ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BRUNO FORTE

Proprietà ricorrenti del moto non stazionario di un fluido e relativa estenzione ad un numero qualunque di dimensioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 4 (1958), p. 397-416

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_397_0>

PROPRIETÀ RICORRENTI DEL MOTO NON STAZIONARIO DI UN FLUIDO E RELATIVA ESTENZIONE AD UN NUMERO QUALUNQUE DI DIMENSIONI

di BRUNO FORTE (Pisa)

1. — INTRODUZIONE. Verranno qui riprese, in un breve cenno, alcune questioni riguardanti i fondamenti della meccanica statistica, ai quali è intimamente collegato lo studio delle proprietà ricorrenti del moto di un fluido, a chiarimento dei motivi che lo hanno suggerito.

Il moto dei punti rappresentativi dello stato di un sistema olonomo, ad n gradi di libertà, si può riguardare, in virtù del teorema di Liouville [1], come quello di un fluido incomprimibile in una regione Ω dello spazio S a $2n$ dimensioni. Se, inoltre, il sistema considerato è conservativo, nel senso che la sua hamiltoniana H non dipende esplicitamente dal tempo t, tale moto è stazionario, in quanto la distribuzione euleriana delle velocità dei punti rappresentativi in Ω, caratterizzata dalle classiche equazioni di Hamilton (¹):

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \dfrac{\partial H(p/q)}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H(p/q)}{\partial q_h} \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

è in tal caso indipendente dal tempo. Se infine la regione Ω di S, accessibile ai punti rappresentativi, è, come risulta nella generalità dei casi, di misura finita, sussiste per il loro moto la nota proprietà di ricorrenza di H. Poincaré [2]. A questa proprietà è stato riconosciuto un ruolo impor-

---

(¹) Ove si sono indicate con q_h le coordinate lagrangiane del sistema in esame e con p_h i momenti cinetici ad esse associati.

tante {[3] e [4]} sia in ciò che riguarda la esistenza del limite delle medie temporali [5] sia nel teorema ergodico propriamente detto {[5] e [6]}, che assicura, limitatamente ai sistemi conservativi, la equivalenza delle medie temporali alle medie in fase, rendendo così naturale la transizione dalla meccanica classica alla meccanica statistica dei sistemi olonomi [6].

In vista delle possibili applicazioni, intese al conseguimento di premesse analoghe (esistenza del limite delle medie temporali e loro equivalenza alle medie in fase) ad una statistica dei sistemi olonomi non conservativi, è quindi spontaneo proporsi di analizzare se e fino a qual punto sia possibile estendere, al moto non stazionario dei punti rappresentativi di sistemi siffatti, nello spazio delle fasi S, la *proprietà di ricorrenza di H. Poincaré,* sopra citata.

Dall'esame critico dell'enunciato di tale proprietà e della sua parziale estensione, dovuta a M. Loève [7], risulteranno precisati, nel successivo § 2, i termini dell'oggetto della presente ricerca.

2. — Considerazioni critiche sul teorema di ricorrenza di H. Poincaré e sulla estensione di M. Loève.

Si consideri un fluido, di natura qualunque, in moto entro una regione Ω (2), di misura finita, di uno spazio S, che, senza ledere la generalità del risultatô, verrà supposto tridimensionale. Sia A un generico luogo di punti geometrici di Ω, di misura non nulla. Si prendano quindi in esame le particelle che occupano A ad un dato istante, che verrà assunto, convenzionalmente, come istante zero; fissato, ad arbitrio, un intervallo di tempo $\tau > 0$, siano:

$$\ldots, A_{-n}, \ldots, A_{-1}, A_0 \equiv A, A_1, \ldots, A_n, \ldots \tag{2-1}$$

le regioni di Ω occupate da tali particelle nella corrispondente successione di istanti

$$\ldots, -n\tau, \ldots, -\tau, 0, \tau, \ldots, n\tau, \ldots \tag{2-2}$$

Si supponga inoltre che la misurabilità sia una proprietà invariantiva per il moto in esame, che cioè dalla misurabilità di A segua la misurabilità di tutti gli insiemi A_r $(r = \ldots, -n, \ldots, -1, 0, -1, \ldots, n, \ldots)$.

(2) Senza peraltro occuparla ad ogni istante per completo. Ove, nel seguito, si farà uso della ipotesi di completo riempimento verrà dichiarato esplicitamente.

Si supponga infine che il fluido considerato sia limitatamente comprimibile, che cioè la estensione degli insiemi A_r, relativa a quella di Ω, sia, per ogni valore di r, maggiore o tutt'al più eguale ad un numero positivo $p \leq 1$.

M. Loève ha dimostrato [7], riguardandola come particolare rappresentazione fenomenologica di una proprietà astratta relativa alle successioni di eventi, la seguente proposizione: Comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\,(< p^2)$, si può, in corrispondenza ad esso determinare una regione $A_{r'}$, nella successione (2-1), tale che le particelle di fluido che la occupano all'istante $r'\tau$ e che ripassano per essa infinite volte, negli istanti successivi a $r'\tau$, formano un sottoinsieme di $A_{r'}$ di misura relativa $\mu \geq p^2 - \varepsilon$.

Per ciò che concerne questo enunciato si può facilmente notare:

a) che è incompleto, perchè non esclude che la proprietà di ricorrenza considerata possa *non* essere verificata da particelle di fluido che all'istante $r'\tau$ occupino un sottoinsieme di $A_{r'}$, di misura $\mu' = p - p^2 > 0 \quad (p < 1)$.

b) che la sua formulazione è di natura lagrangiana, perchè detta proprietà di ricorrenza si riferisce a quelle particolari particelle che all'istante $r'\tau$ si trovano nella regione $A_{r'}$, nulla potendosi con ciò dire sulla sua validità per le particelle che occupano la medesima regione in istanti diversi da quello considerato.

D'altra parte H. Poiocaré ha dimostrato [2], nella ipotesi di incomprimibilità del fluido (poco più restrittiva della comprimibità limitata) e della stazionarietà del moto (3), che: Comunque si fissi un insieme A di punti geometrici di Ω, quasi tutte le particelle di fluido che li occupano ad un generico istante $r\tau$ ripassano e sono passate per A infinite volte nella successione di istanti (2-2).

Tenendo presenti le osservazioni (a) e (b), risulta quindi evidente che la proprietà di ricorrenza di M. Loève si discosta da quella di H. Poincaré, relativa ai moti stazionari, per i seguenti due aspetti:

a') perchè riguarda alcune e non quasi tutte le particelle che ad un determinato istante occupano una regione assegnata A.

b') perchè la sua formulazione è di natura molecolare.

Nel presente lavoro ci si propone perciò:

a'') di dare la dimostrazione della proprietà di ricorrenza del moto non stazionario di un fluido che, in forma molecolare, sia la più completa estensione del teorema di H. Poincaré.

b'') di riconoscere tutto ciò che si può dire, dal punto di vista euleriano, nei riguardi della ricorrenza del moto.

---

(3) Formulando altresì l'ipotesi di completo riempimento, in questo caso del resto inessenziale, come avremo modo di porre in luce nel seguito.

Il successivo § 3 sarà dedicato ad alcune proprietà, di natura astratta e di facile dimostrazione, relative alle successioni di insiemi misurabili; il loro contenuto fenomenologico, che, nel contempo, verrà posto in risalto, con la traduzione dei risultati in termini cinematici, renderà acquisite le seguenti proprietà di ricorrenza, in forma lagrangiana, del moto non stazionario di un fluido:

I — Comunque si fissi un numero positivo $\epsilon\,(< p)$ per *quasi tutte* le configurazioni A_r (cioè a meno di un numero finito, dipendente da ϵ, di esse) accade che le particelle di fluido, che nell'istante $r\tau$ si trovano in A_r e che nella successione di istanti (2-2) sono ripassate o ripassano per essa *almeno una volta*, formano un sottoinsieme di A_r di misura relativa $\mu \geq p - \epsilon$.

II — Comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\,(< p)$ per *una infinità numerabile* di configurazioni $A_{r'}$ (dipendenti dall'ε prefissato) è vero che le particelle di fluido, che occupano $A_{r'}$ nell'istante $r'\tau$ e che nella successione di istanti (2-2) ripassano o sono passate per essa *infinite volte*, formano un sottoinsieme ei $A_{r'}$ di misura relativa $\mu \geq p - \varepsilon$.

È questa proprietà II la diretta estensione del teorema di Poincaré, in forma lagrangiana, esente dalla obbiezione (a) formulata nei riguardi della proposizione di M. Loève.

Dopo avere esposte, nel § 4, due proprietà di ricorrenza di forma parzialmente euleriana, nel successivo § 5 verrà infine dimostrato che: Comunque si fissi una regione A, luogo di punti geometrici di Ω, per *quasi tutti* i punti P di A ed *a meno di un numero finito* di valori di r, la particella di fluido, che nell'istante $r\tau$ si trova in P, ripassa o è ripassata per A *infinite volte*, nella successione di istanti (2-2).

Riteniamo che questa proprietà di ricorrenza, in forma euleriana, del moto di un fluido soddisfi tutto quanto si è richiesto in (b''), essa infatti può riguardarsi come la diretta e completa estensione al caso non stazionario della citata proprietà, dall'aspetto totalmente euleriano, riconosciuta da H. Poincaré.

3. — Proprietà delle successioni $\{A_r\}$ di insiemi misurabili e proprietà di ricorrenza in forma lagrangiana del moto non stazionario di un fluido.

Sia Ω un insieme di elementi P, $\mathcal{F}(A)$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω σ-completa [8], contenente Ω e l'insieme vuoto, sia inoltre $\mu(A)$ una misura normalizzata ($\mu(\Omega) = 1$) definita e continua in $\mathcal{F}(A)$ e numerabilmente additiva, sia infine $\{A_r\}$ una generica successione di sottoinsiemi appartenenti ad $\mathcal{F}(A)$, con $\mu(A_r) \geq p > 0$, per ogni valore dell'intero relativo r. Sia inoltre $C_{r,s}$ il sottoinsieme di A_r definito dalla seguente relazione:

$$C_{r,s} = A_r - A_r \cap \left(\bigcup_{\substack{i=-s \\ i \neq 0}}^{s} A_{r+i} \right) \quad \begin{cases} r = \ldots - n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots \\ s = 1, 2, \ldots, n, \ldots \ldots \ldots \end{cases} \tag{3-1}$$

Sussiste, per ogni famiglia di insiemi siffatti $\{C_{r,s}\}$, la seguente proposizione:

Comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon (< p)$, è sempre possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un intero positivo $\bar{r}$, tale che ad ogni intero $|r| \geq \bar{r}$ risulti associato un numero intero $s_r > 0$, per il quale sia:

$$\mu(C_{r,s}) < \varepsilon \qquad \text{per ogni } |r| \geq \bar{r} \text{ ed ogni } s \geq s_r. \tag{3-2}$$

Per dimostrare la (3-2) basta osservare che per ogni fissato r la successsione $\{C_{r,s}\}$ risulta, in base alla definizione (3-1), non crescente al crescere di s $(s = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, esiste quindi il limite:

$$\lim_{s \to +\infty} C_{r,s} = C_r = A_r - A_r \cap \left(\bigcup_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty} A_{r+i} \right) \tag{3-3}$$

e la misura del limite è il limite della misura [8], in virtù della continuità della misura $\mu(A)$ della σ-completezza della famiglia $\mathcal{F}(A)$, cui apparterrà C_r [8],

$$\lim_{s \to +\infty} \mu(C_{r,s}) = \mu(C_r) \tag{3-4}$$

Se ora si fissa ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < p$, si può determinare in corrispondenza ad esso e ad ogni assegnato r un intero $s_r > 0$, tale che, per ogni $s \geq s_r$, sia:

$$\mu(C_{r,s}) \leq \mu(C_r) + \varepsilon \qquad \text{per ogni fissato } r. \tag{3-5}$$

D'altra parte si può riconoscere che al crescere del valore assoluto di r la $\mu(C_r)$ tende a zero, cioè:

$$\lim_{r \to +\infty} \mu(C_r) = 0. \tag{3-6}$$

Infatti, per la (3-3), C_r è l'insieme dei punti di A_r che non appartengono a nessun altro insieme della successione $\{A_r\}$ data; quindi gli insiemi

$\{C_r\}$, relativi a valori diversi di r, sono disgiunti, per cui si ha:

$$\mu\left(\bigcup_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, C_r\right) \leq \mu(\Omega) = 1$$

e, per essere $\mu(A)$ numerabilmente additiva:

$$\mu\left(\bigcup_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, C_r\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(C_r) \leq 1 \; .$$

Dalla convergenza della serie $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(C_r)$ segue subito la (3-6).

In corrispondenza al numero positivo ε si può allora determinare un intero $\bar{r} > 0$, tale che sia:

$$\mu(C_r) < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad |r| \geq \bar{r};$$

da questo e dalla (3-5) segue l'asserto (3-2).

La traduzione in termini cinematici della proposizione ora dimostrata, quando si consideri il caso particolare in cui gli insiemi $\{A_r\}$ sono le configurazioni relative agli istanti:

$$(3\text{-}7) \qquad \ldots, -n\tau, \ldots, -\tau, 0, \tau, \ldots, n\tau, \ldots$$

di quelle particelle che all'istante iniziale occupano una data regione A del volume Ω occupato dal fluido (in moto non stazionario), preso in considerazione, porta a concludere che:

α) Comunque si fissi un numero positivo ε $(< p)$, al più per un numero finito di configurazioni A_{r^*} (dipendenti dall'ε prescelto) della successione $\{A_r\}$ può verificarsi che le particelle di fluido che nell'istante $r^*\tau$ si trovano in A_{r^*} e che non sono passate nè ripassano mai per essa negli istanti della successione (3-7), precedenti e rispettivamente successivi a $r^*\tau$, formino, con le loro posizioni nell'istante anzidetto, un sottoinsieme di A_r di misura relativa $\mu \geq \varepsilon$.

Se ciò infatti si verificasse per una infinità di configurazioni A_{r^*}, detto C_{r^*} l'insieme dei punti di A_{r^*}, tale che le particelle che lo occupano all'istante $r^*\tau$ non sono passate nè ripassano mai per A_{r^*}, risulterebbe, per una infinità (numerabile) di valori di r^*:

$$(3\text{-}8) \qquad \mu(C_{r^*}) \geq \mu(A_{r^*}) - p + \varepsilon \geq \varepsilon \, ,$$

in contraddizione con la (3-6), sopra verificata.

Si può ora riconoscere che tale proprietà di ricorrenza, di forma lagrangiana, è già una generalizzazione del teorema di H. Poincarè; questo infatti è, nella ipotesi di stazionarietà del moto, una sua conseguenza quasi immediata. Basta ricordare [2] che, proprio in virtù della stazionarietà del moto, ad ogni elemento comune ad A_r e al generico $A_{r'}$, appartenente cioè alla $A_r \cap A_{r'}$, corrisponde un elemento comune ad $A_0 \equiv A$ e ad $A_{r'-r}$, da ciò segue che l'insieme $\overline{A}$ delle particelle che occupano A all'istante iniziale, del resto generico, e che non sono passate nè ripassano mai per tale regione, è contenuto nel sottoinsieme C_0 dei punti di A corrispondenti a quelli di C_r, quindi, nella ulteriore ipotesi di incomprimibilità del fluido, è:

$$\mu(\overline{A}) \leq \mu(C_0) = \mu(C_r) < \varepsilon \, .$$

Dalla arbitrarietà di ε si conclude che è $\mu(\overline{A}) = 0$: quasi tutte le particelle che occupano la regione A al generico istante t, nella ipotesi di stazionarietà del moto e di incomprimibilità, ripassano perciò o sono passate almeno una volta per A. Si potrebbe anche aggiungere (4) che dette particelle ripassano per A infinite volte nella successione di istanti (3-7), ma sarebbe superfluo insistere su questo, poichè tale circostanza si può dedurre, più direttamente, come caso particolare, dalla proprietà di ricorrenza dei moti non stazionari, sempre di forma lagrangiana, connessa con la proprietà astratta relativa alle successioni di insiemi misurabili, che verrà messa in luce qui di seguito.

Sia C_r^s il sottoinsieme di A_r definito dalla relazione:

(3-9)
$$C_r^s = A_r - A_r \cap \left\{ \left(\bigcup_{-\infty}^{+\infty}{}_i \, A_{r+i} \right) - \left(\bigcup_{-s}^{+s}{}_i \, A_{r+i} \right) \right\}$$

$$\begin{cases} r = \ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots \\ s = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

è:

(3-10)
$$\liminf_{|r| \to +\infty} \mu(C_r^s) = 0 \, ,$$

ovvero, fissato ad arbitrio un numero positivo ε ed un intero $\overline{\overline{r}} > 0$, è sempre possibile determinare, in corrispondenza ad essi, un intero r, per il quale sia:

$$|r| \geq \overline{\overline{r}} \qquad \text{e} \qquad \mu(C_r^s) < \varepsilon \qquad \text{per ogni valore di } s.$$

---

(4) Tale precisazione è una conseguenza della (3-2); essa infatti consente di individuare una infinità numerabile di istanti diversi tra loro, tali che, quasi tutte le particelle che occupano la regione A, all'istante iniziale, ripassano per A in ciascuno di essi.

Se, infatti, la (3-10) non fosse vera, si potrebbe determinare una successione di interi positivi $\{s_r\}$, per la quale si abbia:

$$\liminf_{|r| \to +\infty} \mu(C_r^{s_r}) = c > 0 \tag{3-11}$$

e quindi, comunque si fissi un numero positivo $\bar{c} < c$, si potrebbe, in corrispondenza ad esso, determinare un intero $r^{**} > 0$, tale che per ogni $r \geq r^{**}$, sia:

$$\mu(C_r^{s_r}) \geq \bar{c}. \tag{3-12}$$

Si consideri ora la successione $\{B_h\}$ estratta dalla successione $\{A_r\}$ e così definita:

$$B_0 = A_0\,,\ B_1 = A_{s_0+1},\ B_{-1} = A_{-s_{s_0+1}-1}\,,\ B_2 = A_{s_{-s_{s_0+1}-1}+1}\,. \tag{3-13}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tali insiemi B_h soddisfano alla relazione:

$$B_h - B_h \cap \left(\bigcup_{\substack{-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty}{}_i\, B_{h+i}\right) \supset A_{r'} - A_{r'} \cap \left\{\left(\bigcup_{-\infty}^{+\infty}{}_i\, A_{r'+i}\right) - \left(\bigcup_{-s_{r'}}^{+s_{r'}}{}_i\, A_{r'+i}\right)\right\} \equiv C_{r'}^{s_{r'}} \tag{3-14}$$

ove è $A_{r'} \equiv B_h$, e quindi, per $r' \geq r^{**}$, si ha:

$$\mu\left(B_h - B_h \cap \left(\bigcup_{\substack{-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty}{}_i\, B_{h+i}\right)\right) > \bar{c} \tag{3-15}$$

d'altra parte gli insiemi della successione $\bar{B}_h$, con:

$$\bar{B}_h = B_h - B_h \cap \left(\bigcup_{\substack{-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty}{}_i\, B_{h+i}\right),$$

sono, in virtù di questa stessa relazione di definizione, a due a due disgiunti. Dalla convergenza della serie:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, \mu(\bar{B}_h) \leq \mu(\Omega) = 1$$

segue perciò:

$$\lim_{|h| \to +\infty} \mu(\overline{B}_h) = 0 \tag{3-16}$$

che contraddice la (3-15).

La traduzione in termini cinematici della proposizione, ora dimostrata, dà luogo alla seguente ulteriore proprietà di ricorrenza, in forma lagrangiana, del moto non stazionario di un fluido:

β) Comunque si fissi un numero positivo ε $(< p)$, per una infinità (numerabile) di configurazioni A_r, della successione (2-1), è vero che le particelle che occupano A_r, all'istante $r\tau$, e che non sono passate nè ripassano per essa *infinite volte* formano, con le rispettive posizioni all'istante $r\tau$, un sottoinsieme di A_r di misura relativa $\mu < \varepsilon$.

Infatti se ciò non fosse vero, in corrispondenza al numero prefissato ε e ad ogni intero r, si potrebbe determinare un intero positivo s_r, tale che, detto $C_r^{s_r}$ l'insieme dei punti di A_r che non appartengono a nessuna delle configurazioni successive ad A_{r+s_r} e precedenti ad A_{r-s_r}, sia:

$$\mu(C_r^{s_r}) \geq \varepsilon$$

da cui si avrebbe:

$$\liminf_{|r| \to +\infty} \mu(C_r^{s_r}) \geq \varepsilon\,,$$

in contraddizione con la (3-10).

Per i moti stazionari, qualora si tenga presente la particolare circostanza, per la quale ad ogni elemento comune alla coppia di configurazioni A_r e $A_{r'}$ $(r \neq r')$ corrisponde un elemento comune ad A_0 e ad $A_{r'-r}$, in base alla proprietà di ricorrenza posta in luce sopra, è immediato concludere che: comunque si fissi una regione A, luogo di punti geometrici di Ω, quasi tutte le particelle che la occupano all'istante iniziale, del resto generico, sono passate o ripassano per essa infinite volte nella successione di istanti (3-7).

4. — Proprietà di ricorrenza in forma parzialmente euleriana del moto non stazionario di un fluido incomprimibile e loro conseguenze a carattere totalmente euleriano.

Per quanto si vuole ora riconoscere, è necessario formulare le due ipotesi seguenti:

i) che il fluido sia rigorosamente incomprimibile,

ii) che esso occupi per completo la regione Ω, di misura finita.

Nei riguardi della prima di tali ipotesi si può notare che non è, in effetti, molto restrittiva e non lo è affatto quando il moto in esame sia quello dei punti rappresentativi di un sistema olonomo in una regione Ω (di misura finita) dello spazio delle fasi, essendo da esso verificata, come si è avuto modo di ricordare nel § 1, in virtù del teorema di Liouville.

A proposito della seconda ipotesi si può osservare che, se il fluido è incomprimibile, basta che essa sia soddisfatta ad un dato istante t perchè lo sia sempre.

Iniziamo con lo stabilire, usufruendo di tali ipotesi, due proprietà di ricorrenza (α') e (β'), che possono riguardarsi come le duali [5], delle due proprietà di ricorrenza in forma lagrangiana (α) e (β), riconosciute nel precedente § 3.

Si prenda in esame una generica regione A, di misura $p > 0$ e luogo di punti geometrici di Ω, e la successione di istanti:

$$\ldots, -n\tau, \ldots, -\tau, 0, \tau, \ldots, n\tau, \ldots. \tag{4-1}$$

Si distinguano le particelle del fluido in esame facendo riferimento ai punti P^* di un insieme $\Omega^* \equiv \Omega$, che possono, eventualmente, essere le posizioni da esse occupate in Ω ad un dato istante t^* [6], come noi d'ora innanzi supporremo che sia.

Ora, tra le particelle di fluido che ad un dato istante $r\tau$ (con r intero relativo) transitano per A, ve ne possono essere, certo, alcune che non sono passate nè ripassano per la regione A negli istanti della successione (4-1), rispettivamente, precedenti e successivi ad $r\tau$. Indichiamo con B_r^* la loro totalità. L'insieme B_r^*, se misurabile [7], è dotato di una misura (relativa) μ che, per la ipotesi di incomprimibilità, è invariante nel tempo, e coincide con la misura dell'insieme dei punti geometrici di A, occupati da tale insieme di particelle all'istante $r\tau$; sarà quindi $\mu(B_r^*) \leq \mu(A) = p$.

In corrispondenza alla successione di istanti (4-1) viene così ad essere definita una famiglia di insiemi misurabili

$$\ldots, B_{-n}^* \ldots, B_{-1}^*, B_0^*, B_1^*, \ldots, B_n^*, \ldots \tag{4-2}$$

---

(5) Queste, infatti, si tradurranno in quelle quando laddove si parla di particelle, si considerino punti geometrici e viceversa.

(6) Verranno qui di seguito contraddistinti con * gli insiemi di particelle nello spazio di riferimento Ω^*, con la sopralineatura gli insiemi di punti geometrici di Ω da esse occupati al generico istante.

(7) e lo sarà senz'altro nelle consuete ipotesi di regolarità del moto.

tutti contenuti in Ω^* e di misura relativa $\leq p$, che godono della proprietà di non avere a due a due alcun elemento in comune; infatti se un punto appartenesse sia a B_r^* sia a $B_{r'}^*$ (ove è $r \neq r'$), la particella che ad esso corrisponde transiterebbe per A sia all'istante $r\tau$ sia all'istante $r'\tau$ e come tale non potrebbe appartenere nè a B_r^* nè a $B_{r'}^*$. La successione (4-2) costituisce quindi in Ω^* una successione di insiemi disgiunti, la misura della unione dei quali non può perciò superare la misura di Ω^* ed eguaglia la somma della serie delle misure degli insiemi B_r^*, [8].

Dalla convergenza della serie $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \, \mu(B_r^*)$ segue che: comunque si fissi un numero positivo ε $(< p)$ è possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un intero $\widehat{r} > 0$, tale che per ogni $|r| \geq \widehat{r}$, sia:

$$\mu(B_r^*) < \varepsilon , \tag{4-3}$$

ovvero, in forma più espressiva:

α') Comunque si fissi un numero positivo ε $(< p)$ al più per un numero finito di istanti $m\tau$ (e quindi eccezionalmente) può verificarsi che quelle particelle, che nell'istante $m\tau$ transitano per la (generica) regione A, luogo di punti geometrici di Ω, e che non sono passate nè ripassano per A in nessuno degli istanti, rispettivamente, precedenti e successivi a quello considerato nella successione (4-1), formino in Ω un insieme B_m^* di misura relativa $\geq \varepsilon$.

Nella ipotesi di stazionarietà del moto le particelle di fluido che nei vari istanti $r\tau$, della successione considerata, transitano per la medesima posizione in A, descrivono la stessa traiettoria, con leggi orarie che differiscono l'una dall'altra per il valore di una costante; in questo caso particolare quindi le configurazioni $\overline{B}_r$ dei diversi insiemi di particelle B_r^*, nei rispettivi istanti $r\tau$ di transito per A, si identificano con uno stesso sottoinsieme $\overline{B}$, luogo di punti geometrici della regione A. Gli insiemi (4-2) avranno così la stessa misura, che, per la proprietà di ricorrenza sopra dimostrata e per la arbitrarietà del numero ε, risulta eguale a zero. D'altra parte è anche:

$$\mu(B_r^*) = \mu(\overline{B}_r) = \mu(\overline{B}) ; \tag{4-4}$$

si può perciò concludere che nella ipotesi di stazionarietà del moto l'insieme $\overline{B}$ dei punti geometrici di A, per i quali accade che le particelle di

---

[8] Confronta queste considerazioni con quelle del tutto analoghe, che nel precedente § 3 hanno consentito di stabilire la (3-6) e la relativa proprietà ricorrente di forma lagrangiana.

fluido che li occupano all'istante, generico, $r\tau$ non sono passate nè ripassano mai, nei rimanenti istanti della successione (4-1), per la regione A, ha misura nulla.

Dal confronto con quest'ultima proprietà di forma euleriana e relativa al moto stazionario risulta evidente l'aspetto *solo parzialmente euleriano* della proprietà di ricorrenza (α'). Infattti se è ben vero che in essa si fa riferimento ad una regione A luogo di punti geometrici di Ω, è pure vero che la (α'), stabilendo soltanto una proprietà della misura dei sistemi di *particelle* che transitano una sola volta per la regione A, nulla consente di dire tuttavia sulla misura dell'insieme dei punti geometrici di A, occupati, al variare di r, da *tutte* queste particelle nei rispettivi istanti di transito per A medesima. Si può infatti notare che la misura di tale insieme, unione delle configurazioni $\overline{B}_r$, assunte in A nei relativi istanti r dagli insiemi di particelle (4-2), è certo minore od eguale alla misura p di A, ma può benissimo risultare diversa da zero, nel caso generale, si intende, di non stazionarietà del moto.

Per riconoscere quanto sia possibile dire sulla misura dell'unione degli insiemi $\overline{B}_r$, e quindi per conseguire una formulazione di (α') in linguaggio *totalmente euleriano*, occorre fare ricorso ad una ulteriore e più generale proprietà, derivante dalla convergenza della serie $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(B_r^*)$. La convergenza di questa serie numerica consente infatti di affermare che: comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\ (< p)$ è possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un intero positivo r^*, tale che per ogni $r' \geq r^*$ sia:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(B_r^*) - \sum_{-r'}^{+r'}{}_r\, \mu(B_r) \leq \varepsilon\,. \tag{4-5}$$

Tenendo conto che per definizione e per ogni r è:

$$\mu(\overline{B}_r) = \mu(B_r^*) \tag{4-6}$$

e che è anche:

$$\mu\Big(\bigcup_{|r|>r'}{}_r\, \overline{B}\Big) \leq \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(\overline{B}_r) - \sum_{-r'}^{+r'}{}_r\, \mu(\overline{B}_r)\,, \tag{4-7}$$

ove il segno di diseguaglianza vale nel caso, certo possibile, in cui particelle, appartenenti a insiemi diversi B_r^*, occupino la stessa posizione in A nel rispettivo istante di transito per essa, ogni qual volta si verifichi la

(4-5) si verifica anche la relazione seguente:

(4-8) $$\mu\,(\bigcup_{|r|>r'} \overline{B}_r) \leq \varepsilon\,.$$

D'altra parte la $\bigcup_{|r|>r'} \overline{B}_r$ può essere interpretata come la totalità dei punti *geometrici* di A, per ognuno dei quali esiste almeno un istante $r\,\tau$, con $|\,r\,| > r'$, tale che la particella, che lo occupa in detto istante, non è passata nè ripassa mai per A nei rimanenti istanti della successione (4-1).

Il complemento ad A $(A - \bigcup_{|r|>r'} \overline{B}_r)$ di tale insieme sarà quindi formato da quei punti geometrici di A per i quali le particelle che li occupano nei diversi istanti $r\,\tau$, con $|\,r\,| > r'$, sono passate o ripassano almeno una volta per la regione A negli istanti precedenti e, rispettivamente, successivi ad $r\,\tau$, nella successione (4-1); per la (4-8) risulta quindi:

(4-9) $$\mu\,(A - \bigcup_{|r|>r'} \overline{B}_r) = \mu\,(A) - \mu\,(\bigcup_{|r|>r'} \overline{B}_r) \geq p - \varepsilon\,.$$

Si ha così la seguente traduzione della (α') in una proprietà ricorrente in forma *totalmente euleriana*:

Comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\,(< p)$ è di misura relativa $\mu \geq p - \varepsilon$ l'insieme dei punti geometrici P della generica regione A (di misura p), tali che le particelle che transitano per essi nei varî istanti $r\,\tau$ della successione (4-1), eccezion fatta al più per un numero finito di valori di r (compresi nell'intervallo $-r^* \leq r \leq +r^*$), sono passati o ripassano ancora almeno una volta per A.

Mentre per la (α') è così assicurato che nel generico sottoinsieme A di Ω vi sono sempre punti geometrici P tali che le particelle che li occupano nei varî istanti di una data successione, sono passate o ripassano per A almeno una volta (anzi questi punti formano la quasi totalità dei punti di A, rispetto alla misura μ adottata in Ω), vediamo ora cosa si possa dire sui punti geometrici di A per i quali si manifesti la circostanza che le particelle, che li occupano ad un dato istante, transitino per la ragione detta infinite volte.

Osserviamo intanto che se in corrispondenza al generico istante $r\,\tau$ vi possono essere particelle in A che non sono passate nè ripassano mai per A, a maggior ragione vi saranno particelle, la cui totalità, nello spazio di riferimento Ω^*, verrà indicata con $B_r'^*$, che transitano per A solo un numero finito di volte nella successione di istanti (4-1), e si potrà senz'altro affermare che, con le notazioni adottate, è:

(4-10) $$B_r'^* \supset B_r^* \quad (\text{per ogni } r = \ldots -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots)$$

Si soffermi quindi l'attenzione sulla successione degli insiemi di Ω^*:

$$(4\text{-}11) \qquad \ldots, B'^*_{-n}, \ldots, B'^*_{-1}, B'^*_0, B'^*_1, \ldots, B'^*_n, \ldots .$$

Può darsi che questi insiemi abbiano elementi a comune, si può tuttavia escludere che vi siano dei punti appartenenti ad una infinità di essi; infatti se ve ne fosse anche uno solo siffatto, la particella che ad esso corrisponde sarebbe passata o ripasserebbe per A infinite volte, con ciò tale punto non potrebbe appartenere a nessuno dei B'^*_r, a causa della loro stessa definizione. Tale proprietà consente di asserire che è:

$$(4\text{-}12) \qquad \lim_{|r| \to +\infty} \mu(B'^*_r) = 0,$$

ovvero, equivalentemente, che è assurdo supporre che comunque si fissi un numero positivo ε ($< p$) per una infinità di insiemi $B'^*_{r_i}$ della successione (4-11) sia:

$$(4\text{-}13) \qquad \mu(B'_{r_i}) \geq \varepsilon .$$

Infatti se questa fosse vera, in virtù della seconda proprietà relativa alle successioni di insiemi astratti misurabili (e tali che l'estremo inferiore delle loro misure sia positivo), posta in luce nel precedente § 3, vi sarebbero certo elementi comuni ad una infinità di detti insiemi $B'^*_{r_i}$ e quindi particelle, corrispondenti a punti di tali insiemi, che transitano per A infinite volte; ciò è assurdo, essendo in contraddizione, come si è visto, con la stessa definizione degli insiemi B'^*_r.

Una traduzione in termini più espressivi della (4-12) dà luogo alla seguente proprietà di ricorrenza:

β') Comunque si fissi un numero positivo ε ($< p$), per un numero finito al più di istanti $m'\tau$ (e quindi eccezionalmente) può verificarsi che le particelle, che nell'istante $m'\tau$ transitano per una data regione A, di misura p, e che passano o sono passate per essa un numero *finito*, qualunque, di volte nella successione di istanti (4-1), formino in Ω^* un insieme $B'^*_{m'}$ di misura relativa $\mu(B'_{m'}) \geq \varepsilon$.

Come subito si riconosce, la (β') è una estensione della (α'). Spontanea perciò è la ricerca della proprietà di ricorrenza a carattere totalmente euleriano che consegua direttamente dalla (β').

Si consideri pertanto l'insieme $\overline{B}'_r$ delle posizioni occupate in A all'istante $r\tau$ dall'insieme di particelle individuate dai punti di B'^*_r; in virtù della ammessa incomprimibilità del fluido (ipotesi (i)) è certo:

$$(4\text{-}14) \qquad \mu(\overline{B}'_r) = \mu(B'^*_r) \qquad (r = \ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots)$$

Giova anche qui osservare che, nella ipotesi di stazionarietà del moto, gli insiemi di punti geometrici $\overline{B}'_r$ si identificano in uno stesso sottoinsieme $\overline{B}'$ di A , sarà quindi :

$$\mu(B'^*_r) = \mu(\overline{B}') \qquad (\text{per ogni } r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots) \tag{4-15}$$

Da questa e dalla proprietà (β'), messa in luce poc'anzi, segue che: comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\,(< p)$ è sempre:

$$\mu(\overline{B}') < \varepsilon \tag{4-16}$$

e di qui:

$$\mu(\overline{B}') = 0\,, \tag{4-17}$$

ovvero: nel moto stazionario di un fluido incomprimibile comunque si fissi una regione A , luogo di punti geometrici, nella regione Ω di misura finita, occupata dal fluido in questione, è certo di misura nulla il sottoinsieme $\overline{B}'$ di A , tale che le particelle che lo occupano ad un generico istante $r\tau$, transitano per A al più un numero finito di volte nella successione di istanti (4-1). Questa, come abbiamo già avuto modo di ricordare, è la classica proprietà di ricorrenza di H. Poincaré, nella sua formulazione più completa.

La proprietà di ricorrenza, in forma totalmente euleriana, del moto non stazionario, che intendiamo ora stabilire si basa su di una ulteriore conseguenza della (β') e della (4-14) relativa alla misura della unione degli insiemi $\overline{B}'_r$.

Dalla (β') segue infatti [9] che comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\,(< p)$ è sempre possibile estrarre dalla successione di insiemi:

$$\ldots, B'^*_{-n}, \ldots, B'^*_{-1}, B'^*_0, B'^*_1, \ldots, B'^*_n, \ldots \tag{4-18}$$

una successione $\{B'^*_{r_i}\}$ tale che sia:

$$\sum_{1}^{+\infty}{}_i\,(B'^*_{r_i}) < \varepsilon \tag{4-19}$$

---

[9] Si osservi per questo che da ogni successione numerica a_r, per la quale sia:

$$\lim_{r\to+\infty} a_r = 0$$

si può estrarre una successione $\{a_{r_i}\}$ per la quale si abbia anche:

$$\lim_{\bar{i}\to+\infty} \sum_{\bar{i}}^{+\infty}{}_i\, a_{r_i} = 0\,.$$

da questa e dalla (4-14) segue:

$$\sum_{1}^{+\infty}{}_i\, \mu(\overline{B}'_{r_i}) = \sum_{1}^{+\infty}{}_i\, \mu(B'^{*}_{r_i}) < \varepsilon \tag{4-20}$$

e ricordando che è:

$$\mu(\textstyle\bigcup_i \overline{B}'_{r_i}) \leq \displaystyle\sum_{1}^{+\infty}{}_i\, \mu(\overline{B}'_{r_i}), \tag{4-21}$$

si può concludere che è anche:

$$\mu(\textstyle\bigcup_i \overline{B}'_{r_i}) < \varepsilon . \tag{4-22}$$

D'altra parte la $\bigcup_i \overline{B}'_{r_i}$ e l'insieme dei punti geometrici della fissata regione A in Ω per i quali le particelle che li occupano in almeno uno degli istanti della successione $\{r_i\tau\}$ sono passate o ripassano per A al più un numero finito di volte. Il suo complemento ad A, cioè l'insieme $A - \bigcup_i \overline{B}'_{r_i}$, è perciò l'insieme dei punti geometrici di A tali che le particelle, che li occupano in un generico istante della successione $\{r_i\tau\}$, sono passate o ripassano per A infinite volte nella successione di istanti (4-1). Si perviene così alla seguente conseguenza a carattere *totalmente euleriano* della (β'):

Comunque si fissi un numero positivo $\varepsilon\ (< p)$ ed una regione A di misura relativa p, in Ω, si può determinare una successione di istanti distinti $\{r_i\tau\}$ nella (4-1), tali che sia di misura relativa $\mu \geq p - \varepsilon$ l'insieme dei punti geometrici di A, per i quali accade che le particelle che li occupano al generico istante $r_i\tau$ ripassano o sono passate *infinite* volte per A nella successione di istanti (4-1).

5. — Proprietà generale di ricorrenza in forma totalmente euleriana del moto non stazionario di un fluido incomprimibile. Osservazioni conclusive.

Passiamo ora a dimostrare la seguente proprietà generale di ricorrenza (γ), già enunciata nel § 2 e che verrà successivamente esaminata alla luce della proprietà (β') sopra esposta:

(γ) Comunque si fissi una regione A, luogo di punti geometrici di Ω, per *quasi tutti* i suoi punti P ed a meno di un *numero finito* di valori dell'intero r [10], la particella di fluido che nell'istante $r\tau$ si trova in P è pas-

[10] Eventualmente diversi da punto a punto.

sata o ripassa per A *infinite* volte, nella successione di istanti:

$$(5\text{-}1) \qquad \ldots, -n\tau, \ldots, -\tau, 0, \tau, \ldots, n\tau, \ldots .$$

Nella dimostrazione di questa proprietà si procederà per gradi. Consideriamo perciò l'insieme $\overline{H}_r^k$ dei punti geometrici di A tali che le particelle che li occupano all'istante $r\tau$ non sono passate nè ripassano per A più di k volte nella successione di istanti (5-1). Tale insieme, che supporremo misurabile (vedi nota 7), ha, per l'ipotesi di incomprimibilità del fluido, misura eguale a quella del sottoinsieme H_r^{*k} di Ω^* cui corrisponde l'insieme delle particelle che nell'istante $r\tau$ occupano $\overline{H}_r^k$. L'insieme H_r^{*k}, al variare di r nell'insieme dei numeri interi relativi, genera una successione $\{H_r^{*k}\}$, che gode della seguente proprietà: un generico elemento della unione $\bigcup_r H_r^{*k}$, cioè dell'insieme dei punti di Ω^* cui corrispondono particelle che transitano per A almeno una volta e non più di k volte nella suceessione di istanti (5-1), può appartenere al massimo a k insiemi distinti della successione $\{H_r^{*k}\}$. Infatti, se un elemento fosse comune a più di k insiemi di tale successione, la particella che ad esso corrisponde transiterebbe o sarebbe transitata per A più di k volte, in contraddizione con la stessa definizione degli insiemi H_r^{*k}.

Da questa osservazione segue perciò che è:

$$(5\text{-}2) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(H_r^{*k}) \leq k\,\mu(\Omega^*) = k .$$

Si può così concludere che la serie:

$$(5\text{-}3) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(H_r^{*k})$$

è, per ogni valore di k, convergente. Si consideri ora la $\bigcup_r \overline{H}_r^k$, cioè l'insieme dei punti geometrici di A per i quali esista almeno un istante nella successione (5-1), tale che le particelle, che in detto istante transitano per essi, sono passate o ripassono per A non più di k volte. Per la subadditività della misura μ prescelta è:

$$(5\text{-}4) \qquad \mu\Big(\bigcup_{|r|<s} \overline{H}_r^k\Big) \leq \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(\overline{H}_r^k) - \sum_{-s}^{+s}{}_r\, \mu(\overline{H}_r^k)$$

per ogni intero positivo s. Si è anche osservato a suo tempo che è:

$$(5\text{-}5) \qquad \mu(\overline{H}_r^k) = \mu(H_r^{*k})$$

quindi anche la serie:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(\bar{H}_r^k) \tag{5-6}$$

è convergente, per ogni valore di k. Si ha così che: comunque si fissi un numero positivo ε $(< p)$, si può, in corrispondenza ad esso, determinare un intero positivo $\bar{s}$ (11) tale che per ogni $s \geq \bar{s}$ sia:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, \mu(\bar{H}_r^k) - \sum_{-s}^{+s}{}_r\, \mu(\bar{H}_r^k) < \varepsilon \tag{5-7}$$

e quindi per la (5-4):

$$\mu(\bigcup_{|r|>s}{}_r\, \bar{H}_r^k) < \varepsilon \qquad \text{per ogni } s \geq \bar{s},$$

ovvero:

$$\lim_{s\to+\infty} \mu(\bigcup_{|r|>s}{}_r\, \bar{H}_r^k) = 0. \tag{5-8}$$

Ricordando che è [8]:

$$\lim_{s\to+\infty} \mu(\bigcup_{|r|>s}{}_r\, \bar{H}_r^k) = \mu(\bigcap_s \bigcup_{|r|>s}{}_r\, \bar{H}_r^k) = \mu(\limsup_{|r|\to+\infty} \bar{H}_r^k),$$

se ne conclude che è:

$$\mu(\limsup_{|r|\to+\infty} \bar{H}_r^k) = 0. \tag{5-9}$$

Si ha in tal modo che:
L'insieme $\limsup_{|r|\to+\infty} \bar{H}_r^k = \bigcap_s \bigcup_{|r|>s}{}_r\, \bar{H}_r^k$, che comprende tutti i punti geometrici di A, per ciascuno dei quali sia possibile determinare una successione di istanti $\theta \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$, tali che la particella, che occupa al generico di questi istanti detto punto di A, è passata o ripassa per la regione considerata *non più di k volte*, ha misura nulla.

Fissiamo ora l'attenzione su questo luogo di punti geometrici di A:

$$\bar{H}^k = \limsup_{|r|\to+\infty} \bar{H}_r^k.$$

(11) Dipendente in generale da ε e da k.

Al variare di k, nell'insieme dei numeri interi positivi, esso genera una successione $\{\overline{H}^k\}$ non decrescente, e perciò convergente, di insiemi, tutti di misura nulla. Per la ammessa continuità della misura μ si ha così:

$$\mu(\lim_{k \to +\infty} \overline{H}^k) = \lim_{k \to +\infty} \mu(\overline{H}^k) = 0 . \tag{5-10}$$

Ma l'insieme $\overline{H} = \lim_{k \to +\infty} \overline{H}^k = \bigcup_k{}_1^{+\infty} \overline{H}^k$ include in sè tutti i punti geometrici di A per i quali sia possibile determinare una successione θ di istanti tali che la particella, che nel generico di essi occupa uno di questi punti in A, transita per questa regione non più di k volte, con k comunque grande. Poichè l'insieme $\overline{H}$, in virtù delle ipotesi fatte, è misurabile, tale è anche la sua chiusura $\overline{\overline{H}}$ ed è $\mu(\overline{\overline{H}}) = \mu(\overline{H}) = 0$ (12).

L'insieme $A - \overline{\overline{H}}$ è ora formato dai punti geometrici P di A, tali che le particelle che li occupano al generico istante $r\tau$ della successione (5-1), *a meno di un numero finito* di valori di r, transitano *infinite volte* per A, ed è anche:

$$\mu(A - \overline{\overline{H}}) = \mu(A) = p . \tag{5-11}$$

Con ciò la proprietà (γ) è dimostrata.

Si noti esplicitamente il carattere *totalmente euleriano* di questa proprietà di ricorrenza e come essa sia la diretta e completa estensione del teorema di ricorrenza di H. Poincaré, più volte citato.

Quando si confronti la proprietà (γ) con la (β'), formulata in linguaggio euleriano, si può ulteriormente osservare che mentre questa pone in luce una proprietà della misura dell'insieme dei punti geometrici di A per i quali a meno degli *stessi* istanti, eventualmente eccezionali, si verifica il passaggio infinite volte per A, la proprietà (γ), più forte per ciò che concerne la misura dell'insieme dei punti geometrici di A per i quali si verifica la proprietà di transito infinite volte, è meno fine nei riguardi degli istanti eccezionali, relativamente ai quali non si manifesta la proprietà di ricorrenza in questione.

In base a queste osservazioni è prevedibile che nelle applicazioni al teorema ergodico debba essere preferito l'uso della (β') a quello della proprietà (γ), benchè quest'ultima sia fisicamente più significativa.

---

(12) È facile riconoscere che quando si formuli l'ipotesi di regolarità del moto del fluido $\overline{\overline{H}}$ coincide con $\overline{H}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI : *Lezioni di Meccanica Razionale,* Zanichelli, Bologna (1951).

[2] - H. POINCARÉ : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* Gauthier-Villars, Paris (1899).

[3] - A. WINTNER : *The analitical foundations of celestial Mechanics,* University Press, Princeton (1947).

[4] - G. D. BIRKHOFF : *Proof of the ergodic theorem,* Nat. Acad. Sci. Proc., vol. 17, p. 650-655 (dic. 1931).

[5] - A. I. KHINTCHIN : *Mathematical foundation of statistical Mechanics,* Dover Publ. Inc., New York (1949).

[6] - D. TER HAAR : *The foundation of the statistical Mechanics, Reviews of modern Physics,* vol. 27, n° 3, p. 289, (Luglio 955).

[7] - M. LOÈVE : *Prabability Theory,* D. Van Nostrand Co. Inc., New York (1955).

[8] - P. P. HALMOS : *Measure Theory* D. Van Nostrand Co. Inc., New York (1956).