ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUCIANO DE VITO

Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 55-127

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_55_0>

SULLE FUNZIONI AD INTEGRALE DI DIRICHLET FINITO

Memoria di LUCIANO DE VITO (Roma)

Il presente lavoro ha come scopo l'ottenimento di condizioni alle quali deve soddisfare una funzione f, definita sulla frontiera Σ di un campo A dello spazio euclideo ad n dimensioni S_n, perchè essa sia la traccia di una funzione u definita in A e dotata di derivate prime di quadrato sommabile in A, cioè di una u avente finito l'integrale di Dirichlet:

$$\int_A |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \qquad (dx \equiv dx_1 \ldots dx_n).$$

Il concetto di traccia su Σ per una funzione definita in A, la quale non sia continua in $A + \Sigma$ ma verifichi opportune ipotesi di derivabilità in A, può essere dato in modi diversi che risultano poi essere fra loro equivalenti, come preciseremo nel primo paragrafo del presente lavoro. Si può, ad esempio, definire l'operazione di traccia $\gamma(u)$ su Σ della u come prolungamento funzionale di tale operazione (già definita per le funzioni continue in $A + \Sigma$) nello spazio delle funzioni ad integrale di Dirichlet finito. Tale punto di vista è quello adottato da Deny e Lions (1) in una loro memoria del 1955 e, successivamente, seguito da Prodi (2).

Nel presente lavoro si è preferito però assumere il concetto di traccia secondo un punto di vista che è stato considerato da Fichera fin dal 1949 (3) e, successivamente, adottato da altri Autori (4). Secondo tale punto di vista

(1) [6].

(2) [40].

(3) Cfr. [11] p. 44 e [12] p. 208.

(4) T. Viola [45], G. Stampacchia [43] pp. 217 e seg., [44] pp. 236 e seg., D. Greco [22], M. L. Princivalli [39].

si dice che la $u(x) \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ è dotata di traccia su Σ (composta da pezzi di ipersuperficie abbastanza regolari) se, per ogni versore $\lambda(\xi)$ definito su Σ, penetrante nell'interno di A e verificante opportune ipotesi di regolarità che saranno specificate in seguito, esiste finito per quasi tutti i punti ξ di Σ: $\lim\limits_{x \to \xi \text{ su } \lambda(\xi)} u(x) = f(\xi)$, risultando inoltre tale funzione f indipendente dal particolare versore $\lambda(\xi)$. È dotata di traccia in tale senso ogni funzione che ammette derivate prime sommabili in A. Tale estensione del concetto di traccia si presenta come la più naturale, specie per quanto riguarda i problemi delle applicazioni. È infatti in tale senso che i potenziali di semplice e di doppio strato, dovuti rispettivamente a densità e momento soltanto sommabili, possono dirsi dotati di traccia su Σ (5).

Il concetto di derivata parziale per la u potrebbe essere inteso nel senso di *derivata debole* secondo Friedrichs e Sobolev, ma è questa una generalizzazione che può essere senz'altro evitata in virtù d'un teorema il quale afferma che la funzione f, data su Σ, è la traccia di una funzione verificante la condizione sopradetta allora ed allora soltanto che essa è la traccia di una funzione armonica in A, ivi verificante la condizione in discorso.

Per rendere il presente lavoro, per quanto possibile, completo ed indipendente da altre trattazioni, sarà data, nel paragrafo 1, una nuova semplice dimostrazione di tale ben noto teorema.

Senza quindi ledere la generalità del problema, nel presente lavoro ci si limiterà a ricercare condizioni alle quali deve soddisfare una funzione f definita su Σ, perchè essa sia la traccia di una funzione continua in A ed ivi dotata di derivate prime continue e di quadrato sommabile.

Sia $\mathcal{T}(\Sigma)$ la totalità delle funzioni reali f definite su Σ le quali sono tracce di funzioni reali u che godono delle proprietà ora dette e sia $\mathcal{K}(A)$ la classe di tali funzioni u.

Una condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f, definita su Σ, appartenga a $\mathcal{T}(\Sigma)$, trovasi sostanzialmente in lavori di Fichera. Tale condizione si esprime nel modo seguente:

Sia $\{\omega_k\}$ la successione dei polinomi armonici reali di grado ≥ 1, dedotta da quella dei polinomi armonici omogenei con la seguente ortonormalizzazione:

$$\int_A \operatorname{grad} \omega_h \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx = \delta_h^k .$$

(5) [31] § 14 e 15 cap. II.

La funzione f di $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ (6) appartiene a $\mathcal{T}(\Sigma)$ se e solo se, posto $c_k = \int_\Sigma f \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma$ (7), la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ è convergente (8).

È facile vedere che, nel caso in cui la dimensione dello spazio sia eguale a 2 e Σ coincida con una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio unitario, indicate con a_m e b_m le coordinate di Fourier di f, si ha: $c_m^2 = m(a_m^2 + b_m^2)$, e si ritrova quindi la caratterizzazione data da Hadamard per le funzioni di $\mathcal{T}(\mathcal{C})$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\,(a_m^2 + b_m^2) < +\infty \text{ (9)}.$$

Il problema della caratterizzazione delle funzioni f definite su Σ ed appartenenti a $\mathcal{T}(\Sigma)$ è stato recentemente ripreso da Prodi (10). Egli ha innanzitutto mostrato che tale problema ha carattere locale; precisamente

---

(6) Con $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ si indica la classe delle funzioni reali definite su Σ (supposta convenientemente regolare) il cui quadrato è ipersuperficialmente sommabile su Σ. È da tener presente che la classe $\mathcal{T}(\Sigma)$ è contenuta in $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ (cfr. paragrafo 1 del presente lavoro).

(7) Con $\frac{\partial}{\partial \nu}$ si indica la derivata normale interna a Σ in un punto di Σ.

(8) Cfr. [17]. Sia Σ un'ipersuperficie chiusa dotata di iperpiano tangente variabile con continuità hölderiana; la necessità della condizione segue immediatamente dalla relazione:

$$c_k = \int_\Sigma f \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma = -\int_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx. \qquad (d\sigma = \text{mis. dell'elem. ipersup. su } \Sigma).$$

Per provare la sufficienza basta considerare la funzione armonica u ad integrale di Dirichlet finito verificante le condizioni:

$$\int_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx = -c_k, \quad \int_\Sigma \gamma(u)\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma. \tag{1}$$

Dalla (1) si trae: $\int_\Sigma (f - \gamma(u)) \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma = 0$.

Per un teorema di completezza relativo al sistema $\left\{ \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} \right\}$ (cfr. [13] p. 27, teor. XIX) si trae $\gamma(u) = f$.

(9) [23].

(10) [40].

ha fatto vedere che, se $\{U_k\}$ è una copertura di Σ (ove U_k è costituito da un intorno su S_n di un punto di Σ), e se la funzione f, assegnata su Σ, è in ogni intersezione $\Sigma \cap U_k$ la traccia di una funzione di $\mathcal{H}(U_k)$ allora si ha: $f \subset \mathcal{T}(\Sigma)$ (11).

Valendosi di tale osservazione, Prodi si riduce al caso in cui l'ipersuperficie su cui è assegnata la traccia sia costituita da un iperpiano X; in tale ipotesi Egli dimostra che: *condizione necessaria e sufficiente perchè* $f \subset \mathcal{L}^{(2)}(X)$ *(ove X ha equazione $x_n = 0$), diversa da zero solo in un insieme limitato, sia traccia di una funzione definita nel semispazio E_+, luogo dei punti per i quali $x_n > 0$, ed appartenente a $\mathcal{H}(A)$ in corrispondenza ad ogni insieme aperto e limitato A contenuto in E_+, è che $f * |\xi|^{-n+3/2}$ (ove con ξ si indicano i punti di X) abbia derivate prime di quadrato sommabile in X.* Prodi ha dato anche, nello stesso lavoro, un'altra caratterizzazione per le funzioni di $\mathcal{T}(\Sigma)$, servendosi della nozione di derivata frazionaria secondo Riemann-Liouville.

La prima parte di questo lavoro è dedicata al conseguimento della più generale condizione del tipo della prima, su ricordata, ottenuta da Prodi. Precisamente, servendosi di una rappresentazione di $\Sigma \cap U_k$ su una ipersuperficie sferica Ω, anzichè su un iperpiano, ci si è proposti di determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione K sia tale che l'appartenenza di f a $\mathcal{T}(\Sigma)$ equivalga all'esistenza delle derivate prime di quadrato sommabile in Σ della funzione $f * K$.

Come applicazione del teorema che verrà stabilito, relativo alle condizioni ora dette per K, si dedurranno teoremi analoghi a quello su ricordato di questo Autore ed è evidente che, dopo l'impostazione qui data alla ricerca, si possono ottenere quanti altri teoremi di questo tipo si vogliono.

Da un punto di vista analogo può essere intrapresa la ricerca di condizioni del tipo della seconda caratterizzazione di $\mathcal{T}(\Sigma)$ ottenuta da Prodi. Di ciò comunque non ci si è occupati nel presente lavoro.

Si è successivamente cercato di ottenere condizioni necessarie e sufficienti per la f che, analogamente a quelle del tipo su ricordato, si esercitassero sulle derivate prime di una opportuna trasformata integrale della f, ma che, a differenza di quelle, permettessero il calcolo di tali derivate differenziando sotto il segno d'integrale. A tale scopo si è dimostrato, nel paragrafo 3, un teorema *alla Liapunov* per caratterizzare le funzioni di $\mathcal{T}(\Sigma)$, secondo il quale condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sommabile su Σ appartenga a $\mathcal{T}(\Sigma)$ è che il potenziale di doppio strato di momento f, relativo all'ipersuperficie Σ, sia contenuto in $\mathcal{H}(A)$.

(11) Cfr. Prodi, loc. cit., p. 41 teor. 7.

Ci si permetta notare che le condizioni necessarie e sufficienti ottenute da Fichera e da Prodi presentano essenzialmente interesse dal punto di vista strettamente teorico, riuscendo in pratica di assai difficile attuazione il verificare, per una assegnata funzione f, il sussistere delle condizioni enunciate da tali Autori.

Analoga critica può farsi alla condizione alla Liapunov, ottenuta in questo lavoro, anche se, come si è detto, è praticamente possibile il calcolo delle derivate prime delle quali si richiede l'integrabilità del quadrato.

Poichè il problema a cui è dedicato questo lavoro ha, come ben noto, interesse per le applicazioni alla teoria variazionale delle equazioni differenziali, si è ritenuto di ricercare delle condizioni per la f che, sia pure soltanto sufficienti, avessero però il vantaggio, rispetto alle precedenti, di poter essere praticamente verificabili.

A quanto mi consta, l'unico risultato in tale senso è dovuto a Miranda([12]). Questo Autore ha dimostrato che condizione sufficiente perchè una f, definita su Σ, appartenga a $\mathcal{T}(\Sigma)$, è che sia uniformemente hölderiana con un esponente di Hölder α verificante la limitazione $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

Nell'indirizzo di questa condizione è il teorema II, § 6 del presente lavoro, secondo il quale condizione sufficiente perchè una funzione f, definita su Σ, appartenga a $\mathcal{T}(\Sigma)$, è che sia uniformemente hölderiana con un esponente qualsiasi ed a variazione limitata in un senso che sarà precisato nel seguito; la condizione di Hölder può anzi essere sostituita con una condizione del Dini uniforme.

L'ipotesi che f sia a variazione limitata può essere rimossa nel caso che f sia hölderiana con esponente $\alpha > 1/2$, in virtù del risultato di Miranda, ma in generale non può esser tolta quando sia $\alpha \leq 1/2$, come si vede con un esempio. Un altro esempio mostra d'altronde che l'ipotesi che f sia a variazione limitata non è sufficiente, da sola, ad assicurare l'appartenenza di f a $\mathcal{T}(\Sigma)$.

La condizione di Miranda può essere dedotta da una condizione necessaria e sufficiente, data di recente da Slobodetskij e Babich ([13]) la quale è

([12]) [32].

([13]) [41] Nel caso del cerchio, al quale, per $n = 2$, si riducono sostanzialmente gli Autori citati, la condizione è la seguente:

$$\int_0^1 dt \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)|^2}{t^2}\, dx < +\infty .$$

stata estesa da Gagliardo [14] alla classe delle funzioni che sono tracce su Σ di funzioni dotate di derivate prime di potenza p-esima sommabile in A; è però da notare che se f non soddisfa la condizione di Miranda, la verifica della condizione di Slobodetskij e Babich è di difficile attuazione e si può quindi affermare che anche tale condizione ha interesse sopratutto dal punto di vista teorico.

Per dimostrarla basta ricordare che, se f è periodica di periodo 2π e di quadrato sommabile in $(0, 2\pi)$, indicate con a_m, b_m le sue coordinate di Fourier, sussiste la relazione:

$$f(x+t)-f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{b_m\cos\left[m\left(x+\frac{t}{2}\right)\right]-a_m\operatorname{sen}\left[m\left(x+\frac{t}{2}\right)\right]\right\}\operatorname{sen} m\frac{t}{2}$$

(che va intesa nel senso della convergenza in media di ordine 2). Ne viene, indicato con ε un arbitrario numero positivo minore di 1:

$$\int_{\varepsilon}^{1}dt\int_{0}^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}dx=2\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen} m t}{t}\right)^2 dt.$$

Si ha:

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen} m t}{t}\right)^2 dt = m\int_{m\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\right)^2 d\tau;$$

pertanto esistono due numeri positivi A e B tali che per $m \leq r$ $(r \geq 2)$ si abbia:

$$A\,m \leq \int_{\frac{1}{2r}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen} m t}{t}\right)^2 dt \leq B\,m.$$

Si ha:

$$2A\sum_{m=1}^{r} m(a_m^2+b_m^2) \leq \int_{\frac{1}{r}}^{1}dt\int_{0}^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}dx \leq 2B\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2+b_m^2)$$

e da qui, per la caratterizzazione di Hadamard (vedi teor. I del paragrafo 2), si ha la tesi.

(14) [21].

Allo scopo di mostrare l'interesse applicativo dei risultati ottenuti nel paragrafo 6 di questo lavoro, si è voluto mettere in luce, relativamente ad un problema generalizzato di Neumann per una funzione armonica in un cerchio, una circostanza analoga a quella osservata da De Giorgi relativamente al problema misto per tali funzioni in un semicerchio (15), secondo la quale la finitezza dell'integrale di Dirichlet non basta ad assicurare l'unicità della soluzione del problema. L'esempio qui portato può anche essere sfruttato nel caso del problema misto nel semicerchio.

La costruzione di un'autosoluzione dell'anzidetto problema di Neumann si è resa possibile sfruttando il teorema II § 6 e costruendo una funzione di una variabile, non decrescente in un assegnato intervallo, dotata quasi ovunque di derivata nulla ed hölderiana con esponente di Hölder α comunque prefissato, purchè minore di 1.

1. Sulla nozione di traccia.

In questo paragrafo dapprima saranno richiamate e confrontate tra loro alcune definizioni di *traccia*; si farà poi vedere l'esistenza di una funzione armonica in un campo (insieme aperto) A, dotata di integrale di Dirichlet finito e avente un'assegnata traccia sulla frontiera Σ di A.

Tutti i risultati contenuti in questo paragrafo sono sostanzialmente noti; qualche interesse potranno forse avere talune dimostrazioni, che appaiono particolarmente semplici.

Premettiamo alcune definizioni e convenzioni.

Se con A indichiamo un campo dello spazio euclideo ad n dimensioni S_n e con Σ la frontiera di A, con $\mathcal{L}^{(p)}(A)$ indicheremo la classe delle funzioni reali, misurabili in A ed aventi il modulo di potenza p-esima sommabile in A (16), con $\mathcal{B}(A)$ la classe delle funzioni reali, misurabili in A ed aventi derivate deboli del primo ordine nel senso di Friedrichs e Sobolev, di quadrato sommabile in A, con $\mathcal{C}(A)$ la classe delle funzioni reali, le quali sono assolutamente continue rispetto ad ognuna delle variabili per quasi tutte le $(n-1)$-uple delle rimanenti e sono inoltre tali che le loro derivate prime, le quali esistono quasi dappertutto in A e sono ivi misurabili, hanno quadrato sommabile in A.

Diremo che una funzione è di classe C_m in un campo o in un dominio (insieme aperto cui si sia aggregata la frontiera) se è ivi continua assieme

(15) [7].

(16) La misurabilità e la sommabilità di una funzione saranno qui sempre intese nel senso di Lebesgue, salvo esplicito avviso in contrario. Anche le locuzioni «quasi ovunque», «per quasi tutti i punti» saranno sempre da intendersi nel senso di Lebesgue.

a tutte le sue derivate fino a quelle di ordine m incluso; diremo che è di classe C_m^α se è di classe C_m e le sue derivate m esime sono uinformemente hölderiane di esponente α (con $0 < \alpha \leq 1$) [17].

Diremo inoltre che un campo A limitato e connesso di S_n è di *classe* m se la sua frontiera Σ è costituita da un numere finito di ipersuperficie continue e chiuse e se, scelto comunque un punto x di Σ, esiste l'iperpiano tangente a Σ in tale punto x ed esiste un intorno di x su Σ [18] il quale è suscettibile di una *rappresentazione regolare di classe* m rispetto a tale iperpiano tangente; con ciò intendiamo che, assunto un sistema di assi cartesiani ortogonali $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, con origine nel punto x e l'asse ξ_n coincidente con la normale interna a Σ in x, esiste un intorno su Σ di x il quale può rapprerentarsi al modo seguente

$$\xi_n = \chi(\xi_1, \ldots \xi_{n-1}),$$

ove $\chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ è una funzione definita in un insieme aperto H dell'iperpiano tangente a Σ in x (H prenderà il nome di *insieme base* relativo al detto intorno di x su Σ) e coincidente con una funzione di classe C_m in $\bar{H}$. Pertanto ogni campo di classe m è tale che la sua frontiera Σ può essere ricoperta con un numero finito di intorni $\{U_k\}$, ognuno dei quali è suscettibile di una rappresentazione regolare di classe m rispetto all'iperpiano tangente a Σ in uno conveniente dei suoi punti.

È facile vedere che, se A è un campo di classe m (con $m \geq 1$), è possibile definire un versore $\lambda(x)$ in corrispondenza ad ogni punto x di Σ, avente origine in x, sempre penetrante nell'interno di A e verificante inoltre le seguenti condizioni:

1°) le componenti di $\lambda(x)$ sono funzioni del punto x di classe C_1 in ognuno degli insiemi di $\{U_k\}$ [19],

---

[17] Una funzione $f(x)$, definita in un insieme D, dicesi uniformemente hölderiana di esponente α in D se l'estremo superiore del rapporto $|f(x) - f(y)|/|x - y|^\alpha$ (ove col simbolo $|x - y|$ abbiamo inteso la distanza dei punti x e y) è finito al variare comunque della coppia di punti x e y in D. Tale estremo superiore prende il nome di *coefficiente di Hölder* di f.

[18] Per intorno di un punto x di S_n su un insieme D intendiamo l'intersezione di D con un campo connesso di S_n contenente x.

[19] Dicendo che una funzione $f(x)$ del punto x variabile nell'insieme U_k di $\{U_k\}$ è di classe C_l $(0 \leq l \leq m)$ intendiamo che, indicate con $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ le equazioni che forniscono la rappresentazione regolare di U_k, la funzione $f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$ risulta di classe C_l nell'insieme base relativo a U_k. Se poi quest'ultima funzione è misurabile (sommabile) su tale insieme base diremo che $f(x)$ è misurabile (sommabile) su U_k; diremo infine che $f(x)$ è di classe C_l, misurabile, sommabile su Σ se è di classe C_l, misurabile, sommabile su ognuno degli insiemi di $\{U_k\}$.

2^0) esiste un numero positivo ϱ_0 tale che il luogo descritto dal punto $y = x + \varrho\, \lambda(x)$, per ogni fissato ϱ nell'intervallo $0 < \varrho \leq \varrho_0$, al variare di x su Σ risulta contenuto in A ed in corrispondenza biunivoca con Σ.

Indicheremo con A_ϱ il campo ottenuto privando A dei punti $y = x + r\lambda(x)$ $(x \subset \Sigma,\ 0 < r \leq \varrho)$; il campo A_ϱ è ovviamente un campo di classe 1. Se A è un campo di classe 1 e Σ è la sua frontiera, indicheremo con $\mathcal{L}^{(p)}(\Sigma)$ la classe delle funzioni misurabili su Σ ed aventi modulo di potenza p-esima sommabile su Σ.

Ciò posto diremo che una funziune $u(x)$ definita in un campo A di classe 1 ha come *traccia su* Σ una funzione $f(x)$, definita su Σ, se, considerato un qualsiasi versore $\lambda(x)$ soddisfacente le condizioni prima dette, per quasi tutti i punti ξ di Σ riesce:

$$\lim_{x \to \xi \text{ su } \lambda(\xi)} u(x) = f(\xi) \quad (^{20})$$

Evidentemente, se f e φ sono due funzioni definite su Σ le quali siano entrambe traccia di una funzione u definita in A, tali funzioni coincidono quasi ovunque su Σ.

A tal proposito sussistono i seguenti teoremi.

I. *Se A è un campo di classe 1 e Σ è la sua frontiera, ogni funzione $u(x)$ appartenente ad $\mathcal{A}(A)$ ammette come traccia su Σ una funzione appartenente ad $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$* ([21]).

II. *Se A è un campo di classe 1 e Σ è la sua frontiera, ogni funzione $u(x)$ appartenente ad $\mathcal{B}(A)$, mutandone eventualmente la definizione in un insieme di misura nulla, ammette come traccia su Σ una funzione appartenente ad $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$.*

Questo teorema segue dal precedente in virtù di un teorema secondo il quale, in corrispondenza ad ogni funzione u di $\mathcal{B}(A)$, esiste una funzione v di $\mathcal{A}(A)$ la quale coincide quasi ovunque in A con u ([22]).

Richiamiamo ora la definizione di traccia sulla frontiera Σ di un campo A di classe 1 per le funzioni di $\mathcal{B}(A)$, data da Deny e Lions ([23]).

([20]) Queste definizione di traccia è stata data da Fichera (cfr. nota (3) della prefazione) in ipotesi più generali di quelle qui assunte per il campo A.

([21]) Cfr. Stampacchia [43] p. 217.

([22]) Cfr. Morrey [33] p. 195.

([23]) Vedi nota (4) della prefazione. Tale definizione è stata data da Deny e Lions in ipotesi più generali di quelle da noi assunte per il campo A.

Riguardiamo $\mathcal{H}(A)$ come spazio di Hilbert assumendo il prodotto scalare relativo a due funzioni u e v (24) di tale classe nel modo seguente:

$$(u\,,\,v)=\int_A [\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v]\,dx+\int_A uv\,dx\ (^{25})\,.$$

Riguardiamo inoltre $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ come spazio di Hilbert assumendo il seguente prodotto scalare:

$$(u\,,\,v)=\int_\Sigma u\ v\ d\ \sigma\ (^{26}).$$

Indichiamo con V la varietà costituita da tutte le funzioni di classe C_1 in $A+\Sigma$. Tale varietà è una base dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}(A)$ (27).

Indichiamo con $\gamma(u)$ la trasformazione lineare la quale associa ad ogni funzione appartenente alla varietà V la funzione definita su Σ mediante i valori assunti da u su Σ (28). La trasformazione $\gamma(u)$, così definita nella varietà V di $\mathcal{H}(A)$ ed avente condominio contenuto in $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$, è continua dato che, nelle attuali ipotesi per il campo A, sussiste la diseguaglianza:

$$\int_\Sigma u^2\,d\sigma \leq L\left[\int_A u^2\,dx+\left(\int_A u^2\,dx\cdot\int_A |\operatorname{grad} u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

in corrispondenza ad ogni funzione u di V (29). Allora, com'è noto, esiste

---

(24) Qui, naturalmente, riguardiamo come unico elemento dello spazio una funzione di $\mathcal{H}(A)$ e tutte quelle, di tale classe, che differiscono da questa in un insieme di misura nulla. Continueremo tuttavia, per semplicità, ad indicare ogni elemento di tale spazio col nome di funzione.

(25) Rammentiamo che ogni funzione di $\mathcal{H}(A)$ appartiene ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$.

(26) Cfr. nota (9) di questo paragrafo.

(27) Cfr. Friedrichs [19]. Com'è noto, dicesi base di uno spazio topologico ogni varietà dello spazio la cui chiusura coincida con lo spazio stesso.

(28) Dicendo che $\gamma(u)$ è lineare intendiamo che, in corrispondenza ad ogni coppia di numeri reali a e b e ad ogni coppia di elementi u e v si ha $\gamma(au+bv)=a\gamma(u)+b\gamma(v)$. Dicendo che $\gamma(u)$ è continua intendiamo che se $\{u_m\}$ è tale che $\lim\limits_{m\to\infty}\int_A (|\operatorname{grad}(u-u_m)|^2+$ $+|u-u_m|^2)\,dx=0$ si ha: $\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Sigma |u-u_m|^2\,d\sigma=0$. L'insieme descritto da $\gamma(u)$ al variare di u in V prende il nome di codominio della trasformazione γ.

(29) Cfr. Deny e Lions [6] p. 334.

una ed una sola trasformazione lineare e continua, definita in $\mathcal{B}(A)$ ed avente codominio contenuto in $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$, la quale coincida in V con $\gamma(u)$. La trasformazione così ottenuta, che continuiamo ad indicare con γ, costituisce *l'operazione di traccia* su Σ per le funzioni di $\mathcal{B}(A)$.

Evidentemente, se due funzioni f e φ di $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ sono tracce, nel senso ora precisato, di una medesima funzione u di $\mathcal{B}(A)$, esse individuano uno stesso elemento dello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ e pertanto differiscono solo nei punti di un insieme di misura nulla.

Vogliamo da ultimo considerare un'altra nozione di traccia. Sia A un campo di classe 2, Σ la sua frontiera, $u(x)$ una funzione appartenente ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, $f(x)$ una funzione contenuta in $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$; si dice che $u(x)$ ammette $f(x)$ come traccia su Σ oppure che $u(x)$ *assume in media di ordine* 2 *i valori di* f *su* Σ, se riesce:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} [u(x + \varrho\, \nu(x)) - f(x)]^2 \, d\sigma = 0 ,$$

ove $\nu(x)$ è il versore della normale interna a Σ in x ed A_ϱ ha il significato in precedenza detto, in relazione al versore $\nu(x)$.

Riguardo alle relazioni tra queste diverse definizioni di traccia sussistono i seguenti teoremi.

III. *Le prime due definizioni di traccia ora richiamate sono equivalenti, cioè, con i simboli già introdotti, si ha che, se A è un campo* 1 *e Σ la sua frontiera, in corrispondenza ad ogni funzione u di $\mathcal{B}(A)$, mutandone eventualmente i valori in un insieme di misura nulla, per quasi tutti i punti x di Σ riesce:*

$$\lim_{\varrho \to 0} [u(x) + \varrho\, \lambda(x)] = \gamma\, [u(x)] \text{ (30)}.$$

IV. *Se A è un campo di classe* 2, *Σ la sua frontiera, $u(x)$ una funzione di $\mathcal{A}(A)$, $f(x)$ la traccia di u su Σ* (31) *allora u assume su Σ in media di ordine* 2 *i valori di $f(x)$.*

Attribuendo ai simboli ϱ, ϱ_0, A_ϱ, $\lambda(x)$ i significati prima precisati, possiamo intanto osservare che la funzione $u[x + \varrho\, \lambda(x)]$, definita al

---

(30) Ovviamente questa eguaglianza va intesa nel senso che il primo membro di essa rappresenta una delle funzioni individuanti l'elemento $\gamma(u)$. Per la dimostrazione di questo teorema si veda Morrey [33] p. 201, teor. 7. 3.

(31) D'ora in avanti, parlando di traccia, intenderemo la traccia secondo una qualunque delle due definizioni delle quali si è ora ricordata l'equivalenza.

variare di x su Σ e di ϱ in $(0, \varrho_0)$, fissato quasi ovunque x su Σ, risulta funzione di ϱ assolutamente continua in $(0, \varrho_0)$ (32). Ne segue l'uniforme sommabilità di $|u[x + \varrho \lambda(x)]|^2$ rispetto a ϱ sulla frontiera $\mathcal{F} A_\varrho$ del campo A_ϱ (33). Da ciò viene che:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F} A_\varrho} |u[x + \varrho \lambda(x)] - f(x)|^2 \, d\sigma = 0 .$$

Potendosi assumere come $\lambda(x)$ il versore $\nu(x)$ dato che A è di classe 2, si ha la tesi.

Dal teorema IV segue ovviamente che:

V. *Se A è un campo di classe 2, Σ la sua frontiera, $u(x)$ una funzione appartenente ad $\mathcal{B}(A)$, $f(x)$ la traccia di u su Σ, pur di mutare i valori di u nei punti di un insieme di misura nulla, si ha che $u(x)$ assume su Σ i valori di $f(x)$ in media di ordine 2.*

Non è in generale vero che, viceversa, se una funzione u, definita in un campo A di classe 2, assume in media di ordine 2 sulla frontiera Σ di A i valori di una funzione $f(x)$, essa debba ammettere $f(x)$ come traccia su Σ.

Tale ultima circostanza si verifica solo in taluni casi; ad esempio, nel caso che u sia armonica in A. Si ha anzi più in generale che, se φ è una funzione definita e misurabile su Σ ed avente modulo di potenza p-esima sommabile su Σ, con $p > 1$, ed u è una funzione armonica in A la quale assume i valori di φ su Σ in media di ordine p, allora la funzione φ è traccia di u su Σ (34).

Facciamo ora vedere che:

VI. *Se A è un campo di classe 1 e se Σ è la sua frontiera, condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f, appartenente ad $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$, sia traccia su Σ di una funzione u di $\mathcal{B}(A)$ è che esista una funzione armonica in A appartenente a $\mathcal{K}(A)$ ed avente come traccia su Σ la funzione f.*

Basta evidentemente mostrare la necessità. Indichiamo con $\mathcal{B}$ lo spazio di Hilbert ogni elemento del quale è costituito dall'insieme di una funzione di $\mathcal{B}(A)$ e di tutte quelle che da questa si ottengono alterandone i valori

---

(32) Cfr. Morrey [33] p. 195, teor. 6. 3.

(33) L'uniforme sommabilità in questione trovasi dimostrata in Fichera [12] p. 212, nel caso in cui u, oltre a soddisfare le ipotesi qui assunte, sia di classe C_1 in A: tale dimostrazione continua a sussistere pressochè inalterata anche nelle attuali ipotesi.

(34) Cfr. Magenes [30].

in un insieme di misura nulla ed aggiungendovi una funzione costante in A, e nel quale il prodotto scalare è definito nel modo seguente:

$$(u\,,\,v) = \int_A [\text{grad}\, u \times \text{grad}\, v]\, dx\,.$$

Indichiamo con U la varietà di $\mathcal{B}$ ogni elemento della quale è individuato da una funzione di classe C_1 in $A + \Sigma$ e nulla su Σ. Indichiamo inoltre con $\overline{U}$ la chiusura di tale varietà ([35]). Facciamo vedere che $\overline{U}$ è una varietà completa ([36]) e che ogni elemento di $\overline{U}$ può essere individuato da una funzione di $\mathcal{B}(A)$ avente come traccia la funzione identicamente nulla su Σ.

Per semplicità denoteremo ora con lo stesso simbolo un elemento di U e quella delle funzioni che lo individuano la quale è di classe C_1 in $A + \Sigma$ e nulla su Σ. Sia $\{u_m\}$ una successione di elementi di U verificante la condizione di convergenza di Cauchy e cioè tale che, in corrispondenza ad ogni numero positivo ε, esista un indice m_ε tale che per $r\,,\,m > m_\varepsilon$ risulti: $\int_A |\,\text{grad}\,(u_r - u_m)|^2\, dx < \varepsilon$. Dato che per ogni funzione u di classe C_1 in $A + \Sigma$ e nulla su Σ si ha com'è noto:

$$\int_A u^2\, dx \leq \int_A |\,\text{grad}\, u|^2\, dx\,,$$

ne viene che, per $r\,,\,m > m_\varepsilon$, si ha:

$$\int_A |\,\text{grad}\,(u_r - u_m)|^2\, dx + \int_A |u_r - u_m|^2\, dx < 2\,\varepsilon.$$

Da qui segue l'esistenza di una funzione u appartenente ad $\mathcal{B}(A)$ e tale che:

$$\lim_{m \to \infty} \left[\int_A |\,u - u_m|^2\, dx + \int_A |\,\text{grad}\,(u - u_m)|^2\, dx \right] = 0 \ \text{([37])}$$

([35]) Dicesi chiusura di un insieme la totalità dei punti che hanno distanza nulla da questo.

([36]) Una varietà di uno spazio metrico (quale è $\mathcal{B}$) dicesi completa se ogni successione di elementi di tale varietà, verificante la condizione di convergenza di Cauchy, ammette un elemento limite contenuto nella varietà stessa.

([37]) Cfr. Friedrichs [19].

ovvero:

$$\lim_{m \to \infty} \int_A |\operatorname{grad}(u - u_m)|^2 \, dx = 0 .$$

Si ha inoltre:

$$\int_\Sigma [\gamma(u)]^2 \, d\sigma = \int_\Sigma [\gamma(u) - u_m]^2 \, d\sigma \leq L \left[\int_A |u - u_m|^2 dx + \left(\int_A |u - u_m|^2 dx \cdot \int_A |\operatorname{grad}(u - u_m)|^2 \, dx \right) \right.$$

Ne viene: $\int_\Sigma [\gamma(u)]^2 \, d\sigma = 0$ e quindi l'asserto.

Sia v un elemento di $\mathcal{B}$; indichiamo con v_0 l'elemento proiezione di v sulla varietà $\overline{U}$ ([38]). Secondo la solita convenzione indicheremo con v anche una delle funzioni che individuano l'elemento v e con v_0 quella delle funzioni individuanti v_0 la quale è nulla su Σ. Poniamo: $v_1 = v - v_0$. Si ha allora $\gamma(v_1) = \gamma(v)$.

Resta ora soltanto da provare che v_1 è armonica in A. Per questo ricordiamo che riesce: $\int_A [\operatorname{grad} v_1 \times \operatorname{grad} u] \, dx = 0$, in corrispondenza ad ogni funzione u di classe C_1 in $A + \Sigma$ e nulla su Σ. Siano ora C una ipersfera contenuta in A e w una funzione di classe C_1 in $A + \Sigma$, nulla in $A - C$ e dotata di derivate seconde continue a pezzi in A ([39]). Si ha allora, per il lemma di Green:

$$\int_A [\operatorname{grad} v_1 \times \operatorname{grad} w] \, dx = - \int_A v_1 \, \Delta_2 w \, dx$$

e quindi:

$$\int_A v_1 \, \Delta_2 w \, dx = 0 . \tag{1}$$

([38]) Com'è noto, dicesi proiezione di un elemento u su una varietà V l'elemento v di V che ha minima distanza da V. Se la varietà V è completa, tale elemento proiezione esiste ed è unico. Ricordiamo inoltre che si ha: $(v - u, w) = 0$ se $w \subset V$.

([39]) Una funzione v dicesi continua a pezzi in un campo A se è possibile decomporre $A + \mathcal{F}A$ in un numero finito di dominî $A_1, \ldots, A_m$, a due a due privi di punti interni in comune, in modo tale che nell'interno di A_i la funzione v coincida con una funzione continua in $A_i + \mathcal{F} A_i$.

Indicata con φ una funzione uniformemente hölderiana in $A + \Sigma$, consideriamo il seguente probema al contorno:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta_4 w = \varphi & \text{in } C \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \mathcal{F} C \text{ (frontiera di } C). \end{cases}$$

Com'è noto, la soluzione di tale problema esiste ed è di classe C_1 in $C + \mathcal{F} C$. Riguardiamo $\mathcal{L}^{(2)}(C)$ come spazio di Hilbert avendo definito il prodotto scalare nel modo seguente:

$$(u, v) = \int_C u\, v\, dx,$$

ed indichiamo con $P(u)$ la proiezione dell'elemento u di $\mathcal{L}^{(2)}(C)$ sulla varietà delle funzioni armoniche in C appartenenti ad $\mathcal{L}^{(2)}(C)$. Se ora indichiamo con $s(x, y)$ la soluzione fondamentale relativa a $\Delta_2 v = 0$ e poniamo per ogni $\varphi \subset \mathcal{L}^{(2)}(C)$: $T(\varphi) = \int_C \varphi(y)\, s(x, y)\, dy$ (40), la soluzione w del problema (2) è data da:

$$(3) \qquad w = T^2(\varphi) - T\,P\,T(\varphi) \text{ (41)}.$$

Le trasformazioni $T(u)$ e $P(u)$, definite in $\mathcal{L}^{(2)}(C)$ ed aventi codominio in $\mathcal{L}^{(2)}(C)$, sono entrambe autoaggiunte; allora, se con w indichiamo la funzione che è nulla in $A - C$ e coincidente in C con la funzione espressa dalla (3), per la (1) si ha:

$$\int_A v_1\, \Delta_2 w\, dx = \int_C v_1 [T(\varphi) - P\,T(\varphi)]\, dx = \int_C \varphi [T(v_1) - T\,P(v_1)]\, dx = 0\,.$$

Data l'arbitrarietà di φ si trae: $T(v_1) = T\,P(v_1)$ e quindi $v_1 = P(v_1)$. Ne viene che v_1 è armonica in ogni sfera contenuta in A.

Così il teorema è completamente dimostrato.

---

(40) La funzione $T(\varphi)$, com'è noto, appartiene ad $\mathcal{L}^{(2)}(C)$.

(41) Cfr. Fichera [14].

2. Condizioni necessarie e sufficienti per la funzione K.

Richiamiamo alcune nozioni sulle serie numeriche.

Diremo che due serie numeriche a termini reali non negativi sono *c-equivalenti* quando si verifica la seguente circostanza: se una di esse è convergente tale risulta anche l'altra. Se $\{\alpha_m\}$ e $\{\beta_m\}$ sono due successioni di numeri reali, diremo che α_m *è asintotico a* β_m se: $0 < \min\lim\limits_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right| \leq$ $\leq \max\lim\limits_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right| < +\infty$.

Ci fonderemo, nel seguito, sul seguente lemma.

LEMMA 1. *Sia $\{\beta_m\}$ una successione di numeri reali non negativi. Condizione necessaria e sufficiente perchè, comunque si consideri una successione di numeri reali non negativi $\{\gamma_m\}$ tale che $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty$, le due serie: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ e $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_m\gamma_m$ siano c-equivalenti, è che β_m sia asintotico ad m cioè esistano due numeri positivi A_0 e B_0 con $A_0 < B_0$ e tali che, per m abbastanza grande, si abbia: $m\,A_0 \leq \beta_m \leq m\,B_0$.*

Supponiamo dapprima che non esista un numero positivo A_0 per cui $A_0 \leq \beta_m/m$ per m abbastanza grande; ne viene: $\min\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m/m = 0$. Esiste allora una successione crescente di numeri naturali $\{m_k\}$ tale che $\beta_{m_k} < m_k/k$.

Poniamo: $$\gamma_m = \begin{cases} 0 & m \neq m_k \\ \dfrac{1}{m_k\,k} & m = m_k. \end{cases}$$

È allora immediato constatare che le serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ e $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_m\,\gamma_m$ sono convergenti mentre la serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\,\gamma_m$ è divergente; pertanto, in tal caso, dalla convergenza di $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_m\,\gamma_m$ non segue quella di $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\,\gamma_m$.

Supponiamo ora che non esista un numero positivo B_0 tale che $\beta_m/m \leq B_0$ per m abbastanza grande; ne viene che $\max\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m/m = +\infty$. Esiste allora una successione crescente di numeri naturali $\{m_h\}$ tale che $\beta_{m_h} > h\,m_h$.

Poniamo: $$\gamma_m = \begin{cases} 0 & m \neq m_h \\ \dfrac{1}{h^2\,m_h} & m = m_h. \end{cases}$$

È allora facile constatare che le serie $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ e $\sum_{m=1}^{\infty} m\,\gamma_m$ sono convergenti mentre la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\,\gamma_m$ è divergente; pertanto, in tal caso, dalla convergenza di $\sum_{m=1}^{\infty} m\,\gamma_m$ non segue quella di $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\,\gamma_m$. In tal modo è provata la necessità della condizione. La sufficienza è del tutto ovvia.

Così il lemma è completamente dimostrato.

Consideriamo ora, preliminarmente, il caso dello spazio euclideo S_2 a due dimensioni; il punto generico di S_2 verrà indicato con z; indicheremo inoltre con ϱ la distanza di z dall'origine e con ϑ l'anomalia di z.

Richiamiamo dapprima la condizione di Hadamard, relativa al caso in cui Σ sia la frontiera di un cerchio.

I. *Siano Σ una circonferenza di centro l'origine del piano z e di raggio R, s l'ascissa curvilinea di Σ ed $f(s)$ una funzione sommabile su Σ. Condizione necessaria e sufficiente perchè $f(s)$ appartenga a $\mathfrak{T}(\Sigma)$ è che, posto $\tau = s/R$ ed indicate con a_m e b_m le coordinate di Fourier di $f(R\,\tau)$ relative all'intervallo $0 \leq \tau \leq 2\,\pi$* [42], *riesca:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\,(a_m^2 + b_m^2) < +\infty\,. \tag{1}$$

Indichiamo con D il cerchio di frontiera Σ. Per la $u(z)$, la quale è armonica in D, appartiene a $\mathcal{H}(D)$ ed ha come traccia su Σ la f, sussiste il seguente sviluppo in serie, uniformemente convergente in D:

$$u\,(z) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} (\varrho/R)^m\,(a_m \cos m\,\vartheta + b_m \operatorname{sen} m\vartheta)\ \text{[43]}.$$

---

[42] Per coordinate di Fourier di una funzione sommabile $\varphi(\tau)$ relative all'intervallo $0 \leq \tau \leq 2\pi$ intendiamo i numeri:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi\,(\tau)\,d\,\tau$$

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi\,(\tau) \cos m\,\tau\,d\,\tau \qquad b_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi\,(\tau) \operatorname{sen} m\,\tau\,d\,\tau \qquad (m > 0)\,.$$

[43] Per stabilire questo sviluppo basta ricordare che:

$$\lim_{\varrho \to R} \int_0^{2\pi} u\,(\varrho\,,\vartheta)\,e^{im\vartheta}\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} f\,(R\,\tau)\,e^{im\tau}\,d\,\tau\,.$$

Da qui si trae che, se f appartiene a $\mathfrak{T}(\Sigma)$, riesce:

$$\sum_{m=1}^{k} m\,(a_m^2 + b_m^2) \leq \int_D |\text{grad}\, u|^2\, dx$$

qualunque sia k e quindi è provata la necessità della condizione.

Se invece si ha $\sum_{m=1}^{\infty} m\,(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$, indicata con u_n la ridotta n-esima della serie scritta in precedenza, riesce:

$$\int_D |\text{grad}\,(u_{n+p} - u_n)|^2\, dx = \sum_{m=n+1}^{n+p} m\,(a_m^2 + b_m^2)$$

e da ciò segue facilmente la sufficienza della condizione.

Indicata con Σ la frontiera di un campo limitato di classe 1, con s l'ascissa curvilinea di Σ, con L la lunghezza di Σ, diremo che la funzione $w(s)$ definita su Σ ed ivi sommabile, è dotata di *derivata debole di quadrato sommabile su* Σ se esiste una funzione di quadrato sommabile su Σ, $\varphi(s)$ tale che in corrispondenza ad ogni funzione $v(s)$ di classe C_2' su Σ si abbia:

$$\int_\Sigma w(s)\,\frac{d\,v(s)}{ds}\,ds = -\int_\Sigma \varphi(s)\,v(s)\,ds\,.$$

La classe delle funzioni $w(s)$ definite su Σ, ivi sommabili e dotate di derivata debole di quadrato sommabile su Σ, verrà indicata con $\mathfrak{B}(\Sigma)$.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema:

II. *Siano R un numero positivo e $K(t)$ una funzione periodica di periodo $2\pi R$, sommabile nell'intervallo $(0, 2\pi R)$. Posto $\vartheta = t/R$, indichiamo con a_m e b_m $(m = 0, 1, \ldots)$ le coordinate di Fourier della funzione $K(R\,\vartheta)$ relative all'intervallo $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Allora, se C è una circonferenza di raggio R, s è l'ascissa curvilinea di C, $f(s)$ una funzione definita su C ed ivi sommabile, condizione necessaria e sufficiente perchè l'appartenenza di $f(s)$ a $\mathfrak{T}(C)$ equivalga all'appartenenza di*

$$\Phi(t) = f * K = \int_C f(s)\,K(t-s)\,d\,s \;(^{44})$$

a $\mathfrak{B}(C)$ è che $a_m^2 + b_m^2$ sia asintotico ad $1/m$.

---

(44) È immediato constatare che la funzione di s: $f(s)\,K(t-s)$ è sommabile in $(0, 2\pi R)$ per t fissato quasi ovunque in questo intervallo e che la funzione di t: $\int_C f(s)\,K(t-s)\,ds$ è sommabile in $(0, 2\pi R)$.

L'appartenenza di $\Phi(t)$ a $\mathcal{B}(C)$ significa, come s'è prima detto, che esiste una funzione $\varphi(t)$ definita su C ed ivi di quadrato sommabile, tale che riesca:

$$\int_C \Phi(t) \frac{d\,v(t)}{d\,t}\,dt = -\int_C \varphi(t)\,v(t)\,d\,t \tag{2}$$

per ogni funzione $v(t)$ di classe C_2 su C.

È immediato constatare che il sistema (2) è equivalente al seguente:

$$\frac{i\,m}{R}\int_C \Phi(t)\,e^{i\,m\frac{t}{R}}\,dt = -\int_C \varphi(t)\,e^{i\,m\frac{t}{R}}\,dt \qquad (m = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Poniamo: $\displaystyle \frac{1}{R}\int_C K(t)\,e^{i\,m\frac{t}{R}}\,d\,t = c_m\,, \quad \frac{1}{R}\int_C f(s)\,e^{i\,m\frac{s}{R}}\,d\,s = \tau_m\,.$

Con un'inversione dell'ordine di integrazione si ha:

$$\int_C e^{i\,m\frac{t}{R}}\,d\,t \int_C f(s)\,K(t-s)\,ds = R^2\,c_m\,\tau_m\,,$$

e quindi:

$$\left|\frac{i\,m}{R}\int_C e^{i\,m\frac{t}{R}}\,d\,t\int_C f(s)\,K(t-s)\,d\,s\right|^2 = R^2\,m^2\,|c_m|^2\,|\tau_m|^2 =$$

$$= \pi\,m^2 R^2\,|\tau_m|^2\,(a_m^2 + b_m^2)\ (^{45}).$$

Si ha allora che condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione $\varphi(t)$ del sistema (3) è: $\sum_{m=1}^{\infty} m^2\,|\tau_m|^2\,(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$. D'altra parte, dal teorema I si trae che, per l'appartenenza di f a $\mathcal{T}(C)$, è necessaria e sufficiente la condizione: $\sum_{m=1}^{\infty} m\,|\tau_m|^2 < +\infty$. Dal confronto di queste due condizioni si trae intanto che, se $a_m^2 + b_m^2$ è asintotico ad

(45) Si ha infatti $|c_m|^2 = \pi\,(a_m^2 + b_m^2)$ per $m \geq 1$.

$1/m$ la convergenza dell'una serie implica quella dell'altra e viceversa. In tal modo è provata la sufficienza della condizione.

Se, d'altra parte, le due serie $\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \, |\tau_m|^2 \, (a_m^2 + b_m^2)$ e $\sum_{m=1}^{\infty} m \, |\tau_m|^2$ sono c-equivalenti in corrispondenza ad ogni funzione f sommabile su C, in particolare saranno tali in corrispondenza ad ogni funzione di quadrato sommabile su C, cioè in corrispondenza ad ogni successione $\{|\tau_m|^2\}$ tale che $\sum_{m=1}^{\infty} |\tau_m|^2 < +\infty$ ed allora, per il lemma 1 si ha che $a_m^2 + b_m^2$ è asintotico ad $1/m$. Così è provata la necessità della condizione.

L'estensione di questo teorema al caso di un campo piano qualsiasi, anche non circolare, è fornito dal seguente:

III. *Siano A un campo di classe 1 del piano (x, y), L la lunghezza della curva Σ che costituisce la frontiera di A, s l'ascissa curvilinea di Σ, f una funzione sommabile su Σ, $K(t)$ una funzione periodica di periodo L sommabile nell'intervallo $(0, L)$.*

Posto $\vartheta = \dfrac{2\pi t}{L}$ indichiamo con a_m e b_m le coordinate di Fourier di $K\left(\dfrac{L\vartheta}{2\pi}\right)$ nell'intervallo $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè l'appartenenza di $f(s)$ a $\mathfrak{C}(\Sigma)$ equivalga all'appartenenza di $\Phi(t) = f * K = \int_{\Sigma} f(s) \, K(t-s) \, ds$ a $B(\Sigma)$ è che $a_m^2 + b_m^2$ sia asintotico ad $1/m$.

Dato che A è un campo di classe 1, esistono un versore $\lambda(\zeta)$ avente origine nel punto ζ di Σ, penetrante nell'interno di A e le cui componenti sono funzioni di classe C_1 su Σ, ed un numero positivo ϱ_0 tale che l'insieme descritto dal punto $\zeta + \varrho\,\lambda(\zeta)$, per ogni fissato ϱ in $(0, \varrho_0)$, al variare di ζ su Σ, risulta contenuto in A ed in corrispondenza biunivoca con Σ. Supporremo che sia $\varrho_0 < L/4\pi$. Indichiamo con $\zeta(s)$ il punto di Σ che ha ascissa curvilinea s e con A' l'insieme descritto dal punto $\zeta(s) + \varrho\,\lambda[\zeta(s)]$ al variare di s nell'intervallo $0 \leq s < L$ e di ϱ nell'intervallo $0 \leq \varrho < \varrho_0$.

Indichiamo inoltre con C la circonferenza di centro l'origine e raggio $L/2\pi$, con s l'ascissa curvilinea di C, con $z(s)$ il punto di C di ascissa curvilinea s, con $\nu(z)$ il versore della normale interna a C in z, con D il cerchio che ha C per frontiera e con D' l'insieme descritto dal punto $z(s) + \varrho\,\nu[z(s)]$ al variare di s nell'intervallo $0 \leq s < L$ e di ϱ nell'intervallo $0 \leq \varrho < \varrho_0$. Siano $x(\varrho, s)$, $y(\varrho, s)$ le coordinate dal punto $z(s) + \varrho\,\nu[z(s)]$ è $\xi(\varrho, s)$, $\eta(\varrho, s)$ quelle del punto $\zeta(s) + \varrho\,\lambda[\zeta(s)]$.

Le equazioni $x = x(\varrho, s)$, $y = y(\varrho, s)$ pongono una corrispondanza biunivoca tra i punti di D' e quelli del rettangolo definito dalle limitazioni $0 \leq \varrho < \varrho_0$, $0 \leq s < L$.

Indichiamo con $s = s(x, y)$, $\varrho = \varrho(x, y)$ le equazioni della corrispondenza inversa; è allora evidente che $\xi = \xi[\varrho(x, y)], s(x, y)]$, $\eta = \eta[\varrho(x, y), s(x, y)]$ sono le equazioni di un omeomorfismo di classe 1 tra A' e D' (46). Scriveremo tali equazioni brevemente nel modo che segue: $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, mentre le equazioni della trasformazione inversa saranno: $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$.

Ciò premesso, passiamo alla dimostrazione del teorema.

Supponiamo che la funzione $f(s)$, pensata come funzione definita sulla circonferenza C, appartenga a $\mathcal{T}(C)$. Indichiamo allora con $u(z)$ la funzione definita nel cerchio D, appartenente a $\mathcal{K}(D)$, armonica in D ed avente come traccia su C la funzione $f(s)$. La funzione $v(\zeta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$, definita in $A' - \Sigma$, appartiene a $\mathcal{K}(A' - \Sigma)$ ed ha come traccia su Σ la funzione f. Sia $w(\zeta)$ una funzione di classe C_1 in A, coincidente con $v(\zeta)$ in $A' - \Sigma$ (l'esistenza di una funzione siffatta è di immediata verifica). La funzione $w(\zeta)$ appartiene ovviamente a $\mathcal{K}(A)$ ed ha come traccia su Σ la funzione f.

Supponiamo invece ora che $f(s)$ appartenga a $\mathcal{T}(\Sigma)$ e indichiamo con $w(\zeta)$ la funzione armonica in A appartenente a $\mathcal{K}(A)$ ed avente come traccia su Σ la f. Allora la funzione $\omega(\zeta) = w[\xi(x, y), \eta(x, y)]$, definita in $D' - C$ appartiene a $\mathcal{K}(D' - C)$ ed ha come traccia su C la $f(s)$. Sia $u(z)$ una funzione di classe C_1 in D e coincidente con $\omega(z)$ in $D' - C$. Tale funzione appartiene a $\mathcal{K}(D)$ ed ha come traccia su C la $f(s)$.

In tal modo si è provato che l'appartenenza di $f(s)$ a $\mathcal{T}(\Sigma)$ equivale alla appartenenza di questa funzione a $\mathcal{T}(C)$. Allora, in virtù del teorema precedente, è provata la tesi.

Portiamo ora alcuni esempi di funzioni $K(t)$ che soddisfino la condizione richiesta nel precedente teorema.

Un primo esempio è fornito dalla funzione che nell'intervallo $(-L/2, L/2)$ coincide con $|t|^{-1/2}$ ed è definita, fuori di tale intervallo per periodicità.

---

(46) Dicendo che $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ sono le equazioni di un omeomorfismo di classe 1 tra un insieme A del piano (ξ, η) ed un insieme B del piano x, y intendiamo che tali equazioni pongono una corrispondenza biunivoca tra i punti di A e quelli di B, che le funzioni $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ sono di classe C_1 in A e che la matrice jacobiana di tali funzioni ha determinante mai nullo.

Dato che $|t|^{-1/2}$ è funzione pari, si ha: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\,\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2}\operatorname{sen} m\vartheta\, d\vartheta = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\,\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2}\cos m\vartheta\, d\vartheta = 2\int_{0}^{\pi}\left|\frac{L\,\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2}\cos m\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/2}\int_{0}^{\pi}\vartheta^{-1/2}\cos m\vartheta\, d\vartheta\,.$$

Posto $m\vartheta = \sigma^2$, si ha: $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\vartheta^{-1/2}\cos m\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{\sqrt{m}}\int_{0}^{\sqrt{m}\,\pi}\cos\sigma^2\, d\sigma.$

Tenendo conto della relazione di limite: $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_{0}^{\sqrt{m}\,\pi}\cos\sigma^2\, d\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

si ha che, fissato ε soddisfacente le limitazioni $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, esiste un numero naturale m_ε tale che per $m > m_\varepsilon$ riesce:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \varepsilon \leq \int_{0}^{\sqrt{m}\,\pi}\cos\sigma^2\, d\sigma \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \varepsilon\,,$$

e quindi per $m > m_\varepsilon$:

$$\frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\varepsilon\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\,\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2}\cos m\vartheta\, d\vartheta \leq \frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2\,\varepsilon\right).$$

Con ciò è provato l'asserto.

Come secondo esempio consideriamo la funzione $K(t) = \left(1 - \cos\dfrac{2\pi t}{L}\right)^{-1/4}$. Per dimostrare che questa funzione soddisfa le condizioni richieste dal precedente teorema, basta osservare che la differenza

$$\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{L}\right)^{-1/4} - 2^{1/4}\,|t|^{-1/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\,[(1 - \cos\vartheta)^{-1/4} - 2^{1/4}\,|\vartheta|^{-1/2}]$$

è continua con la sua derivata prima in $(-\pi\,,\ \pi)$.

Ne viene l'esistenza di un numero positivo $B > 0$ tale che:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} [(1 - \cos \vartheta)^{-1/4} - 2^{1/4} |\vartheta|^{-1/2}] \cos m\vartheta \, d\vartheta \right| \leq B \frac{1}{m} \text{ (47)}.$$

D'altra parte, come prima s'è visto, esistono due numeri positivi A' ed A'' tali che:

$$A' \frac{1}{\sqrt{m}} \leq 2^{1/4} \int_{-\pi}^{\pi} |\vartheta|^{-1/2} \cos m\vartheta \, d\vartheta \leq A'' \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Da qui si trae l'esistenza di due numeri positivi B' e B'' tali che:

$$B' \frac{1}{\sqrt{m}} \leq \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \vartheta)^{-1/4} \cos m\vartheta \, d\vartheta \leq B'' \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Tenendo conto inoltre del fatto che: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \vartheta)^{-1/4} \operatorname{sen} m\vartheta \, d\vartheta = 0$, si ha l'asserto.

Dimostriamo anche il seguente teorema:

IV. *Siano A un campo di classe 2 del piano z, L la lunghezza della curva Σ che costituisce la frontiera di A, s l'ascissa curvilinea di Σ, $z = z(s)$ l'equazione parametrica di Σ rispetto all'ascissa s, $f(s)$ una funzione appartenente ad $\mathcal{L}^{(3)}(\Sigma)$. Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè f appartenga a $\mathcal{T}(\Sigma)$ è che la funzione $\Phi^*(t) = \int_{\Sigma} f(s) \, |z(s) - z(t)|^{-1/2} ds$ sia dotata di derivata debole di qudrato sommabile su Σ* (48).

Tenuto conto del fatto che la funzione $K_0(t)$, la quale coincide in $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ con $|t|^{-1/2}$ ed è definita altrove per periodicità, soddisfa la

---

(47) [37] p. 263.

(48) La condizione che f appartenga a $\mathcal{L}^{(3)}(\Sigma)$ è necessaria per l'appartenenza di f a $\mathcal{T}(\Sigma)$; si può anzi dire che se $f \subset \mathcal{T}(\Sigma)$ allora f appartiene a $\mathcal{L}^{(p)}(\Sigma)$ con p arbitrario come segue da un risultato di S. L. Sobolev [42].

condizione del teorema III, per dimostrare la tesi basta ovviamente far vedere che l'appartenenza di $\Phi^*(t)$ a $\mathcal{B}(\Sigma)$ equivale all'appartenenza di $\Phi(t) = \int_\Sigma f(s)\, K_0(s-t)\, ds$ alla medesima classe. Per questo basta provare che la funzione $\Phi^*(t) - \Phi(t)$ appartiene a $\mathcal{B}(\Sigma)$, dato che questa classe è lineare, come subito si constata.

Sfruttando l'ipotesi che Σ è di classe 2 si può dimostrare facilmente l'esistenza di due numeri positivi A_0 e B_0 tali che, posto $|z(s) - z(t)|^{-1/2} - K_0(s-t) = H(s,t)$, per $|s-t| \neq k\frac{L}{2}$ si abbia:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} H(s,t)\right| \leq A_0\, K_0(s-t) + B_0 ;$$

inoltre è facile vedere che, per ogni fissato s, si ha: $\lim_{t \to s} H(s,t) = 0$.

Sfruttando queste relazioni si trova che, se $v(t)$ è una qualsiasi funzione di classe C_2 su Σ, riesce:

$$\int_\Sigma f(s)\, ds \int_\Sigma H(s,t)\, \frac{\partial v(t)}{\partial t}\, dt = -\int_\Sigma f(s)\, ds \int_\Sigma \frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\, v(t)\, dt .$$

Per il teorema di Fubini ([49]) sugli integrali doppi si ha:

$$\int_{\Sigma\times\Sigma} f(s)\, H(s,t)\, \frac{dv}{dt}\, ds\, dt = -\int_{\Sigma\times\Sigma} f(s)\, \frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\, v(t)\, ds\, dt$$

e quindi ([49]):

$$\int_\Sigma \frac{dv}{dt}\, dt \int_\Sigma f(s)\, H(s,t)\, ds = -\int_\Sigma v(t)\, dt \int_\Sigma f(s)\, \frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\, ds$$

cioè:

$$\int_\Sigma [\Phi^*(t) - \Phi(t)]\, \frac{dv}{dt}\, dt = -\int_\Sigma v(t)\, dt \int_\Sigma f(s)\, \frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\, ds .$$

([49]) [18] pp. 375, 377.

Dato che $f(s)$ appartiene ad $\mathcal{L}^{(3)}(\Sigma)$ e $K_0(s-t)$ a $\mathcal{L}^{(3/2)}(\Sigma)$, sfruttando la diseguaglianza di Schwarz-Hölder, si ha:

$$\left|\int_\Sigma f(s)\,\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds\right| \leq A_0 \int_\Sigma |f(s)\,K_0(s-t)|\,ds + B_0\int_\Sigma |f(s)|\,ds \leq$$

$$\leq A_0 \left(\int_\Sigma |f(s)|^3\,ds\right)^{1/3} \left(\int_\Sigma |K_0(s-t)|^{3/2}\,ds\right)^{2/3} + B_0 \int_\Sigma |f(s)|\,ds\,.$$

Ne viene che $\int_\Sigma f(s)\,\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds$ è una funzione di t limitata su Σ e quindi di quadrato sommabile. Ciò prova che $\Phi^*(t) - \Phi(t)$ appartiene a $\mathcal{B}(\Sigma)$.

Prima di compiere l'estensione al caso di uno spazio euclideo n-dimensionale S_n, dobbiamo fare qualche richiamo alla teoria delle funzioni ipersferiche.

Introduciamo nello spazio S_n un sistema di coordinate polari $(\varrho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \vartheta)$ ponendo:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = \varrho \cos\varphi_1 & & \\
x_2 = \varrho \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 & & \varrho \geq 0 \\
\cdots\cdots\cdots & & \\
x_{n-2} = \varrho \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2} & & 0 \leq \varphi_i \leq \pi \\
x_{n-1} = \varrho \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-2} \cos\vartheta & & 0 \leq \vartheta < 2\pi \\
x_n = \varrho \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-2} \operatorname{sen}\vartheta & &
\end{array}$$ [50].

---

[50] In questo sistema di coordinate curvilinee l'elemento di misura ipersuperficiale della ipersuperficie sferica unitaria Ω è: $d\sigma = \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1 \operatorname{sen}^{n-3}\varphi_2 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\vartheta$. Pertanto, indicato, con R l'insieme definito dalle relazioni $0 \leq \varphi_k \leq \pi$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ $0 \leq \vartheta < 2\pi$, dicendo che f è sommabile (di quadrato sommabile, etc.) su Ω intendiamo che la funzione $f[\cos\varphi_1, \operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2, \ldots, \operatorname{sen}\varphi_1 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-2}\operatorname{sen}\vartheta]$ è sommabile (di quadrato sommabile etc.) in R rispetto alla misura definita sui boreliani B contenuti in R dall'integrale di Lebesgue $\int_B \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\vartheta$.

Indichiamo con $Q_m(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio armonico omogeneo di grado m; prendono il nome di funzioni ipersferiche di ordine m tutte le funzioni $Y_m(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \vartheta)$ definite sulla ipersuperficie sferica unitaria Ω dalla relazione:

$$Q_m(x_1, \ldots, x_n) = \varrho^m Y_m(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \vartheta) \qquad \varrho > 0, m = 0, 1, \ldots \text{(51)}$$

Queste funzioni, nel caso $n = 3$, coincidono con le funzioni sferiche o di Laplace (52); esse inoltre godono di proprietà analoghe a quelle delle funzioni di Laplace. Le funzioni Y_m sono soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$(4) \qquad m(m + n - 2) Y_m + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi_1 \ldots \operatorname{sen}^2 \varphi_{n-2}} \frac{\partial^2 Y_m}{\partial \vartheta^2} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n-2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi_1 \ldots \operatorname{sen}^2 \varphi_{h-1}} \frac{1}{\operatorname{sen}^{(n-1-h)} \varphi_h} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_h}\left(\operatorname{sen}^{(n-1-h)} \varphi_h \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi_h}\right) = 0 \quad m=0,1,\ldots$$

Altre proprietà delle funzioni ipersferiche cui faremo ricorso sono:

1°) l'insieme delle funzioni ipersferiche di ordine m è lineare ed ha una dimensione finita che verrà da noi indicata con μ_m, cioè in corrispondenza all'intero non negativo m si possono determinare soltanto μ_m funzioni ipersferiche di ordine m linearmente indipendenti ed ogni altra riesce combinazione lineare di queste;

2°) due funzioni ipersferiche di ordine diverso sono ortogonali su Ω, si ha cioè:

$$(5) \qquad \int_\Omega Y_m Y_r \, d\sigma = 0 \qquad (m \neq r);$$

3°) ogni funzione $f(x)$ definita su Ω ed ivi di quadrato sommabile può essere rappresentata nella forma: $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(x)$ la serie a secondo membro riuscendo convergente in media di ordine 2 su Ω ed uniformemente su Ω se f è di classe C_1;

4°) se con P_m^s $(m = 0, 1, \ldots; s = 1, 2, \ldots)$ indichiamo i polinomi di Gegenbauer, definiti dalla relazione:

$$(1 - 2at + a^2)^{-s/2} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m P_m^s(t)$$

(51) [2] p. 204.
(52) [37] p. 180.

ove $|2at| + |a|^2 < 1$ e se per ogni coppia di punti x, y di Ω poniamo: $C(x, y) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{|x|\,|y|}$ [53], in corrispondenza ad ogni funzione $f(x)$ definita su Ω ed ivi continua, la funzione di y: $\int_{\Omega} f(x)\, P_m^{n-2}\,[C(x, y)]\, d_x \sigma$ riesce una funzione ipersferica di ordine m;

5^0) se f è una funzione definita su Ω ed ivi sommabile, la funzione armonica nell'interno dell'ipersfera unitaria ed avente come traccia su Ω la f ha l'espressione:

$$u = \alpha_n \sum_{m=0}^{\infty} (2m + n - 2)\, \varrho^m \int_{\Omega} f(y)\, P_m^{n-2}\,[C(x, y)]\, d_y \sigma$$

ove $\alpha_n = \Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right) / 4\pi^{n/2}$ [54].

Da qui, tenendo presente che $\int_D |\operatorname{grad} u|^2\, dx = -\int_{\mathcal{F}D} u \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma$ ove ν indica la normale interna ad $\mathcal{F}D$, si trae la seguente condizione necessaria e sufficiente perchè f appartenga a $\mathfrak{T}(\Omega)$:

$$(6) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m\,(2m + n - 2)^2 \int_{\Omega} d_x \sigma \left[\int_{\Omega} f(y)\, P_m^{n-2}\,[C(x, y)]\, d_y \sigma\right]^2 < +\infty \; [55].$$

Dalla proprietà 3^0) discende in particolare che, se $f(t)$ è una funzione definita in $(-1, 1)$ e di quadrato sommabile rispetto alla misura τ_s definita sui boreliani B contenuti in $(-1, 1)$ nel modo seguente

$$\tau_s(B) = \int_B (1 - t^2)^{\frac{s-1}{2}}\, dt,$$

posto:

$$c_m^{(s)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, \frac{(2m + s)(s-1)!\, m!}{(s + m - 1)}\, \frac{\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)} \int_{(-1,1)} f(t)\, P_m^s(t)\, d\tau_s,$$

---

[53]) Con $|x|$ intendiamo la distanza di x dall'origine.

[54]) Con il simbolo $\Gamma(z)$ intendiamo la funzione euleriana Γ cfr. [38] p. 706.

[55]) La dimostrazione di questo risultato è analoga a quella del teorema I di questo paragrafo.

si ha: $f(t) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(s)} P_m^s(t)$, ove la serie a secondo membro converge ad f in media di ordine 2 rispetto alla misura τ_s ed uniformemente se f è di classe C_1 (56).

Se f è una funzione sommabile rispetto a τ_s in $(-1,1)$, i numeri $c_m^{(s)}$, definiti in corrispondenza ad f, prendono il nome di *coordinate di* f *rispetto al sistema* $\{P_m^s\}$ $(m = 0, 1, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots)$.

È immediato constatare che, per $s = 1$ i polinomi P_m^s coincidono, con i polinomi di Legendre ed i numeri $c_m^{(s)}$ con le coordinate di Legendre di f: $\frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, P_m^1(t)\, dt$ (57).

Se $g(x)$ è una funzione definita sulla ipersuperficie sferica unitaria Ω ed ivi di classe C_1, come *gradiente di* g *su* Ω assumeremo il vettore ad $n-1$ componenti:

$$\operatorname{grad} g \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_1}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \varphi_3} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \varphi_{n-2}} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_1 \ldots \operatorname{sen} \varphi_{n-3}}, \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_1 \ldots \operatorname{sen} \varphi_{n-2}} \right). \ (58)$$

Diremo inoltre che la funzione $g(x)$ definita su Ω ed ivi sommabile è dotata di *gradiente debole di quadrato sommabile su* Ω se esiste un vettore $\Psi(x)$ ad $n-1$ componenti di quadrato sommabile su Ω tale che in corrispondenza ad ogni vettore $V(x)$ ad $n-1$ componenti $v_1, \ldots, v_{n-1}$, di classe C_2 su Ω, posto:

$$E[V(x)] = \sum_{h=1}^{n-2} \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_1 \ldots \operatorname{sen} \varphi_{h-1}} \frac{1}{\operatorname{sen}^{(n-1-h)} \varphi_h} \frac{\partial}{\partial \varphi_h} [(\operatorname{sen} \varphi_h)^{n-1-h} v_h] +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_1 \ldots \operatorname{sen} \varphi_{n-2}} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \vartheta},$$

---

(56) Per i risultati relativi alle funzioni ipersferiche ed ai polinomi P_m^s sopra riportati, si può vedere [2] pp. 204 e seg..

(57) [37] p. 356.

(58) Queste espressioni per le derivate parziali fatte lungo le linee coordinate di Ω di equazione $\varphi_k =$ costante, $\vartheta =$ costante, si ottengono subito ricordando che:

$$(ds)^2 = (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\varphi_1)^2 + \varrho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 (d\varphi_2)^2 + \ldots + \varrho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 \ldots \operatorname{sen}^2 \varphi_{n-2} (d\vartheta)^2 .$$

si abbia:

$$\int_\Omega g\, E(V)\, d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\, d\sigma\,.$$

È subito visto, mediante integrazione per parti, che se g è di classe C_1 su Ω il vettore $\Psi = \operatorname{grad} g$ soddisfa questo sistema di equazioni.

Indicheremo con $\mathfrak{B}(\Omega)$ la classe delle funzioni definite su Ω, ivi sommabili e dotate di gradiente debole di quadrato sommabile su Ω.

Ciò posto, possiamo dimostrare il teorema:

V. *Sia $K(t)$ una funzione definita nell'intervallo $(-1, 1)$ ed ivi sommabile rispetto a τ_{n-2}; siano c_m le coordinate di $K(t)$ rispetto al sistema dei polinomi $\{P_m^{n-2}\}$.*

Allora, se $f(y)$ è una funzione definita su Ω ed ivi sommabile, condizione necessaria e sufficiente perchè l'appartenenza di $f(y)$ a $\mathfrak{T}(\Omega)$ equivalga all'appartenenza di $\Phi(x) = \int_\Omega f(y)\, K[C(x, y)]\, d_y\, \sigma$ (59) a $\mathfrak{B}(\Omega)$ è che c_m sia asintotico a $\sqrt{m}$.

Come si è prima detto, l'appartenenza di $\Phi(x)$ a $\mathfrak{B}(\Omega)$ significa che esiste un vettore Ψ ad $n-1$ componenti di quadrato sommabile su Ω tale che in corrispondenza ad ogni vettore V ad $n-1$ componenti di classe C_1 su Ω riesca:

$$\int_\Omega \Phi\, E(V)\, d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\, d\sigma. \tag{7}$$

Indichiamo con Y_m^k $(k = 1, \ldots, \mu_m)$ un sistema di μ_m funzioni ipersferiche di grado $m > 0$ tali che:

$$\int_\Omega Y_m^k\, Y_m^h\, d\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{m(m+n-2)} & k = h \\ 0 & k \neq h\,. \end{cases} \tag{8}$$

Poniamo $U_m^k = \operatorname{grad} Y_m^k$.

---

(59) È immediato constatare che $f(y)\, K[C(x, y)]$ è sommabile su Ω rispetto ad y, fissato quasi ovunque il punto x su Ω, e che $\Phi(x)$ è sommabile su Ω.

È facile vedere, sfruttando le (4) e (8), che il sistema $\{ U_m^k \}$ è ortonormale nello spazio hilbertiano S dei vettori ad $n - 1$ componenti ognuna delle quali è una funzione di quadrato sommabile su Ω ([60]).

Facciamo vedere che condizione necessaria e sufficiente perchè, assegnato Φ, esista una soluzione Ψ del sistema (7), è che esista una soluzione Ψ^*, appartenente ad S, del sistema:

$$(9) \qquad m(m+n-2)\int_\Omega \Phi \, Y_m^k \, d\sigma = \int_\Omega \Psi^* \times U_m^k \, d\sigma \qquad (k=1, \dots \mu_m ; \; m = 1, 2, \dots)$$

il quale è stato ottenuto assumendo, nel sistema (7), come vettori V i vettori del sistema $\{ U_m^k \}$.

Basta solo mostrare la sufficienza della condizione; cominciamo con l'osservare che il sistema di funzioni $\{\sqrt{m(m+n-2)}\, Y_m^k\}$ $(k=1,\dots,\mu_m; \; m=1,2,\dots)$, cui si aggiunga la funzione 1, in virtù della proprietà 3^0) sopra richiamata e delle relazioni integrali (5) e (8), è ortonormale e completo nello spazio hilbertiano S' delle funzioni di quadrato sommabile su Ω ([61]). Siano V un vettore di classe C_2 su Ω ed $a_m^{(k)}$ le coordinate di Fourier di $E(V)$ rispetto al sistema $\{ \sqrt{m(m+n-2)} \; Y_m^k \}$; si ha in S': $E(V) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \; Y_m^k$.

Dato che riesce: $\int_\Omega Y_m^k \, E(V) \, d\sigma = - \int_\Omega U_m^k \times V \, d\sigma$, per le coordinate di

---

([60]) L'insieme lineare dei vettori ad $n-1$ componenti, ognuna delle quali è una funzione di quadrato sommabile su Ω, può riguardarsi come spazio hilbertiano introducendo il seguente prodotto scalare: $(U, V) = \int_\Omega U \times V \, d\sigma$. Allora il sistema di vettori $\{ V_k \}$ è ortonormale se: $\int_\Omega V_h \times V_k \, d\sigma = \delta_h^k$.

([61]) In uno spazio di Hilbert un sistema ortonormale di vettori $\{ u_k \}$ dicesi completo se ogni vettore u di tale spazio può porsi nella forma $u = \sum_k a_k \, u_k$; in tal caso i numeri a_k prendono il nome di coordinate di Fourier di u rispetto ad $\{ u_k \}$ ed hanno l'espressione $a_k = (u, u_k)$; inoltre riesce $\sum_k | a_k |^2 = (u, u)$. Se $\{ v_k \}$ è un sistema ortonormale, la serie $\sum_k (u, v_k) \, v_k$ è convergente verso un vettore v e si ha la disegnaglianza (di Bessel): $(v, v) \leq (u, u)$ (cfr. [18] cap. V).

Fourier del vettore V rispetto al sistema $\{U_m^k\}$ si ha:

$$\int_\Omega V \times U_m^k \, d\sigma = - a_m^{(k)} / \sqrt{m(m+n-2)} .$$

Esiste allora un vettore W di S tale che:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} 1/\sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} U_m^k .$$

Supponiamo ora che in corrispondenza ad una funzione Φ sommabile su Ω esista un vettore Ψ^* di S soluzione della (9).

Moltiplicando ambo i membri della (9) per $a_m^{(k)}/\sqrt{m(m+n-2)}$, sommando sugli indici m e k e passando al limite sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$\int_\Omega \Phi \, E(V) \, d\sigma = - \int_\Omega \Psi^* \times W \, d\sigma \text{ (62)}.$$

---

(62) Il passaggio al limite sotto il segno d'integrale:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \int_\Omega \Phi \, Y_m^k \, d\sigma = \int_\Omega \Phi \, E(V) \, d\sigma$$

è lecito, dato che $E(V)$ è una funzione di classe C_1 e quindi la convergenza della serie $\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} Y_m^k$ è uniforme su Ω, come segue dalla ricordata proprietà 3ª) delle funzioni ipersferiche. Il passaggio al limite sotto il segno d'integrale:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+n-2)}} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \int_\Omega \Psi^* \times U_m^k \, d\sigma = \int_\Omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+n-2)}} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} U_m^k \times \Psi^* \, d\sigma$$

è consentito dal fatto che Ψ^* appartiene ad S.

Per le diseguaglianze di Cauchy-Schwarz (63) e di Bessel (64), si ha:

$$\left| \int_{\Omega} \Phi \, E(V) \, d\sigma \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\Psi^*|^2 \, d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |V|^2 \, d\sigma \right)^{1/2}.$$

Ne viene che $\int_{\Omega} \Phi \, E(V) \, d\sigma$ è un funzionale lineare e continuo di V nella varietà costituita dalle funzioni di classe C_2 su Ω (65). Allora in virtù di due noti teoremi di Analisi funzionale: il teorema del prolungamento di di Hahn-Banach (66) e quello della rappresentazione dei funzionali lineari e continui negli spazi di Hilbert (67), esiste un vettore Ψ di S tale che:

$$\int_{\Omega} \Phi \, E(V) \, d\sigma = - \int_{\Omega} \Psi \times V \, d\sigma .$$

È così provato che, se il sistema (9) è risolubile, tale è anche il sistema (7).

Siamo in tal modo ricondotti a dimostrare che, condizione necessaria e sufficiente perchè f appartenga a $\mathfrak{C}(\Omega)$, è che esista un vettore Ψ di S soluzione del sistema (9) in corrispondenza alla funzione

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} f(y) \, K[C(x, y)] \, d_y \sigma .$$

Poichè per ipotesi $K(t)$ è sommabile in $(-1,1)$ rispetto alla misura τ_{n-2}, è possibile determinaré una successione $\{K_r(t)\}$ di funzioni di classe C_1 in $(-1,1)$ convergente in media di ordine 1 rispetto a τ_{n-2} alla funzione $K(t)$.

Allora, se $v(t)$ è una funzione continua in $(-1,1)$, si ha:

$$(10) \qquad \lim_{r \to \infty} \int_{(-1,1)} K_r(t) \, v(t) \, d\tau_{n-2} = \int_{(-1,1)} K(t) \, v(t) \, d\tau_{n-2} .$$

(63) [18] p. 462.

(64) Cfr. nota (61).

(65) Com'è noto, in uno spazio di Hilbert un funzionale lineare $F(u)$ è continuo se e solo se esiste un numero positivo M tale che $|F(u)|^2 \leq M(u, u)$.

(66) [18] p. 135.

(67) [18] p. 205.

Inoltre, posto $\Phi_r(x) = \int_\Omega f(y)\, K_r[C(x, y)]\, d_y\sigma$ si ha:

$$\lim_{r \to \infty} \int_\Omega \Phi_r(x)\, v(x)\, d\sigma = \int_\Omega \Phi(x)\, v(x)\, d\sigma; \tag{11}$$

infatti, applicando il teorema di Fubini sugli integrali doppi, ed indicato con M il $\max\limits_{x \in \Omega} |v(x)|$, si ha:

$$\left| \int_\Omega [\Phi_r(x) - \Phi(x)]\, v(x)\, d\sigma \right| \leq M \int_\Omega |f(y)|\, d\sigma \int_\Omega |K_r[C(x, y)] - K[C(x, y)]|\, d_x\sigma$$

e da questa diseguaglianza segue l'asserto, dato che, com'è ovvio riesce, uniformemente rispetto ad y:

$$\lim_{r \to \infty} \int_\Omega |K_r[C(x, y)] - K[C(x, y)]|\, d_x\sigma = 0\,.$$

Indicate con $c_{r,m}$ le coordinate di $K_r(t)$ rispetto ai polinomi $\{P_m^{n-2}(t)\}$, si ha uniformemente in $(-1,1)$: $K_r(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_{r,m}\, P_m^{n-2}(t)$, dato che $K_r(t)$ è di classe C_1 in questo intervallo. Si ha allora uniformemente su Ω: $\Phi_r(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_{r,m} \int_\Omega f(y)\, P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma$. Per le proprietà 1ª) e 4ª) delle funzioni ipersferiche prima ricordate, tenendo presente che per ogni fissato $m > 0$ le funzioni $\{Y_m^k\}$ $(k = 1, \ldots, \mu_m)$ costituiscono un sistema ortogonale e sono quindi tra loro linearmente indipendenti, si vede che esistono e sono univocamente determinate, per ogni $m > 0$, μ_m costanti $\alpha_{m,k}$ tali che:

$$\int_\Omega f(y)\, P_m^{n-2}[C(x, y)]\, d_y\sigma = \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}\, Y_m^k(x)\,.$$

Si ha pertanto:

$$\Phi_r(x) = c_{r,0} \int_\Omega f(y)\, d\sigma + \sum_{m=1}^{\infty} c_{r,m} \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}\, Y_m^k(x).$$

Per l'uniforme convergenza della serie a secondo membro e ricordando le (8) si ha: $\int_\Omega \Phi_r\, Y_m^k\, d\sigma = c_{r,m}\, \alpha_{m,k} \dfrac{1}{m(m+n-2)}$. Da qui, per le (10) ed (11), si trae: $\int_{\Omega} \Phi\, Y_m^k\, d\sigma = c_m\, \alpha_{m,k} \dfrac{1}{m\,(m+n-2)}$. Per il teorema di Fischer-Riesz si ha allora la seguente condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (9) ammetta soluzione in S:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty \,. \tag{12}$$

D'altra parte, avendosi:

$$\int_{\Omega} f(y)\, P_m^{n-2}\,[C\,(x\,,y)]\, d_y\,\sigma = \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}\; Y_m^k\,(x) \qquad (m > 0)\,,$$

e ricordando le (8), la condizione necessaria e sufficiente perchè f appartenga a $\mathfrak{T}\,(\Omega)$, espressa dalla (6), diventa: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(2m+n-2)^2}{m+n-2} \sum\limits_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty$.
È immediato constatare che questa condizione è equivalente alla:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty \,.$$

Dal confronto di questa con la condizione (12) si trae intanto, ovviamente, che se c_m^2 è asintotico a m, la convergenza della serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum\limits_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ implica quella della serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m \sum\limits_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ e viceversa. In tal modo è provata la sufficienza della condizione.

Se d'altra parte, le due serie: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum\limits_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ e $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m \sum\limits_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sono c-equivalenti in corrispondenza ad ogni funzione f sommabile su Ω, in particolare saranno tali in corrispondenza ad ogni funzione di quadrato sommabile su Ω, cioè in corrispondenza ad ogni successione $\{\alpha_{m,k}\}$ tale che $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty$ ed allora, per il lemma 1, c_m^2 è asintotico ad m.

Il teorema risulta così completamente dimostrato.

Un esempio di nucleo $K\,(t)$ soddisfacente le condizioni espresse nell'enunciato del teorema V è: $K\,(t) = (2-2t)^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}$ [68]. Innanzitutto questa funzione è sommabile in $(-1{,}1)$ rispetto alla misura τ_{n-2}.

---

[68] Si osservi che, per ogni coppia di punti $x\,,y$ di Ω riesce:

$$[2-2\,C\,(x\,,y)]^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} = |\,x-y\,|^{-n+\frac{3}{2}}\,.$$

Facciamo vedere che la coordinata c_m di $K(t)$ rispetto ai polinomi $P_m^{n-2}(t)$ è asintotica a $\sqrt{m}$.

Supponiamo che sia $n > 3$. Poniamo $n - 2 = s$. Valendosi della rappresentazione integrale di Mehler-Dirichlet per i polinomi $P_m^s(t)$:

$$P_m^s(\cos\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{s(s+1)\ldots(s+m-1)}{m!} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{2}{\operatorname{sen}^{s-1}\varphi} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\varphi \cos\left[\left(m + \frac{s}{2}\right)t\right] [2(\cos t - \cos\varphi)]^{\frac{s}{2}-1} dt \qquad (0 < \varphi < \pi) \text{ [69]},$$

si ha:

$$c_m^{(s)} = \frac{2m+s}{2^{5/4}\pi} \int_0^\pi \cos\left[\left(m + \frac{s}{2}\right)t\right] dt \int_t^\pi \frac{(\cos t - \cos\varphi)^{s/2-1}}{(1-\cos\varphi)^{s/2+1/4}} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\,,$$

da cui si trae:

$$c_m^{(s)} = \frac{2m+s}{2^{5/4}\pi} \int_0^\pi [a(1-\cos t)^{-1/4} + \alpha(t)] \cos\left[\left(m + \frac{s}{2}\right)t\right] dt\,, \tag{13}$$

ove si è posto:

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{s}{2}-1}{k} \frac{(-1)^k}{k + \frac{1}{4}} \quad \text{e} \quad \alpha(t) = 2^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{s}{2}-1}{k} \frac{1}{k+\frac{1}{4}} \left(\frac{\cos t - 1}{2}\right)^k.$$

Avendosi $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{s/2-1}{k}\right| < \infty$ in virtù dell'ipotesi $s \geq 2$, la funzione

---

[69] Questa rappresentazione si può dedurre da quella di Laplace (cfr. [2] p. 391) seguendo il medesimo procedimento che si usa nel caso dei polinomi di Legendre (cfr. [46] p. 219).

$\alpha(t)$ risulta di classe C_1 in $(0, \pi)$; allora esiste un numero $A_0 > 0$ tale che

$$\left| \int_0^\pi \alpha(t) \cos\left[\left(m + \frac{s}{2}\right) t\right] d\,t \right| \leq \frac{A_0}{m}.$$

D'altra parte si era già provata l'esistenza di due numeri A' ed A'' con $0 < A' < A''$ tali che definitamente si abbia:

$$\frac{A'}{\sqrt{m}} \leq \left| \int_0^\pi a\,(1 - \cos t)^{-1/4} \cos\left[\left(m + \frac{s}{2}\right) t\right] d\,t \right| \leq \frac{A''}{\sqrt{m}}.$$

Da qui si trae l'esistenza di due numeri positivi B' e B'' con $0 < B' < B''$ tali che definitivamente riesca:

$$(14) \qquad \frac{B'}{\sqrt{m}} \leq \left| \int_0^\pi [a\,(1 - \cos t)^{-1/4} + \alpha(t)] \cos\left[\left(m + \frac{s}{2}\right) t\right] d\,t \right| \leq \frac{B''}{\sqrt{m}}.$$

Le (13) e (14) consentono di concludere che $c_m^{(s)}$ è asintotico a $\sqrt{m}$.

Nel caso che sia $n = 3$, cioè $s = 1$, la dimostrazione procede in modo pressochè analogo. In tal caso si ha:

$$c_m^{(1)} = (2\,m + 1) \int_0^\pi (2 - 2\cos\varphi)^{-3/4}\, P_m^{(1)}(\cos\varphi) \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,;$$

sfruttando la rappresentazione integrale:

$$P_m^1(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\varphi^\pi \frac{\operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right) t\right]}{(\cos\varphi - \cos t)^{1/2}}\, dt \text{ (70)},$$

(70) Questa rappresentazione integrale si deduce da quella di Mehler-Dirichlet (cfr. [46] p. 220).

si ha:

$$c_m^{(1)} = (2\,m + 1)\,\frac{1}{2^{1/4}\,\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)t\right]dt\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi}{(1 - \cos\varphi)^{3/4}\,(\cos\varphi - \cos t)^{1/2}}\,,$$

da cui si ottiene:

$$c_m^{(1)} = (2\,m + 1)\,\frac{1}{2^{1/4}\,\pi}\,b\int_0^\pi (1 - \cos t)^{-1/4}\operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)t\right]d\,t$$

ove $b = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{(-1)^k}{k + \frac{1}{4}}$. Da qui si trae l'asserto.

3. Condizioni necessarie e sufficienti per le funzioni di $\mathcal{T}(\Sigma)$.

Richiamiamo alcuni teoremi dei quali ci dovremo servire in questa parte. I risultati che saranno stabiliti in questo paragrafo, nell'ipotesi che Σ sia di classe 2, potrebbero essere dimostrati anche ammettendo soltanto che Σ sia dotata di iperpiano tangente variabile con continuità hölderiana.

I. *Siano A un campo di classe 2 dello spazio euclideo S_n, Σ la sua frontiera, $f(y)$ una funzione appartenente a $\mathcal{T}(\Sigma)$.*

Allora la funzione $u(x)$ armonica in A, appartenente a $\mathcal{K}(A)$ ed avente per traccia su Σ la f, ha l'espressione:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\int_\Sigma f(y)\,\frac{\partial}{\partial \nu_y}\,\frac{1}{|x - y|^{n-2}}\,d_y\sigma + \tag{1}$$
$$+ \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\int_A \operatorname{grad} u(y) \times \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x - y|^{n-2}}\,d\,y$$

ove $\omega_n = \dfrac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ (71).

(71) Se $n = 2$, nella (1) si deve sostituire $1/(n-2)\,\omega_n$ con $1/2\pi$ e $1/|x - y|^{n-2}$ con $\log\dfrac{1}{|x - y|}$. Analoghe sostituzioni dovranno farsi, per $n = 2$ in tutta la parte che segue ma noi, per brevità, non le richiameremo.

Infatti, conservando per i simboli ϱ_0 ed A_ϱ il significato introdotto nel § 1, si ha, com'è noto, per ogni ϱ tale che $0 < \varrho \leq \varrho_0$ e per $x \subset A_\varrho$:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d_y \sigma +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int_{A_\varrho} \operatorname{grad} u(y) \times \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy\,.$$

Passando al limite per ϱ che tende a zero, sfruttando l'uniforme sommabilità di $u(y)$ su $\mathcal{F} A_\varrho$ rispetto a ϱ [72], si ottiene la (1).

II. *Siano A un campo di classe 2 e Σ la sua frontiera. Se $f(y)$ è una funzione definita su Σ ed ivi sommabile, per quasi tutti i punti ξ di Σ la funzione di y: $f(y) \dfrac{\partial}{\partial \nu_y} \dfrac{1}{|y-\xi|^{n-2}}$ è sommabile su Σ. La funzione $u_1(x) = \displaystyle\int_\Sigma f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|^{n-2}}\, d_y \sigma$ è sommabile su Σ e, se $f(y)$ è continua, è uniformemente hölderiana con ogni esponente inferiore ad 1.*

Inoltre la funzione $u_1(x)$ è dotata di traccia $f_1(\xi)$ su Σ la quale ha l'espressione:

$$f_1(\xi) = \frac{n-2}{2}\, \omega_n\, f(\xi) + \int_\Sigma f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|\xi - y|^{n-2}}\, d_y \sigma \,[73]\,. \tag{2}$$

Indicheremo con $A(\Sigma)$ la classe delle funzioni $f(y)$ definite su Σ, ivi sommabili e tali che $u_1(x) = \displaystyle\int_\Sigma f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d_y \sigma$ sia contenuta in $\mathcal{K}(A)$.

III. *Sia Σ la frontiera di un campo A di classe 2 di S_n. Per ogni y di Σ e per ogni $x \neq y$ poniamo: $\dfrac{\partial}{\partial \nu_y} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}} = H_0(x, y)$,*

$$H_m(x, y) = H_{m-1} * H_0 = \int_\Sigma H_{m-1}(x, \xi)\, H_0(y, \xi)\, d_\xi \sigma\,.$$

---

(72) Cfr. nota (18) del paragrafo 1.
(73) Cfr. Fichera [13] e Miranda [31] p. 33.

Allora, la funzione $H_{n-1}(x, y)$ *risulta continua al variare di* x *e di* y *su* Σ.

Infatti, come si verifica valendosi delle ipotesi fatte su Σ, per ogni coppia di punti x e y di Σ (distinti tra loro) riesce:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \right| \leq M_0 \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$$

ove M_0 è una costante positiva.

Per un noto teorema sui nuclei iterati si ha allora che:

$$|H_1(x, y)| \leq M_1 \frac{1}{|x - y|^{n-3}}, \quad |H_2(x, y)| \leq M_2 \frac{1}{|x - y|^{n-4}}, \ldots,$$

$$|H_{n-3}(x, y)| \leq M_{n-3} \frac{1}{|x - y|}, \quad |H_{n-2}(x, y)| \leq M_{n-2} \log \frac{2\delta}{|x - y|}$$

(ove δ è il diametro di A) e inoltre che $H_{n-1}(x, y)$ risulta continuo.

Da questo teorema segue che:

IV. *Se* Σ *è la frontiera di un campo di classe* 2 *e se* $\varphi(x)$ *è una funzione sommabile su* Σ, *il prodotto di composizione* $\varphi_{n-1}(x) = \varphi * H_{n-1} = \int_\Sigma \varphi(y)\, H_{n-1}(x, y)\, d_y\sigma$ *risulta continuo su* Σ.

Dimostriamo che:

V. *Sia* Σ *la frontiera di un campo* A *di classe* 2, *e sia* $f(y)$ *una funzione definita su* Σ. *Se* $f(y)$ *appartiene a* $\mathcal{A}(\Sigma)$ *anche* $u_1(y) = \int_\Sigma f(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|y - \xi|^{n-2}} d_\xi \sigma$ *vi appartiene* (*).

La funzione: $u_1(x) = \int_\Sigma f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} d_y\sigma$ è armonica in A e, per ipotesi, appartiene a $\mathcal{K}(A)$. Allora, indicata con $f_1(y)$ la sua traccia su Σ, per la (1) si ha, in ogni punto x di A:

$$u_1(x) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int_\Sigma f_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} d_y\sigma + \tag{3}$$

$$+ \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int_A \operatorname{grad} u_1(y) \times \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x - y|^{n-2}} dy.$$

(*) Durante la correzione delle bozze di stampa del presente lavoro, mi sono accorto che il teor. V era già stato esplicitamente formulato dal Prof. Stampacchia [cfr. G. Stampacchia: *Sistemi di equazioni di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli*, Ricerche di Matematica, vol. I, 1952. p. 206]. Inoltre, argomentazioni analoghe a quelle da me svolte per dimostrare il teor. VI trovansi nel citato lavoro di questo Autore, ove però esse vengono sfruttate per scopi diversi dai miei.

Per la (2), in quasi tutti i punti y di Σ si ha:

$$f_1(y) = \frac{(n-2)\,\omega_n}{2} f(y) + u_1(y). \tag{4}$$

Indichiamo con u_2 il potenziale di doppio strato di momento u_1: $u_2(x) = \int_{\Sigma} u_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} d_y \sigma$.

Posto:

$$\int_A \operatorname{grad} u_1(y) \times \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \, d\,y = \psi_1(x),$$

per le (3) e (4) si ha, in ogni punto x di A:

$$\frac{1}{2} u_1(x) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} [u_2(x) + \psi_1(x)]. \tag{5}$$

La funzione $\psi_1(x) = -\int_A \operatorname{grad} u_1(y) \times \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \, d\,y$ appartiene a $\mathcal{H}(A)$ in virtù del teorema di Lichtenstein-Friedrichs [74]; allora dalla (5) si trae che anche $u_2(x)$ appartiene a $\mathcal{H}(A)$. Ne viene che $u_1 \subset \Lambda(\Sigma)$.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema che fornisce la prima delle preannunciate condizioni necessarie e sufficienti:

VI. *Se A è un campo di classe 2 a connessione $(n-1)$-dimensionale semplice e se Σ è la sua frontiera, le classi di funzioni $\mathcal{T}(\Sigma)$ e $\Lambda(\Sigma)$ coincidono.*

Ciò val quanto di dire che condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f, definita su Σ ed ivi sommabile, sia traccia su Σ di una funzione di $\mathcal{H}(A)$ è che il potenziale di doppio strato di momento f: $u_1(x) = \int_{\Sigma} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} d_y \sigma$ appartenga a $\mathcal{H}(A)$ [75].

([74]) Cfr. Friedrichs [20] e Lichtenstein [29].

([75]) Questo teorema è in un ordine di idee introdotto da Liapunov il quale ha dimostrato [28] che condizione necessaria e sufficiente perchè esista continua la derivata normale della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è che il potenziale di doppio strato che ha come momento il dato al contorno (che si suppone continuo) abbia derivata normale continua. In questo stesso ordine di idee è un risultato di Amerio [1] secondo cui condizione necessaria e sufficiente perchè il problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u - ku = 0$ ammetta soluzione nella classe delle funzioni per

Dimostriamo la necessità della condizione.

Se $f(y)$ appartiene a $\mathcal{T}(\Sigma)$ esiste, come s'è ricordato nel § 1, una funzione $u(x)$ armonica in A, appartenente a $\mathcal{K}(A)$ ed avente come traccia su Σ la funzione f. Posto: $\int\limits_A \operatorname{grad} u(y) \times \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy = \psi(x)$, per la (1) si ha, in ogni punto x di A:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\,[u_1(x) + \psi(x)]. \tag{6}$$

Per il teorema di Lichtenstein-Friedrichs la funzione

$$\psi(x) = -\int\limits_A \operatorname{grad} u(y) \times \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

appartiene a $\mathcal{K}(A)$. Dato che $u(x)$ appartiene a $\mathcal{K}(A)$, dalla (6) si trae che anche $u_1(x)$ è contenuta in tale classe. Ne viene l'appartenenza di f a $\Lambda(\Sigma)$ (76).

Proviamo ora la sufficienza.

Sia $f(y)$ una funzione di $\Lambda(\Sigma)$. Dato che f è sommabile su Σ, esiste una funzione $u(x)$ armonica in A, espressa mediante un potenziale di doppio strato di momento sommabile, la quale ammette $f(x)$ come traccia su Σ (77). Se con $\mu(y)$ indichiamo la funzione sommabile che rappresenta il momento del potenziale di doppio strato u, per conseguire la tesi occorre far vedere che $\mu(y)$ appartiene a $\Lambda(\Sigma)$. Per la (2) si ha, in quasi tutti i punti x di Σ:

$$f(x) = \frac{n-2}{2}\,\omega_n\,\mu(x) + \int\limits_\Sigma \mu(y)\,\frac{\partial}{\partial \nu_y}\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy. \tag{7}$$

Posto per ogni coppia di punti x e y di Σ, con $x \neq y$:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y}\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}} = H(x, y),$$

---

le quali vale il teorema di inversione delle formole di Green (nel caso che k non sia autovalore) è che il potenziale di doppio strato, che ha come momento il dato al contorno, appartenga a quella classe.

(76) Si osservi che per dimostrare la necessità della condizione non abbiamo sfruttato l'ipotesi che A sia a connessione $(n-1)$-dimensionale semplice.

(77) Cfr. Fichera [15]. L'ipotesi ammessa della semplice connessione di A gioca nell'applicabilità di questo risultato.

$$u_1(x) = f * H = \int_\Sigma f(y)\, H(x\,,y)\, d_y\, \sigma\,, \quad u_m(x) = u_{m-1} * H = \int_\Sigma u_{m-1}(y) H(x,y)\, d_y \sigma\,,$$

$$\mu_1(x) = \mu * H = \int_\Sigma \mu(y)\, H(x\,,y)\, d_y\, \sigma\,,$$

$$\mu_m(x) = \mu_{m-1} * H = \int_\Sigma \mu_{m-1}(y)\, H(x\,,y)\, d_y\, \sigma\,,$$

la (7) può scriversi:

$$f(x) = \frac{n-2}{2}\, \omega_n\, \mu(x) + \mu_1(x)$$

e da qui, facendo m successivi prodotti di composizione con il nucleo $H(x\,,y)$ si trae:

$$u_m(x) = \frac{n-2}{2}\, \omega_n\, \mu_m(x) + \mu_{m+1}(x) \tag{7$_m$}$$

la quale sussiste per x quasi ovunque su Σ.

Poichè, invertendo gli ordini di integrazione, si ha: $\mu_m(x) = \mu * H_m$ (78), dal teorema IV segue la continuità di $\mu_{n-1}(x)$ su Σ; allora, per il teorema II, la funzione $\mu_n(x)$ risulta uniformemente hölderiana con ogni esponente minore di 1. Essa pertanto appartiene a $\mathcal{C}(\Sigma)$ (79) e quindi, come s'è dimostrato, è contenuta nella classe $\Lambda(\Sigma)$. D'altra parte, per il teorema precedente, dal fatto che f appartenga a $\Lambda(\Sigma)$ segue che anche u_1 è contenuta in tale classe. Si ha quindi, in generale, che u_m appartiene a $\Lambda(\Sigma)$. Ciò permette di concludere, sfruttando le $(7)_{n-2} \ldots (7)_1\,, (7)$ che μ è contenuta in $\Lambda(\Sigma)$.

Cosí il teorema è completamente dimostrato.

Dimostriamo ora che:

VII. *Siano A di un campo classe 2 a connessione $(n-1)$-dimensionale semplice, Σ la sua frontiera e $\mu(y)$ una funzione sommabile su Σ. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè il potenziale di doppio strato di momento μ:*

$$\varphi(x) = \int_\Sigma \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d_y\, \sigma$$

appartenga a $\mathcal{K}(A)$ è che la sua traccia su Σ appartenga a $\mathcal{C}(\Sigma)$.

---

(78) Tali inversioni degli ordini d'integrazione sono lecite; cfr. [31] p. 23.

(79) Cfr. Miranda [32] teor. I. L'ipotesi che A sia di classe 2 gioca tra l'altro, nell'applicabilità di tale teorema. L'appartenenza a $\mathcal{C}(\Sigma)$ di $\mu_{n-1}(x)$ potrebbe essere dimostrata anche senza fare ricorso a questo teorema; allora basterebbe l'ipotesi che Σ abbia iperpiano tangente variabile con continuità hölderiana.

Occorre solo dimostrare la sufficienza. Indichiamo con $\varphi^*(y)$ la traccia di φ su Σ (l'esistenza di tale traccia è assicurata dal teorema II). Dato che $\varphi^*(y)$ appartiene, per ipotesi, a $\mathcal{T}(\Sigma)$, in virtù del teorema VI § 1, esiste una funzione $u(x)$ armonica in A, appartenente a $\mathcal{K}(A)$ la quale ha come traccia su Σ la funzione $\varphi^*(y)$. Per il teorema IV del § 1 si ha:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |u[y + \varrho\, \nu(y)] - \varphi^*(y)|^2\, d\sigma = 0. \tag{8}$$

D'altra parte esiste una sola funzione armonica in A, soddisfacente la (8) [80] e questa coincide col potenziale di doppio strato φ [81]. È così dimostrato che φ appartiene a $\mathcal{K}(A)$.

Il seguente teorema compendia le condizioni necessarie e sufficienti per l'appartenenza di f a $\mathcal{T}(\Sigma)$ ottenute in questo paragrafo.

VIII. *Siano A un campo di classe 2 a connessione $(n-1)$-dimensionale semplice, Σ la sua frontiera, $f(y)$ una funzione sommabile su Σ, $f_1(y)$ la traccia su Σ del potenziale di doppio strato di momento f: $u_1(x) = \int_\Sigma f(y) \dfrac{\partial}{\partial \nu_y} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d_y\sigma$.*

Allora il sussistere di una qualsiasi delle seguenti tre circostanze implica il verificarsi delle altre due:

$$1)\ f \subset \mathcal{T}(\Sigma) \qquad 2)\ f \subset \Lambda(\Sigma) \qquad 3)\ f_1 \subset \mathcal{T}(\Sigma).$$

4. Definizioni e risultati relativi alla teoria della misura ed alle funzioni di più variabili reali.

Indicati con S_n lo spazio euclideo ad n dimensioni e con $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ i punti di S_n, chiameremo *intervallo superiormente aperto* o, brevemente, *intervallo* di S_n ogni insieme definito al modo seguente:

$$a_k \leq x_k < b_k \ (k = 1, \ldots, n)$$

---

[80] Cimmino [5].
[81] Magenes [30].

ove a_k e b_k sono numeri reali tali che $a_k < b_k$. Un tale insieme sarà indicato con I; se con H indichiamo un campo di S_n, con $\{I\}_H$ indicheremo la famiglia degli intervalli I contenuti con la propria chiusura in H e con $\{B\}_H$ quello degli insiemi boreliani limitati di S_n contenuti con la propria chiusura in H. Sia $\{C\}$ un'arbitraria famiglia di insiemi di S_n e sia $F(C)$ una funzione reale dell'insieme C definita in $\{C\}$. La funzione $F(C)$ si dice *additiva* su $\{C\}$ se, in corrispondenza ad ogni decomposizione di un insieme C di $\{C\}$ in un numero finito di insiemi $C_1, \ldots, C_m$ di $\{C\}$ a due a due disgiunti: $C = \bigcup_{h=1}^{m} C_h$, riesce: $F(C) = \sum_{h=1}^{m} F(C_h)$; $F(C)$ si dice *completamente additiva* su $\{C\}$ se, in corrispondenza ad ogni decomposizione di un insieme C di $\{C\}$ in un numero finito od in una infinità numerabile di insiemi $C_1, C_2, \ldots$ di $\{C\}$, a due a due disgiunti: $C = \bigcup_h C_h$ riesce: $F(C) = \Sigma_h F(C_h)$. Una funzione $F(C)$ dicesi *a variazione limitata* su $\{C\}$ se, fissato comunque C in $\{C\}$ e indicata con δ_c un'arbitraria decomposizione di C in un numero finito o in un'infinità numerabile di iasiemi di $\{C\}$ a due a due disgiunti: $C = \bigcup_h C_h$ la variabile $\sigma(\delta_c) = \sum_h |F(C_h)|$ ha estremo superiore finito al variare comunque di δ_c. Tale estremo superiore prende il nome di *variazione totale* di F su C e verrà denotato con il simbolo $V_F(C)$. Se $F(B)$ è una *misura* definita su $\{B\}_H$ cioè è una funzione completamente additiva a variazione limitata su $\{B\}_H$ anche $V_F(B)$ risulta essere una misura. Se $F(I)$ è una misura definita su una famiglia $\{I\}_H$, esiste una ed una sola misura $F(B)$ definita su $\{B\}_H$, la quale coincide con $F(I)$ sugli intervalli di $\{I\}_H$; inoltre la variazione totale $V_F(B)$ coincide sugli insiemi I di $\{I\}_H$ con la variazione totale di $F(I)$. Se φ è una funzione di punto definita su un insieme B di $\{B\}_H$, ivi limitata e misurabile, rispetto alla misura F, con i simboli $\int_B \varphi\, dF$ e $\int_B \varphi\, dV_F$ indicheremo gli integrali di Stieltjes di φ estesi a B rispetto alla misura F ed alla V_F rispettivamente. Si ha: $\left|\int_B \varphi\, dF\right| \leq \int_B |\varphi|\, dV_F$.

Sia $f(x)$ una funzione continua in un campo H di S_n. Per ogni I di $\{I\}_H$ poniamo: $F_k(I) = \int_{\mathscr{F}I} f\, \nu_k\, d\sigma$ $(k = 1, \ldots, n)$ ove $\mathscr{F}I$ indica la frontiera di I e ν_k indica la componente secondo l'asse coordinato x_k del versore della normale esterna ad $\mathscr{F}I$. La funzione $f(x)$ dicesi *a variazione* *limitata* in H se tali risultano le n fuuzioni di I: $F_1(I), \ldots, F_n(I)$ su $\{I\}_H$ [82]; $f(x)$ dicesi a variazione limitata in un intervallo I_0 contenuto con la propria chiusura in H se le dette funzioni d'intervallo sono a variazione limitata nella famiglia degli intervalli I contenuti in I_0.

Le funzioni $F_k(I)$ sono ovviamente additive ma si può facilmente vedere che esse sono anche completamente additive su $\{I\}_H$. Per questo basta ricordare che se $F(I)$ è una funzione additiva a variazione limitata su $\{I\}_H$ si può definire una misura $\Phi(B)$ su $\{B\}_H$ la quale gode della seguente proprietà: se $\bar{I}$ è la chiusura di un intervallo di $\{I\}_H$ cioè è un insieme definito da limitazioni del tipo $a_k \leq x_k \leq b_k$ $(a_k < b_k)$, indicato con I_m l'intervallo definito dalle limitazioni: $a_k - 1/m \leq x_k < b_k + 1/m$ riesce: $\lim_{m \to \infty} F(I_m) = \Phi(\bar{I})$ [83].

Dato che, indicato con I'_m l'insieme definito da

$$a_k \leq x_k \leq b_k - 1/m \qquad \left(\frac{1}{m} < b_k - a_k\right)$$

si ha:

$$\lim_{m \to \infty} \Phi(I'_m) = \Phi(I)$$

e che:

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathscr{F} I_m} f \nu_k \, d\sigma = \int_{\mathscr{F} \bar{I}} f \nu_k \, d\sigma,$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathscr{F} I'_m} f \nu_k \, d\sigma = \int_{\mathscr{F} I} f \nu_k \, d\sigma = F_k(I) \ [84]$$

si ha che $F_k(I)$ coincide su ogni I di $\{I\}_H$ con una misura definita su $\{B\}_H$.

Ne viene che $F_k(I)$ è completamente additiva a variazione limitata su $\{I\}_H$.

Indicheremo con $F_k(B)$ la misura definita su $\{B\}_H$, la quale coincide su ogni I di $\{I\}_H$ con $F_k(I)$. Tali misure $F_1(B), \ldots, F_n(B)$ verranno chiamate *misure generate dalla funzione CVL* (continua a variazione limitata) f.

---

(82) Cfr. Fichera [18] p. 428.

(83) Cfr. Fichera [18] pp. 299 e seg..

(84) Il sussistere di tali relazioni di limite è immediata conseguenza della continuità di f.

Nel caso $n = 1$, la definizione ora data di funzione a variazione limitata coincide, ovviamente, con quella ordinaria per le funzioni di una variabile reale; allora se f è continua, la misura generata da f assume su ogni intervallo dell'asse reale il valore del corrispondente incremento di f. In tal caso per l'integrale di Stieltjes di una funzione φ limitata e misurabile rispetto a una tale misura, useremo anche la notazione: $\int_I \varphi \, d f$.

Faremo ora vedere che, per $n > 1$, tale definizione di funzione a variazione limitata è equivalente a quella data da Tonelli ([85]). Com'è noto, una funzione f continua nella chiusura di un intervallo I, definito dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ $(k = 1, \dots n)$, dicesi *a variazione limitata secondo Tonelli* se si verificano le seguenti circostanze: fissato quasi ovunque il punto $(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$ nell'intervallo I_h, definito dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ $(k = 1, \dots, h-1, \; h+1, \dots, n)$, la funzione di x_h: $f(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)$ è a variazione limitata nell'intervallo chiuso (a_h, b_h) e, detta $V_h(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$ la variazione totale di tale funzione di x_h, la $V_h(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1} \dots, x_n)$, la quale è misurabile in I_h ([86]), è funzione sommabile in I_h.

Inoltre una funzione $f(x)$, continua in un campo H, è ivi a variazione limitata secondo Tonelli se riesce tale su ogni I di $\{I\}_H$.

Supponiamo dapprima che la funzione continua f sia a variazione limitata secondo Tonelli e dimostriamo che

$$F_h(I) = \int_{\mathscr{F} I} f \nu_h \, d\sigma = \int_{+\mathscr{F} I} f \, dx_1 \dots dx_{h-1} \, dx_{h+1} \dots dx_n$$

è a variazione limitata.

([85]) Si veda, per $n = 2$, Fichera [18], p. 433.

([86]) Sussiste infatti il teorema: Se $u(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione continua nell'intervallo I definito dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ e se, fissato quasi ovunque il punto $(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$ nell'intervallo I_h, definito dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ $(k = 1, \dots, h-1, \; h+1, \dots, n)$, la funzione di x_h: $u(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)$ è a variazione limitata in (a_h, b_h), dettane $V_h(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$ la variazione totale, e posto $V_h(x_1, \dots, x_{h+1}, x_{h-1}, \dots, x_n) = 0$ in corrispondenza a quei punti di per i quali u non è funzione di x_h a variazione limitata, la $V_h(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$ è funzione misurabile in I_h. Cfr. [18] p. 430, ove questo teorema è dimostrato nel caso $n = 2$; tale dimostrazione continua a sussistere pressochè inalterata nel caso $n > 2$.

Sia δ_I una qualsiasi decomposizione dell'intervallo I in un numero finito di intervalli a due a due disgiunti: $I = \bigcup_{i=1}^{p} I_i$; poniamo $\sigma_h(\delta_I) = \sum_{i=1}^{p} |F_h(I_i)|$.

Poichè esiste una decomposizione δ'_I di I, ottenuta mediante iperpiani coordinati, tale che $\sigma_h(\delta_I) \leq \sigma_h(\delta'_I)$, possiamo limitarci a considerare solamente decomposizioni di quest'ultimo tipo. Una siffatta decomposizione δ_I subordina una decomposizione di I_h in intervalli $I_{h,r}$ $(r = 1, \ldots, r_h)$. Allora, supposto che i punti mediante i quali viene fatta la decomposizione di (a_k, b_k) siano:

$$a_k = a_1^{(k)} < a_2^{(k)} < \ldots < a_{i_k}^{(k)} = b_k ,$$

si ha:

$$\sigma_h(\delta_I) = \sum_{r=1}^{r_h} \sum_{i=1}^{i_h-1} \left| \int_{I_{h,r}} [f(x_1, \ldots, a_{i+1}^{(h)}, \ldots, x_n) - \right.$$

$$\left. - f(x_1, \ldots, a_i^{(h)}, \ldots, x_n)] \, dx_1 \ldots dx_{h-1} \, dx_{h+1} \ldots dx_n \right| \leq$$

$$\leq \int_{I_h} \sum_{i=1}^{i_h-1} |f(x_1, \ldots, a_{i+1}^{(h)}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, a_i^{(h)}, \ldots, x_n)| \, dx_1 \ldots dx_{h-1} \, dx_{h+1} \ldots dx_n \leq$$

$$\leq \int_{I_h} V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_{h-1} \, dx_{h+1} \ldots dx_n .$$

Resta così provato che $F_h(I)$ è a variazione limitata $(h = 1, \ldots, n)$.

Dimostriamo ora che, se è soddisfatta quest'ultima circostanza, la funzione f risulta a variazione limitata secondo Tonelli.

Siano $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1} \ldots, \xi_n)$ un punto interno all'intervallo I_h, definito dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots n)$, τ un numero positivo inferiore alla distanza di ξ da $\mathcal{F} I_h$. Indichiamo con $I_{\tau,\xi}$ l'intervallo definito dalle limitazioni:

$$\xi_k - \tau \leq x_k < \xi_k + \tau \quad (k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n), \quad a_h \leq x_h < b_h ;$$

con $I_{\tau,\xi}^{(h)}$ indicheremo l'intervallo definito dalle prime $n-1$ di tali limitazioni. Consideriamo la funzione di x_h.

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n; \tau) =$$

$$= \frac{1}{\tau^{n-1}} \int_{I_{\tau,\xi}^{(h)}} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_{h-1} \, dx_{h+1} \ldots dx_n .$$

Questa funzione è a variazione limitata nell'intervallo (a_h, b_h); infatti, in corrispondenza ad una arbitraria decomposizione di tale intervallo, individuata dai punti $a_h = a_1^{(h)} < a_2^{(h)} < \ldots < a_{i_h}^{(h)} = b_h$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{i_h-1} \frac{1}{\tau^{n-1}} \left| \int_{I_{\tau,\xi}^{(h)}} [f(x_1 \ldots, x_{h-1}, a_{i+1}^{(h)}, x_{h+1}, \ldots, x_n) - \right.$$

$$\left. - f(x_1, \ldots, x_{h-1}, a_i^{(h)}, x_{h+1}, \ldots, x_n)]\, dx_1 \ldots dx_{h-1}\, dx_{h+1} \ldots dx_n \right| \leq \frac{V_{F_h}(I_{\tau,\xi})}{\tau^{n-1}}.$$

Poichè $V_{F_h}(I_{\tau,\xi})$ è una funzione additiva di segno costante e quindi a variazione limitata, definita sugli intervalli quadrati ([87]) contenuti nell'interno di I_h, per quasi tutti i punti $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ di I_h esiste finito il limite:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{V_{F_h}(I_{\tau,\xi})}{\tau^{n-1}} = l_h(\xi_1, \ldots \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n).$$

Ne viene che, se scegliamo ξ in modo che esista finito tale limite, dato $\varepsilon > 0$ si può determinare un numero positivo τ_ε tale che, per $\tau < \tau_\varepsilon$, la variazione totale della funzione di x_h: $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n; \tau)$ risulti minore di $l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n) + \varepsilon$. Pertanto la funzione di x_h: $f(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n) = \lim\limits_{\tau \to 0} \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n; \tau)$, per quasi tutti i punti ξ di I_h è a variazione limitata in (a_h, b_h) e la sua variazione totale $V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ non supera $l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n) + \varepsilon$ ([88]).

Data l'abitrarietà di ε si ha:

$$(1)_h \qquad V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n) \leq l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$$

La funzione $V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ è misurabile in I_h ([89]), d'altra parte la funzione $l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$, essendo la derivata di una

---

([87]) Un intervallo I definito dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ dicesi quadrato se $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_n - a_n$.

([88]) Sussiste infatti il teorema: Sia $g(x, \tau)$ una funzione definita per $a \leq x \leq b$ e $\tau_0 - \varepsilon < \tau < \tau_0 + \varepsilon$, la quale per ogni τ sia funzione di x a variazione limitata in (a, b). Dettane $V(a,b;\tau)$ la variazione totale in (a, b) si abbia per ogni τ: $V(a,b,\tau) \leq l$ Se esiste finito per ogni x: $\lim\limits_{\tau \to \tau_0} g(x, \tau) = g(x)$, la $g(x)$ è a variazione limitata in (a, b) e la sua variazione totale non supera l. Cfr. [18] p. 431.

([89]) Cfr. nota (5).

funzione d'intervallo a variazione limitata, è sommabile su I_h; dalla $(1)_h$ segue allora che $V_h(\xi_1, \dots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \dots \xi_n)$ è sommabile in I_h. Ne viene che f è a variazione limitata secondo Tonelli.

È immediato constatare che il prodotto di due funzioni f e g a variazione limitata secondo Tonelli è ancora una funzione a variazione limitata secondo Tonelli. Infatti, se in corrispondenza al punto $(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$ di I_h, risultano a variazione limitata in (a_h, b_h) le due funzioni di x_h: $f(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)$ e $g(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)$, anche la funzione di $x: f(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)\, g(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)$ è ivi a variazione limitata e, indicato con M un numero non superato in I nè da $|f|$ nè da $|g|$, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$V_{fg}^{(h)}(x_1, \dots, x_{h+1}, x_{h-1}, \dots, x_n) \leq M[V_f^{(h)}(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n) + \\ + V_g^{(h)}(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)];$$

da ciò segue, ovviamente, l'asserto.

Resta così dimostrato il teorema:

I. *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni CVL (cioè continue a variazione limitata) in un campo di S_n, tale risulta anche il loro prodotto: $f(x)\, g(x)$.*

Il seguente teorema mostra l'indipendenza della definizione di funzione a variazione limitata dal particolare sistema cartesiano cui è riferito lo spazio S_n.

II. *Siano $f(x)$ una funzione CVL in un campo A di S_n, $\|\alpha_{hk}\|$ una matrice quadrata di rango n e determinante unitario, $\|a_{hk}\|$ la matrice inversa della precedente, $y(x)$ il punto di coordinate $y_k = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{hk} x_h$, $x(y)$ il punto di coordinate $x_k = \sum_{h=1}^{n} a_{hk} y_h$, A' l'insieme descritto da $y(x)$ quando x varia in A. Allora la funzione di $y: f[x(y)]$ è CVL in A'* [90].

Per dimostrare questo teorema conviene richiamare il seguente:

III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x)$, definita in tutti i punti di S_n, limitata e continua, sia a VL è che esistano n misure $F_1(I), \dots, F_n(I)$ definite sulla famiglia $\{I\}$ degli intervalli di S_n le quali godano della seguente proprietà: comunque si consideri una funzione $g(x)$ di classe C_1 in S_n, tale che $|g(x)|$ e $|\operatorname{grad} g(x)|$ siano infinitesime $|x| \to \infty$*

[90] Si potrebbe più in generale far vedere che tale proprietà è invariante rispetto agli omeomorfismi di classe 1 di S_n e cioè che, se $f(x)$ e CVL in un campo A di S_n e $x = x(y)$ è l'equazione di un omeomorfismo di classe 1 che muta A in un insieme A', la funzione $f[x(y)]$ è CVL in A'.

d'ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(n+1)}$, *risulta*:

$$(2)_k \qquad \int_{S_n} g(x)\, d\, F_k = -\int_{S_n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_k}\, dx\,, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

L'n-upla di misure $F_1(I), \ldots, F_n(I)$, *per le quali sussistono le* $(2)_k$ *è unica e coincide con l'n-upla delle misure generate da* f (91).

Dimostriamo il teorema II. Sia I_0 un intervallo contenuto in $\{I\}_A$ ed I'_0 l'insieme descritro da $y(x)$ quando x varia in I_0; sia inoltre $\varphi(x)$ una funzione CVL in S_n, identicamente nulla fuori di un insieme limitato e coincidente in I_0 con $f(x)$ (92). Indichiamo con $\Phi_1(I), \ldots, \Phi_n(I)$ le misure generate da φ e poniamo $\Phi'_k(I) = \sum_{h=1}^{n} a_{kh}\, \Phi_k(I')\ (k = 1, \ldots, n)$. Evidentemente $\Phi'_k(I)$ risulta essere una misura definita sulla famiglia degli intervalli di S_n.

Si ha allora, se g è una qualsiasi funzione di classe C_1 in S_n e tale che $|g(x)|$ e $|\operatorname{grad} g(x)|$ siano infinitesime per $|x| \to \infty$ di ordine non inferiore a quello di $|x|^{-(n+1)}$:

$$\int_{S_n} \varphi[x(y)] \frac{\partial g[x(y)]}{\partial y_k}\, dy = \int_{S_n} \varphi(x) \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \frac{\partial g(x)}{\partial x_h}\, dx =$$

$$= -\sum_{h=1}^{n} a_{kh} \int_{S_n} g(x)\, d\, \Phi_k = -\int_{S_n} g[x(y)]\, d\, \Phi'_k$$

e quindi:

$$\int_{S_n} g[x(y)]\, d\, \Phi'_k = -\int_{S_n} \varphi[x(y)] \frac{\partial g[x(y)]}{\partial y_k}\, dy\,.$$

In virtù del teorema precedente si ha allora che $\varphi[x(y)]$ è a VL in S_n e, in particolare, che $f[x(y)]$ è a VL in I'_0. Data l'arbitrarietà di I_0 si ha l'asserto.

(91) La caratterizzazione, fornita da questo teorema, delle funzioni *CVL*, è stata data da De Giorgi [8] per le funzioni a variazione limitata secondo una definizione che, nel caso delle funzioni continue, è equivalente a quella qui richiamata, come è stato dimostrato da Pauc [34].

(92) Per costruire $\varphi(x)$ si può procedere così: si indichi con J un intervallo di $\{I\}_A$ contenente I_0 nel suo interno e con $\psi(x)$ una funzione di classe C_1 in S_n identicamente eguale ad 1 in $\bar{I}_0$ e identicamente nulla in $\mathcal{C}\bar{I}$. La funzione che in $\bar{I}$ coincide con $f(x)\,\psi(x)$ e in $\mathcal{C}\bar{I}$ è identicamente nulla soddisfa ovviamente, in virtù del teorema I, alle condizioni richieste per ψ.

Diremo che una funzione f, definita in un campo H di S_n, soddisfa una *condizione del Dini uniforme* oppure che appartiene a $\mathfrak{D}(H)$ se, scelto comunque il punto x di H, la funzione di y: $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^n}$ risulta sommabile su ogni boreliano limitato B di $\{B\}_H$ ed esiste inoltre un numero positivo $M(B)$, dipendente soltanto da B, tale che:

$$\int_B \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^n}\, dy \leq M(B), \qquad x \subset H.$$

Dimostriamo il seguente teorema:

IV. *Se f è una funzione definita in un campo limitato H di S_n, ivi continua e a VL, appartenente a $\mathfrak{D}(H)$ e se H' è un campo contenuto con la sua chiusura in H, è possibile definire in S_n una funzione φ che sia CVL, appartenga a $\mathfrak{D}(S_n)$, coincida con f in H' e sia nulla all'esterno di H.*

Sia P un plurintervallo (cioè un insieme somma di un numero finito di intervalli), il quale contenga H' e sia contenuto con la sua chiusura in H (93). Sia g una funzione di classe C_1 in S_n, identicamente eguale ad 1 in H' ed identicamente nulla in $\mathcal{C} P$ (94).

Poniamo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\, g(x) & x \subset H \\ 0 & x \subset \mathcal{C} H. \end{cases}$$

La funzione $\varphi(x)$, così definita, coincide con f in H', è continua in S_n e nulla all'esterno di P. Inoltre essa è a VL; infatti se I è un intervallo di S_n essa è tale in ognuno degli intervalli che compongono $P \cdot I$, perchè ivi risulta prodotto di due funzioni a VL, ed è tale in ognuno degli intervalli che compongono $I \cdot \mathcal{C} P$ perchè ivi è identicamente nulla. Mostriamo ora che φ è contenuta in $\mathfrak{D}(S_n)$. Indichiamo con δ la distanza fra P e $\mathcal{C} H$ (dato che $\overline{P}$ è contenuto in H si ha $\delta > 0$), con P_δ l'involucro di P di raggio $\delta/2$ (95) con L_δ un numero non superato in P_δ nè da $|f|$ nè da $|g|$. Sia B un boreliano limitato di S_n; possiamo sempre supporre che B contenga P_δ. Distinguiamo i seguenti tre casi: $x \subset P$, $x \subset P_\delta - P$, $x \subset \mathcal{C} P_\delta$.

---

(93) L'esistenza di un insieme siffatto è di verifica immediata.

(94) L'esistenza di una siffatta funzione è di verifica immediata.

(95) Per involucro di raggio r di un insieme C intendiamo l'insieme dei punti che hanno distanza da C non superiore ad r.

Se x è contenuto in P, indicato con I_x un intorno circolare di x, si ha:

$$\int\limits_{B-I_x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|y-y|^n} dy \leq \int\limits_{P_\delta - I_x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy + \int\limits_{B-P_\delta} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{P_\delta - I_x} \left\{ |f(x)| \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^n} + |g(y)| \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n} \right\} dy + \int\limits_{B-P_\delta} \frac{|\varphi(x)|}{|x-y|^n} dy \leq$$

$$\leq L_\delta \left[\int\limits_{P_\delta - I_x} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^n} dy + \int\limits_{P_\delta - I_x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n} dy + \frac{2^n \operatorname{mis} B}{\delta^n} L_\delta \right];$$

dato che f appartiene a $\mathfrak{D}(H)$ per ipotesi e g appartiene a $\mathfrak{D}(H)$ perchè di classe C_1, si ha l'asserto.

Se x è contenuto in $P_\delta - P$ si ha:

$$\int\limits_{B-I_x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy = \int\limits_{P_\delta - I_x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy \leq L_\delta \left[\int\limits_{P_\delta - I_x} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^n} dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{P_\delta - I_x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n} dy \right],$$

e quindi, anche in tal caso, l'asserto è provato.

Se, infine, x è contenuto in $\mathcal{C} P_\delta$ si ha:

$$\int\limits_{B-I_x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy = \int\limits_{P-I_x} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy \leq (L_\delta)^2 \frac{2^n \operatorname{mis} P}{\delta^n}.$$

In tal modo il teorema è completamente dimostrato.

Indichiamo ora con Σ la frontiera di un campo A di classe 1 di S_n. Diremo che una funzione f continua su Σ è ivi a VL se, fissato comunque un punto x_0 di Σ e indicato con $\xi_1, \ldots, \xi_n$ un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine in tale punto e l'asse ξ_n concidente con la normale interna a Σ in x_0, esiste un intorno di x_0 su Σ, suscettibile di una rappresentazione regolare di classe 1 rispetto all'iperpiano tangente a Σ in x_0:

$\xi_n = \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ tale che, indicato con H il corrispondente insieme base, la funzione $f[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\chi(\xi_1 \ldots, \xi_{n-1})]$ risulti a VL in H (96).

Diremo poi che una funzione f continua su Σ, *verifica una condizione del Dini uniforme su* Σ oppure che appartiene a $\mathfrak{D}'(\Sigma)$ se, scelto comunque un punto x_0 di Σ, esistono in corrispondenza un intorno U di x_0 su Σ suscettibile di una rappresentazione regolare di classe 1 sull'iperpiano tangente a Σ in x_0, ed un numero positivo M tali che, per ogni punto x di U, risulti sommabile su U la funzione di y: $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}}$ e si abbia:

$$\int_U \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y \sigma \leq M.$$

La proprietà della funzione f di verificare una condizione uniforme del Dini su Σ è invariante rispetto agli omeomorfismi di classe 1 di un campo contenente Σ. Indichiamo infatti con $\xi(x)$ ed $\eta(y)$ le immagini di x e y in un omeomorfismo C del tipo ora detto, con $x(\xi)$ ed $y(\eta)$ le immagini di $\xi(x)$ e $\eta(y)$ in C^{-1}, con Σ', U' le immagini di Σ ed U in C rispettivamente; inoltre, se $d_y\sigma$ e $d_\eta\sigma$ sono gli elementi di misura ipersuperficiale rispettivamente di Σ e di Σ' si abbia $J(y)\, d_y\sigma = d_\eta\sigma$. Indichiamo inoltre con N un numero positivo tale che, in corrispondenza ad ogni coppia di punti x e y di Σ si abbia $|x-y| \leq N|\xi(x)-\eta(y)|$ e con M_0 il massimo di $|J(y)|$ su Σ.

Sia V' un intorno di $\xi(x_0)$ su Σ' suscettibile di una rappresentazione regolare di classe 1 rispetto all'iperpiano tangente a Σ' in $\xi(x_0)$ e tale che la sua immagine V su Σ sia contenuta in U; sia inoltre U'_ξ un intorno di ξ su Σ' contenuto in V'. Indicata U_x l'immagine in C^{-1} di U'_ξ si ha:

$$\int_{V'-U'_\xi} \frac{|f[x(\xi)]-f[y(\eta)]|}{|\xi-\eta|^{n-1}} d_\eta\sigma = \int_{V-U_x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|\xi(x)-\eta(y)|^{n-1}} J(y)\, d_y\sigma \leq$$

$$\leq \frac{M_0}{N^{1-n}} \int_{V-U_x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma \leq \frac{M_0}{N^{1-n}} \int_V \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma \leq \frac{MM_0}{N^{1-n}}.$$

(96) Si noti che, in virtù del teorema II di questo paragrafo, la proprietà della funzione f di essere a variazione limitata su Σ non dipende dalla particolare scelta degli assi $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ nell'iperpiano tangente a Σ in un suo punto x. Si osservi anche che, per quanto detto nella nota (90) di questo paragrafo, la proprietà della funzione f di essere a variazione limitata su Σ è invariante rispetto agli omeomorfismi di classe 1 di un campo contenente Σ.

Data l'arbitrarietà dell'intorno U'_ξ di ξ su Σ', si ha l'asserto.

V. *Sia f contenuta in $\mathfrak{D}'(\Sigma)$. Fissato comunque il punto x_0 di Σ e indicato con $t_1, \ldots, t_n$ un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine in x_0 e l'asse t_n coincidente con l'asse normale interno a Σ in x_0, se U è un intorno di x_0 su Σ, suscettibile di una rappresentazione regolare di classe 1 rispetto all'iperpiano tangente a Σ in $x_0 : t_n = \chi(t_1, \ldots, t_{n-1})$, indicato con H l'insieme base di U, la funzione $f[t_1, \ldots, t_{n-1}, \chi(t_1, \ldots, t_{n-1})]$ appartiene a $\mathfrak{D}(H)$.*

Indichiamo con $t_1, \ldots t_n$ e con $t'_1, \ldots, t'_n$ rispettivamente le coordinate dei punti y ed x di U, con $J(t_1, \ldots, t_{n-1})\, dt_1, \ldots dt_{n-1}$ l'elemento di misura ipersuperficiale $d\sigma$ di U, con N_0 il minimo di $|J(t_1, \ldots, t_{n-1})|$ in $H + \mathcal{F}H$, con L un numero positivo tale che $|x - y| \leq L \left[\sum_{k=1}^{n} (t_k - t'_k)^2\right]^{1/2}$ per x ed y in U, con $H_{t'}$ un intorno del punto $(t'_1, \ldots, t'_{n-1}, 0)$ sull'iperpiano $t_n = 0$, il quale sia contenuto in H, con U_y la porzione di U che ha come insieme base $H_{t'}$. Si ha allora:

$$\int_{H-H_{t'}} \frac{|[f[t'_1, \ldots, t'_{n-1}, \chi(t'_1, \ldots, t'_{n-1})] - f[t_1, \ldots, t_{n-1}, \chi(t_1, \ldots, t_{n-1})]|}{\left[\sum_{k=1}^{n-1} (t_k - t'_k)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}} dt_1 \ldots dt_{n-1} \leq$$

$$\leq \frac{L^{n-1}}{N_0} \int_{H-H_{t'}} \frac{|f[t'_1, \ldots, t'_{n-1}, \chi(l'_1, \ldots, t'_{n-1})] - f[t_1, \ldots, t_{n-1}, \chi(t_1, \ldots, t_{n-1})]|}{\left[\sum_{k=1}^{n-1} (t_k - t'_k)^2 + |\chi(t_1, \ldots, t_{n-1}) - \chi(t'_1, \ldots, t'_{n-1})|^2\right]^{\frac{n-1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{J}(t_1, \ldots, t_{n-1})\, dt_1 \ldots dt_{n-1} = \frac{L^{n-1}}{N_0} \int_{U-U_y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{n-1}} d_y\sigma \leq$$

$$\leq \frac{L^{n-1}}{N_0} \int_U \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{n-1}} d_y\sigma .$$

Data l'arbitrarietà di $H_{t'}$ si ha la tesi.

5. Definizioni relative alla teoria delle forme differenziali esterne.

Sia A un campo di S_n e sia ivi definito un tensore p-uplo ($p \leq n$) emisimmetrico le cui componenti nel sistema cartesiano ortogonale $x_1, \ldots, x_n$ siano $u_{i_1 \ldots i_p}(x)$ ove $i_1 \ldots i_p$ indica una p-upla di numeri interi compresi tra 1 ed n tali che $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p$.

Dicesi *forma differenziale esterna di grado p o p-forma* di coefficienti $u_{i_1 \dots i_p}(x)$ l'espressione:

$$u = \sum_{i_1 \dots i_p} u_{i_1 \dots i_p}(x)\, d\, x_{i_1} \dots d\, x_{i_p}.$$

Una p-forma è *nulla* e si indica con 0 se tutti i suoi coefficienti sono nulli. Due p-forme diconsi *eguali* quando la loro differenza è nulla.

Diconsi inoltre *derivata covariante* di u la $(p+1)$-forma:

$$u_x = \sum_{i_1 \dots i_{p+1}} u'_{i_1 \dots i_{p+1}}\, d\, x_{i_1} \dots d\, x_{i_{p+1}} \qquad (i_1 \leq \dots \leq i_{p+1}),$$

ove

$$u'_{i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial\, u_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{p+1}}}{\partial\, x_{i_k}}$$

e *derivata controvariante* di u la $(n-p-1)$-forma:

$$u^x = \sum_{i_1 \dots i_{p+1}} (-1)^\tau u'_{i_1 \dots i_{p+1}}\, d\, x_{i_{p+2}} \dots d\, x_{i_n},$$

ove $i_1 \leq \dots \leq i_{p+1}$, $i_{p+2} \leq \dots \leq i_n$ e τ è la classe della permutazione $i_1 \dots i_n$.

Una p-forma u dicesi *chiusa* se $u_x = 0$; dicesi *omologa a zero* se esiste una $(p-1)$-forma v tale che $v_x = u$. È noto che ogni forma omologa a zero è chiusa, cioè $u_x = v_{xx} = 0$ e che, viceversa, in un campo a connessione p-dimensionale semplice ogni p-forma chiusa è omologa a zero.

Assumeremo, in questo lavoro, la definizione di *forma armonica* data da Hodge [25], cioè diremo che una forma è *armonica* se la sua derivata controvariante è una forma chiusa.

Se u è una p-forma armonica in un campo A a connessione $(n-p)$-dimensionale semplice, per quanto si è detto esiste una $(n-p-2)$-forma v tale che $v_x = u^x$; tale forma v dicesi *coniugata* della forma u. Dicesi *prodotto* della p-forma u per la q-forma v la $(p+q)$-forma:

$$u\, v = \sum_{i_1 \dots i_{p+q}} w_{i_1 \dots i_{p+q}}\, d\, x_{i_1} \dots d\, x_{i_{p+q}},$$

con $w_{i_1 \dots i_{p+q}} = \sum_{h_1 \dots h_p, j_1 \dots j_q} (-1)^\tau u_{h_1 \dots h_p} v_{j_1 \dots j_q}$, ove τ è la classe della permutazione $h_1, \dots h_p, j_1, \dots j_q$ dei numeri $i_1, \dots, i_{p+q}$.

Si ha, come facilmente si verifica:

$$u_x\, u^x = \sum_{i_1 \dots i_{p+1}} (u'_{i_1 \dots i_{p+1}})^2\, d\, x_1 \dots dx_n.$$

Da qui si trae che, se u è armonica e v è coniugata di u, riesce:

$$u_x u^x = v_x v^x .$$

Inoltre, se u è una forma armonica, D una cella ad n dimensioni (97) riesce:

$$\int_D u_x u^x = \int_{+\mathcal{F} D} u \, u^x \text{ (98)} .$$

6. Condizioni sufficienti per le funzioni di $\mathcal{T}(\Sigma)$.

Premettiamo la dimostrazione del seguente teorema:

I. *Siano L l'iperpiano d'equazione $\xi_n = 0$ di S_n ed $f(x)$ una funzione definita su L, ivi CVL, appartenente a $\mathfrak{D}(L)$, nulla all'esterno di un campo limitato H di L. Allora, la funzione $u(x)$, continua nel semispazio S_+ definito da $\xi_n \geq 0$, armonica nell'interno di S_+, coincidente con $f(x)$ su L, appartiene a $\mathcal{K}(A)$ in corrispondenza ad ogni campo limitato A contenuto nel semispazio S_+.*

Ci porremo dapprima nell'ipotesi che sia $n > 2$.

Consideriamo la funzione $u(\xi)$ definita dall'integrale di Poisson (per il semispazio):

$$(1) \qquad u(\xi) = \frac{2\,\xi_n}{\omega_n} \int_L \frac{f(x)}{|x-\xi|^n} \, d\,x \text{ (99)} \qquad \xi \subset S_+ - L$$

e la $(n-2)$-forma:

$$v(\xi) = \frac{2}{(n-2)\,\omega_n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(-1)^{k+n-1} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \, dx\right] \cdot$$

$$\cdot \, d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_{k-1} \, d\,\xi_{k+1} \ldots d\,\xi_{n-1} , \qquad \xi \subset S_+ - L .$$

(97) Per cella ad n dimensioni intendiamo in questo lavoro un insieme omeomorfo di classe 1 ad un intervallo di S_n.

(98) Per quel che riguarda le nozioni richiamate in questo paragrafo, si veda [25].

(99) In questa parte indicheremo con $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ i punti di S_n che non appartengono ad L e con $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ i punti di S_n che appartengono all'iperpiano L, con $d\,x \equiv d\,x_1 \ldots d\,x_{n-1}$ l'elemento di misura di L.

Questa forma è armonica ed è coniugata di u, come facilmente si verifica. Allora se I è un intervallo contenuto in $S_+ - L$ si ha, in base a quanto ricordato nel paragrafo precedente:

$$\int_I |\operatorname{grad} u|^2 d\xi = \int_I v_\xi v^\xi = \int_{+\mathscr{F}I} v\, v^\xi .$$

Dato che la funzione u, com'è noto, è armonica in $S_+ - L$ e coincide con una funzione continua in S_+, la quale su L assume i valori di f, la tesi del teorema sarà provata se faremo vedere che, al variare di I in un arbitrario campo limitato A contenuto in $S_+ - L$, $\left|\int_{+\mathscr{F}I} v\, v^\xi\right|$ resta limitato superiormente da una costante dipendente soltanto da A. È sufficiente limitarsi a considerare campi A costituiti da intervalli aperti aventi proiezione ortogonale su L contenente nell'interno l'insieme H. Indichiamo allora con I' un intervallo aperto contenuto in L e contenente $\overline{H}$, con r e R due numeri positivi tali che $r < R$ e con A il campo definito dalle limitazioni: $(\xi_1, \dots \xi_{n-1}) \subset I'$, $r < \xi_n < R$; indichiamo inoltre con L_r l'insieme definito dalle limitazioni: $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \subset I'$, $\xi_n = r$.

Poichè i coefficienti di v e di v^ξ sono di classe C_1 in $S_n - H$, per provare l'esistenza di un numero positivo N tale che, qualunque sia r nell'intervallo $0 < r < R$, si abbia $\left|\int_{+\mathscr{F}A} v\, v^\xi\right| < N$, basta far vedere che, al variare di r nell'intervallo aperto $(0, R)$, $\left|\int_{L_r} v\, v^\xi\right|$ si mantiene superiormente limitato.

Cominciamo col dimostrare l'esistenza di un numero positivo M tale che, qualunque sia il punto ξ di $L_r (0 < r < R)$, si abbia:

$$(1) \qquad \left|\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx\right| \leq M \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Se il punto ξ', proiezione ortogonale di ξ su L, non appartiene ad H, l'asserto è evidente. Infatti in tal caso si ha:

$$\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx = \int_H [f(x) - f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx ;$$

avendosi inoltre, per $x \neq \xi'$: $\left| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \right| \leq \frac{n-2}{|x-\xi|^{n-1}} \leq \frac{n-2}{|x-\xi'|^{n-1}}$,
per l'ipotesi dell'appartenenza di f a $\mathfrak{D}(L)$ si ha l'esistenza di un numero positivo M tale che:

$$\left| \int_H [f(x) - f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\,x \right| \leq (n-2) \int_H \frac{|f(x)-f(\xi')|}{|x-\xi'|^{n-1}} d\,x \leq M.$$

Supponiamo ora che il punto ξ' appartenga ad H. Indichiamo con $\delta/2$ il diametro di H, con $C(\xi', \varrho)$ l'insieme dei punti x di L per i quali $|x-\xi'| < \varrho$ e poniamo:

$$\psi(\xi, x) = \begin{cases} |x-\xi|^{2-n} & x \subset C(\xi', \delta) \\ |x-\xi|^{2-n} \dfrac{2\delta - |x-\xi'|}{\delta} & x \subset C(\xi', 2\delta) - C(\xi', \delta) \\ 0 & x \subset \complement\, C(\xi', 2\delta); \end{cases}$$

la funzione di x: $\psi(\xi, x)$ è continua in L, ha derivate prime continue in ciascuno dei tre insiemi $C(\xi', \delta)$, $C(\xi', 2\delta) - \overline{C(\xi', \delta)}$, $\complement\, \overline{C(\xi', 2\delta)}$ e sommabili in L; inoltre:

$$\int_L \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, d\,x = 0.$$

Ricordando che $H \subset C(\xi', \delta)$ si ha:

$$\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx = \int_L [f(x) - f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, dx.$$

Indicato con H_δ l'involucro di H su L di raggio δ (100), si ha:

$$\left| \int_L [f(x) - f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi_1 x)\, d\,x \right| = \left| \int_{C(\xi', \delta)} [f(x) - f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, d\,x + \right.$$

$$\left. + \int_{L - C(\xi', \delta)} [f(x) - f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, d\,x \right| \leq (n-2) \int_{H_\delta} \frac{|f(x) - f(\xi')|}{|x-\xi'|^{n-1}} d\,x +$$

$$+ |f(\xi')| \int_{C(\xi, 2\delta) - \overline{C}(\xi', \delta)} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x) \right| d\,x.$$

(100) Per involucro di H su L, di raggio δ, intendiamo l'insieme dei punti di L che hanno distanza da H non superiore a δ.

Dato che $\left|\frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\right|$ può essere maggiorato, in $C(\xi', 2\delta) - C(\xi', \delta)$, da una costante dipendente soltanto da R, anche in tal caso la (1) è dimostrata.

La derivata controvariante di v è:

$$v^{\xi} = (-1)^n \frac{2}{(n-2)\,\omega_n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx\right] d\,\xi_k +$$

$$+ (-1)^n \frac{2}{(n-2)\,\omega_n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx\right] d\,\xi_n .$$

Si ha allora:

$$\int_{L_r} v\, v^{\xi} = \frac{-4}{(n-2)^2\,\omega_n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{L_r} d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_{n-1} \left[\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}\, d\,x \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|y-\xi|^{n-2}}\, d\,y\right],$$

da cui, per la (1):

$$\left|\int_{L_r} v\, v^{\xi}\right| \leq \frac{4\,M}{(n-2)^2\,\omega_n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{L_r} d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_{n-1} \left|\frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|y-\xi|^{n-2}}\, d\,y\right|. \tag{2}$$

Indicate con $F_1(B), \ldots, F_n(B)$ le misure generate su $\{B\}_L$ dalla funzione a VL $f(y)$, con un'integrazione per parti si ha:

$$\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, d\,x = -\int_L \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, d\,F_k \text{ (101)}.$$

Ne viene:

$$\int_{L_r} \left|\frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, d\,x\right| d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_{n-1} =$$

(101) Cfr. De Giorgi [8].

$$= \int_{L_r} \left| \int_L \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d_x F_k \right| d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_{L_r} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \int_L \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right| d_x V_{F_k} =$$

$$= \int_L d_x V_{F_k} \int_{L_r} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right| d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} .$$

Avendosi : $\int_{L_r} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right| d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \leq \frac{\omega_n}{2}$, dalla (2) si trae :

$$\left| \int_{L_r} v\, v^{\xi} \right| \leq \frac{2M}{(n-2)^2\, \omega_n} \sum_{k=1}^{n-1} V_{F_k}(H) .$$

Per $n > 2$ il teorema è cosí completamente dimostrato.

Nel caso $n = 2$ la dimostrazione ora esposta continua a sussistere pressochè inalterata ; in tal caso il ruolo della $(n-2)$-forma armonica coniugata di u viene assunto dalla funzione $v(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_L \log |x - \xi|\, df$ la quale è appunto una funzione armonica e coniugata di u per ξ esterno ad L.

Siamo ora in grado di dimostrare che:

II. *Se A è un campo di classe $1, \Sigma$ la sua frontiera, $f(x)$ una funzione continua definita su Σ, condizione sufficiente perchè $f(x)$ appartenga a $\mathfrak{T}(\Sigma)$ è che essa sia a VL su Σ ed appartenga a $\mathfrak{D}'(\Sigma)$. Inoltre, in tali ipotesi, la funzione u di $\mathcal{K}(A)$ che ha come traccia su Σ la funzione f coincide in A con una funzione continua in $A + \Sigma$* [102].

Indichiamo con $\{U_k\}$ $(k = 1, \dots, m)$ una famiglia costituita da un numero finito di insiemi di Σ, ricoprenti Σ, ognuno dei quali sia suscettibile di una rappresentazione regolare di classe 1 su un iperpiano tangente a Σ in un conveniente, $x^{(k)}$, dei suoi punti.

---

[102] Le ipotesi qui fatte sulla frontiera del campo A sono le stesse nelle quali si pongono L. N. Slobodetski e V. M. Babich [41]. La dimostrazione che segue potrebbe anche essere estesa al caso in cui la frontiera di A sia lipschitziana con ragionamenti analoghi a quelli usati da C. B. Morrey [33] e G. Prodi [40].

In corrispondenza ad ogni k compreso tra 1 ed m indichiamo con U'_k un intorno di $x^{(k)}$ su Σ contenuto con la sua chiusura in U_k, tale che la famiglia $\{U'_k\}$ ricopra la frontiera Σ.

Indichiamo con H_k (con H'_k) l'insieme base di U_k (di U'_k) sull'iperpiano tangente a Σ in $x^{(k)}$, con $\xi_n = \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ la rappresentazione di U_k in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ con centro in $x^{(k)}$ e l'asse ξ_n coincidente con la normale interna a Σ in $x^{(k)}$, con ϱ_k un numero positivo tale che l'insieme definito dalle limitazioni $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \subset H_k, \chi_k(\xi_1, \ldots \ldots, \xi_{n-1}) < \xi_n < \chi_k(\xi_1, \ldots \xi_{-1}) + 2\varrho_k$ sia contenuta in A; siano inoltre T_k la chiusura di tale insieme e D_k il dominio definito dalle limitazioni:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \subset \bar{H}'_k, \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \leq \xi_n \leq \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) + \varrho_k \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Indichiamo con D_0 un dominio contenuto in A e tale che $A - \cup_k D_k \subset D_0$.

Siano $w_0(x), \ldots, w_m(x)$, $m + 1$ funzioni di classe C_1 in $A + \Sigma$ le quali realizzino ivi una *partizione dell'unità*. Esse siano cioè tali che $w_k(x)$ risulti diversa da zero solo in D_k e inoltre si abbia: $\sum_{k=0}^{m} w_k(x) = 1$ [103].

Per conseguire la tesi del teorema basta dimostrare che, in corrispondenza ad ogni intero k $(1 \leq k \leq m)$, esiste una funzione $u_k(x)$ continua in T_k appartenente a $\mathcal{K}(T_k - \mathcal{F} T_k)$ e coincidente con $f(x)$ su U'_k; infatti, se si definisce u_k in tutto $A + \Sigma$ assumendola identicamente nulla all'esterno di T_k e se inoltre si assume $u_0 = 0$, la funzione $\sum_{k=0}^{m} w_k(x) u_k(x)$ soddisfa la tesi del teorema.

Osserviamo, per questo, che, in virtù del teorema V, § 4, la funzione $f[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$ appartiene a $\mathfrak{D}(H_k)$; allora, per il teorema IV § 4, si può definire una funzione φ sull'iperpiano L_k, tangente a Σ in $x^{(k)}$, che sia ivi CVL, appartenga a $\mathfrak{D}(L_k)$, coincida con f in H'_k e sia nulla all'esterno di H_k. Per il teorema precedente esiste una funzione $v_k(x)$ definita nel semispazio dei punti per i quali $\xi_n \geq 0$, ivi continua, coincidente con φ sull'iperpiano L_k di equazione $\xi_n = 0$ e appartenente a $\mathcal{K}(A)$ in corrispondenza ad ogni campo limitato A contenuto nel suo insieme di definizione. Si ha allora che la funzione $v_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n - \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$, definita in T_k, risulta ivi continua, coincide su U'_k con $f(x)$ ed appartiene a $\mathcal{K}(T_k - \mathcal{F} T_k)$; possiamo assumere pertanto $u_k(\xi) = v_k[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n - \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})]$.

Così il teorema è completamente dimostrato [104].

---

[103] Cfr. Dieudonné [9].

[104] Il procedimento che è qui stato seguito per ricondurre il problema al caso del semispazio ripete sostanzialmente quello adottato da Prodi in [40] § 2.

È il caso di notare i seguenti corollari del teorema ora dimostrato, che rappresentano risultati di per sè interessanti della teoria delle serie di Fourier e di Laplace.

III. *Sia C una circonferenza di raggio unitario e ϑ l'anomalia del punto di C. Se $f(\vartheta)$ è una funzione definita su C, ivi CVL ed appartenente a $\mathfrak{D}'(C)$, indicate con a_m e b_m le coordinate di Fourier di $f(\vartheta)$, relative all'intervallo $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, si ha* $\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$

Questo teorema discende immediatamente dai teoremi II di questo paragrafo e I del § 2.

Teoremi di questo tipo possono dedursi facilmente anche da taluni criteri di convergenza assoluta per le serie di Fourier dimostrati a A. Zygmund ([105]).

IV. *Sia Ω la frontiera di una ipersfera di raggio unitario di S_n. Se $f(x)$ è una funzione definita su Ω, ivi CVL ed appartenente a $\mathfrak{D}'(\Omega)$ si ha:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(2m+2n-2)^2 \alpha_m \int_\Omega d_x\sigma \left[\int_\Omega f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma\right]^2 < +\infty$$

ove $\alpha_m = \dfrac{1}{\pi^n}\left[\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)\right]^n$

In particolare, se $n=3$, indicate con $a_{m,k}$, $b_{m,k}$ le coordinate di Laplace di f ([106]) si ha:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2m+1}\left[2\,a_{m0}^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(m+k)!}{(m-k)!}(a_{m,k}^2 + b_{m,k}^2)\right] < +\infty .$$

Questo teorema è immediata conseguenza del teorema II di questo paragrafo e dei risultati sulle funzioni sferiche richiamati nel § 2.

([106]) Per la definizione di coordinate di Laplace vedasi [37] p. 337.

([105]) Questo Autore ha infatti dimostrato [48] che, se $f(\vartheta)$ è uniformemente hölderiana di esponente α con $0 < \alpha \leq 1$ ed a variazione limitata, per i suoi coefficienti di Fourier si ha: $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m| < +\infty$. Poichè $f(\vartheta)$ è a variazione limitata, riesce: $|a_m| \leq \dfrac{k}{m}$, $|b_m| \leq \dfrac{k}{m}$; ne viene allora la convergenza della serie: $\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$. Il citato teorema continua a sussistere anche se alla condizione di Hölder si sostituisce una condizione del tipo seguente:

$$\max_{0 \leq h \leq \delta} \int_0^{2\pi} [f(\vartheta + h) - f(\vartheta)]\, d\vartheta < \delta^\alpha .$$

Concluderemo questo paragrafo mostrando come nessuna delle due ipotesi fatte sulla funzione f nell'enunciato del teorema II sia sufficiente, da sola, ad assicurare il sussistere della tesi.

In effetti porteremo l'esempio di una funzione $f(\vartheta)$ continua su C, appartenente a $\mathfrak{D}'(C)$ ma che non è a VL su C, la quale non appartiene a $\mathfrak{T}(C)$.

Successivamente faremo vedere, con un altro esempio, che mantenendo l'ipotesi che f sia CVL ma sopprimendo quella dell'appartenza a $\mathfrak{D}'(C)$, la tesi del teorema non sussiste.

Consideriamo la serie: $\sum_{m=1}^{\infty} e^{im \log m} \frac{e^{im\vartheta}}{m^{1/2+\alpha}}$. Se si ha $0 < \alpha < 1$ questa serie converge uniformemente in $(0, 2\pi)$ verso una funzione di classe C_0^α in $(0, 2\pi)$ (107). Pertanto la parte reale della somma di tale serie è una funzione $f(\alpha, \vartheta)$ che, per ogni fissato α, è di classe C_0^α in $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ed è contenuta quindi in $\mathfrak{D}'(C)$.

Indicate con a_m e b_m le sue coordinate di Fourier, si ha:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m^{-(1+2\alpha)}.$$

Questa serie è divergente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ e convergente per $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Allora, in virtù del teorema I § 2, la funzione di $\vartheta : f(\alpha, \vartheta)$ con $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ non appartiene a $\mathfrak{T}(C)$.

Si è in tal modo costruita una funzione continua su C, appartenente a $\mathfrak{D}'(C)$ ma non a $\mathfrak{T}(C)$ (108). Si noti però che, se all'ipotesi che f appartenga a $\mathfrak{D}'(C)$ si sostituisce l'ipotesi che f sia di classe C_0^α con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, allora l'ipotesi che f sia a VL può essere soppressa (109).

---

(107) Cfr. Hardy e Littlewod [24].

(108) Un altro esempio in proposito è costituito da quello stesso addotto da Hadamard [23] per provare che il principio di Dirichlet non è valido in generale. Hadamard considerò la serie $\sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \cos^{2p} \vartheta$ la quale è totalmente convergente in $(0, 2\pi)$. In tal caso la serie $\sum_{p=1}^{\infty} p(a_p^2 + b_p^2)$ coincide con la serie che ha tutti i suoi termini eguali ad 1. È facile d'altra parte constatare che la somma di tale serie è uniformemente hölderiana con un qualsiasi esponente α tale che $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(109) Cfr. Miranda [32].

Consideriamo ora la serie trigonometrica $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\cos m\vartheta}{\sqrt{\lg m}}$. Poichè la successione dei coefficienti di tale serie è infinitesima e convessa ([110]), questa serie è la serie di Fourier di una funzione sommabile in $(0\,,2\,\pi)$ ([111]). Indicata con $\varphi(\vartheta)$ tale funzione, poniamo: $f(\vartheta)=\int_0^{\vartheta}\varphi(\tau)\,d\tau$. La funzione $f(\vartheta)$ è assolutamente continua, e quindi anche a VL, in $(0\,,2\,\pi)$; inoltre, dato che $\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\,d\tau=0$ si ha $f(0)=f(2\,\pi)$. Per le coordinate di Fourier a_m e b_m di $f(\vartheta)$ si ha:

$$a_m=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\cos m\,\vartheta\,d\vartheta=-\frac{1}{\sqrt{\pi}m}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{sen} m\,\vartheta\,d\,\vartheta=0 \qquad m\geq 1$$

$$b_m=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\operatorname{sen} m\,\vartheta\,d\,\vartheta=\frac{1}{\sqrt{\pi}m}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\cos m\,\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{\sqrt{\pi}m\sqrt{\lg m}} \qquad m\geq 2\,.$$

Pertanto, avendosi $m\,(a_m^2+b_m^2)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,m\lg m}\;(m\geq 2)$, la serie $\sum_{m=2}^{\infty} m\,(a_m^2+b_m^2)$ è divergente. Allora, per il teorema I § (2), f non appartiene a $\mathfrak{T}(C)$. Si è in tal modo costruita una funzione CVL su C ma non appartenente a $\mathfrak{T}(C)$.

7. Un esempio di non unicità per il problema di Neumann generalizzato relativo all'equazione di Laplace.

Sfruttando i risultati del paragrafo precedente, mostreremo ora come, per il problema di Neumann, relativo all'equazione di Laplace, considerato in una classe di soluzioni che hanno integrale di Dirichlet finito e che as-

---

([110]) Una successione di numeri reali dicesi convessa se, per ogni m, si ha:

$$c_m-c_{m+1}\geq c_{m+1}-c_{m+2}\,.$$

La successione $\{(\log m)^{-\frac{1}{2}}\}$ è convessa; tale è infatti la funzione $(\log x)^{-\frac{1}{2}}$.

([111]) Cfr. Young [47], Kolmogoroff [27].

sumono i dati al contorno in un senso generalizzato che verremo a precisare, non sussista il consueto teorema di unicità, secondo il quale la soluzione è unica, a meno di una costante additiva.

Indichiamo con A un campo di classe 1 e con Σ la sua frontiera. Indichiamo con $V(A)$ la famiglia delle funzioni v definite in $A+\Sigma$ le quali soddisfano le seguenti condizioni:

a) $v(x)$ è continua in $A+\Sigma$

b) $v(x)$ è dotata di derivate prime di quadrato sommabile in A.

Consideriamo il problema di Neumann consistente nel ricercare le funzioni di $V(A)$, armoniche in A e tali che, per quasi tutti i punti ξ di Σ riesca:

$$\lim_{x \to \xi \text{ su } \nu(\xi)} \left[\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right] = \varphi(\xi) \tag{1}$$

essendo φ una funzione assegnata su Σ.

Mostriamo che tale problema non ammette un teorema d'unicità nel senso sopradetto.

Indichiamo con C la circonferenza del piano dei punti $z \equiv (x, y)$ che ha centro nell'origine e raggio 1, con ζ i punti di C e con s l'ascissa curvilinea di C. Sia $f(\zeta)$ una funzione definita su C, ivi a VL, di classe C_0^α con $0 < \alpha < 1$ e tale che $\int_C df = 0$.

La funzione:

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_C \log|z-\zeta|\, d_\zeta f \tag{2}$$

coincide nell'interno del cerchio D, che ha C per frontiera, con una soluzione del problema di Neumann prima considerato ove si assuma come campo A il cerchio D e come dato al contorno $\varphi(\zeta) = \dfrac{df}{ds}$. Infatti la funzione espressa dalla (2) è armonica in D. Inoltre essa appartiene a $\mathcal{K}(D)$; infatti $v(z)$ è coniugata armonica della funzione $u(z) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C f(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta\|}{\partial \nu_\zeta}\, d_\zeta s$. [112]

[112] Si ha infatti, integrando per parti:

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_C \log|z-\zeta|\, d_\zeta f = -\frac{1}{\pi}\int_C f(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s_\zeta}\, d_\zeta s;$$

si trae allora facilmente: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

La funzione $u(z)$, com'è noto, ha come traccia su C la funzione $-f(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \cdot$ $\cdot \int_C f\, ds$; allora, per il teorema II del § **6**, la funzione $u(z)$ ha derivate prime di quadrato sommabile in D; ne viene che anche la funzione $v(z)$ ha derivate prime di quadrato sommabile in D ed appartiene quindi a $\mathcal{K}(D)$.

Per constatare la coincidenza di v con una funzione continua in $D + C$ basta osservare che la funzione v è la derivata di un potenziale di semplice strato di densità hölderiana ([113]). Inoltre, come segue da noti risultati di Evans e Miles sui potenziali generalizzati di semplice e doppio strato ([114]), si ha, per quasi tutti i punti ζ_0 di C:

$$\lim_{z \to \zeta_0 (\text{su } \nu_{\zeta_0})} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \left[\frac{1}{\pi} \int_C \log |z - \zeta| \, d_\zeta f \right] = \frac{d f(\zeta_0)}{d s}.$$

Per avere quindi un esempio in cui il problema di Neumann, relativo all'equazione di Laplace nel cerchio, ammette autosoluzioni nella classe $V(D)$ diverse dalla costante basta assumere come f una funzione che, oltre ad essere a VL, di classe C_0^α su C e tale che $\int_C df = 0$, abbia anche la derivata $\frac{df}{ds}$ quasi ovunque nulla su C (senza che $f(\zeta)$ sia identicamente eguale ad una costante). Nel paragrafo seguente daremo appunto la costruzione di una funzione $f(\zeta)$ soddisfacente tutte queste condizioni e tale inoltre da riuscire $f(\zeta) = f(\bar{\zeta})$, avendo indicato con $\bar{\zeta}$ il simmetrico di ζ rispetto all'asse x. In base a quest'ultima condizione cui soddisfa $f(\zeta)$, la funzione $v(z)$ espressa dalla (2), risulta essere nulla nell'intervallo $(-1, 1)$ dell'asse x ([115]). Consideriamo ora il problema misto per l'equazione

---

([113]) Cfr. Bouligand e Girand [4] p. 29.

([114]) Cfr. Evans e Miles [10].

([115]) Si ha infatti:

$$\int_C f(\zeta) \frac{\partial \log |\bar{z} - \zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s = \int_C f(\bar{\zeta}) \frac{\partial \log |\bar{z} - \bar{\zeta}|}{\partial s_{\bar{\zeta}}} d_{\bar{\zeta}} s =$$

$$= \int_C f(\zeta) \frac{\partial \log |\bar{z} - \bar{\zeta}|}{\partial s_{\bar{\zeta}}} d_{\bar{\zeta}} s = - \int_C f(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s ,$$

da cui:

$$\int_C f(\zeta) \frac{\partial \log |\bar{z} - \zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s = - \int_C f(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s$$

e quindi l'asserto.

di Laplace consistente nel ricercare le funzioni v di $V(A)$, armoniche in A, e tali che, assegnata una funzione continua $\varphi(\xi)$ su una porzione Σ_1 di Σ ed una funzione $\varphi_2(\xi)$ sulla restante porzione Σ_2 di Σ, si abbia:

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi) \qquad \xi \subset \Sigma_1$$

$$\lim_{x \to \xi (\text{su}\, \nu_\xi)} \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right] = \varphi_2(\xi) \qquad \xi \subset \Sigma_2$$

per quasi tutti i punti ξ di Σ_2.

Anche questo problema non ammette teorema di unicità (116). Se infatti assumiamo come campo A l'insieme dei punti di D appartenenti al semipiano $y > 0$, come Σ_1 l'intervallo $(-1, 1)$ dell'asse x, come Σ_2 la porzione di C contenuta nel semipiano $y > 0$, la funzione $v(z)$ definita dalla (2) rappresenta una autosoluzione anche per questo problema, dato che, come s'è prima osservato, essa riesce identicamente nulla nell'intervallo $(-1, 1)$ dell'asse x.

8. Costruzione di una funzione hölderiana, monotona, avente derivata quasi ovunque nulla.

Vogliamo ora costruire una funzione uniformemente hölderiana con un prefissato esponente α $(0 < \alpha < 1)$ in un intervallo (a, b) dell'asse reale x, la quale sia ivi non decrescente, non costante, ed abbia derivata quasi ovunque nulla.

Sia $\psi(x)$ una funzione definita in (a, b), ivi continua e soddisfacente la seguente condizione: esistono $2r$ punti distinti di (a, b): $a_i, b_i (i = 1, ..., r)$, tali che $a = a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < a_r < b_r = b$ e tali inoltre che negli intervalli (b_i, a_{i+1}) la funzione $\psi(x)$ risulti costante e negli intervalli (a_i, b_i) si abbia: $\psi(x) = (x - a_i)^\alpha + K_i$ ove K_i è una costante ed α è un prefissato numero reale tale che $0 < \alpha < 1$.

Evidentemente tale funzione è non decrescente.

Indichiamo con $\mathcal{L}\psi$ la funzione che in ognuno degli intervalli in cui ψ è costante coincide con ψ ed in ognuno dei restanti (a_i, b_i) è defnita nel modo seguente: posto $c_i = a_i + 2^{-1/\alpha}(b_i - a_i)$, $d_i = b_i - 2^{-1/\alpha}(b_i - a_i)$ sia:

$$\mathcal{L}\psi(x) = \psi(x) \qquad a_i \leq x < c_i$$

$$\mathcal{L}\psi(x) = \psi(c_i) \qquad c_i \leq x < d_i$$

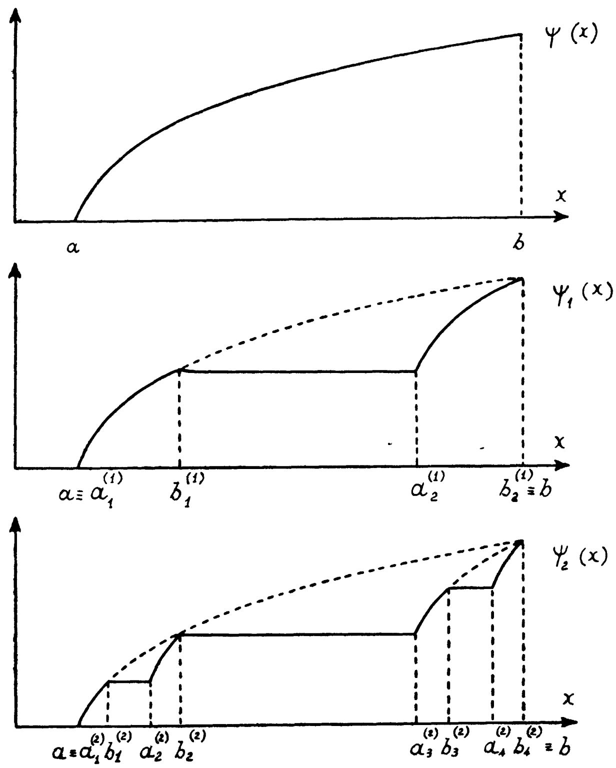
$$\mathcal{L}\psi(x) = (x - d_i)^\alpha + \psi(c_i) \qquad d_i \leq x \leq b_i.$$

(116) Cfr. De Giorgi [7].

La funzione $\mathcal{L}\psi(x)$ risulta ovviamente continua e non decrescente in ciascuno degli intervalli (a_i, b_i); inoltre, poichè $\mathcal{L}\psi(b_i) = \psi(b_i)$ (117) si ha che $\mathcal{L}\psi(x)$ è continua e non decrescente in (a, b). È anche facile constatare che $\mathcal{L}\psi(x) \leq \psi(x)$.

Poniamo: $\psi(x) = (x - a)^\alpha$, $\psi_1(x) = \mathcal{L}\psi(x)$, $\psi_2(x) = \mathcal{L}\psi_1(x)$, ...

Nella figura accanto riproduciamo i grafici delle prime tre funzioni di tale successione.



Le funzioni $\psi_m(x)$ sono non negative; inoltre la successione $\{\psi_m\}$ è monotona non crescente; allora essa risulta convergente ad una funzione $h(x)$, la quale è non crescente e non è costante, perchè riesce $h(a) = 0$ e $h(b) = (b - a)^\alpha$. La funzione $h(x)$ ha derivata quasi ovunque nulla. Infatti per ogni m esiste un plurintervallo A_m, somma di tutti gli intervalli aperti in ognuno dei quali $\psi_m(x)$ è costante, il quale ha misura $(b - a)\,[1 - 2^{m(1-1/\alpha)}]$ e

---

(117) Si ha infatti $\mathcal{L}\psi(b_i) = (b_i - d_i)^\alpha + \psi(c_i) = [2^{-\frac{1}{\alpha}}(b_i - a_i)]^\alpha + (c_i - a_i)^\alpha + \psi(a_i) = 2^{-1}(b_i - a_i)^\alpha + \psi(a_i) + [2^{-\frac{1}{\alpha}}(b_i - a_i)]^\alpha = \psi(a_i) + (b_i - a_i)^\alpha = \psi(b_i)$.

in ogni punto del quale si ha $\dfrac{d\,\psi_m}{d\,x} = 0$. Poichè riesce $h(x) = \psi_m(x)$ per $x \subset A_m$, si ha $\dfrac{d\,h\,(x)}{d\,x} = 0$ in ogni punto di $\mathsf{U}_m\, A_m$. È d'altra parte facile constatare che la misura di $\mathsf{U}_m\, A_m$ è $b - a$.

Facciamo ora vedere che $h\,(x)$ è uniformemente hölderiana di esponente α e coefficiente di Hölder 1 in $(a\,,b)$; per questo ci basta mostrare che ogni funzione $\psi_m\,(x)$ è hölderiana di esponente α e coefficiente 1 in tale intervallo.

Premettiamo un'osservazione. Sia $\psi_m\,(x)$ una funzione di $\{\,\psi_m\,(x)\,\}$; i simboli $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$, $c_i^{(m)}$, $d_i^{(m)}$ abbiamo, in relazione a $\psi_m\,(x)$, il significato prima precisato rispettivamente per i simboli $a_i\,, b_i\,, c_i\,, d_i$ in relazione alla funzione $\psi\,(x)$. Se, per $a_i^{(m)} \leq x \leq b$ riesce: $\psi_m\,(a_i^{(m)}) + (x - a_i^{(m)})^\alpha \geq \psi_m\,(x)$, si ha:

$$(1) \qquad \psi_m\,(c_i^{(m)}) + (x - d_i^{(m)})^\alpha \geq \psi_{m+1}\,(x) \qquad\qquad d_i^{(m)} \leq x \leq b\,.$$

Infatti, per $d_i^{(m)} \leq x \leq b_i^{(m)}$ la (1) sussiste con il segno $=$ dato che, per definizione, si ha: $\mathcal{L}\,\psi_m\,(x) = \psi_m\,(c_i^{(m)}) + (x - d_i^{(m)})^\alpha$.

Quando si ha $b_i^{(m)} \leq x \leq b$, riesce:

$$\psi_m\,(c_i^{(m)}) + (x - d_i^{(m)})^\alpha \geq \psi_m\,(a_i^{(m)}) + (x - a_i^{(m)})^\alpha\,,$$

come segue dall'osservare che i due membri di tale diseguaglianza sono eguali per $x = b_i^{(m)}$ e che il primo ha derivata maggiore di quella del secondo.

Allora, in virtù dell'ipotesi fatta, e cioè che riesca: $\psi_m\,(a_i^{(m)}) + (x - a_i^{(m)})^\alpha \geq \psi_m\,(x)$ e del fatto che $\psi_m\,(x) \geq \psi_{m+1}\,(x)$, si ha la (1).

È inoltre evidente che riesce:

$$(2)_1 \qquad \psi_1\,(a_i^{(1)}) + (x - a_i^{(1)})^\alpha \geq \psi_1\,(x) \qquad\qquad b \geq x \geq a_i^{(1)}\,.$$

Si ha allora:

$$(2)_2 \qquad \psi_2\,(a_i^{(2)}) + (x - a_i^{(2)})^\alpha \geq \psi_2\,(x) \qquad\qquad b \geq x \geq a_i^{(2)}\,;$$

infatti o si ha $a_j^{(1)} = a_i^{(2)}$ e in tal caso riesce:

$$\psi_2\,(a_i^{(2)}) + (x - a_i^{(2)})^\alpha = \psi_1\,(a_j^{(1)}) + (x - a_j^{(1)})^\alpha \geq \psi_1\,(x) \geq \psi_2\,(x) \qquad (b \geq x \geq a_j^{(1)})$$

oppure $a_i^{(2)} = d_j^{(1)}$ ed allora la $(2)_2$ segue immediatamente dall'osservazione premessa: si ha infatti in tal caso $\psi_1\,(c_j^{(1)}) = \psi_2\,(a_i^{(2)})$ e quindi la $\psi_1\,(c_j^{(1)}) + (x - d_j^{(1)}) \geq \psi_2\,(x)$, per $d_j^{(1)} \leq x \leq b$, coincide con la $(2)_2$.

Analogamente si prova che:

$$(2)_3 \qquad \psi_3\,(a_i^{(3)}) + (x - a_i^{(3)})^\alpha \geq \psi_3\,(x) \qquad\qquad b \geq x \geq a_i^{(3)}$$

e, in generale:

$$(2)_m \qquad \psi_m(a_i^{(m)}) + (x - a_i^{(m)})^\alpha \geq \psi_m(x) \qquad b \geq x \geq a_i^{(m)}.$$

Siano ora x_1 e x_2 due numeri tali che $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Facciamo vedere che si ha:

$$\psi_m(x_2) - \psi_m(x_1) \leq (x_2 - x_1)^\alpha .$$

Possiamo intanto sopporre che x_1 non sia interno ad alcuno degli intervalli in cui ψ_m è costante; esisterà allora un valore dell'indice i in corrispondenza al quale si avrà:

$$\psi_m(x_1) = \psi_m(a_i^{(m)}) + (x_1 - a_i^{(m)})^\alpha .$$

Per la $(2)_m$ si ha:

$$\psi_m(x_2) - \psi_m(x_1) \leq (x_2 - a_i^{(m)})^\alpha - (x_1 - a_i^{(m)})^\alpha \leq (x_2 - x_1)^\alpha .$$

Ciò prova l'asserto.

Ora, per costruire una funzione $f(\zeta)$, definita al variare di ζ sulla circonferenza C, ivi a VL, di classe C_0^α, dotata di derivata quasi ovunque nulla tale che $\int_C df = 0$ e tale che $f(\zeta) = f(\bar{\zeta})$, basta considerare la funzione $h(x)$, ora introdotta, relativamente all'intervallo $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ e, chiamata con ϑ l'anomalia di ζ, porre:

$$f(\zeta) = \begin{cases} h(2\pi - \vartheta) & 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ -h(\pi + \vartheta) & \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \\ -h(3\pi - \vartheta) & \pi \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}\pi \\ h(\vartheta) & \frac{3}{2}\pi \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{cases}$$

La funzione $f(\zeta)$ così costruita è continua su C è monotona in ognuno dei due archi $(0, \pi)$ e $(\pi, 2\pi)$ e quindi è a VL in C, è dotata di derivata quasi ovunque nulla e soddisfa le condizioni: $\int_C df = 0$, $f(\zeta) = f(\bar{\zeta})$. L'hölderianeità di $f(\zeta)$ su C segue da quella di $h(\vartheta)$ in $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ com'è facile constatare.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO: *Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - k u = 0$, « Ricerche di Matematica » vol. V, 1956, pp. 58-95.

[2] P. APPEL J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques* Parigi, Gautier-Villars 1926.

[3] N. ARONSZAIJN: *Boundary values of functions with finite Dirichlet integrals.* Conference on partial differential equations. Studies in eigenvalue problems. N. 14, Univ. of Kansas 1955.

[4] G. BOULIGAND e G. GIRAUD: *Le probléme de la dérivée oblique en théorie du potentiel.* « Actualités scientifiques et industrielles » n. 219.

[5] G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet.* « Rend. Circ. Mat. di Palermo » t. LXI, 1937 pp. 177-221.

[6] J. DENY e J. L. LIONS: *Les espaces du type de Beppo Levi.* « Annales de l'Institut Fourier » vol. V, 1955 pp. 305-370.

[7] E. DE GIORGI: *Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno del tipo misto.* « Ricerche di Matematica » 1953.

[8] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni.* « Annali di Matematica Pura e Applicata » s. IV, t. XXXVI, 1954, p. 195.

[9] J. DIEUDONNÉ: *Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts.* « Acad. Sc. Paris Compt. Rendues » t. 205 1937, 2°. p. 563.

[10] G. C. EVANS e E. R. MILES: *Potential of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems.* « Amer. Journ. of Math. » t. LIII, 1931, pp. 493-516.

[11] G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno retativi all'equilibrio di un corpo elastico.* « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », 1950, s. III, vol. IV, fasc. 1, 2, pp. 35-100 — Pubblicazione dell'I. N. A. C. n. 248, 1949.

[12] G. FICHERA: *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari.* « Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziali » Ediz. Cremonese 1955.

[13] G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* « Ann. Mat. Pura e Appl. » s. IV, t. XXVII, 1948, pp. 1-28.

[14] G. FICHERA: *Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche.* « Rendiconti del Seminario Matematico di Padova » XXIV, 1955, pp. 533 e seg..

[15] G. FICHERA: *Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme.* « Rend. Acc. Naz. Lincei » 1951, v. X, fasc. 5, 6.

[16] G. FICHERA: *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$. « Giornale di Matematiche di Battaglini » Napoli 1948.

[17] G. FICHERA: *Teorema d'esistenza per il problema biiperarmonico.* « Rend. Acc. Naz. Lincei » 1948, s. VIII, v. V, fasc. 6, pp. 319-324.

[18] G. FICHERA: *Lezioni sulle trasformazioni lineari,* vol. I Istituto Mat. Univ. Trieste 1954.

[19] K. O. FRIEDRICHS: *The identity of weak and strong extensions of differential operators.* « Transactions of the American Mathematical Society » v. 55, 1944, p. 132.

[20] K. O. FRIEDRICHS: *A Theorm of Lichtenstein.* « Duke Math. Journal » 14, 1947, fasc. I.

[21] E. GAGLIARDO: *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.* « Rend. Seminario Matem. Padova » vol. 27 ; 1957, pp. 284-305.

[22] D. GRECO : *Un'osservazione sul problema di Dirichlet.* « Rend. dell'Acc. di Sc. Fisiche e Matematiche della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli » s. IV, v. XXIII, 1956, § 3.

[23] M. HADAMARD : *Sur le principe de Dirichlet.* « Bull. de la Soc. Math. de France » 34, 1906, pp. 135-138.

[24] G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD : *Some problems of Diophantine approximation : A remarkable trigonometrical series.* « Proc. National Acad. Sc. » 2, 1916, pp. 583-86.

[25] W. V. D. HODGE : *A Dirichlet Problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties.* « Proc. London Math. Soc. » 1932.

[26] O. D. KELLOGG : *Foudations of Potential Theory,* Springer Berlino, 1929.

[27] A· KOLMOGOROFF : *Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue.* « Bull. Internaz. de l'Acad. Polonaise, cl. de Sc. Math. et Nat. » Cracovia, 1923, pp. 83-86.

[28] A. LIAPUNOV : *Sur certaines questions qui se rettachent au problème de Dirichlet* « Journal de Math. » v. 4, 1898, pp. 241-311.

[29] L. LICHTENSTEIN : *Über das Poissonsche Integral ecc.* « Journal für die reine und angewandte Mathem. » 141, 1912, pp. 12-42.

[30] E. MAGENES : *Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale.* « Rend. Sem. Matem. Padova » XXIV, 1955, pp. 220-229.

[31] C. MIRANDA : *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer Verlag 1955.

[32] C. MIRANDA : *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana.* « Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem. di Napoli » s. IV, v. 18, 1948, pp. 96-98.

[33] C. B. MORREY : *Functions of several variables and absolute continuity.* « Duke Math. Journal » 6, 1940.

[34] C. PAUC : *Considerations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. de Giorgi.* « Annali di Mat. Pura ed Applicata » s. IV, t. XL, 1955, pp. 183-192.

[35] S. M. NIKOL'SKIJ : *Sul problema di Dirichlet per il cerchio e per il semispazio.* « Matematicheskij Sbornik » 35 (77), pp. 247-266, 1954.

[36] S. M. NIKOL'SKIJ : *Proprietà sulla frontiera delle funzioni definite in una regione con punti angolosi* « Matematicheskij Sbornik » 40 (82), pp. 303-318, 1956.

[37] M. PICONE : *Appunti di Analisi superiore.* Rondinella, Napoli, 1940.

[38] M PICONE e G. FICHERA : *Trattato di Analisi Matematica* vol. II, Tumminelli Roma, 1956.

[39] M. L. PRINCIVALLI: *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche.* « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », 1955.

[40] G. PRODI : *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi.* « Rend. Sem. Mat. Padova » XXVI, 1956, pp. 36-60.

[41] L. N. SLOBODETSKIJ e V. M. BABICH : *Della limitazione dell'integrale di Dirichlet.* « Dokl. Acad, N. SSSR », 106, 9, 1956.

[42] S. L. SOBOLEV : *Su un teorema di Analisi funzionale.* « Matematicheskij Sbornik » 4 (46), pp. 461-497, 1938.

[43] G. STAMPACCHIA : *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse.* « Ann. di Matem. Pura e applicata » s. IV, t. XXXIII, 1952.

[44] G. STAMPACCHIA : *Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione.* « Giornale di Matematiche di Battaglini » s. IV, vol. 80, 1950-51.

[45] T. VIOLA : *Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli connessi con i problemi al contorno per le funzioni armoniche.* « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » s. III, v. 6, fasc. 1⁰ e 2⁰, 1952, pp. 121 e seg. .

[46] E. S. WHITTAKER : *Modern Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1902.

[47] W. H. YOUNG : *On the Fourier series of bounded functions.* « Proc. London Math. Soc. » 12, 1913, pp. 41-70.

[48] A. ZYGMUND : *Sur la convergence absolue des séries de Fourier.* « Proc. London Math. Soc. » 3, 1928, pp. 194-196.

SIMBOLI E NOTAZIONI