot{\overset{k}{\xi^s}} (\dot{\overset{l}{\xi^i}} - \dot{\overset{k}{\xi^i}}) + 3 \dot{\overset{l}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^i}} - 4 \dot{\overset{l}{\xi^s}} \dot{\overset{l}{\xi^i}}\} \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi^s}} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \overset{k}{\xi^s} \partial \overset{k}{\xi^r} \partial \overset{k}{\xi^i}} \dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^r}}\right],$$

où r est la distance des deux particules. Les conditions:

$$(24.3) \quad \frac{1}{c^4} \underset{4}{\overset{k}{\sigma_i}} + \frac{1}{c^6} \underset{6}{\overset{k}{\sigma_i}} + 0\,(1/c^8) = 0\,,$$

où $\underset{4}{\overset{k}{\sigma_i}}$ et $\underset{6}{\overset{k}{\sigma_i}}$ ont les valeurs (22.10) et (24.3) fournissent les équations de mouvement en seconde approximation.

$$(24.5) \quad \ddot{\overset{k}{\xi_i}} - G \overset{l}{m_0} \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi^i}} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{c^2} G \overset{l}{m_0} \times$$

$$\times \left[\left(\dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^s}} + \frac{3}{2} \dot{\overset{l}{\xi^s}} \dot{\overset{l}{\xi^s}} - 4 \dot{\overset{k}{\xi}} \dot{\overset{l}{\xi^s}} - 4 \frac{G \overset{l}{m_0}}{r} - 5 \frac{G \overset{k}{m_0}}{r} + \overset{l}{A}\right) \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi^s}} \left(\frac{1}{r}\right) + \{4 \dot{\overset{k}{\xi^s}} (\dot{\overset{l}{\xi^i}} - \dot{\overset{k}{\xi^i}}) + 3 \dot{\overset{k}{\xi^i}} \dot{\overset{l}{\xi^s}} - 4 \dot{\overset{l}{\xi^s}} \dot{\overset{l}{\xi^i}})\} \frac{\partial}{\partial \overset{k}{\xi^s}} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \overset{k}{\xi^s} \partial \overset{k}{\xi^r} \partial \overset{k}{\xi^i}} \dot{\overset{k}{\xi^s}} \dot{\overset{k}{\xi^r}}\right] + 0\,(1/c^4)\,.$$

Le terme $\overset{l}{A}$ est nouveau, les autres termes sont les mêmes que ceux obtenus par EINSTEIN, INFELD et HOFFMANN.

25. — Influence de la masse.

Les équations (24.5) sont écrites avec la masse m_0. Bien que la masse $m_0 u^0 \sqrt{-a}$ soit la plus conservative le long des lignes de courant ([13]), nous ne l'employons pas ici. En effet, elle ne se présente pas d'une façon naturelle dans notre méthode ([14]).

La masse $M = m_0 u^0 \sqrt{-a}$ généralise celle de la relativité restreinte:

$$m_0 u^0 \sqrt{-a} = m_0 \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} - 3U\right)\right] + 0(1/c^4).$$

Si l'on utilise cette masse, on aura en plus le terme suivant au second membre de (24.5):

$$\frac{1}{c^2} G \overset{l}{M} \left(\frac{\overset{l}{\dot\xi}{}^s \overset{l}{\dot\xi}{}^s}{2} + 3\frac{G\overset{k}{M}}{2}\right).$$

([13]) F. Hennequin. Thèse, Paris (1956) p. 27-29.

([14]) Einstein considère la masse:

$$m = m_0 + \frac{1}{c^2}\underset{2}{m} + \frac{1}{c^4}\underset{4}{m} + \ldots = m_0\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2 + U}{2}\right)\right] + 0(1/c^4)$$

où les $\underset{2}{m}, \underset{4}{m}, \ldots$ sont déterminés par l'équation $\overset{k}{\sigma_0} = 0$.

(La deuxiéme partie de ce travail paraîtra daus le premier fasc. 1959 de cette révue)