ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

E. BAIADA
G. CARDAMONE

La variazione totale e la lunghezza di una curva

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 1-2 (1957), p. 29-71
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_1-2_29_0>

LA VARIAZIONE TOTALE
E LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA

di E. Baiada e G. Cardamone (Palermo)

In una recente nota [1], è stato messo in evidenza la possibilità di esprimere in termini più generali le formule relative al calcolo della variazione totale di una funzione continua, della lunghezza di una curva continua e rettificabile, e quella dell'integrale del calcolo delle variazioni.

Per quanto riguarda il calcolo della variazione totale di una funzione $f(x)$, data su (a, b), è noto che la formula:

$$V[f(x), (a, b)] = \int_a^b \left| \frac{df}{dx} \right| dx, \tag{1}$$

dove $\frac{df}{dx}$ è la derivata della $f(x)$ dove esiste e l'integrale è inteso nel senso di Lebesgue, è valida nel caso che la $f(x)$ sia su (a, b) assolutamente continua, ma, in generale, non lo è più nel caso che la $f(x)$ sia solo semplicemente continua e a variazione limitata su (a, b), pur avendo, com'è indicato da alcuni esempi costruiti dal Vitali, entrambi i membri della (1), significato.

Una circostanza del tutto analoga si verifica per la formula classica che dà la lunghezza $L[f(x); (a, b)]$ d'una curva rettificabile, relativa ad una funzione $f(x)$ assolutamente continua su (a, b).

Com'è noto, la formula, valida nelle ipotesi ora dette, è la seguente:

$$L[f(x); (a, b)] = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \tag{2}$$

(1) E. Baiada — *La variazione totale, la lunghezza di una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile.* (Rendiconti Accademia dei Lincei (1957)).

ma essa non è più valida, in generale, per le funzioni continue e a variazione limitata, pur avendo entrambi i membri della (2) significato come risulta sempre dagli esempi del Vitali.

Ci appare allora chiara la opportunità di ricercare delle formule valide, più generalmente, nel caso che la $f(x)$ sia continua e a variazione limitata su (a, b) e le quali esprimano rispettivamente lo stesso risultato della (1) e della (2) quando in particolare la $f(x)$ sia assolutamente continua su (a, b).

Nel presente lavoro, in relazione a tale questione, si dimostra che:

1°) — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ continua su (a, b) sia nell'intervallo stesso a variazione limitata è che esista finito il limite*

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| dx,$$

dove l'integrale è inteso nel senso di Riemann e $f(x)=f(a)$ per $x<a$, $f(x)=f(b)$ per $x>b$. Inoltre il limite detto, esistendo finito, rappresenta la variazione totale della $f(x)$ su (a, b), cioè:

$$V[f(x);(a, b)] = \lim_{h\to 0}\int_a^b \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| dx. \tag{1'}$$

2°) — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $y=f(x)$, continua su (a, b), sia una curva rettificabile nell'intervallo stesso è che esista finito il limite*

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \sqrt{1+\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}^2}\, dx,$$

l'integrale essendo qui inteso nel senso di Riemann e dove $f(x)=f(a)$ per $x<a$, $f(x)=f(b)$ per $x>b$. Inoltre il limite esistendo finito, rappresenta la lunghezza della curva su (a, b) cioè:

$$L[f(x);(a, b)] = \lim_{h\to 0}\int_a^b \sqrt{1+\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}^2}\, dx. \tag{2'}$$

Le formule (1') e (2') sono dimostrate, la (1') nelle parti I e II del presente lavoro, e la (2') nella III.

Il procedimento di dimostrazione di tutt'e due le formule considerate e cioè la (1′) e la (2′), è fondamentalmente quello di approssimazione, in quanto si fa ricorso al teorema, detto di Darboux-Scheeffer, sull'approssimazione uniforme della variazione totale (o delle lunghezze delle curve) mediante le variazioni (o le lunghezze) relative a poligonali inscritte alla $f(x)$.

Per altro, tutti i teoremi che intervengono nella dimostrazione delle formule in oggetto, sono esclusivamente di Analisi elementare e tra questi vi svolge un ruolo preminente il teorema della uniforme continuità.

Delle tre parti in cui è suddiviso il lavoro, le prime due sono dedicate alla dimostrazione della formula relativa al calcolo della variazione totale, trattando nella prima parte il caso della variazione totale finita e nella seconda parte il caso della variazione totale infinita; mentre la terza parte è dedicata alla dimostrazione della formula di rettificazione.

Per quanto si riferisce al caso della variazione totale infinita, non si è ritenuto opportuno di indagare sull'esistenza del limite infinito perchè ciò non è utile ai fini dei risultati da raggiungere.

Si congettura, però, che sia vera la proposizione:

Se $f(x)$ è continua e a variazione non limitata su (a, b) allora:

$$\lim_{h \to 0} \int \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| d\,x = +\infty\,;$$

e che questa si possa provare seguendo le stesse linee di dimostrazione adoperate nella parte II.

I Parte

IL CASO DELLA VARIAZIONE TOTALE FINITA

Teorema I. — *Se $f(x)$ è una funzione continua e a variazione limitata nell'intervallo di definizione (a', b'), allora esiste finito*

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| d\,x\,,$$

essendo (a, b) un intervallo totalmente interno ad (a', b'), e tale limite è uguale alla variazione totale della $f(x)$ su (a, b).

§. I

Premettiamo le seguenti note proposizioni:

1^0) Dato un $\varepsilon > 0$ si può determinare [2] un $\delta_1 > 0$ tale che per ogni suddivisione di (a', b') in parti (in numero finito) di ampiezze tutte inferiori a δ_1 la variazione relativa a questa suddivisione differisce dalla variazione totale della $f(x)$ su (a', b') per meno di $\varepsilon/8\,(b'-a')$. In forza della continuità si può supporre che δ_1 sia tale che se t_1 e t_2 di (a', b') soddisfano a $|t_1 - t_2| < \delta_1$ è pure:

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{8\,(b'-a')}\,. \tag{1}$$

2^0) Fissati un numero h, con le condizioni $0 < 2h \leq \delta_1$ e un numero $\varepsilon > 0$ si può trovare un $\delta_2 > 0$ tale che se si considera una qualunque poligonale inscritta alla curva $y = f(x)$ di lati le cui proiezioni sull'asse x siano minori di δ_2 allora in corrispondenza ad ogni coppia di ascisse x ed $x + h$ si ottengono una coppia di punti sulla curva e una coppia sulla poligonale tali che le pendenze delle due rette, da queste rispettivamente determinate, differiscono, in valore assoluto, per meno di $\varepsilon/8\,(b'-a')$.

La 2^0) proposizione si prova facilmente facendo intervenire la uniforme continuità della funzione $f(x)$ nell'intervallo (a', b') dato che per ipotesi questa funzione è continua.

Appunto per la uniforme continuità della $f(x)$ su su (a', b') fissato $\varepsilon \cdot h/32\,(b'-a') > 0$ si può determinare il numero $\delta_2 > 0$ per cui:

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon \cdot h}{32\,(b'-a')}\,, \tag{2}$$

se

$$|x' - x''| \leq \delta_2\,.$$

Consideriamo allora una qualsivoglia poligonale inscritta alla curva $y = f(x)$, con x variabile nello intervallo chiuso (a', b'), i cui lati abbiano proiezioni sull'asse x tutte minori in ampiezza del δ_2 ora trovato e indichiamo con $y = \varphi(x)$ (con x variabile nell'intervallo chiuso (a', b')), la sua equazione.

---

(2) Questa proposizione è diretta conseguenza di un noto lemma di DARBOUX-SCHEEFFER. Vedi, per es. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, volume I-pagg. 37, 39, e 43.

Proviamo subito che

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon \cdot h}{16(b' - a')}$$

per ogni x dell'intervallo chiuso (a', b').

Infatti, chiamiamo con P_1 e P_2 i vertici consecutivi della poligonale di ascisse rispettivamente x_1 e x_2 tali che

$$x_1 \leq x \leq x_2 \text{ (il segno uguale valendo solo da una parte).}$$

Poichè:

$$f(x) - \varphi(x) = f(x) - f(x_1) + f(x_1) - \varphi(x)$$

$$= f(x) - f(x_1) + \varphi(x_1) - \varphi(x)$$

allora:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f(x_1)| + |\varphi(x_1) - \varphi(x)|$$

ma è:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|,$$

perchè essendo $\varphi(x)$ funzione lineare della x nell'intervallo (x_1, x_2), essa è ivi monotona, e perciò:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f(x_1)| + |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| =$$

$$= |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Infine, siccome:

$$|x - x_1| \leq |x_1 - x_2| \leq \delta_2$$

per la (2) ne viene:

$$(2') \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon \cdot h}{16(b' - a')}, \; a' \leq x < b'.$$

Se ora si considera in valore assoluto la differenza delle pendenze delle due rette considerate nell'enunciato della proposizione, si ha:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right| \leq \frac{|f(x) - \varphi(x)| + |f(x+h) - \varphi(x+h)|}{h},$$

e per la (2'):

$$(3) \qquad \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right| \leq \frac{\varepsilon}{8(b' - a')}.$$

§ II.

Procediamo sulla base delle proposizioni premesse.

Per la 1⁰) fissato $\varepsilon > 0$ troviamo $\delta_1 > 0$ che possiamo scegliere minore di $\varepsilon/8$; scelto poi h tale che $0 < 2h \leq \delta_1 < \varepsilon/8$ e tale inoltre che $a' - a > \delta_1$, $b' - b > \delta_1$, per la 2^0) determiniamo il numero δ_2 che corrisponde a questo h e all'ε fissato.
Costruiamo ora una poligonale inscritta alla curva $y = f(x)$, con x in (a', b') di lati le cui proiezioni sull'asse delle x siano tutte uguali tra loro, purchè minori del minore dei numeri δ_2, δ_1, e inoltre sottomultiplo r^{esimo} di h, con r un intero arbitrario.

Allora se indichiamo con $y = \varphi(x)$ l'equazione della poligonale in oggetto, per la relazione (3) stabilita nella proposizione 2^0) si ha:

$$(4) \qquad \left| \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx - \int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left\{ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| - \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| \right\} dx \right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{8(b'-a')} dx \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

§ III.

1. — Vogliamo adesso valutare:

$$(5) \qquad \int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx.$$

Poniamo $r \cdot d = h$, cioè indichiamo con d la r^{esima} parte di h ed essa sarà la proiezione sull'asse x dei lati della poligonale di equazione $y = \varphi(x)$.
Ciò posto, consideriamo il generico lato della poligonale i cui estremi si proiettano sull'asse delle x ordinatamente nei punti di ascissa $x_i = a + i\,d$ e $x_{i+1} = a + (i+1)\,d$, con $x_0 = a$, $i = 0, 1, \ldots, n$ e dove n è quell'intero tale che:

$$(n - r)\,d \leq b - a - h < (n - r + 1)\ [\text{ossia } n \cdot d \leq b - a < (n+1)\,d],$$

e consideriamo inoltre il lato della stessa i cui estremi si proiettano nei punti di ascisse x_i, x_{i+r}, ed x_i, x_{i+r+1}.

È chiaro che se x è un punto dell'intervallo (x_i, x_{i+1}) il punto di ascissa $x+h$ sarà nell'intervallo (x_{i+r}, x_{i+r+1}).

Scriviamo l'equazione della retta contenente il lato della poligonale che si proietta nello intervallo (x_i, x_{i+1}).

Indicando con X e Y le coordinate correnti di un punto su tale retta, l'equazione si scrive subito:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x_i & f(x_i) & 1 \\ x_{i+1} & f(x_{i+1}) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Avremo:

$$Y = \frac{X\,\{f(x_i) - f(x_{i+1})\} + (x_i - x_{i+1}) f(x_{i+1}) - x_{i+1} \cdot \{f(x_i) - f(x_{i+1})\}}{x_i - x_{i+1}}$$

Ora, per un dato x dell'intervallo (x_i, x_{i+1}) risulta evidentemente $Y \equiv \varphi(x)$, cioè:

$$\varphi(x) = \frac{x\,\{f(x_i) - f(x_{i+1})\} - (x_i - x_{i+1}) \cdot f(x_{i+1}) - x_i\, x_{i+1} \cdot \{f(x_i) - f(x_{i+1})\}}{x_i - x_{i+1}}$$

$$= \frac{(x - x_{i+1})\,\{f(x_i) - f(x_{i+1})\}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}).$$

Analogamente l'equazione della retta contenente il lato della poligonale, che si proietta nell'intervallo (x_{i+r}, x_{i+r+1}) è:

$$Y = \frac{X\{f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})\} + (x_{i+r} - x_{i+r+1}) f(x_{i+r+1}) - x_{i+r+1}\{f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})\}}{x_{i+r} - x_{i+r+1}}.$$

E poichè il punto di ascissa $x+h$, per le proiezioni fatte, appartiene all'intervallo (x_{i+r}, x_{i+r+1}), si ha allo stesso modo:

$$\varphi(x+h) = \frac{(x+h - x_{i+r+1}) \cdot \{f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})\} + (x_{i+r} - x_{i+r+1}) \cdot f(x_{i+r+1})}{x_{i+r} - x_{i+r+1}},$$

e avvertendo che $x + h - x_{i+r+1} = x - x_{i+1}$:

$$\varphi(x+h) = \frac{(x - x_{i+1})\,\{f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})\}}{x_{i+r} - x_{i+r+1}} + f(x_{i+r+1}). \tag{7}$$

Tenendo conto che $x_{i+r} - x_{i+r+1} = x_i - x_{i+1} = -d$, sottraendo la (6) dalla (7) e dividendo per $h = r\,d$ si ottiene:

$$(8)\qquad \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{-(x-x_{i+1})\{[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\}}{r\cdot d^2} + \\ + \frac{f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})}{r\cdot d},$$

con $x_i \leq x < x_{i+1}$. Così che:

$$(9)\qquad \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| \geq \left|\frac{f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})}{rd}\right| - \\ - \frac{x_{i+1}-x}{r\cdot d^2}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right|,$$

$$(9')\qquad \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| \leq \left|\frac{f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})}{r\,d}\right| + \\ + \frac{x_{i+1}-x}{r\cdot d^2}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right|.$$

E integrando la (9) e la (9') rispetto a x sull'intervallo (x_i, x_{i+1}):

$$(10)\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| d\,x \geq \frac{1}{r}\left|f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})\right| - \\ - \frac{1}{2r}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right|,$$

$$(10')\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| d\,x \leq \frac{1}{r}\left|f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})\right| + \\ + \frac{1}{2r}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right|.$$

Sommiamo ora rispetto all'indice $i = 0, 1, \ldots, n-r-1$, con l'avvertenza che d si può pensare sufficientemente piccolo in modo da far si che:

$$a + (n+1)\,d < b'$$

Si ottiene:

$$(11)\qquad \int_a^b \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| d\,x \geq \int_a^{a+(n-r)d} \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| d\,x \geq$$

$$\geq \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n-r-1}\left|f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})\right| - \frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{n-r-1}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right|.$$

Consideriamo l'ultima somma dell'espressione precedente:

$$\sum_{i=0}^{n-r-1}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right| \leq \sum_{i=0}^{n-r-1}\left|f(x_{i+1})-f(x_{i+r+1})\right| +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-r-1}\left|f(x_i)-f(x_{i+1})\right|.$$

Pertanto, se $V[f(x);(a',b')]$ indica la variazione (finita per ipotesi) della funzione $f(x)$ sull'intervallo (a',b') sarà:

$$(11')\qquad \frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{n-r-1}\left|[f(x_{i+r})-f(x_{i+r+1})]-[f(x_i)-f(x_{i+1})]\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2r}V[f(x);(a',b')] = \frac{1}{r}\cdot V[f(x);(a',b')].$$

2. — Sarà nostro compito ora di valutare la prima sommatoria della (11):

$$(12)\qquad \sum_{i=0}^{n-r-1}\left|f(x_{i+r+1})-f(x_{i+1})\right|.$$

Osservando che per poter considerare, in addendi di (12), incrementi relativi ad intervalli aventi l'estremo destro del primo in comune con l'estremo sinistro dell'altro, occorre considerare addendi di indici che differiscono tra loro di r, la precedente sommatoria si può allora decomporre in r sommatorie, nel modo seguente.

La prima di tali sommatorie si scrive considerando tutti quegli addendi della (12) che corrispondono ai valori dell'indice i sotto il segno di somma che sono multipli interi di r, cioè per $i = J\cdot r$ dove J assume successivamente i valori interi da zero sino a quello intero $\mathcal{J}_1$ soddisfacente alle limitazioni:

$$(\mathcal{J}_1+1)\,r\,d \leq x_n - x_0 < (\mathcal{J}_i+2)\,r\cdot d$$

[Ciò vuol dire che il quoziente di $\frac{x_n - x_0}{d}$ per r è $\mathfrak{J}_1 + 1$; indichiamo con s_1 l'eventuale resto].

In tal modo il secondo estremo dell'ultimo degli intervalli in oggetto non può cadere al di là di x_n.

La seconda sommatoria si scrive considerando tutti quegli addendi della (12) relativi a quegli intervalli i cui primi estremi siano rispettivamente consecutivi ai primi estremi degli intervalli considerati nella prima sommatoria e perciò ottenuti in corrispondenza di quei valori dell'indice i che sono della forma $J \cdot r + 1$, con J intero variabile da 0 a $\mathfrak{J}_2$ essendo quest'ultimo quell'intero che soddisfa alle limitazioni:

$$(\mathfrak{J}_2 + 1)\, r\, d \leq x_n - x_1 < (\mathfrak{J}_2 + 2)\, r\, d\,, \text{ resto } s_2 = s_1 - 1$$

(cioè, il quoziente di $\frac{x_n - x_1}{d}$ per r è $\mathfrak{J}_2 + 1$ mentre l'eventuale resto s_2 poichè per passare dalla prima alla seconda successione di intervalli basta incrementare di d le ascisse dei primi estremi degli intervalli della prima, risulta d'una unità minore del precedente resto s_1, cioè $s_2 = s_1 - 1$; nel caso che il precedente resto $s_1 \geq 1$ è allora $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1$, se invece $s_1 = 0$, $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1 - 1$ ed $s_2 = r - 1$].

Così procedendo ove si avverta che per valori dell'indice sotto il segno di sommatoria della forma $J \cdot r + r$ ossia $(J + 1)\, r$, si otterrebbero di nuovo gli addendi della prima sommatoria scritta tranne il primo, si comprende come si possa arrivare al più sino agli addendi della (12) che corrispondono ai valori dell'indice della forma $J r + r - 1$ con J che va da zero sino a quell'intero $\mathfrak{J}_r$ tale che:

$$(\mathfrak{J}_r + 1)\, r\, d \leq x_n - x_r < (\mathfrak{J}_r + 2) \cdot r\, d$$

[dove $\mathfrak{J}_n + 1$ è allora il quoziente di $\frac{x_n - x_r}{d}$ per r]

Ma con tale procedimento siamo sicuri di poter scrivere tutti i termini della sommatoria (8).

Per accertarsene basterà verificare che scrivendo le r sommatorie vengono ad inserirsi tutti i possibili intervalli di ampiezza $d = x_i - x_{i-1}$ dell'intervallo (x_0, x_n). Essendo $s_1 < r$ il resto della divisione relativa alla prima sommatoria, il numero degli intervalli di ampiezza d che sono contenuti tra il 2° estremo dello ultimo intervallo di questa ed il punto x_n è proprio s_1, ed allora se supponiamo $s_1 > 0$ quando si consideri la 2° sommatoria gli intervalli restanti, poichè è stato già osservato che ci si sposta di un intervallo di ampiezza d, risultano $s_1 - 1$; così seguitando e pervenendo sino alla $(s_1 + 1)^{\text{esima}}$ sommatoria si ottiene il resto $s_1 - s_1 = 0$ ossia tutti gli intervalli di ampiezza d rimangono in definitiva apprezzati.

Si noti ora che dopo la sommatoria $(s_1 + 1)^{\text{esima}}$ ne rimangono ancora $r - (s_1 + 1) = r - s_1 - 1$ ed è chiaro che nel passare dall'ultima considerata qui sopra alla successiva ci si deve fermare al punto di ascissa $x_n - [s_1 + (r - s_1 - 1)]\, d = x_n - (r + 1) \cdot d$ ossia arretriamo di $r - 1$ posti rispetto all'estremo x_n raggiunto con la $(s_1 + 1)^{\text{esima}}$ sommatoria.

Seguitando sino in fondo, cioè facendo questa operazione $r - s_1 - 1$ volte, nel passare infine dalla $(r - 1)^{\text{esima}}$ sommatoria alla r^{esima}, ci si dovrà fermare al punto di ascissa $x_n - (s_1 + 1)\, d$.

Così siamo pervenuti al punto di divisione che precede immediatamente l'ultimo relativo alla suddivisione corrispondente alla prima sommatoria.

Dunque la sommatoria (12) si può effettivamente scindere nella somma delle r sommatorie considerate, e si ha:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-r-1} | f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) | = & \sum_{J=0}^{\mathcal{J}_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{J\cdot r+1}] | + \\
& + \sum_{J=0}^{\mathcal{J}_2} | f[x_{(J+1)r+2}] - f[x_{J\cdot r+2}] | + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \sum_{J=0}^{\mathcal{J}_r} | f[x_{(J+1)r+r}] - f[x_{Jr+r}] | .
\end{aligned}
$$

3. — È facile ora passare alla maggiorazione voluta della (12).

Consideriamo la prima delle sommatorie in cui abbiamo decomposto la (12), cioè:

$$
\sum_{J=0}^{\mathcal{J}_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{J\cdot r+1}] | . \tag{13}
$$

Questa è la variazione della $f(x)$ sull'intervallo $(a \equiv x_0 + d\, , x_0 + (\mathcal{J}_1 + 1)\, r\, d)$ relativamente ad una suddivisione in parti uguali di ampiezza $r\, d$.

Se ad essa aggiungiamo la quantità:

$$
| f(x_0) - f(x_0 + d) | + | f[x_{(\mathcal{J}_1+1)r+1}] - f(x_n) | + | f(x_n) - f(b) | ,
$$

si ottiene la variazione della $f(x)$ sullo intervallo $(a\, , b)$ relativamente alla suddivisione ottenuta, considerando assieme a quella relativa alla (13) gli intervalli $[x_0 , x_0 + d]$, $[x_{(\vartheta_1+1)r} , x_n]$ e $[x_n , b]$

Le ampiezze delle parti che provengono dalla suddivisione di (a , b) nel modo indicato, soddisfano alle limitazioni:

$$\begin{cases} r\, d \leq 2\, r\, d = 2\, h < \delta_1 \\ x_{(\vartheta_1+1)r} - x_n < r\, d < \delta_1 \\ x_n - b < d < \delta_1 , \end{cases}$$

e allora per la proposizione 1°) risulta:

$$\sum_{J=0}^{\vartheta_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{J \cdot r+1}] | + | f(x_0) - f(x_0 + d) | + | f[x_{\vartheta_1+1)r+1}] - f(x_n) | +$$
$$+ | f(x_n) - f(b) | \leq V[f(x) ; (a , b)] - \varepsilon_1$$

con $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{8(b-a)}$; o anche:

$$\sum_{J=0}^{\vartheta_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{J \cdot r+1}] | - V[f(x) ; (a , b)] =$$
$$= - | f(x_0) - f(x_0 + d) | - | f[x_{(\vartheta_1+1)r+1}] - f(x_n) | - | f(x_n) - f(b) | - \varepsilon_1$$

e poichè il modulo di una somma non supera la somma dei moduli:

$$\left| \sum_{J=0}^{\vartheta_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{Jr+1}] | - V[f(x) ; (a , b)] \right| \leq | f(x_0) - f(x_0 + d) | +$$
$$+ | f[x_{(\vartheta_1+1)r+1}] - f(x_n) | + | f(x_n) - f(b) | + \varepsilon_1$$

Ma per la formula (2) della proposizione 2°) del 1° (uniforme continuità) il primo ed il terzo degli addendi del 2°) membro della ultima relazione sono minori ciascuno di $\varepsilon \cdot h/32(b-a)$, il secondo per quanto detto in fondo alla proposizione 1°) è $\leq \varepsilon/8(b-a)$, [infatti è $b' - a' > b - a$], per cui alla precedente può sostituirsi la relazione:

$$\left| \sum_{J=0}^{\vartheta_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{Jr+1}] | - V[f(x) ; (a , b)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

avendo maggiorato ε_1 con $\varepsilon/8(b-a)$.

In modo del tutto analogo si procede per altre sommatorie sino alla r^{esima}, per cui:

$$\left| \sum_{J=0}^{\vartheta_2} \left| f[x_{(J+1)r+2}] - f[x_{J.r+2}] \right| - V[f(x);(a,b)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\left| \sum_{J=0}^{\vartheta_r} \left| f[x_{(J+1)r+r}] - f[x_{J.r+r}] \right| - V[f(x);(a,b)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Sommando membro a membro le r disuguaglianze così ottenute, tenendo presente la decomposizione che abbiamo effettuato e per il fatto che il modulo di una somma non supera la somma dei moduli, si ottiene:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) \right| - r\, V[f(x);(a,b)] \right| \leq r \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{14}$$

e moltiplicando per $\frac{1}{r}$ ambo i membri:

$$\left| \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) \right| - V[f(x);(a,b)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{14'}$$

da cui:

$$\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) \right| \geq V[f(x);(a,b)] - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{14''}$$

Abbiamo valutato con la (14″) e con (11′) rispettivamente la prima e la seconda sommatoria della (11), per cui otterremo alla fine la seguente maggiorazione della (11):

$$\int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \geq V[f(x);(a,b)] - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} - \\ - \frac{1}{r} V[f(x);(a,b)]. \tag{15}$$

Ma essendo r arbitrariamente grande si può rendere

$$\frac{1}{r} V[f(x);(a,b)] < \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

e perciò :

$$\int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \geq V[f(x); (a, b)] - \frac{3\varepsilon}{4(b-a)}.$$

In conclusione ricordando la (4) e snpponendo $b - a > 1$, come è evidentemente lecito, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta_1 < 1$ tale che se $0 < 2h < \delta_1 < 1$ è :

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx \geq V[f(x); (a, b)] - \varepsilon. \tag{16}$$

§ IV.

1. — Passiamo ora a provare che sussiste anche la relazione:

$$\int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \leq V[f(x); (a, b)] + \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Riprendiamo per questo l'espressione (10').

Se ora sommiamo la (10') rispetto all'indice $i = 0, 1, \ldots, n - r$, si ottiene :

$$\int_b^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \leq \int_a^{a+(n-r+1)d} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \leq \tag{11)*}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) | +$$

$$+ \frac{1}{2r} \sum_{i=0}^{n-r} | [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] |$$

e ciò per il fattto che il secondo integrale viene calcolato, in tal modo, tra a e un valore maggiore di b.

Considerando l'ultima somma dell'espressione precedente, si ha :

$$\sum_{i=0}^{n-r} | [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] | \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1}) | + \sum_{i=0}^{n-r} | f(x_i) - f(x_{i+1}) |$$

e qui l'ultima sommatoria indica la variazione della $f(x)$ sull'intervallo (a, x_{n-r+1}) relativamente alla propria suddivisione in parti tutte uguali e di ampiezza d. Essa è così minore di $V[f(x); (a, b)]$,

2. — Operiamo in modo analogo per la somma:

$$\sum_{i=0}^{n-r} |f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})|,$$

che rappresenta la variazione della $f(x)$ sullo intervallo (x_r, x_{n+1}) relativa alla suddivisione in parti di ampiezza d.

Con lo stesso procedimento seguito nel caso della maggiorazione dell'integrale (11') si perviene alla disuguaglianza:

$$V[f(x); (a', b')] \geq \sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1}) | .$$

Si ottiene così la seguente maggiorazione dell'ultima sommatoria della (11)*:

$$\frac{1}{2r} \sum_{i=0}^{n-r} | [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] | \leq \tag{17}$$
$$\leq \frac{1}{r} \cdot V[f(x); (a', b')].$$

3. — Pure con lo stesso procedimento seguito nel caso precedente si può valutare la prima sommatoria della (11)*, cioè:

$$\sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) | . \tag{18}$$

Come allora si perviene alla decomposizione analoga:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) | &= \sum_{J=0}^{\mathcal{J}'_1} | f[x_{(J+1)r+1}] - f[x_{J.r+1}] | + \\ &+ \sum_{J=0}^{\mathcal{J}'_2} | f[x_{(J+1)r+2}] - f[x_{J.r+2}] | + \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ \sum_{J=0}^{\mathcal{J}'_r} | f[x_{(J+1)r+r}] - f[x_{J.r+r}] |\end{aligned} \tag{18*}$$

Con $\mathcal{J}_1', \mathcal{J}_2', \ldots, \mathcal{J}_r'$, aventi analogo significato di $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_r$. A questo punto consideriamo la prima delle sommatorie a secondo membro della uguaglianza scritta sopra, cioè:

$$(9)^* \qquad \sum_{J=0}^{\mathcal{J}_1'} | f[x_{(J+1)r+1}] - [x_{J.r+1}] | \,.$$

Due casi si possono presentare:

a^0) $[(\mathcal{J}_1' + 1)\, r + 1]\, d + a$ supera b, allora togliamo l'ultimo addendo:

$$| f[x_{(\mathcal{J}_1'+1)r+1}] - f[x_{\mathcal{J}_1'.r+1}] |$$

e aggiungiamo:

$$| f(x_{\mathcal{J}_1'.r+1}) - f(b) | + | f(a) - f(x_1) |$$

b^0) se $[(\mathcal{J}_1' + 1)\, r + 1] \cdot d$ non supera b, aggiungiamo

$$| f[x_{(\mathcal{J}_1'+1)r+1}] - f(b) | + | f(a) - f(x_1) |$$

In entrambi i casi la somma che così si ottiene rappresenta la variazione della $f(x)$ su (a, b) relativa a una suddivisione in parti di ampiezze non maggiori di $r\, d = h$.

Allora tenuto conto delle limitazioni a cui soddisfano le parti di (a, b), suddiviso nel modo detto, sempre per la proposizione 1^0) risulta:

$$\sum_{J=0}^{\mathcal{J}_1'} | f[x_{(J+1)r}] - f[x_{J.r}] - | f[x_{(\mathcal{J}_1'+1)r}] - f(x_{\mathcal{J}_1'r}) | -$$
$$- | f(a) - f(x_1) | + | f(x_{\mathcal{J}_1'r}) - f(b) | = V[f(x); (a, b)] - \varepsilon_1 \,,$$

oppure:

$$| f(a) - f(x_1) | + \sum_{J=0}^{\mathcal{J}_1'} | f[x_{(J+r)}] - f[x_{J.r}] | + | f[x_{(\mathcal{J}_1'+1)r}] - f(b) | =$$
$$= V[f(x); (a, b)] - \varepsilon_1'$$

con $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{8(b-a)}$ e $0 < \varepsilon_1' < \dfrac{\varepsilon}{8(b-a)}$; od anche:

$$\sum_{J=0}^{\mathcal{J}_1'} | f[x_{(J+1)r}] - f[x_{J.r}] | - V[f(x); (a, b)] =$$
$$= | f(a) - f(x_1) | + | f[x_{(\mathcal{J}_1'+1)r}] - f(x_{\mathcal{J}_1'.r}) | - | f(x_{\mathcal{J}'r}) - f(b) | - \varepsilon_1 \,.$$

oppure:

$$\sum_{J=0}^{\mathfrak{J}'_1} | f[x_{(J+1)r}] - f[x_{J.r}] | - V[f(x); (a, b)] =$$

$$= - | f[x_{(\mathfrak{J}'_1+1)r}] - f(b) | - \varepsilon'_1 - | f(a) - f(x_1) | .$$

Poichè il modulo d'una somma non supera la somma dei moduli:

$$| \sum_{J=0}^{\mathfrak{J}'_1} | f[x_{(J+1)r}] - f[x_{J.r}] | - V[f(x); (a, b)] \leq$$

$$\leq | f(x_1) - f(a) | + | f[x_{(\mathfrak{J}'_1+1)r}] - f(x_{\mathfrak{J}'_1 r}) | + f \; | (x_{\mathfrak{J}'_1 r}) - f(b) | + \varepsilon_1$$

Sempre per la (1) (uniforme continuità) si può scrivere:

$$\sum_{J=0}^{\mathfrak{J}'_1} | f[x_{(J+1)r}] - f[x_{Jr}] | \leq V[f(x); (a, b)] + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

uguale relazione valendo anche nell'altro caso.

4. — Scrivendo le somme analoghe a questa che compaiono nella (18) e sommando membro a membro le r uguaglianze ottenute e dividendo poi per r si ottiene:

$$\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) | \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + V[f(x); (a, b)].$$

Tenendo conto delle (10)′ e di quest'ultima in base alla (4)* si perviene alla maggiorazione seguente:

$$\int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \leq \frac{1}{r} V[f(x); (a', b')] + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + V[f(x); (a, b)]$$

e per l'arbitrarietà di r si ha infine:

$$\int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \leq V[f(x), (a, b)] + \frac{3 \cdot \varepsilon}{4(b-a)}$$

relazione che è quella alla quale si voleva pervenire.

Da questa ricordando la (4) e supponendo $b - a > 1$, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $0 < 2h < \delta_1 < 1$ si ha:

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx \leq V\,[f(x);\ (a,\ b)] + \varepsilon.$$

Questa relazione assieme alla (16) dimostra che nelle ipotesi dette all'inizio è:

$$\lim_{h \to 0+0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx = V\,[f(x);\ (a,\ b)].$$

§ V.

1. — È facile ora provare che il teorema dimostrato sussiste anche nell'ipotesi che sia $h < 0$.

Infatti se $h < 0$ posto $\bar{h} = -h > 0$ l'integrale da prendere in considerazione è il seguente:

$$\int_a^b \left| \frac{f(x - \bar{h}) - f(x)}{\bar{h}} \right| dx\,.$$

Ed essendo lecita la sostituzione $x - \bar{h} = \xi$, si ha l'integrale:

$$\int_{a-\bar{h}}^{b-\bar{h}} \left| \frac{f(\xi + \bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi\,,$$

dove la funzione integranda è identica a quella già considerata nel caso di $h > 0$.

Risultando:

$$\int_{a-\bar{h}}^{b-\bar{h}} \left| \frac{f(\xi + \bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi = \int_{a-\bar{h}}^{a} \left| \frac{f(\xi + \bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi +$$

$$+ \int_a^b \left| \frac{f(\xi + \bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi - \int_{b-\bar{h}}^{b} \left| \frac{f(\xi + \bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi\,,$$

se esistono i limiti per $\bar{h} \to 0+0$, dei tre integrali a secondo membro esiste anche il limite per $\bar{h} \to 0+0$ dell'integrale a primo membro.

Il limite del secondo integrale indicato a secondo membro esiste certamente, perchè corrisponde al caso già dimostrato; proviamo che esistono i limiti degli altri due integrali.

Supponiamo $0 < \bar{h} < \delta$ tale che $a - \delta \geq a'$, si ha:

$$0 \leq \int_{a-\bar{h}}^{a} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi \leq \int_{a-\delta}^{a} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi .$$

Ma sappiamo già che:

$$\lim_{\bar{h}\to 0+0} \int_{a-\delta}^{a} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi = V\,[f(x)\,;\, a-\delta,\, a]$$

dove δ può essere piccolo quanto si vuole e quindi, poichè $V\,[f(x);\,(a-\delta,\,a)]$ è infinitesimo (3) con δ, ne consegue che:

$$\lim_{\bar{h}\to 0+0} \int_{a-\bar{h}}^{a} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi = 0 .$$

In modo analogo si prova che:

$$\lim \int_{b-\bar{h}}^{b} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi = 0 .$$

Per cui, infine si ha:

$$\lim_{\bar{h}\to 0} \int_{a-\bar{h}}^{b-\bar{h}} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi = \lim_{\bar{h}\to 0} \int_{a}^{b} \left| \frac{f(\xi+\bar{h}) - f(\xi)}{\bar{h}} \right| d\xi ,$$

---

(3) La funzione $V\,[f(x);\,(a,\,x)]$ è continua: vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, volume I, pag. 43, b.

restando così provato che la formula:

$$* \lim_{h\to 0}\int_a^b \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| dx = V\,[f(x)\,;\,(a\,,\,b)]\,,$$

vale sia per $h > 0$ che per $h < 0$, e quindi in generale.

§ VI.

1. — Per la dimostrazione della formula (*) abbiamo considerato la $f(x)$ (continua e a variazione limitata) su di un intervallo $(a'\ b')$ contenente tutto internamente l'intervallo $(a\,,\,b)$ su cui si considera l'integrale del valore assoluto del rapporto incrementale. Proviamo subito che tale restrizione non è essenziale.

Sia dunque $f(x)$, continua e a variazione limitata, data solo su $(a\,,\,b)$ e sia $(a',\,b')$ un intervallo tale che:

$$a' < a < b < b'$$

Consideriamo la funzione $\bar{f}(x)$ così definita:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(x) \quad &&\text{per} \quad x \in (a\,,\,b) \\ \bar{f}(x) &= f(a) \quad &&\text{per} \quad a' \leq x < a \\ \bar{f}(x) &= f(b) \quad &&\text{per} \quad b < x \leq b'\,. \end{aligned}$$

La nuova funzione è evidentemente continua e a variazione limitata su $(a',\,b')$ e inoltre risulta:

$$V\,[\bar{f}(x)\,;\,(a',b')] = V\,[f(x)\,;\,(a\,,b)]$$

e allora vale il teorema fondamentale:

Teorema II: Se $f(x)$, $a \leq x \leq b$, è continua e a variazione limitata, questa variazione è data da

$$V\,[f(x)\,;\,(a\,,\,b)] = \lim_{h\to 0}\int_a^b \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| dx\,,$$

dove, al secondo membro, bisogna intendere $f(x) = f(b)$ per $x > b$, e $f(x) = f(a)$ per $x < a$.

PARTE II.

IL CASO DELLA VARIAZIONE TOTALE NON FINITA

§ 11. — **Premettiamo il seguente**

a) LEMMA (A): — Se $f(x)$ è una funzione continua e a variazione anche non limitata su (a, b), e se $x_0 = a$, $x_i = a + i \cdot d \left(i = 0, 1, \dots, n = \frac{b-a}{d} \right)$, $x_n = b$ è una suddivisione fissata di (a, b) in parti di ampiezza $d = \frac{b-a}{n}$ allora, indicando con $V^* [f(x); (a, b)]$ la variazione della $f(x)$ sull'intervallo (a, b) relativa a questa suddivisione, se consideriamo la variazione della funzione $f(x)$ sull'intervallo (a, b), relativa ad una ulteriore suddivisione di (a, b) in parti uguali di ampiezza $\frac{d}{t}$ (con t intero arbitrario) e indichiamo con $V_t [f(x); (a, b)]$ questa variazione, si ha:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V_t [f(x); (a, b)]}{t} = 0.$$

In base alla continuità uniforme di $f(x)$ su (a, b) comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta > 0$ tale che l'oscillazione di $f(x)$ su qualunque intervallo di ampiezza minore di δ risulti minore di ε.

Pertanto se $\bar{t}$ è il primo intero tale che $\frac{d}{t} \leq \delta$, allora per ogni $t > \bar{t}$ risulta $\frac{d}{t} < \delta$ e l'oscillazione di $f(x)$ su ogni intervallo della suddivisione in parti uguali a $\frac{d}{t}$ sarà minore di ε. Cosicchè:

$$V_t [f(x); (a, b)] < n \cdot t \cdot \varepsilon$$

e quindi:

$$0 \leq \frac{V [f(x); (a, b)]}{t} \leq n \cdot \varepsilon,$$

e poichè n è un numero fissato la proposizione risulta provata.

2. TEOREMA III. — Dimostriamo ora che *se $f(x)$ è continua e a variazione non limitata su (a, b) allora:*

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| d\,x\,,$$

non esiste finito.

Nell'ipotesi che la $F(x)$ sia continua e a variazione limitata su (a', b'), intervallo questo, più ampio di (a, b), ricordiamo che se si costruisce una poligonale d'equazione $y = \varphi(x)$ inscritta alla curva $y = F(x)$ di lati le cui proiezioni sull'asse delle x siano tutte uguali fra loro e di ampiezza d, sottomultiplo r^{esimo} di un $h > 0$ fissato, e parte aliquota di (a, b) allora, indicando con:

$$x_i = a + i\,d\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

l'ascissa del generico punto di divisione di (a, b), con n soddisfacente alle limitazioni:

$$n\,d \leq b - a < (n+1)\,d$$

ossia:

$$(n-r)\,d \leq b - a - h < (n - r + 1)\,d$$

e se inoltre d si prende sufficientemente piccolo in modo da far sì che:

$$a + (n+1)\,d < b'$$

in base alla (11) della I parte sussiste la disuguaglianza:

$$(1)\int_a^b \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right| d\,x \geq \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n-r-1} \left| F(x_{i+r+1}) - F(x_{i+1}) \right| - \frac{1}{r} V[F(x); (a, b)]$$

3. — Supponiamo che la $f(x)$ sia continua e a variazione non limitata. Fissato un $h > 0$, parte aliquota di (a, b), consideriamo una suddivisione di (a, b) in parti uguali di ampiezza h e indichiamo con $y = f^*(x)$ l'equazione della poligonale inscritta alla $f(x)$ i cui lati si proiettano ordinatamente in parti che siano parte aliquota t^{esima} di h, con t intero fissato.

La $f^*(x)$ è evidentemente continua e a variazione limitata e perciò vale anche per questa il ragionamento fatto precedentemente per la $F(x)$, supposta continua e a variazione limitata, e che ci ha condotto a stabilire la relazione (1).

Se indichiamo allora con $\overline{\varphi}(x)$ la poligonale inscritta alla $f^*(x)$ i cui lati si proiettano su (a, b) in parti di ampiezza tutte eguali a d, sottomultiplo r^{esimo}, con $r = 2s$ ed s un intero arbitrario, della t^{esima} parte di h, risulta:

$$(2) \qquad \int_a^b \left| \frac{\overline{\varphi}(x+h) - \overline{\varphi}(x)}{h} \right| dx \geq \frac{1}{rt} \sum_{i=0}^{n-rt-1} | f^*(x_{i+rt+1}) - f^*(x_{i+1}) | - $$
$$- \frac{1}{rt} [f^*(x); (a, b)] .$$

Ma i lati della poligonale $\overline{\varphi}(x)$, per la particolare costruzione di essa, staranno tutti sui lati della poligonale $f^*(x)$ e le due poligonali differiscono soltanto per i vertici; coincidono perciò le loro equazioni $\{f^*(x) \equiv \overline{\varphi}(x)\}$ e la (2) può scriversi:

$$(3) \qquad \int_a^b \left| \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} \right| dx \geq \frac{1}{rt} \sum_{i=0}^{n-rt-1} | f^*(x_{i+rt+1}) - f^*(x_{i+1}) | - $$
$$- \frac{1}{rt} V [f^*(x); (a, b)] .$$

Ricordiamo che essendo la $f^*(x)$ una poligonale, la propria variazione totale è data dall'espressione

$$V[f^*(x); a, b)] = | f^*(x_r) - f^*(x_0) | + | f^*(x_{2r}) - $$
$$f^*(x_r) | + \dots + | f^*(b) - f^*(x_{n-r}) |$$

4. Sarà nostro compito dare una valutazione della espressione:

$$(3)' \qquad \sum_{i=0}^{n-rt-1} | f^*(x_{i+rt+1}) - f^*(x_{i+1}) |$$

la quale per la (8') (pag. 15) può decomporsi nella somma seguente di rt somme parziali:

$$(4) \qquad \sum_{J=0}^{\mathfrak{J}_1} | f^*[x_{(J+1)rt+1}] - f^*[x_{J \cdot rt+1}] | +$$
$$+ \sum_{J=0}^{\mathfrak{J}_2} | f^*[x_{(J+1)rt+2}] - f^*[x_{J \cdot rt+2}] +$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ \sum_{J=0}^{\mathfrak{J}_{rt}} | f^*[x_{(J+1)rt+rt}] - f^*[x_{J \cdot rt+rt}] | .$$

Il primo termine della prima sommatoria indicata nell'espressione (4) è :

$$| f^* (x_{rt+1}) - f^* (x_1) | .$$

Poichè l'intervallo (x_{rt}, x_{rt+1}) è la prima parte aliquota dell'intervallo (x_{rt}, x_{rt+r}) e la $f^*(x)$ è lineare, risulta:

$$f^* (x_{rt+1}) - f^* (x_{rt}) = \frac{1}{r} \{ f^* (x_{rt+r}) - f^* (x_{rt})\}$$

e per lo stesso motivo:

$$f^* (x_1) - f^* (x_0) = \frac{1}{r} \{ f^* (x_r) - f^* (x_0)\}$$

Da queste due eguaglianze si ricava

$$f^* (x_{rt+1}) = f^* (x_{rt}) + \frac{1}{r} \{f^* (x_{rt+r}) - f^* (x_{rt})\}$$

$$f^* (x_1) = f^* (x_0) + \frac{1}{r} \cdot \{f^* (x_r) - f^* (x_0)\}$$

e sottraendo membro a membro:

$$f^* (x_{rt+1}) - f^* (x_1) = [f^* (x_{rt}) - f^* (x_0)] +$$

$$+ \frac{1}{r} \{[f^* (x_{rt+r}) - f^* (x_{rt})] - [f^* (x_r) - f^* (x_0)]\}.$$

Analogamente procedendo per il primo termine della seconda sommatoria si trova:

$$f^* (x_{rt+2}) - f^* (x_2) = [f^* (x_{rt}) - f^* (x_0)] +$$

$$+ \frac{2}{r} \{[f^*(x_{rt+r}) - f^* (x_{rt})] - [f^* (x_r) - f^*(x_0)]\}.$$

Così seguitando, perverremo sino al primo termine della s^{esima} sommatoria, essendo $2s = r$, e si ha:

$$f^* [x_{rt+s}] - f^* [x_s] = [f^* (x_{rt}) - [f^* (x_0)] +$$

$$+ \frac{s}{r} \{[f^* (x_{rt+r}) - f^* (x_{rt})] - [f^* (x_r) - f^* (x_0)]\}.$$

A questo punto si potrebbe continuare sino al primo termine della $r^{esima} = 2\, s^{esima}$ sommatoria, ma ai fini della maggiorazione che ci interessa ottenere tralasceremo di considerare questi altri termini.

Ora essendo il modulo della somma di due termini non minore della differenza dei moduli degli addendi, dalle ultime s uguaglianze considerate si ricavano le disuguaglianze:

$$| f^* (x_{rt+1}) - f^* (x_1) | \geq | f^* (x_{rt}) - f^* (x_0) | -$$

$$- \frac{1}{r} | \{ f^* [x_{r(t+1)}] - f^* [x_{rt}] \} - \{ f^* (x_r) - f^* (x_0) \} | ,$$

$$| f^* (x_{rt+2}) - f^* (x_2) | \geq | f^* (x_{rt}) - f^* (x_0) | -$$

$$- \frac{2}{r} | \{ f^* [x_{r(t+1)}] - f^* [x_{rt}] \} - \{ f^* (x_r) - f^* (x_0) \} | ,$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$| f^* (x_{rt+s}) - f^* (x_s) | \geq | f^* (x_{rt}) - f^* (x_0) | -$$

$$- \frac{s}{r} | \{ f^* [x_{r(t+1)}] - f^* (x_{rt}) \} - \{ f^* (x_r) - f^* (x_0) \} | .$$

Sostituendo, com'è lecito, nel secondo membro di ciascuna di queste al posto del valore assoluto della differenza indicata nel sottraendo la somma dei valori assoluti dei termini che costituiscono la differenza stessa, si ottengono le disuguaglianze:

$$| f^* (x_{rt+1}) - f^* (x_1) | \geq | f^* (x_{rt}) - f^* (x_0) | -$$

$$- \frac{1}{r} \{ | f^* [x_{r(t+1)}] - f^* [x_{rt}] | + | f^* (x_r) - f^* (x_0) | \} ,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$| f^* [x_{r(t+s)}] - f^* [x_s] | \geq | f^* (x_{rt}) - f^* (x_0) | -$$

$$- \frac{s}{r} \{ | f^* [x_{r(t+1)}] - f^* (x_{rt}) | + | f^* (x_r) - f^* (x_0) | \} .$$

Sommando membro a membro e indicando con σ_{11} la somma dei primi membri si ha:

$$\sigma_{11} \geq s \mid f^*(x_{rt}) - f^*(x_0) \mid - \frac{s(s+1)}{2r} \{ \mid f^*[x_{r(t+1)}] - f^*(x_{rt}) \mid +$$

$$+ \mid f^*(x_r) - f^*(x_0) \mid \}.$$

Valutiamo ora la somma dei secondi addendi delle prime s sommatorie di (4) — Con riferimento al secondo addendo della prima sommatoria facendo $J = 1$, procedendo in modo analogo a quanto si è fatto per il primo addendo della stessa, si ha:

$$f^*[x_{2rt+1}] - f^*[x_{rt+1}] = [f^*(x_{2rt}) - f^*(x_{rt})] +$$

$$+ \frac{1}{r} \{[f^*(x_{r(2t+1)}) - f^*(x_{2rt})] - [f^*(x_{r(t+1)}) - f^*(x_{rt})\}.$$

In base a questa si possono scrivere le uguaglianze analoghe relative a tutti i secondi addendi delle prime s sommatorie, e allora, indicando con σ_{12} la somma di questi e ripetendo il ragionamento fatto per la valutazione di σ_{11}, si ha:

$$\sigma_{12} \geq s \mid f^*(x_{2rt}) - f^*(x_{rt}) \mid - \frac{s(s+1)}{2r} \{ \mid f^*[x_{r(2t+1)}] - f^*(x_{2rt}) \mid +$$

$$+ \mid f^*[x_{r(t+1)}] - f^*(x_{rt}) \mid \}.$$

Valutando con lo stesso procedimento la somma dei terzi addendi delle prime s sommatorie e seguitando sino alla valutazione della somma degli ultimi addendi delle stesse, cioè di $\sigma_{1\mathfrak{J}_1}$, si ottiene, facendo $J = \mathfrak{J}_1 - 1$:

$$\sigma_{1\mathfrak{J}_1} \geq s \mid f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_1 - 1)rt}] \mid - \frac{s(s+1)}{2r} \{ \mid f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt + r}] -$$

$$- f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt}] \mid - \mid f^*[x_{(\mathfrak{J}_1 - 1)rt + r}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_1 - 1)rt}] \mid \}.$$

L'espressione $s_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \ldots + \sigma_{1\mathfrak{J}_1}$ è ovviamente minore della somma delle prime s sommatorie della (4) — Valutiamo adesso la somma delle sommatorie della (4) della $(r+1)^{esima}$ alla $2\,r^{esima}$ e anche in questo caso, come già s'è fatto per le prime r, ci basta fermarci alla s^{esima} di queste.

Con riferimento al primo addendo della $(r+1)^{esima}$ sommatoria si può scrivere:

$$f^*[x_{r(t+1)+1}] - f^*[x_{r+1}] = \{f^*[x_{r(t+1)}] - f^*[x_r]\} +$$

$$+ \frac{1}{r}\{f^*[x_{r(t+2)}] - f^*[x_{r(t+1)}] - [f^*(x_{2r}) - f^*(x_r)]\}.$$

Indicando con σ_{21} la somma dei primi addendi delle s sommatorie che succedono alle prime r già considerate, sulla scorta della ultima uguaglianza scritta si perviene alla disuguaglianza:

$$\sigma_{21} \geq s \cdot |f^*[x_{r(t+1)}] - f^*[x_r]| - \frac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{r(t+2)}] - f^*[x_{r(t+1)}]| +$$

$$+ |f^*(x_{2r}) - f^*(x_r)|\}.$$

E analogamente, con ovvio significato dei simboli:

$$\sigma_{22} \geq s\, |f^*[x_{r(2t+1)}] - f^*[x_{r(t+1)}]| - \frac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{r(2t+2}] - f^*[x_{r(2t+2)}]| +$$

$$+ |f^*[x_{r(t+2)}] - f^*[x_{r(t+1)}]|\},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\sigma_{2\mathcal{J}_2} \geq s\, |f^*[x_{\mathcal{J}_2 rt+r}] - f^*[x_{(\mathcal{J}_2-1)rt+r}]| - \frac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{\mathcal{J}_2 rt+2r}] -$$

$$-f^*[x_{\mathcal{J}_2 rt+r}]| + |f^*[x_{(\mathcal{J}_2-1)rt+2r}] - f^*[x_{(\mathcal{J}_2-1)rt+r}]|\},$$

quest'ultima essendo stata ottenuta facendo $J = \mathcal{J}_2 - 1$ nella $(r+1)^{esima}$ sommatoria.

La espressione $s_2 = \sigma_{21} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{2\mathcal{J}_2}$ denota la somma delle s somme parziali dalla $(r+1)^{esima}$ alla $(r+s)^{esima}$.

Ma le somme parziali della (4) sono in tutto rt, cosicchè, sempre procedendo allo stesso modo e tralasciandone s per ogni gruppo di $r = 2s$, potremo arrivare al più sino alla valutazione della somma $s_t = \sigma_{t1} + \sigma_{t2} + + \ldots + \sigma_{t\mathfrak{I}_1}$, avendo posto $\mathfrak{I}_1$ al posto di $\mathfrak{I}_{r(t-1)+1}$ dato che con la suddivisione operata su (a, b) in parti uguali ad h risulta $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 = \ldots = = \mathfrak{I}_{r(t-1)+1} = \ldots \mathfrak{I}_{t \cdot r}$.

Per la σ_{t1}, cioè per la somma dei primi addendi delle prime sommatorie appartenenti al t^{esimo} ed ultimo gruppo di sommatorie, si ottiene la valutazione:

$$\sigma_{t1} \geq s \mid f^* [x_{2rt-r}] - f^* [x_{rt-r}] \mid -$$

$$- \frac{s(s+1)}{2r} \left\{ \mid f^* [x_{2rt}] - f^* [x_{2rt-r}] \mid + \mid f^* [x_{rt}] - f^* [x_{rt-r}] \mid \right\}.$$

Per la somma degli ultimi addendi di queste ultime s sommatorie ora considerate, bisogna fare $J = \mathfrak{I}_{r(t-1)}$ nella $[r(t-1)+1]^{esima}$ sommatoria, e poichè $\mathfrak{I}_{r(t-1)} = \mathfrak{I}_1$ si ha la valutazione:

$$\sigma_{t\mathfrak{I}_1} \geq s \cdot \mid f^* [x_{\mathfrak{I}_1 rt+rt-r}] - f^* [x_{(\mathfrak{I}_1-1)rt+rt-r}] -$$

$$- \frac{s(s+1)}{2r} \left\{ \mid f^* [x_{\mathfrak{I}_1 rt+rt}] - f^* [x_{\mathfrak{I}_1 rt+rt-r}] \mid + \right.$$

$$\left. + \mid f^* [x_{(\mathfrak{I}_1-1)rt+rt}] - f^* [x_{(\mathfrak{I}_1-1)rt+rt-r}] \mid \right\}.$$

Teniamo ora presente tutte le maggiorazioni ottenute relative alle:

$$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1\mathfrak{I}_1}; \sigma_{21}, \sigma_{22}, \ldots, \sigma_{2\mathfrak{I}_2}; \ldots\ldots\ldots; \sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \ldots, \sigma_{t\mathfrak{I}_1}.$$

In definitiva avremo riassumendo:

$$(\alpha)\begin{cases} \sigma_{11} \geq s \cdot |f^*(x_{rt}) - f^*(x_0)| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{r(t+1)}] - f^*(x_{rt})| + |f^*(x_r) - f^*(x_0)|\} \\ \sigma_{12} \geq s \cdot |f^*(x_{2rt}) - f^*(x_{2t})| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{r(2t+1)}] - f^*(x_{2rt})| + |f^*[x_{r(t+1)}] - f^*(x_{rt})|\} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_{1\mathfrak{J}_1} \geq s \cdot |f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_1-1)rt}]| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt+r}] - f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt}]| + |f^*[x_{(\mathfrak{J}_1-1)rt+r}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_1-1)rt}]|\} \end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} \sigma_{21} \geq s \cdot |f^*[x_{r(t+1)}] - f^*[x_r]| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{r(t+2)}] - f^*[x_{r(t+1)}]| + |f^*(x_{2r}) - f^*(x_r)|\} \\ \sigma_{22} \geq s \cdot |f^*[x_{r(2t+1)}] - f^*[x_{r(t+1)}]| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{r(2t+2)}] - f^*[x_{r(2t+1)}]| + |f^*[x_{r(t+2)}] - f^*[x_{r(t+1)}]|\} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_{2\mathfrak{J}_2} \geq s \cdot |f^*[x_{\mathfrak{J}_2 rt+r}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_2-1)rt+r}]| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{\mathfrak{J}_2 rt+2r}] - f^*[x_{\mathfrak{J}_2 rt+r}]| + |f^*[x_{(\mathfrak{J}_2-1)rt+2r}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_2-1)rt+r}]|\} \end{cases}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(\tau)\begin{cases} \sigma_{t1} \geq s \cdot |f^*[x_{2rt-r}] - f^*[x_{rt-r}]| - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{2rt}] - f^*[x_{2rt-r}]| + |f^*[x_{rt}] - f^*[x_{rt-r}]|\} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_{t\mathfrak{J}_1} \geq s \cdot |f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt+rt-r}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_1-1)rt+rt-r}] - \dfrac{s(s+1)}{2r}\{|f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt+rt}] - f^*[x_{\mathfrak{J}_1 rt+rt-r}]| + |f^*[x_{(\mathfrak{J}_1-1)rt+rt}] - f^*[x_{(\mathfrak{J}_1-1)rt+rt-r}]|\} \end{cases}$$

5. — Sommiamo le disuguaglianze relative alle $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1\mathfrak{I}_1}$, cioè le ($\alpha$).

La somma dei primi addendi dei secondi membri è uguale all'espressione:

$$s \cdot V^*_{(1)}[f^*(x); (a, b)] - s \cdot |f^*(b) - f^*(x_{\mathfrak{I}_1 rt})|, \tag{5}$$

dove con $V^*_{(1)}[f^*(x); (a, b)]$ indichiamo la variazione di $f^*(x)$ relativa alla suddivisione di (a, b) in parti di ampiezza $\frac{b-a}{rt}$. Ma osservando che i punti di detta suddivisione hanno ascissa del tipo x_{kr} con k intero positivo o nullo e considerando che a questi punti dell'asse x corrispondono i vertici della poligonale inscritta alla $f(x)$, perchè risulta in corrispondenza di essi $f^*(x_{kr}) = f(x_{kr})$, ne consegue per la linearità della $f^*(x)$, $V^*_{(1)}[f^*(x); (a, b)] = V[f^*(x); (a, b)]$, rappresentando il secondo membro la variazione totale della $f^*(x)$ sulla (a, b), e pertanto al posto della (5) si può scrivere:

$$s \cdot V[f^*(x); (a, b)] - s \cdot |f^*(b) - f^*(x_{\mathfrak{I}_1 rt})|.$$

D'altra parte alla somma dei secondi addendi delle (α) si può sostituire l'espressione, certamente minore in valore relativo di detta somma:

$$-\frac{s(s+1)}{2r}\{V[f^*(x); (a, b)] + V[f^*(x); (a, b)]\} = -\frac{s+1}{2} V[f^*(x); (a, b)]$$

Per cui infine si ha:

$$s_1 \geq s \cdot V[f^*(x); (a, b)] - s \cdot |f^*(b) - f^*(x_{\mathfrak{I}_1 rt})| - \frac{s+1}{2} V[f^*(x); (a, b)],$$

ossia:

$$s_1 \geq \frac{s-1}{2} V[f^*(x); (a, b)] - s \cdot |f^*(b) - f^*(a_{\mathfrak{I}_1 rt})|.$$

Sommiamo ora membro a membro le disuguaglinze (β).

Consideriamo la variazione $V^*_{(2)}[f^*(x); (a, b)]$ relativa alla suddivisione dell'intervallo (a, b) mediante i punti di ascissa $x_r, x_{r+rt}, x_{r+2rt}, \ldots, x_{r+\mathfrak{I}rt}$. La somma dei primi addendi dei secondi membri delle (β) è data dall'espressione:

$$s \cdot V^*_{(2)}[f^*(x); (a, b)] - s \cdot |f^*(x_r) - f^*(x_0)| - s \cdot |f^*(b) - f^*(x_{\mathfrak{I}_2 rt+r})|. \tag{6}$$

Poichè anche in questo caso le ascisse dei punti di suddivisione dell'intervallo (a, b) sono della forma x_{kr} con k intero positivo o nullo, valgono le considerazioni fatte sommando le (α), e al posto della $V^*_{(2)}[f^*(x); (a, b)]$ è lecito sostituire l'espressione della variazione totale $V[f^*(x); (a, b)]$.

Al posto della (6) nella disuguaglianza ottenuta sommando le (β), può scriversi:

$$s \cdot V[f^*(x);\ (a\,,\,b)] - s \cdot \mid f^*(x_r) - f^*(x_0) \mid - s \mid f^*(b) - f^*(x_{\vartheta_2 rt+r}) \mid$$

D'altra parte alla somma dei secondi addendi delle (β) si può sostituire l'espressione certamente minore in valore relativo:

$$-\frac{s(s+1)}{2r}\{V[f^*(x);\ (a,b)] + V[f^*(x);\ (a\,,\,b)]\} = -\frac{s+1}{2}\,V[f^*(x);\ (a\,,\,b)].$$

Si ha infine:

$$s_2 \geq \frac{s-1}{2}\,V[f^*(x);\ (a\,,\,b)] - s \cdot \mid f^*(x_r) - f^*(x_0) \mid - s \mid f^*(b) - f^*(x_{\vartheta_2 rt+r}) \mid .$$

Continuiamo così per gli altri gruppi sino a pervenire alle (τ).

Con le stesse osservazioni e con procedimento del tutto analogo al caso delle (β), si ottiene:

$$s_t > \frac{s-1}{2}\,V[f^*(x);\ (a,b)] - s \mid f^*(x_{rt-r}) - f^*(x_0) \mid - s \mid f^*(b) - f^*[x_{(\vartheta_1+1)rt-r}] \mid .$$

6. — Per il teorema già richiamato, di DARBOUX-SCHEEFFER (vedi nota (1)) relativo al caso della variazione illimitata, comunque sia fissato un numero $M > 0$ si può determinare un $\overline{\delta} > 0$ tale che se suddividiamo $(a\,,\,b)$ comunque, in parti tutte minore di $\overline{\delta}$ la variazione relativa della $f(x)$ risulta maggiore di M.

Ricordiamo inoltre che in ogni punto del tipo x_{kr} si ha $f^*(x_{kr}) = f(x_{kr})$, in base alla continuità della $f(x)$, si può determinare un $\overline{\delta}' > 0$ tale che l'oscillazione di $f(x)$ è minore di ε su ogni intervallo di ampiezza minore di $\overline{\delta}'$. Pertanto se h è minore sia di $\overline{\delta}$ che di $\overline{\delta}'$ avremo:

$$s_1 \geq \frac{s-1}{2}\,M - s\,.\,\varepsilon\,,$$

$$s_2 \geq \frac{s-1}{2}\,M - 2s \cdot \varepsilon\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_t \geq \frac{s-1}{2}\,M - 2s \cdot \varepsilon\,.$$

E sommando membro a membro:

$$s_1 + s_2 + \dots + s_t \geq t \cdot \frac{s-1}{2} M - [1 + (t-2)]\, s \cdot \varepsilon,$$

ossia dividendo per rt:

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_t}{r\,t} \geq \frac{s-1}{4\,s} M - \frac{t-1}{2\,t} \varepsilon,$$

cioè, essendo $\frac{t-1}{2\,t} < \frac{1}{2}$:

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_t}{r\,t} \geq \frac{1}{4} \frac{s-1}{s} M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pertanto ricordando il significato dei simboli l'espressione (3′) del N^0 4 viene minorata nella maniera seguente:

$$\frac{1}{r\,t} \sum_{i=0}^{n-rt-1} | f^* (x_{i+rt+1}) - f^* (x_{i+1}) | \geq \frac{1}{8} M - \frac{\varepsilon}{2},$$

non appena $s \geq 2$.

La relazione (3) del N. 3, in base al lemma (A) se t e sufficientemente grande diventa:

$$\int_a^b \left| \frac{f^* (x+h) - f^* (x)}{h} \right| dx \geq \frac{1}{8} M - \varepsilon \tag{3'}$$

se $h > 0$ è minore di $\bar{\delta}$ e di $\bar{\delta}'$.

7. — Diciamo adesso che *se la $f(x)$ non è a variazione limitata, allora:*

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx = L$$

non può esistere con L numero finito.

Infatti se ciò avvenisse, comunque fissato un $\varepsilon > 0$ si potrebbe determinare un $\sigma > 0$ tale che se $|h| < \sigma$ allora:

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx < L + \varepsilon. \tag{7}$$

Scegliamo $|h| < \sigma$, ma parte aliquota di $b - a$, e ricordiamo in base alla proposizione 2⁰) — (parte I⁰, cap. I; N⁰ 1) che fissato un $h > 0$, e comunque sia fissato un $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta_2 > 0$ tale che se $y = \varphi(x)$ è una qualunque poligonale inscritta sulla curva $y = f(x)$ con lati di lunghezza minore di δ_2, risulta:

$$\left| \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx - \int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Prendiamo ora t intero così grande da fare sì che la parte aliquota t^{esima} di h sia minore di δ_2, allora la relazione vale ancora se al posto di $\varphi(x)$ scriviamo $f^*(x)$, e perciò:

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx > \int_a^b \left| \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} \right| dx - \varepsilon$$

e adoperando la (3′) fissato il numero $M = 10\,[2 + \varepsilon]$ si può determinare un $\delta^* > 0$ tale che se $0 < h < \delta^*$ è

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx > \frac{1}{8} M - 2\varepsilon > L + \varepsilon \tag{9}$$

e questa contraddice la (7) e il limite considerato non può esistere finito.

PARTE III.

CAPITOLO I.

§ 1.

Si vuole dimostrare che esiste finito il

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}^2} \, dx$$

nell'ipotesi che $f(x)$ sia continua e a variazione limitata in (a, b) o, ciò che è lo stesso a norma dei teoremi di JORDAN, che la $y = f(x)$ sia una curva continua e rettificabile in (a, b); e dimostreremo inoltre che tale limite è uguale alla lunghezza della curva considerata.

Abbiamo visto che se $f(x)$ è una funzione continua e a variazione limitata in (a, b), allora fissato un numero $h > 0$, preso comunque un numero $\varepsilon > 0$ (confr. parte I — cap. I — proposizione 2^0 — paragr. I) si può determinare un $\delta_2(h, \varepsilon) > 0$ tale che se $y = \varphi(x)$ è la equazione di una poligonale inscritta alla curva $y = f(x)$ di lati di proiezione sull'asse x minore di δ_2 risulta (parte I — cap. I — paragr. II):

$$\left| \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx - \int_a^b \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| dx \right| < \frac{\varepsilon}{8} .$$

Analogamente e con lo stesso significato della $\varphi(x)$, fissato $h > 0$ si può determinare $\delta_2(h, \varepsilon) > 0$ tale che:

$$(1) \quad \left| \int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}^2} dx - \int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right\}^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{8} .$$

Si tratta ora di valutare il 2^0 integrale di tale espressione (confr. parte I — cap. I — paragr. III)

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right\}^2} dx ,$$

dove indichiamo con $y = \varphi(x)$ l'equazione d'una poligonale inscritta alla curva $y = f(x)$, con $f(x) = f(b)$ per $x > b$, e di lati di proiezione uguale tra loro e uguale a d con $rd = h$.

Per la (8) (confr.: parte I — cap. III — paragr. I) si ha:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{-(x - x_{i+1}) \{ [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \}}{r \cdot d^2} + \frac{f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1})}{r \cdot d}$$

e quindi:

$$\sqrt{1 + \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right\}^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left\{ \frac{-(x - x_{i+1}) \{ [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \}}{r \cdot d^2} + \frac{f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1})}{r \cdot d} \right\}^2} .$$

Poniamo:

$$\frac{[f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})]}{r \cdot d^2} = \alpha,$$

$$\frac{f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1})}{r \cdot d} = \beta,$$

ed integriamo l'uguaglianza precedente rispetto ad x tra x_i e x_{i+1}. Si ha:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \{-(x - x_{i+1})\,\alpha + \beta\}^2}\, d\,x\,.$$

Cioè, se indichiamo x_{i+1} con c e quindi x_i con $c - d$:

$$\int_{c-d}^{c} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x = \int_{c-d}^{c} \sqrt{1 + \{-(x - c)\,\alpha + \beta\}^2}\, d\,x\,.$$

Effettuando, come è lecito, il cambiamento di variabile espresso dall'uguaglianza:

$$-(x - c)\,\alpha + \beta = t\,,$$

risulta:

$$d\,x = -\frac{1}{\alpha} \cdot d\,t\,,$$

e al posto dei limiti d'integrazione $c - d$ e c, devono sostituirsi rispettivamente i nuovi limiti $\alpha\,d + \beta$ e β, essendo:

$$\alpha\,d + \beta = \frac{f(x_{i+r}) - f(x_i)}{r \cdot d}\,.$$

Con ciò si ottiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x = \frac{1}{\alpha} \int_{\beta}^{\alpha d + \beta} \sqrt{1 + t^2} \cdot d\,t\,.$$

Ora per il teorema della media possiamo scrivere:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \int_{\beta}^{\alpha d + \beta} \sqrt{1 + t^2}\, d\,t = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\, d\, \sqrt{1 + \xi^2}$$

dove ξ è un valore opportuno interno allo intervallo $(\beta, \alpha d + \beta)$ se $\beta < \alpha d + \beta$, oppure all'interno dell'intervallo $(\alpha d + \beta, \beta)$ nel caso opposto; in ogni caso è da osservare però che:

$$|\alpha \cdot d + \beta - \xi| \leq |\alpha \cdot d + \beta - \beta| = |\alpha \cdot d| . \tag{2}$$

In base all'identità:

$$d \cdot \sqrt{1 + \xi^2} = d \sqrt{1 + (\alpha d + \beta)^2} + d \cdot \left\{ \sqrt{1 + \xi^2} - \sqrt{1 + (\alpha d + \beta)^2} \right\},$$

si può ancora scrivere:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right\}^2}\, d x = d \cdot \sqrt{1 + \left\{ \frac{f(x_{i+r}) - f(x_i)}{r d} \right\}^2} + \tag{3}$$

$$+ d \cdot \left\{ \sqrt{1 + \xi^2} - \sqrt{1 + (\alpha d + \beta)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{r^2 d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} + d \left\{ \sqrt{1 + \xi^2} - \sqrt{1 + (\alpha d + \beta)^2} \right\}.$$

E poichè, in base alla relazione triangolare, risulta:

$$d \cdot \left| \sqrt{1 + \xi^2} - \sqrt{1 + (\alpha d + \beta)^2} \right| \leq d \cdot |\alpha d + \beta - \xi| ,$$

per la (2) si ottiene la minorazione:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right\}^2}\, d x \geq \frac{1}{r} \sqrt{r^2 d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} - |\alpha| \cdot d^2 ,$$

cioè, tenendo conto dell'espressione di α:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right\}^2}\, d x \geq \frac{1}{r} \sqrt{r^2 d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} -$$

$$- \frac{1}{r} \left| [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \right| .$$

Se ora sommiamo rispetto all'indice $i = 0, 1, \ldots, n - r - 1$, dove n è quell'intero tale che $(n - r)\, d \leq b - a - h < (n - r + 1)\, d$, si ha:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, dx \geq \int_a^{a+(n-r)d} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x \geq$$

$$\geq \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \sqrt{r^2\, d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} -$$

$$- \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \right|$$

Ma è:

$$\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f[(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1}) \right| + \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f(x_i) - f(x_{i+1}) \right| \leq \frac{2}{r}\, V[f(x); (a, b)]$$

e perciò:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x \geq \tag{4}$$

$$\geq \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \sqrt{r^2\, d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} - \frac{2}{r}\, V[f(x); (a, b)]$$

A questo punto ricordiamo la valutazione della (12) (parte I — cap. III n. 2).

Cioè assegnato un $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un $\delta > 0$ tale che se si considera una suddivisione di (a, b) in parti di ampiezza non maggiore di δ, si ha:

$$\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \left| f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) \right| > V[f(x); (a, b)] - \frac{\varepsilon}{2(b - a)},$$

in modo analogo si dimostra che, fissato un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\delta_1 > 0$, per cui quando si consideri una suddivisione di (a, b) in parti di ampiezza che non superi δ_1 si ottiene:

$$\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r-1} \sqrt{r^2\, d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} \geq L[f(x); (a, b)] - \frac{\varepsilon}{2(b - a)},$$

avendo indicato con $L[f(x); (a, b)]$ la lunghezza della curva $y = f(x)$ data nell'intervallo (a, b).

Al posto della disuguaglianza relativa all'ultimo integrale scritto può perciò sostituire la seguente:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x \geq L\,[f(x)\,;(a\,,b)] - \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} -$$

$$- \frac{2}{r}\, V\,[f(x)\,;(a\,,b)]\,.$$

Ma essendo r arbitrariamente grande si può fare in modo che:

$$\frac{2}{r}\, V\,[f(x)\,;(a\,,b)] < \frac{\varepsilon}{4\,(b-a)}\,,$$

per cui infine si ha:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x \geq L\,[f(x)\,;(a\,,b)] - \frac{3\,\varepsilon}{4\,(b-a)}\,.$$

D'altra parte in relazione alla (1) si è già notato che fissato $h > 0$ si può determinare un $\delta_2(h\,,\varepsilon) > 0$ per cui:

$$\left|\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x - \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x\right| < \frac{\varepsilon}{8}\,.$$

Allora in base a queste ultime due disuguaglianze, supponendo com'è lecito, $b - a > 1$, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta_1' < 1$ tale che se $0 < h < \delta_1' < 1$ è:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2} \geq L\,[f(x)\,;a\,,b)] - \varepsilon$$

2. — Proviamo ora che, sempre supponendo $b - a > 1$, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta_1'' < 1$ tale che se $0 < h < \delta_1''$ si ha:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2}\, d\,x \leq L\,[f(x)\,;(a\,,b)] + \varepsilon$$

In base alla relazione triangolare (2) dall'uguaglianza (3) si ha:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d\,x \leq \frac{1}{r} \sqrt{r^2\,d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} + |\,\alpha\,| \cdot d^2$$

cioè, tenendo presente l'espressione di α:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d\,x \leq \sqrt{r^2\,d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} +$$

$$+ \left|\, [f(x_{i+r}) - f(x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \,\right| .$$

Sommando rispetto all'indice $i = 0, 1, \dots, n - r$, si ha:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d\,x \leq \int_a^{a+(n-r+1)d} \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d\,x \leq$$

$$\leq \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r} \sqrt{r^2\,d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r} \left|\, [f(x_{i+r}) - (x_{i+r+1})] - [f(x_i) - f(x_{i+1})] \,\right| .$$

E sostituendo, come è lecito, al posto dell'ultima sommatoria scritta l'espressione:

$$\frac{2}{r}\; V\,[f(x)\,;\,(a\,,\,b)]\,,$$

si ottiene:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d\,x \leq \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-r} \sqrt{r^2\,d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} +$$

$$+ \frac{2}{r}\; V\,[f(x)\,;\,(a\,,\,b)]\,.$$

Ricordando che per la valutazione della (18) (parte I — cap. III — § 3), si è ottenuto che assegnato un ε si può trovare un $\delta > 0$ per cui operata una suddivisione di (a, b) in parti di ampiezza non maggiore di δ si ha:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n-r} | f(x_{i+r+1}) - f(x_{i+1}) | \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + V[f(x); (a, b)]$$

con procedimento analogo si ottiene che in corrispondenza d'un $\varepsilon > 0$ rimane determinato un $\delta_2'' > 0$ tale che per una suddivisione di (a, b) in parti di ampiezza non maggiore di δ_2'', risulta:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n-r} \sqrt{r^2 d^2 + [f(x_{i+r}) - f(x_i)]^2} \leq L[f(x); (a, b)] + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Per tanto l'ultimo integrale scritto può così maggiorarsi:

$$\int_b^a \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d x \leq L[f(x);(a,b)] + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{2}{r} V[f(x);(a,b)],$$

e per l'arbitrarietà di r:

$$\int_b^a \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2} d x \leq L[f(x); (a, b)] + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Anche qui con riferimento alla (1), supposto $b - a > 1$ e fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta_1'' < 1$ tale che se $0 < h < \delta_1''$ si ottiene:

$$\int_b^a \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2} d x \leq L[f(x); (a, b)] + \varepsilon.$$

E con ciò resta dimostrato che nelle ipotesi dette, risulta:

$$\lim_{h \to 0-0} \int_b^a \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2} d x = L[f(x); (a, b)].$$

Analogo calcolo può farsi per $h < 0$ oppure mediante un cambiamento di variabile, come si è fatto nella parte I, cap. V § 1, si ottiene:

$$\lim_{h \to 0-0} \int_b^a \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2} d x = L[f(x); (a, b)],$$

raggiungendo così il risultato richiesto.

Capitolo II

1. — Vogliamo ora dimostrare che nell'ipotesi che la $f(x)$ sia continua e a variazione non limitata in (a, b), ossia nell'ipotesi *che la curva d'equazione* $y = f(x)$ *sia continua ma non rettificabile in* (a, b), *allora:*

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}^2} d\,x = L$$

non può esistere con L *numero finito.*

A tale scopo, fissato un $h > 0$ parte aliquota di (a, b) suddividiamo (a, b) in parti uguali di ampiezza h e indichiamo con $y = f^*(x)$ l'equazione della poligonale inscritta alla $y = f(x)$ i cui lati si proiettano ordinatamente in parti che siano parte aliquota t^{esima} di h, con t intero fissato.

La $f^*(x)$ è evidentemente continua e a variazione limitata e perciò vale per questa il ragionamento fatto precedentemrnte per la $f(x)$, supposta continua e a variazione limitata, e che ci ha condotto a stabilire la relazione (4) (Cap. I) Se indichiamo allora con $y = \overline{\varphi}(x)$ l'equazione della poligonale inscritta alla $y = f^*(x)$, i cui lati si proiettano su (a, b) in parti di ampiezza tutte eguali a d sottomultiplo r^{esimo} (con $r = 2s$ ed s intero arbitrario) della t^{esima} parte di h, risulta, dalla relazione (4) (Cap. I^0 paragrf. I^0):

$$(1) \quad \int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{\overline{\varphi}(x+h) - \overline{\varphi}(x)}{h} \right\}^2} d\,x \geq \frac{1}{r\,t} \sum_{i=0}^{n-rt-1} \sqrt{(rt \cdot d)^2 + [f^*(x_{i+rt}) - f^*(x_i)]^2} - \\ - \frac{2}{r\,t} V[f^*(x); (a, b)].$$

Ma i lati della poligonale $y = \overline{\varphi}(x)$, per la particolare costruzione di essa, stanno tutti sui lati della poligonale $y = f^*(x)$ e le due poligonali differiscono soltanto per i vertici; coincidono perciò le loro equazioni:

$$\{ f^*(x) \equiv \overline{\varphi}(x) \},$$

e la (5) può scriversi:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} \right\}^2} dx \geq \frac{1}{rt} \sum_{i=0}^{n-rt-1} \sqrt{(rt \cdot d)^2 + [f^*(x_{i+rt}) - f^*(x_i)]^2} - \\ - \frac{2}{r} V[f^*(x); (a, b)].$$

Ci occorre a questo punto una valutazione del primo addendo a secondo membro dell'ultima relazione.

Con procedimento analogo a quello seguito per la valutazione della (3') (parte II — cap. II — paragr. 4) e, sulla base del teorema di DARBOUX-SCHEEFER relativo al caso delle funzioni continue a variazione non limitata, fissato un numero positivo M si può determinare un numero $\delta > 0$ tale che se $0 < h < \delta$, una qualunque poligonale inscritta sulla curva $y = f(x)$, (a, b) di lati di ampiezza tutti minore di δ ha lunghezza maggiore di M e l'oscillazione di $f(x)$ risulta minore di ε, allora è pure:

$$(7) \quad \frac{1}{rt} \sum_{i=0}^{n-rt-1} \sqrt{(rt+d)^2 + [f^*(x_{i+rt}) - f^*(x_i)]^2} \geq \frac{1}{8} M - \varepsilon, \quad \left(\frac{r}{2} = s \geq 2\right).$$

Ora per il lemma (Cap. I n. 1, parte II) ed anche per la (7), la (6) quando t sia sufficientemente grande, diventa:

$$(7') \quad \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h}\right\}^2}\, dx \geq \frac{1}{8} M - \varepsilon,$$

e questa ci permette subito di dimostrare che non può esistere finito il limite dell'integrale da noi considerato per $h \to 0$. Se infatti tale limite esistesse finito, fissato comunque un $\varepsilon > 0$ si potrebbe determinare un $\sigma > 0$ per cui se $|h| < \sigma$ allora:

$$(8) \quad \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2}\, dx < L + \varepsilon.$$

Ma se $y = \varphi(x)$ è l'equazione di una poligonale inscritta nella curva $y = f(x)$ e soddisfacente alle condizioni a cui facciamo riferimento nel paragr. I — Cap. I, si ha:

$$\left| \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2}\, dx - \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\}^2}\, dx \right| < \varepsilon,$$

e perciò:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}^2}\, dx > \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h}\right\}^2}\, dx - \varepsilon$$

e per la (7)

$$\int_a^b \sqrt{1+\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}^2}\,dx > \frac{1}{8}M - 2\,\varepsilon.$$

Questa essendo M un numero positivo arbitrario contraddice la (8).