

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SALVATORE CHERUBINO

Sulle matrici quadrate non negative

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 10, n° 3-4 (1956), p. 217-235

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_3-4_217_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE MATRICI QUADRATE NON NEGATIVE

Nota di SALVATORE CHERUBINO (Pisa)

Le proprietà fondamentali delle matrici quadrate non negative⁽¹⁾ furono stabilite (da FROBENIUS e PERRON) ai primi di questo secolo⁽²⁾.

Recentemente, due Autori americani⁽³⁾ hanno esposto questa proprietà in forma assai elegante partendo da un teorema topologico che non può ancora dirsi appartenente alle matematiche elementari e hanno aggiunto alcuni interessanti complementi. Il teorema topologico cui si accenna non è utilizzato nella nostra esposizione in « Matrici », che segue invece da presso H. WIELANDT: *Unzerlybare nicht negativen Matrizen* [Math. Zeitschriften, 52 (1950), pp. 142-148].

In queste pagine rispondiamo in forma meno stringata i complementi americani collegandoli ad altri, in gran parte nuovi⁽⁴⁾, che concernono principalmente le matrici riducibili. Diamo anche qualche precisazione delle proprietà delle matrici primitive e delle matrici stocastiche.

(1) Cioè matrici $A = [a_{ij}]$; $i, j = 1, 2, \dots, n > 2$, per le quali si ha $a_{ij} \geq 0$, senza che valga sempre il solo segno eguale. Si scriverà $A \geq \mathbf{0}$, essendo $\mathbf{0}$ la matrice nulla di ordine n . Se A può esser anche nulla si scriverà $A \geq \mathbf{0}$. Le scritture $A \geq B$, $A \geq B$ valgono $A - B \geq \mathbf{0}$, $A - B \geq \mathbf{0}$. È ovvio il significato che deve attribuirsi alle scritture $A \leq B$, $A \leq B$ e quello che ad esse e alle precedenti deve attribuirsi quando A e B sono matrici rettangolari (dello stesso tipo, cioè entrambe $m \times n$).

(2) Per essa rimandiamo il lettore al § 2 del cap. II della nostra monografia sul Calcolo delle Matrici in corso di stampa nella « Collezione matematica » del C. N. R. (edizioni Cremonese), che sarà qui richiamata con « Matrici ».

(3) DEBREU GERARD e I. N. HERSTEIN: *Nonnegative square matrices* [Econometrica, XXI (1953) pp. 597-607]. Parte di queste proprietà sono state ritrovate per via del tutto elementare, ma piuttosto faticosa, da I. K. WONG, *Un procedimento elementare per un sistema di interdipendenze strutturali* [« L'Industria », 1956, n. 1, pp. 33-40].

(4) Ad es., l'inversione del teorema fondamentale di questa teoria (proposizione VII).

Le recenti applicazioni ricevute soprattutto in Econometria⁽⁵⁾ dalle matrici non negative ci persuadono che questa Nota non mancherà di interessare a simili argomenti anche i lettori italiani.

§. 1. Osservazioni generali.

1. La matrice $A = [a_{ij}]$ reale o complessa, di ordine $n > 2$, si dice riducibile quando con una stessa permutazione sulle righe e sulle colonne diventa⁽⁶⁾:

$$(1.1) \quad H^{-1} A H = \begin{bmatrix} A' & B \\ C & A'' \end{bmatrix}$$

ove A' ed A'' sono minori principali di A e B, C sono matrici (rettangolari se A' ed A'' non sono dello stesso ordine) di cui una almeno è nulla. Se B e C sono entrambe nulle, la matrice A si dice composta con le componenti A' e A'' . Le proprietà fondamentali delle matrici quadrate non negative si riassumono come appresso.

Una matrice $A \geq 0$ irriducibile possiede una radice caratteristica positiva il cui modulo supera quello di ogni altra⁽⁷⁾: questa radice la indicheremo sempre con r . Essa è semplice ed è la sola cui sono associati da ambo i lati di A autovettori positivi (o meglio ad elementi tutti diversi da zero e dello stesso segno): autovettori associati dallo stesso lato differiscono per un fattore scalare.

⁽⁵⁾ Segnaliamo, in proposito, la nostra Memoria: *Sui fondamenti matematici della teoria dell'equilibrio generale economico*, [« L'Industria » n. 3 del 1956 pp. 302-336]. La presente Nota, piuttosto che l'equilibrio generale, crediamo interessi lo studio dei cosiddetti sistemi aperti.

⁽⁶⁾ H è prodotto di matrici $I^{(i,j)}$ ottenute dall'identità I scambiando tra loro le righe (o le colonne) di posti i, j : questi fattori sono tutti simmetrici ed hanno per quadrato I (sono involutori).

⁽⁷⁾ Nella relazione (6) a pag. 130 di « Matrici » può suppersi senz'altro, quando $A \geq 0$ è irriducibile, che sia $x > 0$ invece di $x \geq 0$: basta sostituire x_{-1} con $[I + A]^{n-1} x_{-1}$ che, per il ragionamento fatto a pp. 131-132, è > 0 . Allora, dovendosi nella (6) verificare almeno una volta il segno = fra gli elementi corrispondenti dei due membri, si ha che r_x è funzione razionale di x_1, \dots, x_n sempre appartenente all'intervallo finito $(0, M)$ escluso l'estremo sinistro ed avente una delle n determinazioni $\varphi(h, x)$ espresse con la (8), p. 131. La radice r è il più piccolo dei massimi di queste n funzioni razionali e poichè nei ragionamenti fatti si può ovunque sostituire x con $-x$, cambiando quindi \geq con \leq nella (6), r è anche il più grande dei minimi delle n funzioni $\varphi(h, x)$, $h = 1, 2, \dots, n$.

La radice r è sempre compresa tra la minima e la massima somma degli elementi di ciascuna riga (di ciascuna colonna) di A ; quindi, se le righe (le colonne) di A danno tutte la stessa somma, questa somma eguaglia r .

Infine, sempre per A irriducibile, la matrice $[rI - A]^*$, aggiunta di $[rI - A]$, ha i suoi elementi tutti positivi.

Ne segue che $A \geq \mathbf{0}$ non può essere pseudonulla⁽⁸⁾ senza esser riducibile. Qui appresso supporremo sempre che A non sia pseudonulla.

Se y, x_{-1} sono autovettori (rispettivamente orizzontale e verticale, determinati a meno di un fattore scalare $\neq 0$) associati ad r , dai due lati di A , si ha

$$(1.2) \quad Ax_{-1} = r x_{-1}, \quad yA = r y.$$

Qualunque sia la matrice A , se s supera il massimo modulo delle sue radici caratteristiche, vale⁽⁹⁾ lo sviluppo in serie di potenze:

$$(1.3) \quad [sI - A]^{-1} = s^{-1} \left[I + \frac{A}{s} \right]^{-1} = s^{-1} \left[I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots \right].$$

Quindi, per $A \geq \mathbf{0}$, si ha $s > r$ ed $[sI - A]^{-1} \geq \mathbf{0}$. E poichè $\det [sI - A] > 0$, altrimenti $f(z) = \det [zI - A]$ cambierebbe segno nel passare da $z = s$ a $z = +\infty$ (sicchè A possiederebbe qualche radice caratteristica $> r$), si deduce che per $s > r$ si ha:

$$[sI - A]^* = f'(s) [sI - A]^{-1} \geq \mathbf{0}.$$

Se $A \geq \mathbf{0}$ è riducibile (ma non pseudonulla) operando come al principio del n. prec. (operazione che indicheremo col segno ∞) si avrà:

$$(1.4) \quad A \infty \begin{bmatrix} A' & A_{12} & \dots & A_{1q} & A_{1,q+1} \\ \mathbf{0} & A'' & \dots & A_{2q} & A_{2,q+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A^{(q)} & A_{q,q+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A^{(q+1)} \end{bmatrix}$$

(8) Cioè non nulla, ma con $A^p = \mathbf{0}$, p intero > 1 . Ovvero sia, ciò che è lo stesso, (« Matrici », cap. II, § 1, n. 11, p. 118) a radici caratteristiche tutte zero.

(9) « Matrici », cap. IV, § 1, n. 5, formola (11).

con $A', A'', \dots, A^{(q)}$ matrici $\geq \mathbf{0}$ irriducibili ed $A^{(q+1)}$ matrice $\geq \mathbf{0}$, nulla o pseudonulla. Le prime q si diranno *parti principali* di A , mentre $A^{(q+1)}$, che può mancare, si dirà *parte nulla* o *pseudonulla* di A . È necessariamente $q \geq 1$ e ciascuna parte principale avrà una radice caratteristica positiva di massimo modulo rispetto a tutte le altre di quella parte; la maggiore di queste radici è quella che abbiamo indicato con r . Si può perciò dire che:

a) una matrice $A \geq \mathbf{0}$ *riducibile, non pseudonulla, possiede almeno una radice caratteristica positiva* (che s'indica con r) *di modulo massimo*.

L'intero $q - 1$ si dirà *grado di riducibilità* di A : se A è pseudonulla questo grado è negativo (vale -1). Una A irriducibile non ha grado di riducibilità. Una matrice non singolare, anche se riducibile, manca di parte nulla o pseudonulla; la mancanza di questa non assicura la non singolarità, perchè una matrice non negativa può essere in pari tempo irriducibile e singolare.

Una matrice pseudonulla non negativa è necessariamente riducibile, ma portandola alla forma

$$A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} A' & B \\ \mathbf{0} & A'' \end{bmatrix}, \text{ oppure } A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} A' & \mathbf{0} \\ C & A'' \end{bmatrix}$$

i minori principali A', A'' sono anch'essi pseudonulli, quindi riducibili; e via di seguito. Si ha perciò che:

b) una matrice pseudonulla $A = [a_{rs}] \geq \mathbf{0}$ può sempre portarsi, con la stessa permutazione sulle righe e sulle colonne ad avere eguali a zero tutti gli elementi a_{rs} per i quali $r > s$, mentre almeno uno dei rimanenti elementi è > 0 ⁽¹⁰⁾.

2. L'operazione \rightsquigarrow consente di portare al primo posto una qualsiasi delle parti principali di $A \geq \mathbf{0}$ riducibile. Ciò può sempre aversi

$$(1.5) \quad A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} A' & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}, \text{ oppure } A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} A' & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix}$$

A' essendo, come supporremo, quella parte principale (o una di quelle) che possiede la radice caratteristica r (> 0 e di massimo modulo).

⁽¹⁰⁾ Può anche portarsi ad avere eguali a zero, invece degli a_{rs} , con $r > s$, quelli con $r < s$ e non tutti zero di altri. Così pure, nella (1.4), sempre con l'operazione \rightsquigarrow , può invertirsi l'ordine delle parti $A', A'', \dots, A^{(q+1)}$ ed annullare tutti i minori al disopra, anzichè al disotto, di essi. Ciò può aversi $A \rightsquigarrow [A_{hk}]$, $A_{hk} = \mathbf{0}$ per $h < k$, con gli A_{hh} tutti irriducibili meno A_{11} che è nullo o pseudonullo e può mancare.

Vi è allora un vettore $\mathbf{x}' > 0$ pel quale si ha $[r I_1 - A'] \mathbf{x}'_{-1} = 0$, I_1 essendo la matrice identica dell'ordine di A' e prendendo $\mathbf{x} = (\mathbf{x}' | 0) \geq 0$, per la prima delle (1.5), si avrà $[r I - A] \mathbf{x}_{-1} = 0$ ⁽¹⁴⁾. Si ha pure un vettore $\mathbf{y}' > 0$ pel quale $\mathbf{y}' [r I_1 - A'] = 0$ e, posto $\mathbf{y} = [\mathbf{y}' | \mathbf{y}'']$, per avere, ancora per la prima delle (1.5), $\mathbf{y} [r I - A] = 0$ occorre e basta che sia:

$$(1.6) \quad \mathbf{y}' B = \mathbf{y}'' [r I_2 - D]$$

con I_2 matrice identica dell'ordine di D . Essendo $B \geq 0$, si ha $\mathbf{y}' B \geq 0$, il segno = valendo allora e solo che $B = 0$.

Se r non è radice caratteristica di D , quelle di D saranno tutte di modulo minore di r e perciò $[r I_2 - D]^{-1} \geq 0$, quindi $\mathbf{y}'' = \mathbf{y}' B [r I_2 - D]^{-1} \geq 0$, onde $\mathbf{y} = (\mathbf{y}' | \mathbf{y}'') \geq 0$. Se invece r è radice caratteristica di D , e D è irriducibile, si ha un vettore $\mathbf{y}'' > 0$ pel quale $\mathbf{y}'' [r I_2 - D] = 0$ e quindi con $\mathbf{y} = (0 | \mathbf{y}'')$ si ha $\mathbf{y} [r I - A] = 0$. Analogamente, per la seconda delle (1.5), sempre con D non ammettente la radice r oppure ammettendola ed irriducibile, si trova che esistono vettori ≥ 0 associati ad r sia a destra che a sinistra di A .

Rimane a considerare il caso di D riducibile ed ammettente la radice caratteristica r , limitatamente agli autovettori orizzontali, se vale la prima delle (1.5), a quelli verticali se vale la seconda, sempre associati ad r . Sia:

$$(1.7) \quad D \simeq \begin{bmatrix} A'' & B' \\ 0 & D' \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad D \simeq \begin{bmatrix} A'' & 0 \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

con A'' irriducibile possedente la radice caratteristica r . Ripetendo il ragionamento precedente, salvo quando D' sia riducibile e possiede la radice r , si trova che D ammette autovettori ≥ 0 tanto orizzontali che verticali associati ad r . Siano questi, ad es., \mathbf{y}'' , \mathbf{x}''_{-1} , e valga la prima delle (1.5): ponendo $\mathbf{y} = (0 | \mathbf{y}'')$ si ha $\mathbf{y} [r I - A] = 0$, $\mathbf{y} \geq 0$. Se vale la seconda delle (1.5), ponendo $\mathbf{x} = (0 | \mathbf{x}'')$, si ha $[r I - A] \mathbf{x}_{-1} = 0$, $\mathbf{x} \geq 0$.

Se D' è riducibile ed ammette la radice r , si procederà come su D . Così continuando, si perverrà ad un minore principale che o non ammette la radice caratteristica r , o è irriducibile con o senza ammettere la radice r . In definitiva, si può affermare che:

I. Se $A \geq 0$ è riducibile ma non pseudonulla, ad $r > 0$ sono associati, dalla destra e dalla sinistra di A , autovettori non negativi aventi > 0 le componenti che corrispondono ad almeno una parte principale irriducibile ammettente la radice caratteristica r .

(14) Con I matrice identica dell'ordine di A .

Questa proposizione va completata con l'altra, ovvia conseguenza delle proprietà richiamate :

I bis. *Se ad r è associato un autovettore ≥ 0 non positivo a destra o a sinistra di $A \geq 0$, la matrice A è riducibile. Inoltre le componenti positive di detto autovettore corrispondono ad un minore principale di A possedente la radice caratteristica r .*

Quest'ultima parte si ottiene osservando che se $x = (0 | x'')$ con $x'' > 0$ è un autovettore di

$$A \sim \begin{bmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A'' \end{bmatrix}$$

associato ad r , ad es., dalla destra, si ha necessariamente $A_{12} x''_1 = 0$, quindi $A_{12} = 0$, ed $[r I_2 - A''] x''_1 = 0$, con I_2 matrice identica dell'ordine di A'' .

3. Sia α una radice caratteristica di A diversa da r ed y un autovettore a sinistra di A associato ad α , cioè si abbia:

$$(1.8) \quad \alpha y = y A :$$

α è reale allora e solo che (a meno di un fattore scalare) y sia reale e $\neq 0$. Indichiamo con $x \geq 0$ un autovettore destro di A associato ad r , cioè sia $A x_{-1} = r x_{-1}$. Dalla (1.8), moltiplicando a destra per x_{-1} , si ha $\alpha y x_{-1} = r y x_{-1}$, quindi se fosse $y x_{-1} \neq 0$, sarebbe $\alpha = r$. Se $y \geq 0$, essendo $\alpha \neq r$ dev'essere $y x_{-1} = 0$ e le componenti positive di y possono corrispondere solo a componenti zero di x . Si potrà perciò porre $x = (x' | 0)$, $x' > 0$, $y = (0 | y'')$, $y'' > 0$ ed

$$(1.9) \quad A \sim \begin{bmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A'' \end{bmatrix}$$

con A' minore principale di ordine eguale al numero delle componenti di x' mentre A'' è di ordine eguale al numero delle componenti di y'' . Risulterà

$$[r I_1 - A'] x'_{-1} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad y'' [a I_2 - A''] = 0,$$

cioè A è riducibile ed α è radice caratteristica di A'' . Se A'' non è nulla nè pseudonulla essendo $y'' > 0$, α è positiva e di massimo modulo per A'' . Quest'ultimo fatto discende dal che, se la radice caratteristica positiva di massimo modulo di A'' è r' , a questa è associato dalla destra un autovettore $z \geq 0$ e si ha $y'' z_{-1} > 0$, $\alpha y'' z_{-1} = y'' A'' z_{-1} = r' y'' z_{-1}$. Tenendo presente la I bis, si ha quindi che:

II. Se ad r è associato a destra un autovettore $x \geq 0$ a componenti non tutte positive e se a un'altra radice caratteristica $\alpha \neq r$ è associato a sinistra un autovettore $y \geq 0$, questo può avere componenti positive solo in posti occupati in x da zeri. Se inoltre è $y = (0 | y')$, $y' > 0$, il minore principale di A corrispondente agli elementi di y' avrà α come radice caratteristica di massimo modulo. Analogamente se x ed y fossero autovettori rispettivamente a sinistra ed a destra di A ⁽¹²⁾.

Osservisi che il minore principale cui si riferisce questo enunciato non può essere pseudonullo, perchè una matrice pseudonulla non negativa non può avere autovettori positivi; esso può invece esser nullo e allora è necessariamente $\alpha = 0$. In ogni altro caso sarà $\alpha > 0$.

4. Supponiamo che A , riducibile di grado di riducibilità $q - 1$, sia composta con le sue parti principali $A', A'', \dots, A^{(q)}$, e con quella nulla o pseudonulla, se c'è, sicchè nella (1.4) tutte le A_{ij} , con $i \neq j$, sono matrici nulle. Se l parti principali, $l \leq q$, hanno in comune la radice caratteristica r , cioè se r è l -pla per A , si potrà sempre fare che nella (1.4) quelle parti siano le prime l . Indicando con $x', x'', \dots, x^{(l)}$ ed $y', y'', \dots, y^{(l)}$ gli autovettori positivi associati ad r a destra ed ordinatamente a sinistra di dette parti, si avrà che a destra e rispettivamente a sinistra di A sono associati ad r gli ∞^l autovettori:

$$(1.10) \quad x = (\varrho_1 x' | \varrho_2 x'' | \dots | \varrho_l x^{(l)} | 0)$$

$$(1.10') \quad y = (\sigma_1 y' | \sigma_2 y'' | \dots | \sigma_l y^{(l)} | 0)$$

nei quali $\varrho_i, \sigma_i, i = 1, 2, \dots, l$ sono fattori scalari arbitrari non necessariamente $\neq 0$: se $l = q$ e se manca $A^{(q+1)}$, in x, y non vi saranno necessariamente parti nulle.

Viceversa, supponiamo che A , data dalla (1.4), ammetta ad es. tutti gli autovettori (1.10') associati ad r dalla sinistra. Allora si ha:

$$(1.11) \quad -\sigma_1 y' A_{1h} - \dots - \sigma_{h-1} y^{(h-1)} A_{h-1,h} + \sigma_h y^{(h)} [r I_h - A^{(h)}] = 0$$

$h = 1, 2, \dots, l$, mentre per $h > l$ valgono queste stesse relazioni, però mancanti dall'ultimo termine. Per l'arbitrarietà dei fattori scalari $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ e la positività dei vettori $y', y'', \dots, y^{(l)}$ le (1.11) esigono l'annullarsi delle matrici $A_{1h}, A_{2h}, \dots, A_{h-1,h}$, per $h = 1, 2, \dots, q + 1$ e, per $h \leq l$, che r sia radice caratteristica di $A^{(h)}$.

⁽¹²⁾ Da ora in poi ci asterremo dal mentovare che quello che avviene da un lato si ripete dall'altro.

Si tenga presente che la comune dimensione dei due spazi vettoriali associati ad una radice caratteristica non supera la molteplicità di essa e che l'eguaglia allora e solo che l'indice della radice è uno. Perciò si ha che:

III. *Se A è di grado di riducibilità $q-1$ e se r è di molteplicità l , affinché ad r siano associati spazi vettoriali di dimensione l assegnati dalle (1.10) (1.10'), occorre e basta che A sia composta con le l parti principali ammettenti la radice caratteristica r , e, se $l < q$, con una matrice di grado di riducibilità $q - h - 1$ che non ammetta la radice caratteristica r .*

5. Ricordiamo che se M è una matrice non singolare, la sua aggiunta M^* è definita da ciascuna delle due relazioni

$$(1.12) \quad M M^* = I \cdot \det M; \quad M^* M = I \cdot \det M.$$

Se invece M è singolare, le soluzioni comuni alle due equazioni:

$$(1.13) \quad M X = \mathbf{0}; \quad X M = \mathbf{0},$$

rispetto ad X matrice di ordine n , sono date dalla matrice nulla e, se M è di nullità uno, da tutte quelle matrici le cui colonne e le cui righe coincidono a meno di un fattore scalare di proporzionalità (eventualmente zero) con le righe e rispettivamente le colonne dell'aggiunta M^* di M .

Scriviamo A sotto una, ad es. la prima, delle forme (1.5) supponiamo $B = \mathbf{0}$ e che r sia radice caratteristica di A' ma non di D . Le equazioni

$$(1.14) \quad [rI - A] X = X [rI - A] = \mathbf{0}$$

hanno per soluzione comune la matrice composta dell'aggiunta $[rI_1 - A']^*$ e di una matrice nulla. Più in generale:

IV. *Nel caso della matrice A di cui al teorema precedente, fra le soluzioni delle (1.14) vi è la matrice composta con le aggiunte, tutte positive, delle matrici $[rI_1 - A']$, ..., $[rI_l - A^{(l)}]$ e, se $l < q$, od $l = q$ e con una matrice nulla.*

È poi ovvio che:

V. *Affinchè la radice caratteristica $\alpha > 0$ di A irriducibile sia di modulo massimo, (cioè $\alpha = r$) occorre e basta che $[\alpha I - A]^* > \mathbf{0}$. Se ciò non accade, ma è $[rI - A]^* \geq \mathbf{0}$, la matrice A è riducibile.*

6. La matrice $A \geq 0$ sia di grado di riducibilità positivo $q - 1$ ed r sia di molteplicità minore di q . Nelle (1.5) si potrà supporre che A' , parte irriducibile, non ammetta la radice r , mentre D l'ammette. Se $x = (x' | x'')$ è un autovettore a destra di A associato ad r , dalla seconda delle (1.5) si ha:

$$[rI_1 - A'] x'_{-1} = 0; \quad [rI_2 - D] x''_{-1} = C x'_{-1}.$$

Sarà necessariamente $x' = 0$, quindi $[r I_2 - D] x''_{-1} = 0$, onde, poichè D non è nulla o pseudonulla, pel teor. I, sarà $x'' \geq 0$, quindi $x = (0 | x'') \geq 0$.

Se vale invece la prima delle (1.5), si avrà:

$$[r I_1 - A'] x'_{-1} = B x''_{-1}; \quad [r I_2 - D] x''_{-1} = 0$$

e sarà ancora $x'' \geq 0$. Essendo $[r I_1 - A']^{-1} \geq 0$, si ha che x' è ≥ 0 oppure ≤ 0 insieme a $B x''_{-1}$, perciò sempre $x = (x' | x'') \geq 0$, con x' non necessariamente zero.

Abbiamo dunque che:

VI. *Se la molteplicità di $r > 0$ non supera il grado di riducibilità di A (quindi A è riducibile), gli autovettori ≥ 0 di A associati ad r da uno dei due lati (non necessariamente da entrambi) hanno eguali a zero le componenti corrispondenti ad una almeno delle parti principali di A che non ammettono la radice r .*

Ad r siano associati, da ambo i lati, autovettori positivi. Ricorrendo ancora alle (1.5), si trova che r sarà radice sia di A' che di D . Ma A' è una qualunque delle parti principali di A e la parte nulla o pseudonulla non può ammettere la radice r come ovviamente seguirebbe dall'ipotesi e dalla (1.4); dunque r è radice caratteristica di molteplicità q e manca $A^{(q+1)}$. Possiamo perciò enunciare che:

VII. *Se $r (> 0)$ è semplice e ad essa sono associati autovettori positivi da ambo i lati, la matrice A è irriducibile.*

7. Enunciamo ora esplicitamente alcune proposizioni già sostanzialmente dimostrate nel corso dei ragionamenti che ci hanno portato alle proprietà precedenti.

VIII. *Se per un vettore $x > 0$ si ha $[s I - A] x_{-1} > 0$ (ovvero < 0) si ha $s > r$ (ovvero $s < r$). Se $[s I - A] x_{-1} \geq 0$ (ovvero ≤ 0) si ha $s \geq r$ (ovvero $s \leq r$). Analogamente a sinistra.*

Basta considerare un autovettore $z \geq 0$ associato ad r dalla sinistra, che ci darà $z x_{-1} > 0$. Dalle ipotesi consegue $s z x_{-1} > r z x_{-1}$ (e via di seguito), onde, etc.

Si ha pure:

$$m u \leq x \leq M u .$$

IX. *Se per $x \geq 0$ si ha $[s I - A] x_{-1} \geq 0$, A è riducibile ed s non è minore dalla radice caratteristica di massimo modulo del minore principale*

di A corrispondente agli elementi positivi di x , purchè detto minore non sia nullo nè pseudonullo. Se $[s I - A] x_{-1} \leq 0$, s non supera la radice ora detta, ma A non è necessariamente riducibile. Analogamente a sinistra.

Invero, posto, coi soliti scambi, $x = [x' | 0]$, $x' > 0$, $A \sim \begin{bmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A'' \end{bmatrix}$, dev'essere $-A_{21} x'_{-1} \geq 0$ il che esige $A_{21} = 0$. Si ha inoltre $[s I_1 - A'] x'_{-1} \geq 0$, quindi (propos. prec.) $s \geq r'$, con r' radice caratteristica di massimo modulo di A' supposta non nulla nè pseudonulla. Se $[s I - A] x_{-1} \leq 0$ non necessita che A_{21} sia nulla, ma se A' non è nulla nè pseudonulla, si ha $s \leq r'$.

8. Dimostriamo ora che:

X. Se $[s I - A]^{-1} \geq 0$ si ha $s > r$, e viceversa. Se $[s I - A]^{-1} > 0$, si ha $s > r$; se A è irriducibile, vale il viceversa.

Il viceversa della prima parte è stato dimostrato nei preliminari di questa Nota, al n. 1. Per la diretta, prendiamo $z \geq 0$ tale che $r z = z A$ e consideriamo un qualsiasi vettore $x_{-1} > 0$. Si avrà $[s I - A]^{-1} x_{-1} = y_{-1} > 0$, quindi

$$(1.15) \quad x_{-1} = [s I - A] y_{-1} > 0,$$

cioè $s y_{-1} > A y_{-1}$ che moltiplicata a sinistra per z ci dà $s z y_{-1} > r z y_{-1}$, con $z y_{-1} > 0$, e perciò $s > r$.

Se $[s I - A]^{-1} > 0$, per un qualsiasi vettore $x \geq 0$, si ha $[s I - A]^{-1} x_{-1} = y_{-1} > 0$ e procedendo come poco fa, riesce ancora $s > r$ ⁽¹³⁾. Se $s > r$, poichè, per la (1.3), è $[s I - A]^{-1} \geq 0$, da $x \geq 0$ arbitrario segue che $y_{-1} = [s I - A]^{-1} x_{-1}$ è un vettore (diverso da zero, altrimenti sarebbe anche $x = 0$) ≥ 0 oppure > 0 . Nel primo caso, permutando opportunamente gli elementi di y e allo stesso modo righe e colonne di A , si potrà porre $y = (0 | y'')$, $A = \begin{bmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A'' \end{bmatrix}$, $y'' > 0$. Si avrà subito $-A_{12} y'' \geq 0$ oppure $-A_{12} y'' \geq 0$, quindi $A_{12} = 0$, sicchè A sarebbe riducibile, contro l'ipotesi. È dunque sempre $[s I - A]^{-1} x_{-1} > 0$ per qualsiasi vettore $x \geq 0$; perciò $[s I - A]^{-1} > 0$.

Si ha inoltre che:

XI. I minori principali di ordine $\leq n$ di $s I - A$ hanno determinanti tutti positivi allora e solo che $s > r$.

Infatti, se B è un minore principale di A di ordine minore di n , permutando opportunamente allo stesso modo righe e colonne di A , si avrà:

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq A$$

⁽¹³⁾ In questa parte non ha giocato l'irriducibilità di A .

Sia infatti Q la parte principale che ammette la radice caratteristica r . Potremo scrivere

$$(1.16) \quad A \approx \left[\begin{array}{cc|c} P & B & C \\ \mathbf{0} & Q & C' \\ \hline \mathbf{0} & & D \end{array} \right]$$

con P, D matrici $\geq \mathbf{0}$ irriducibili o riducibili non ammettenti la radice caratteristica r . Consideriamo un autovettore associato ad r dalla destra e indichiamolo $x_{-1} = (x' | x'' | x''')_{-1}$. Si avrà:

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} [r I_1 - P] x'_{-1} = B x''_{-1} + C x'''_{-1} \\ [r I_2 - Q] x''_{-1} = C' x'''_{-1} \\ [r I_3 - D] x'''_{-1} = 0 \end{array} \right.$$

Sarà necessariamente $x''' = 0$, quindi potrà prendersi $x'' > 0$, perchè Q è irriducibile ed ammette r come radice caratteristica di modulo massimo. Essendo r maggiore della radice caratteristica (positiva) di modulo massimo di P , per teorema X si ha $[r I_1 - P]^{-1} \geq \mathbf{0}$ e quindi

$$x'_{-1} = [r I_1 - P]^{-1} B x''_{-1}$$

è positivo o nullo secondo che B non è od è nullo.

Analoga dimostrazione vale per un autovettore a sinistra.

10. La radice r sia di molteplicità due, quindi A necessariamente riducibile. Valgono le (1.5), con A' irriducibile, D eventualmente riducibile, entrambe ammettenti la radice caratteristica r .

Se l'indice di r è due, cioè la nullità di $[r I - A]$ è uno, gli spazi vettoriali associati ad r sono entrambi di dimensione uno e sono dati, per la prima delle forme (1.5), dagli autovettori

$$x_{-1} = (\varrho x' | 0)_{-1}, \quad y = (0 | \sigma y')$$

con $x' > 0$, $y' \geq 0$ soddisfacenti alle equazioni

$$(1.18) \quad [r I_1 - A'] x'_{-1} = 0; \quad y' [r I_2 - D] = 0$$

e ϱ, σ fattori scalari arbitrari. Si potrà quindi sempre avere $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Se l'indice di r è uno, cioè se la nullità di $[r I - A]$ è due, come certo accadrebbe se fosse $B = \mathbf{0}$, gli spazi vettoriali associati ad r sono di dimensione due. Consideriamo quello di destra, ancora per la prima delle (1.5).

Gli autovettori a destra associati ad r sono dati da $x_{-1} = (x' | x'')_{-1}$ con

$$(1.19) \quad \begin{cases} [r I_1 - A'] x'_{-1} = B x''_{-1} \\ [r I_2 - D] x'_{-1} = 0 \end{cases}$$

cosicchè si può prendere $x'' \geq 0$; ma se $B \neq \mathbf{0}$ non è detto che risulti $x' \geq 0$. Moltiplicando per l'aggiunta $[r I_1 - A']^*$ si ha:

$$(1.20) \quad 0 = [r I_1 - A']^* B x''_{-1}$$

che, essendo $[r I_1 - A']^* > \mathbf{0}$, esige $B x''_{-1} = 0$, dopo di che la prima delle (1.19) ci darà $x' > 0$. Abbiamo così ottenuto che:

XIV. *Sia r di molteplicità due, quindi A riducibile. Se r è di indice due, gli spazi vettoriali associati ad r sono di dimensione uno e contengono sottospazi della stessa dimensione costituiti da vettori tutti ≥ 0 . Se r è di indice uno, la dimensione degli spazi vettoriali associati è due ed essi contengono sottospazi ∞^2 di vettori tutti ≥ 0 solo quando siano soddisfatte opportune condizioni.*

Enunciati analoghi si hanno per r di molteplicità > 2 , con riguardo ai valori dell'indice.

11. Chiudiamo questo § con le seguenti notevoli precisazioni, per le matrici non negative, di un teorema di LAPPO-DANYLEWSKY [v. (14)]:

XV. *Se crescono tutti gli elementi di $A \geq \mathbf{0}$ irriducibile, cresce anche r ; se cresce solo qualche elemento, r non può decrescere.*

XVI. *Se A è irriducibile ed è $\mathbf{0} \leq A \leq B$, dalla coincidenza della radice caratteristica di massimo modulo di A con quella di B , segue che $A = B$.*

Per la prima parte della XV si consideri una matrice $B > \mathbf{0}$ (quindi irriducibile) con la radice caratteristica s e un autovettore $x > 0$ associato ad s dalla destra di B . Se è $\mathbf{0} \leq A < B$, moltiplicando a destra per x_{-1} si ha:

$$(1.21) \quad Ax_{-1} < Bx_{-1} = sx_{-1}$$

cioè $[sI - A]x_{-1} > 0$ da cui, per teor. VIII, segue che $s > r$.

Per la seconda parte, si abbia $\mathbf{0} \leq A \leq B$ e B ancora irriducibile. Nella (1.21) si avrà $x > 0$ ed al primo posto \leq invece di $<$; riesce quindi $[sI - A]x_{-1} \geq 0$, e per la VIII, sarà $s \geq r$.

Per dimostrare la XVI, sia A irriducibile, $\mathbf{0} \leq A \leq B$ ed $x > 0$ un autovettore per il quale $rx_{-1} = Ax_{-1}$, quindi:

$$(1.22) \quad rx_{-1} = Ax_{-1} \leq Bx_{-1}.$$

Se s è la radice caratteristica positiva e di massimo modulo per B , sia $z > 0$ un autovettore a sinistra di B associato ad s ; moltiplicando le (1.22) a sinistra per z si ha $z x_{-1} > 0$ ed

$$(1.23) \quad r z x_{-1} = z A x_{-1} \leq z B x_{-1} = s z x_{-1},$$

perciò $r \leq s$.

Se fosse $r = s$, dalle ultime segue che $z A x_{-1} = z B x_{-1}$ il che, per essere $x > 0$, $A x_{-1} > 0$, $B x_{-1} > 0$, richiede che sia $z A = z B$, onde, essendo $z > 0$, occorre avere anche $A = B$.

Nell'ultima dimostrazione è essenziale soltanto che a sinistra (a destra) di B ed a destra (a sinistra) di A siano associati, alle radici caratteristiche considerate, autovettori entrambi positivi. Anzi:

COR. *Se alle radici caratteristiche rispettive α e β di A e B non negative con $A \leq B$ sono associati da un lato di A e dall'altro di B autovettori uno > 0 l'altro ≥ 0 , si ha $\alpha \leq \beta$. E se $\alpha = \beta$ un certo numero di righe o colonne di A coincidono con le corrispondenti di B .*

Infatti, le (1.22), valgono per $r = \alpha$, anche se $x \geq 0$ e seguono, per $z > 0$, le (1.23) con $s = \beta$. Così, con $r = \alpha$ ed $s = \beta$, per $z \geq 0$ si ha $sz = zB \geq zA$ da cui, moltiplicando per $x_{-1} > 0$ associato ad r , si ha $sz x_{-1} = z B x_{-1} \geq z A x_{-1} = r z x_{-1}$, quindi $s \geq r$. Se si ha $s = r$ è dunque $z A x_{-1} = z B x_{-1}$ che, se $z > 0$, esige $A x_{-1} = B x_{-1}$, ma se $x \geq 0$ solo le colonne di A corrispondenti agli elementi > 0 di x coincidono con le corrispondenti di B .

§. 2 Matrici primitive e matrici stocastiche.

12. La forma canonica delle matrici (sia quella di Jordan che quella nostra del 1936) ed il modo come si costruisce $f(A)$, con $f(z)$ serie di potenze o polinomio, A matrice reale o complessa⁽¹⁵⁾, ci consente di riconoscere subito che affinché la successione delle potenze di A ad esponenti interi positivi sia convergente occorre e basta che le radici caratteristiche di A siano tutte di modulo inferiore all'unità, salvo al più una che può essere eguale ad 1, purchè sia di indice uno.

Ne segue che:

I. *La successione delle potenze (ad esponente intero positivo) di una matrice non negativa A irriducibile la cui radice positiva di massimo modulo è $r = 1$ converge allora e solo che A sia primitiva⁽¹⁶⁾. Se $r < 1$ la successione predetta converge alla matrice nulla.*

⁽¹⁵⁾ « Matrici », cap. 2, § 4, formula (34), p. 170.

⁽¹⁶⁾ Cioè non posseda altre radici dello stesso modulo di r . Cfr. « Matrici », cap. II, § 2, n. 12, p. 141.

Ricordiamo ⁽¹⁷⁾ che l'aggiunta $[z I - A]^*$, con z indeterminata, è combinazione lineare delle prime $n - 1$ potenze di A , a cominciare da $A^0 = I$. Perciò, se A è irriducibile, quindi $[r I - A]^* > 0$, nelle prime $n - 1$ potenze di A gli elementi di uno stesso posto qualunque non possono esser tutti zero; perciò è anche:

$$(2.1) \quad I + A + A^2 + \dots + A^{n-1} > \mathbf{0}.$$

Moltiplicando per una qualsiasi potenza ad esponente positivo di A , il prodotto è ancora $> \mathbf{0}$, quindi:

II. Se $A \geq \mathbf{0}$ è irriducibile, la somma di n potenze consecutive di A (ad esponenti ≥ 0) è sempre positiva.

Sia L il limite cui converge la successione delle potenze di A . Dal teor. II segue che $L > \mathbf{0}$. Infatti, da un certo esponente m in poi, gli elementi delle potenze di A hanno gli stessi segni dei corrispondenti elementi di L , quindi altrettanto accade per la somma $A^m + A^{m+1} + \dots + A^{m+n-1}$, che è $> \mathbf{0}$. Dunque:

III. Se A è primitiva, le sue potenze, da un certo esponente in poi, sono tutte positive ⁽¹⁸⁾. Si osservi che non è necessario supporre $r = 1$, perchè se fosse $r \neq 1$ si considererà al posto di A la matrice $\frac{1}{r} A$, il che non altera i segni degli elementi delle potenze nè quelli degli elementi del limite L .

13. Per A primitiva ed $r = 1$, qualunque sia l'esponente intero positivo p , x_{-1} , y autovettori positivi associati ad r dalla destra e dalla sinistra di A , si ha

$$A^p x_{-1} = x_{-1}; \quad y A^p = y$$

da cui, per $p \rightarrow \infty$:

$$(2.2) \quad L x_{-1} = x_{-1}, \quad y L = y A.$$

Qualunque sia il vettore $z > 0$ si può scrivere $z A^p \cdot A = z A^{p+1}$ e facendo tendere p all'infinito, si ha:

$$(2.3) \quad z L \cdot A = z L.$$

Confrontando con la seconda delle (2.2) si ha $z L = \lambda y$, con λ scalare po-

⁽¹⁷⁾ *Ibidem*, cap. I, § 13, n. 43, p. 93, formola (23).

⁽¹⁸⁾ La dimostrazione data in « *Matrici* », II, § 2, n. 12 h) p. 143, è del tutto diversa. Quella di sopra si avvicina di più alla dimostrazione puramente algebrica del FROBENIUS.

sitivo opportuno. Moltiplicando la (2.3) a destra per x_{-1} e tenendo presente la prima delle (2.2), si ottiene

$$z L x_{-1} = z x_{-1} = \lambda y x_{-1}$$

quindi:

$$\lambda = z x_{-1} \cdot (y x_{-1})^{-1}$$

e perciò

$$z L = z \cdot x_{-1} (y x_{-1})^{-1} y$$

da cui, per l'arbitrarietà di $z > 0$, e poichè $L > \mathbf{0}$, segue che:

$$(2.4) \quad L = x_{-1} \cdot (y x_{-1})^{-1} \cdot y = (y x_{-1})^{-1} \cdot x_{-1} y,$$

sicchè il rango di L è uno.

Un procedimento analogo può ripetersi con A matrice reale o complessa e $\lim_{p \rightarrow \infty} A^p = L$, la radice caratteristica 1 di A essendo di molteplicità m ed indice uno. In tal caso x_{-1} ed y diventano due matrici X ed Y di tipo rispettivo (n, m) ed (m, n) e rango comune m , con λ vettore orizzontale ad m componenti. Poichè ⁽¹⁹⁾ YX è una matrice non singolare (di ordine m) risulta

$$(2.4') \quad L = X \cdot (Y X)^{-1} \cdot Y$$

ed L ha rango m , come seguirebbe subito dalla (34), cit. ⁽¹⁵⁾

14. Se $A \geq \mathbf{0}$ è irriducibile ma imprimitiva, cioè se A ammette $h > 1$ radici caratteristiche di modulo r , questa compresa, si ha ⁽²⁰⁾:

$$(2.5) \quad A \sim \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A_{12} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{23} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{h-1,h} \\ A_{h,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

le matrici $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{h1}$ essendo non nulle e non necessariamente quadrate (lo sono quelle nulle sulla diagonale principale). La potenza h^{ma} di A risulta composta degli h prodotti che si ottengono moltiplicando le parti $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{h,1}$ negli h ordini ottenuti permutandole circolarmente. Le h radici caratteristiche di A aventi lo stesso modulo di r si scrivono $r e^i$,

⁽¹⁹⁾ « Matrici », II, § 4, n. 25 o'), p. 174.

⁽²⁰⁾ *Ibidem*, cap. II, § 2, n. 10 e), p. 139.

$i = 1, 2, \dots, h$, ε essendo una radice primitiva h^{ma} dell'unità. Inoltre, moltiplicando A per ε le radici caratteristiche di A vengono moltiplicate anch'esse per ε e quelle di modulo r si permutano tra loro. La potenza A^h possiede quindi r^h come radice h -pla, di modulo massimo e con lo stesso indice che r ha come radice caratteristica di A , ossia uno ⁽²¹⁾. Cioè $[r^h I - A^h]$ è di rango $n - h$ e gli spazi vettoriali associati ad r^h dalla sinistra e dalla destra sono di dimensione h .

Poichè r è semplice per A , ad r sono associati, sia dalla sinistra che dalla destra, spazi vettoriali di dimensione uno e se $x > 0$ è un autovettore associato ad r , esso è associato anche ad r^h dallo stesso lato di A^h : quindi gli spazi associati ad r per A sono contenuti in quelli associati ad r^h dallo stesso lato di A^h . Essendo $x > 0$, r^h è radice caratteristica comune alle h componenti di A^h : sarà però radice semplice (e di massimo modulo) per ciascuna di esse, altrimenti r^h sarebbe di molteplicità superiore ad h per A^h . Per la proposizione VII del § 1, le componenti di A^h sono tutte irriducibili, anzi primitive, perchè ogni altra loro radice caratteristica ha modulo minore di r . Possiamo dunque enunciare che:

IV. *Se A è irriducibile, ma non primitiva, ed h è il numero delle sue radici caratteristiche di modulo massimo (eguale ad r) le h componenti di A^h sono tutte primitive.*

15. Si dice che la matrice A è *stocastica per righe (per colonne)* quando è non negativa e la somma degli elementi di ciascuna riga (di ciascuna colonna) è sempre eguale ad 1, sicchè $r = 1$. Si dice che A è *doppiamente stocastica* se è stocastica sia per righe che per colonne ⁽²²⁾.

Il prodotto di due o più matrici stocastiche per righe (per colonne) è ancora tale. Un cambiamento di unità di misure per gli assi di riferimento dello spazio vettoriale ambiente trasforma ogni matrice A in un'altra ⁽²³⁾:

$$A' = K^{-1} A K$$

con K matrice diagonale ad elementi principali tutti positivi (rapporti con le nuove unità). Ponendo

$$u K = (k_1, k_2, \dots, k_m) = k > 0$$

⁽²¹⁾ « Matrici », II, § 4, n. 23 e-e'), pp. 171-172.

⁽²²⁾ La stocasticità può attribuirsi anche a matrici rettangolari.

⁽²³⁾ Cfr. R. SOLOW: *On the structure of linear models* [« Econometrica », XX (1952) pp. 29-46]

con u vettore orizzontale a componenti tutte unitarie, si ha:

$$A' = \left[\begin{array}{c} k_j \\ k_i a_{ij} \end{array} \right].$$

Perchè A' sia stocastica, ad es. per righe, cioè sia $A'u_{-1} = u_{-1}$, occorre avere

$$(2.6) \quad [I - A]k_{-1} = 0, \quad k_{-1} = K u_{-1} > 0,$$

quindi A deve ammettere una radice caratteristica eguale ad 1, che sarà la radice positiva di massimo modulo ⁽²⁴⁾ di A' quindi di A . Questa condizione, per A irriducibile, è sufficiente perchè, come mostra la (2.6), un autovettore associato al $r = 1$ risulta positivo (eguale a k). Dunque:

V. *Affinchè una matrice non negativa A diventi stocastica per righe (per colonne) con un cambiamento di unità di misura sugli assi di riferimento, è sufficiente che A sia irriducibile e che $r = 1$. La condizione $r = 1$ è necessaria qualunque sia $A \geq \mathbf{0}$.*

Il cambiamento di unità di misure che rende stocastica A rende tale ogni sua potenza, quindi se A è irriducibile ma non primitiva, rende stocastiche anche tutte le componenti di A^n considerate avanti. La matrice K è determinata a meno di un fattore scalare positivo. Se A è composta di matrici irriducibili aventi a comune, ed eguale ad uno, la radice caratteristica positiva di massimo modulo, ciascuna componente diventa stocastica con un proprio cambiamento di unità di misure indipendente delle altre.

Perchè A diventi doppiamente stocastica occorre e basta che, oltre alle (2.6) si abbia

$$(2.6') \quad k'[I - A] = 0, \quad k' = u K^{-1} > 0,$$

cioè

$$k' = (k'_1, k'_2, \dots, k'_n), \quad k'_i = k_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Le somme degli elementi di ciascuna riga (di ciascuna colonna) di $A \geq \mathbf{0}$ irriducibile siano parte eguali ad $s > 0$, le rimanenti minori di s . Sarà perciò $r \leq s$. Anzi, essendo per un noto teorema (di O. TAUSKY)⁽²⁵⁾ $sI - A$ non singolare, sarà $r < s$. La seconda parte del teorema VIII del § 1 ci avrebbe dato soltanto $r \leq s$.

⁽²⁴⁾ « Matrici », cap. II, §. 2, n. 11, f'), p. 147,

⁽²⁵⁾ « Matrici », cap. III, §. 2, n. 11, p. 214.

Se $s = 1$, la matrice considerata non sarà trasformabile in matrice stocastica con semplice cambiamento di unità di misura.

La matrice $B = \frac{1}{r} A$ con A irriducibile è sempre trasformabile in una matrice stocastica con solo cambiamento di unità di misure.

16. La matrice riducibile $A \geq \mathbf{0}$ sia o possa diventar stocastica, ad es. per righe, con un cambiamento delle unità di misura sugli assi. Varrà sempre la (2.6) quindi è $r = 1$. Con riferimento alla forma (1.4) e alla dimostrazione della XII del § 1, $r = 1$ sarà radice caratteristica di $A^{(q)}$ e manca la parte nulla o pseudonulla. Ciascuna parte principale di A subisce un cambiamento di unità di misura determinato dalla corrispondente componente della matrice diagonale K , ma generalmente solo l'ultima è o diventa anch'essa stocastica per righe. Lo diventa pure, ad es., A'' allora e soltanto allora che le matrici $A_{23}, A_{24}, \dots, A_{2q}$ sono nulle.

Dicendo che la parte principale $A^{(i)}$ è *isolata nelle proprie righe (nelle proprie colonne)* quando nelle righe (colonne) di A cui essa appartiene gli elementi che non stanno in $A^{(i)}$ sono tutti zero, si conclude col seguente enunciato:

• VI. Sia $A \geq \mathbf{0}$ una matrice riducibile stocastica per righe (per colonne) o che può diventar tale con un cambiamento di unità di misura sugli assi di riferimento. Manca la parte nulla o pseudonulla ed una sua parte principale è o diventa anch'essa stocastica per righe (per colonne) allora e solo che è isolata nelle proprie righe (nelle proprie colonne); quindi è sempre tale l'ultima (la prima). Le parti principali sono o diventano tutte stocastiche insieme ad A allora e solo che A sia composta con esse.