

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VITTORIO EMANUELE GALAFASSI

## **La parte reale delle rigate astratte reali**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 9, n° 3-4 (1955), p. 283-304*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1955\\_3\\_9\\_3-4\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_283_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LA PARTE REALE DELLE RIGATE ASTRATE REALI

di VITTORIO EMANUELE GALAFASSI (Pavia)

1. — In un precedente lavoro<sup>(1)</sup>, è stata dimostrata l'esistenza di rigate astratte<sup>(2)</sup> reali, di assegnato genere  $p$ , dotate di un numero di falde *comunque elevato*, estendendo così, alle rigate astratte di genere  $p > 0$  qualunque, una constatazione che, nel caso  $p = 0$ , è implicita nei risultati offerti dalle classiche ricerche di A. COMESSATTI sulle superficie razionali reali<sup>(3)</sup>.

Nella presente Memoria si giunge a constatare, molto più precisamente, come — fissata comunque una *classe* (complessa)  $\Omega$  di rigate astratte contenente rigate astratte reali con generatrici reali — esistano entro  $\Omega$  *classi reali* rispondenti ad un numero di falde *arbitrariamente assegnato*, anzi assegnabile ad arbitrio per ciascun circuito della rigata reale, intesa come ente  $\infty^1$  di generatrici.

Un tale risultato qui discende peraltro da una proposizione esistenziale di ben più ampia portata.

---

<sup>(1)</sup> V. E. GALAFASSI, *Sulle falde delle rigate astratte reali*, « Riv. di Mat. di Parma », 3 (1952), pp. 65-73.

<sup>(2)</sup> Secondo una denominazione introdotta dal SEVERI, dicesi *rigata astratta* ogni superficie algebrica che possieda un fascio di curve razionali (le quali diconsi *generatrici* della rigata). Cfr. F. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche*, « Rend. di Mat. di Roma » (5), 2 (1941), pp. 1-32. Cfr. anche: A. MARONI, *Sulle rigate astratte*, *Ibidem*, 7 (1948), pp. 236-242.

<sup>(3)</sup> A. COMESSATTI, a) *Sulle superficie razionali reali*, « Rend. Acc. Lincei », (5), 20<sub>2</sub> (1911), pp. 597-602; b) *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale*, « Math. Ann. », 73 (1912) pp. 1-72; c) *Sulla connessione delle superficie razionali reali*, « Ann. di Mat. », (3), 23 (1914), pp. 215-284. Ma conviene pure richiamare dello stesso A. il più recente resoconto: d) *Problemi di realtà per le superficie e varietà algebriche*, « R. Acc. d'Italia (IX Convegno A. Volta, Atti) », Roma 1943, pp. 15-41.

Introdotte dapprima (num. 2) alcune ipotesi semplificatrici, anche meno vincolanti di quelle altrove occorse<sup>(4)</sup>, coll'ausilio della teoria topologica dei fasci di curve grafiche sopra una superficie<sup>(5)</sup>, si precisano (num. 3-6) gli elementi che intervengono nella descrizione dell'*assetto* della parte reale di una rigata appartenente ad una assegnata classe  $\Omega$ , pure mettendo in evidenza (num. 6) come tale descrizione risponda ad esigenze maggiori di quelle che si manifestano con altri atteggiamenti. Esigenze minori si hanno invero sotto l'aspetto della topologia della parte reale della superficie (comprendendovi o meno quella del fascio delle generatrici), e per la ricerca di caratteri globali come ad es. il numero  $m$  delle falde e l'ordine di connessione totale  $Z$  della parte reale.

La trattazione svolta, mentre stabilisce alcune circostanze che deve presentare il detto assetto, spontaneamente pone (num. 7) il quesito della esistenza, entro la classe  $\Omega$ , di rigate astratte reali rispondenti a ciascuno degli assetti che rispettano le condizioni già ravvisate necessarie.

Al quesito, i successivi sviluppi del presente lavoro danno risposta affermativa, in modo anzi che può giudicarsi esauriente, perchè si mostra che la scelta degli elementi idonei a fissare un determinato assetto lecito non risulta ulteriormente vincolata.

A tutti gli scopi provvede un processo costruttivo che associa ad una assegnata curva  $C_p$  (che individua la classe  $\Omega$  di rigate astratte) ed a funzioni razionali del punto sopra essa corrente, una rigata astratta  $F_p$ , birazionalmente riferita alla curva (e quindi appartenente alla classe  $\Omega$ ). Ciò può conseguirsi nel modo più elementare introducendo della  $C_p$  un modello in uno spazio  $S_3$  ove pure siasi fissata una metrica euclidea.

Dopo alcuni preliminari nell'ambito complesso (num. 8), passando alle questioni di realtà giovano alcune considerazioni intese a dimostrare con rigore alcuni fatti, di intuizione immediata, riscontrabili sopra un modello di  $C_p$  introdotto in  $S_3$  senza punti multipli e senza punti reali all'infinito (num. 9).

Facendo pure buon uso di altre premesse (num. 10) si raggiunge (num. 11) una proposizione esistenziale la quale, coll'ulteriore intervento (num. 12) di un processo già utilizzato altrove<sup>(6)</sup>, ne fornisce altra in tutto soddisfacente agli intenti proposti.

<sup>(4)</sup> Cfr. <sup>(1)</sup>, num. 7. Ed anche: V. E. GALAFASSI, *Sulla base reale e sulla connessione delle rigate astratte reali*, « Rend. Ist. Lomb. » 85 (1952), pp. 260-272.

<sup>(5)</sup> L. BRUSOTTI, *Premesse topologiche allo studio dei fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale*, « Ann. di Mat. » (4), 25 (1946), pp. 67-109.

<sup>(6)</sup> Cfr. V. E. GALAFASSI <sup>(4)</sup>, num. 6.

Si aggiungono alcune osservazioni rivolte a lumeggiare sotto altri aspetti i risultati della ricerca (num. 13), e si sottopone ad ulteriore esame il processo costruttivo qui introdotto mettendo in evidenza (num. 14) come esso offra la possibilità di realizzare in  $\mathcal{S}_3$  modelli di rigate astratte reali con parte reale tutta al finito e priva di singolarità, ogni qual volta una tale possibilità non sia altrimenti da escludere.

2. — Detta  $F_p$  una rigata astratta (irriducibile) di genere  $p$ , con  $\Phi_p$  s'indicherà il fascio delle generatrici e con  $C_p$  una curva (di genere  $p$ ) ad esso birazionalmente riferita, la quale si chiamerà *immagine* della rigata.

Sotto l'aspetto birazionale (complesso), fissata la curva  $C_p$  è individuata sotto lo stesso aspetto ed in senso « assoluto » la rigata  $F_p$ , ossia è fissata la *classe*  $\Omega$  cui la  $F_p$  appartiene (7).

Si supporrà solitamente  $p > 0$  per evitare quelle indagini particolari che talora richiede il caso  $p = 0$ . Ma d'altra parte in tale caso si avrebbero superficie razionali allo studio delle quali, dal punto di vista reale, hanno esaurientemente provveduto le specifiche ricerche del COMESSATTI.

Per  $p > 0$  è noto, e del resto ovvio, che è unico il fascio  $\Phi_p$ , ed esso potrà ritenersi *privo di punti-base*, escludendo così che in un modello proiettivo della rigata astratta si abbiano singolarità *proprie* (nel noto senso del SEVERI).

Sotto l'aspetto birazionale (complesso), ma nel senso « relativo », sono da considerare le generatrici riducibili. Si supporrà che ciascuna di esse sia spezzata in due sole componenti semplici distinte (necessariamente razionali ed unisecantisi) ovvero coincidenti in una stessa curva (necessariamente razionale) priva di singolarità. E s'indicherà risp. con  $D$  e  $D^*$  il numero delle generatrici riducibili dei due tipi, anche supponendo che, nel gruppo delle generatrici spezzate, ciascuna sia da contare una sola volta (8).

3. — Ciò posto, si supponga che  $F_p$  sia reale.

Sarà allora reale, in quanto unico, il fascio  $\Phi_p$  e come curva immagine  $C_p$  s'introdurrà, com'è lecito, una curva reale in corrispondenza birazionale reale con  $\Phi_p$ .

Se  $C_p$  è priva di parte reale, il fascio  $\Phi_p$  è privo di curve reali, quindi  $F_p$ , priva di generatrici reali, è senz'altro priva di parte reale almeno dal punto di vista birazionale: non escludendo cioè che un modello proiettivo

(7) Cfr. F. SEVERI, (2), num. 1.

(8) Per ulteriori informazioni in proposito, cfr. V. E. GALAFASSI, (4), num. 7. Ivi però si suppone  $D^* = 0$ .

di  $F_p$  possa avere punti (multipli) isolati reali ovvero curve (multiple) isolate reali, non interessanti peraltro la geometria sulla superficie reale.

4. — Volendo ormai considerare solo  $F_p$  dotate di generatrici reali, si considereranno solo  $C_p$  dotate di parte reale, cioè con  $k \geq 1$  circuiti:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$$

ove, tenendo presente il classico teorema di HARNACK, sarà:

$$(1) \quad 1 \leq k \leq p + 1.$$

I circuiti  $\omega_i$ , pensati come insiemi delle corrispondenti generatrici di  $F_p$ , si diranno « circuiti  $\omega$  » della rigata.

Dopo di ciò, facendo intervenire la teoria topologica dei fasci di curve grafiche (parti reali delle curve reali di  $\Phi_p$ ) sopra una superficie (parte reale di  $F_p$ ), e pure adottandone la nomenclatura, si hanno immediatamente gli sviluppi che seguono, appena si tenga presente che una curva irriducibile razionale reale e dotata di parte reale consta di un solo circuito.

Nelle ipotesi ammesse (n. 2), una generatrice riducibile reale o sarà priva di parte reale (con due componenti reali coincidenti senza parte reale) ovvero sarà d'uno dei tre tipi: *generatrice*  $G'$  con due componenti reali distinte, avente come parte reale due circuiti unisecantisi (in un *incrocio* del fascio  $\Phi_p$ ); *generatrice*  $G''$  con due componenti immaginario-coniugate avente parte reale ridotta ad un punto (*centro critico isolato* per  $\Phi_p$ ); *generatrice*  $G^*$  con due componenti coincidenti in una stessa curva reale dotata d'un circuito privo di singolarità (*circuito critico* per  $\Phi_p$ ). Il numero delle  $G'$ ,  $G''$ ,  $G^*$  del circuito  $\omega_i$  s'indicherà con  $c'$ ,  $c''$ ,  $c^*$  risp. <sup>(9)</sup>.

Le rimanenti generatrici di  $\omega_i$ , cioè le generatrici irriducibili, si ripartiranno in generatrici prive e risp. dotate di parte reale, separate, entro il continuo  $\omega_i$ , da generatrici  $G''$  ovvero  $G^*$ . Più precisamente se  $c_i'' + c_i^* \neq 0$ , le  $c_i'' + c_i^*$  generatrici  $G''$  e  $G^*$  ripartiscono il circuito  $\omega_i$  in altrettanti « segmenti », alternatamente di generatrici prive di parte reale (*segmenti negativi*) e risp. di generatrici con parte reale (*segmenti positivi*); mentre se  $c_i'' + c_i^* = 0$ , od  $\omega_i$  non contiene generatrici con parte reale (*circuito negativo*), ovvero tutte le generatrici di  $\omega_i$  sono dotate di parte reale (*circuito positivo*). In ogni caso comunque è:

$$(2) \quad c_i'' + c_i^* \equiv 0 \pmod{2}.$$

<sup>(9)</sup> Cfr. V. E. GALAFASSI, <sup>(1)</sup> e <sup>(4)</sup>, ove si usano notazioni analoghe.

A ciascun segmento positivo ed a ciascun circuito positivo della parte reale di  $C_p$  è associata una falda della rigata  $E_p$ , sulla quale le parti reali delle generatrici costituiscono un fascio  $\varphi$  (privo di punti-base) di curve grafiche.

Escludendo per il momento gli incroci (cioè supponendo nullo ciascun  $c_i$ ) si può anzi affermare che topologicamente il tipo di ciascuna falda è uno dei cinque seguenti:

Tipo  $A_1$ . — Falda d'ordine di connessione  $Z=0$  (del tipo « sfera ») con fascio  $\varphi$  dotato di due centri critici, aventi ufficio di estremi (omeomorfo ad un fascio di paralleli sull'ordinaria sfera).

Una falda siffatta è associata ad un segmento positivo avente per estremi due generatrici  $G''$ .

Tipo  $A_2$ . — Falda d'ordine di connessione  $Z=1$  (del tipo « piano proiettivo ») con fascio  $\varphi$  avente come estremi un centro critico ed un circuito critico (omeomorfo ad un fascio di cerchi concentrici nell'ordinario piano proiettivo).

Una falda siffatta è associata ad un segmento positivo avente per estremi una generatrice  $G''$  ed una generatrice  $G^*$ .

Tipo  $A_3$ . — Falda non orientabile d'ordine di connessione  $Z=2$ , con fascio  $\varphi$  avente per estremi due circuiti critici<sup>(10)</sup>.

Una falda siffatta risponde ad un segmento positivo avente come estremi due generatrici  $G^*$ .

Tipo  $B_1$ . — Falda orientabile d'ordine di connessione  $Z=2$  (del tipo « toro », ossia « quadrica rigata »), con fascio  $\varphi$  privo di centri o circuiti critici (omeomorfo al fascio dei meridiani, risp. delle generatrici di un regolo).

Tipo  $B_2$ . — Falda non orientabile d'ordine di connessione  $Z=2$  (del tipo « rigata cubica razionale reale »), con fascio  $\varphi$  privo di centri o di circuiti critici (omeomorfo a quello delle generatrici).

<sup>(10)</sup> Come modello in  $S_3$  di falde di Tipo  $A_3$  può fornirsi la parte reale della rigata cubica razionale reale. Rappresentata questa, su un piano proprio reale, mediante un sistema lineare  $\infty^3$  reale di coniche avente come unico punto-base un punto  $O$  proprio reale, il fascio  $\varphi$  è omeomorfo ad es. a quello che ha per immagine il fascio di cerchi con centro in  $O$ .

Altro modello è fornito dalla parte reale della superficie  $(x^2 + y^2)(1 - z^2) = 1$  di rotazione. Su questa il fascio  $\varphi$  è omeomorfo a quello dei paralleli (sezioni coi piani  $z = h$ , ove:  $-1 \leq h \leq 1$ ).

Si noterà che entrambi i modelli ammettono una linea doppia. Ma ciò è inevitabile perchè, nello  $S_3$  proiettivo (reale), una falda d'ordine di connessione pari se è priva di singolarità è falda pari, quindi bilatera, cioè orientabile (mentre una falda di Tipo  $A_3$  è non orientabile). Perciò basta invero riprendere le argomentazioni svolte in: L. BRUSOTTI, *Sull'ordine di connessione delle superficie algebriche reali*, « Rend. Ist. Lomb. », 88 (1944-45), pp. 360-366, num. 5.

Questi due ultimi tipi rispondono a falde associate a circuiti positivi. Una falda siffatta risulta precisamente orientabile (Tipo  $B_1$ ) o non orientabile (tipo  $B_2$ ) secondo che il circuito *orientato* di  $\varphi$ , descrivendo con continuità il fascio  $\varphi$ , ritorna alla posizione iniziale con lo stesso orientamento oppure risp. con l'opposto.

5. — Togliendo ora una esclusione introdotta al num. prec., si ammettano gli incroci, ossia le generatrici  $G'$ .

Esse, in quanto dotate di parte reale, saranno necessariamente in circuiti o segmenti positivi.

La caratterizzazione topologica di una falda associata ad un segmento (o circuito) positivo che contenga  $e > 1$  generatrici  $G'$  non offre difficoltà. Essa invero risulta sempre non orientabile, ed il suo ordine di connessione vale  $Z + e$ , essendo  $Z$  l'ordine di connessione della falda che — in assenza d'incroci — si associerebbe (num. 4) allo stesso segmento (o circuito).

È poi ovvia la descrizione (qualitativa) del fascio  $\varphi$  di cui la falda è sostegno <sup>(4)</sup>.

6. — Sotto le ipotesi semplificatrici introdotte al num. 2, gli sviluppi dei num. 3-5 mettono in evidenza come la completa descrizione dello *assetto* della parte reale di una assegnata rigata astratta reale  $F_p$ , possa utilmente articolarsi, in successive fasi, nel modo seguente:

1<sup>o</sup>) Descrizione della eventuale parte reale della curva immagine  $C_p$ ;

2<sup>o</sup>) Distinzione degli eventuali circuiti positivi e negativi di  $C_p$ ; e, su ciascuno degli eventuali circuiti rimanenti, introduzione della loro ripartizione in segmenti alternatamente positivi e negativi;

3<sup>o</sup>) Attribuzione delle generatrici corrispondenti agli estremi di detti segmenti alle  $G''$  od alle  $G^*$ ; precisazione degli eventuali punti (di segmenti o circuiti positivi) che corrispondono a generatrici  $G'$ ; e — in relazione ad eventuali circuiti positivi senza punti corrispondenti a generatrici  $G'$  — indicazione della orientabilità o meno della falda associata.

Con 1<sup>o</sup>) invero si fissa il numero dei « circuiti  $\omega$  » della rigata, con 2<sup>o</sup>) il numero  $m_i$  delle falde associate a ciascun circuito  $\omega_i$  [ $m_i = 1$ , se  $\omega_i$  è circuito positivo;  $m_i = \frac{1}{2}(c_i'' + c_i^*)$ , in ogni altro caso], con 3<sup>o</sup>) infine si fissa l'individualità topologica di ciascuna falda nonchè del fascio  $\varphi$  di cui essa è sostegno.

---

<sup>(4)</sup> Come si è avvertito, la trattazione dei num. 4, 5 fa largo ricorso alla teoria topologica elaborata da L. BRUSOTTI <sup>(5)</sup>. Applicazioni della teoria già trovansi in V. E. GALAFASSI, <sup>(1)</sup>, <sup>(4)</sup>, ed ancora in L. BRUSOTTI, *Fasci reali di curve algebriche a curva reale generica massimale*, « Rend. di Mat. di Roma », <sup>(5)</sup>, 14 (1954), pp. 239-251.

Si è allora anche in grado di caratterizzare compiutamente la parte reale della rigata sotto l'aspetto della topologia, il che risponde ad una esigenza minore in quanto consente di prescindere dal modo in cui le singole falde si distribuiscono in « circuiti  $\omega$  » della rigata.

Ancor minore sarebbe l'esigenza della topologia della parte reale della superficie indipendentemente da quella del fascio delle generatrici, perchè allora fra falde omeomorfe ma con un diverso fascio  $\varphi$  non sarebbe a farsi distinzione.

Se poi, come talora si ritiene sufficientemente significativo, si reca l'attenzione soltanto a caratteri globali della parte reale, quale il numero complessivo  $m$  delle falde e l'ordine di connessione totale  $Z$ , le esigenze scemano ulteriormente.

Allora basta conoscere i numeri complessivi :

$$(2) \quad c' = \sum_{i=1}^k c'_i, \quad c'' = \sum_{i=1}^k c''_i, \quad c^* = \sum_{i=1}^k c^*_i$$

risp. delle generatrici  $G'$ ,  $G''$ ,  $G^*$ , e il numero  $k_0$  dei circuiti positivi. Invero, come subito si riscontra, si ha :

$$(3) \quad m = \frac{1}{2}(c'' + c^*) + k_0$$

e :

$$(4) \quad Z = c' - c'' + 2.$$

Si tratta del resto di adattare, alla più generale posizione attuale ( $c^* \geq 0$ ), argomentazioni già svolte altrove <sup>(12)</sup> supponendo  $c^* = 0$ .

Oss. I. — Confrontando, in relazione ai *problemi di HARNACK*, la presente trattazione con la precedente nella quale si escludevano le generatrici  $G^*$ , si avverte l'intervento di un fatto nuovo.

Così la limitazione superiore per il numero  $m$  là registrata <sup>(13)</sup>, deve ora sostituirsi con la seguente :

$$(5) \quad m \leq \begin{cases} p + 1, & \text{se } D + D^* \leq 3, \\ \left[ \frac{D + D^*}{2} \right] + p, & \text{se } D + D^* \geq 2. \end{cases}$$

<sup>(12)</sup> Cfr. V. E. GALAFASSI, (1), num. 8 ; risp. (4), num. 5.

<sup>(13)</sup> Cfr. num. 8 di (1), specialmente le (10) e (11).



La limitazione (5) peraltro si consegue con argomentazioni del tutto analoghe, movendo dalle:

$$k \leq p + 1, \quad c'' \leq D, \quad c^* \leq D^*$$

di immediata necessità, ovvero dalle:

$$k \leq p + 1, \quad c'' + c^* \leq D + D^*$$

con aderenza anche maggiore<sup>(14)</sup>.

Oss. II. — L'ammissione di generatrici  $G^*$  non interviene invece nel calcolo di  $Z$ , almeno in modo diretto<sup>(15)</sup>.

Ricordando lo stretto legame che, come ha messo in luce il COMESSATTI, intercede tra i *problemi di connessione* e quelli della *base reale*, è da prevedere che anche in questi ultimi l'ammissione di generatrici  $G^*$  non abbia ripercussioni sostanziali.

Ma giova osservare che il sopravvento di una generatrice  $G^*$  nemmeno altera la *base complessa* della rigata; ogni componente  $L^*$  di generatrici  $G^*$  è invero — sulla superficie  $F_p$  — algebricamente equivalente ad una generatrice  $L$  generica<sup>(16)</sup>.

Precisamente:

$$2 L^* \equiv L.$$

7. — Assegnata una curva reale  $C_p$ , si riprenda la conclusione raccolta all'inizio del num. prec.

Essa, per le rigate astratte reali  $F_p$  aventi  $C_p$  quale curva immagine, addita come *presumibile* ogni assetto della parte reale che (supposta  $C_p$  con parte reale) risponda ad una scelta arbitraria dei successivi atti richiesti in 2° ed in 3°).

Ma sorge spontaneo il seguente quesito:

*Assegnata arbitrariamente una curva  $C_p$ , esistono rigate astratte reali, aventi  $C_p$  quale curva immagine, la cui parte reale risponda ad uno qualunque degli assetti presumibili?*

<sup>(14)</sup> Anche le osservazioni raccolte al num. 9 di (4) si estendono senza difficoltà.

<sup>(15)</sup> D'altra parte l'ammissione delle generatrici  $G'$  non sposta i problemi di HARNACK, mentre influisce su quelli di connessione.

<sup>(16)</sup> Ne consegue che l'intera trattazione del lavoro (4), per quanto sia esplicitamente svolta escludendo le generatrici  $G^*$ , è di fatto valida (con ovvii adattamenti esteriori) anche dopo la loro ammissione.

E subordinatamente (quando  $C_p$  ha parte reale e l'assetto desiderato richiede generatrici  $G', G'', G^*$ ):

*È possibile fissare arbitrariamente sulla parte reale di  $C_p$  i punti corrispondenti alle generatrici  $G', G'', G^*$  richieste per un determinato assetto?*

Orbene, nei successivi sviluppi della presente Memoria, si riuscirà a dare risposta affermativa ad entrambi i quesiti, utilizzando un processo costruttivo che verrà tosto introdotto.

Nella scelta dell'assetto della parte reale di una  $F_p$  reale, si mostrerà dunque che non intervengono vincoli, al di fuori di quelli già ravvisati come necessari (num. i 3-5).

8. — Dapprima al di fuori di ogni questione di realtà, assunta una curva  $C_p$  (algebraica irriducibile di genere  $p$ ), s'introducano due funzioni razionali  $\lambda$  e  $\mu$  del punto sopra essa corrente.

Considerato un modello di  $C_p$  nello spazio ordinario  $S_3$  ove pure si sia fissata una metrica euclidea, al punto  $M$  corrente sulla curva si associno:

a) la sfera  $A_M$  avente centro in  $M$  e raggio il cui quadrato eguagli il valore, ivi calcolato, della funzione  $\lambda$ ;

b) il piano  $\pi_M$ , passante per la binormale in  $M$  alla curva e formante col piano rettificante un angolo la cui tangente trigonometrica eguagli il valore, calcolato in  $M$ , della funzione  $\mu$ ;

c) il cerchio  $\Gamma_M$  sezione della sfera col piano<sup>(17)</sup>.

Al variare di  $M$ , sulla  $C_p$ , il cerchio  $\Gamma_M$  descrive una superficie sulla quale esiste un fascio  $\Phi_p$  di curve razionali (i cerchi  $\Gamma_M$ ), e  $\Phi_p$  è birazionalmente identico alla  $C_p$  assunta. Trattasi dunque di una rigata astratta  $F_p$ , avente  $C_p$  come curva immagine<sup>(18)</sup>.

Sotto l'aspetto « assoluto » nulla è da aggiungere (num. 2); sotto quello « relativo » si richiedono invece ulteriori esami sulle generatrici riducibili.

In relazione ad un punto  $M$  proprio (generico) del modello di  $C_p$ , a seconda che esso sia nè zero nè polo per la funzione  $\lambda$ , ovvero ne sia uno

<sup>(17)</sup> È appena necessario avvertire che, nei punti ove  $\Gamma_M$  fosse indeterminato, dovrà risolversi la indeterminazione con passaggio al limite, per ovvie esigenze di continuità.

<sup>(18)</sup> Ben si vedrà che per taluni intenti si potrebbe assumere come  $\pi_M$  ovunque il piano normale ( $\mu = \infty$ ); ma per esaurire la questione si rivelerà opportuna la maggior libertà qui consentita.

Si noterà poi che anche il sistema delle sfere  $A_M$  risulta birazionalmente assimilabile alla curva  $C_p$ , e così pure il sistema dei cerchi  $\Gamma'_M$ , essendo  $\Gamma'_M$  la « curva caratteristica » di  $A_M$  entro il sistema  $\infty^4$  delle sfere. Si potrebbe pertanto costruire una  $F_p$ , avente  $C_p$  quale curva immagine, come « involuppo » del sistema di sfere, ancora utilizzando la sola funzione  $\lambda$ .

zero, od infine ne sia un polo, la conica  $\Gamma_M$ , come subito si ravvisa, risulta risp. non degenera, spezzata in due rette distinte (le rette isotrope di  $\pi_M$  uscenti da  $M$ ), spezzata in due rette coincidenti (nella retta impropria di  $\pi_M$ ).

Coniche degeneri potranno anche associarsi a punti impropri del modello di  $C_p$ . Ad es. se  $M$  è improprio generico e ivi  $\mu = 0$ ,  $\Gamma_M$  riducesi alla retta impropria di  $\pi_M$  (posizione limite della binormale) contata due volte.

Ma per gli attuali scopi non occorrono più minute indagini.

Se si vogliono costruire solo rigate astratte soddisfacenti le ipotesi semplificatrici introdotte al num. 2, si deve supporre che il gruppo degli zeri (e quello dei poli) della funzione  $\lambda$  sia costituito da punti distinti. Per la funzione  $\mu$  invece non occorrono siffatti vincoli.

9. — Passando a questioni di realtà, si supporrà che, nel processo introdotto al num. prec., siano reali tanto la curva  $C_p$  quanto le due funzioni  $\lambda$  e  $\mu$ . Sarà allora reale anche la rigata  $F_p$  che viene costruita.

Se  $C_p$  è priva di parte reale, anche  $F_p$  risulta priva di parte reale, almeno sotto l'aspetto della geometria sulla superficie reale.

Si supponga dunque che  $C_p$  abbia parte reale, ed ancora si indichino con  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  i suoi circuiti, essendo  $k$  un intero soddisfacente la (1).

Convorrà allora fare riferimento ad un *modello* (della curva  $C_p$ ) *privo di punti multipli e con parte reale tutta al finito*<sup>(19)</sup>, e metterne in evidenza alcune proprietà, utili per il seguito.

Si cominci perciò a recare l'attenzione sopra un circuito  $\omega$  (necessariamente pari) di un tale modello, introducendovi un orientamento, fissando cioè uno dei due versi come *verso positivo*.

Su ciascuna tangente al circuito viene allora indotto un orientamento, e fra le due semirette di essa aventi come origine il punto di contatto si dirà *semitangente positiva* quella che si svolge nel verso positivo.

<sup>(19)</sup> L'esistenza del modello « al finito » è da ritenersi nota. Comunque, assunto in  $S_3$  un sistema  $\mathcal{E}$  lineare  $\infty^3$  reale di superficie algebriche contenente una superficie (reale)  $\xi$  senza intersezioni reali colla curva e peraltro generico (ad es. un sistema  $\mathcal{E}$  di quadriche contenente una quadrica  $\xi$  reale ma senza parte reale), basta riferire proiettivamente  $\mathcal{E}$  allo spazio di piani facendo in modo che a  $\xi$  corrisponda il piano improprio, per raggiungere un modello col requisito richiesto.

Ben si comprende come le varie condizioni imposte al modello abbiano il solo scopo di alleggerire l'esposizione. Che esse del resto non implicino restrizioni essenziali è chiaramente avvertito dal fatto che, salvo il linguaggio, sono sostanzialmente in ginocchio questioni di carattere proiettivo, anzi addirittura birazionale (in senso relativo). Però — anche senza modificazioni formali — basterebbe la sola esclusione delle singolarità reali.

In relazione ad un punto  $M$  di  $\omega$  s'introduca quindi il sistema  $\Theta$  delle sfere  $E_M$  (reali) ivi normali al circuito ma col centro sulla semitangente positiva.

Entro  $\Theta$ , e prossime alla sfera  $\vartheta$  di raggio nullo, esistono sfere che incontrano ulteriormente  $\omega$  in un solo punto (senza essere ivi tangenti al circuito): tali sono invero le sfere  $E_M$  di raggio abbastanza piccolo. Vi è dunque in  $\Theta$  un sistema *connesso*  $\Theta^*$ , che contiene  $\vartheta$  ma non si esaurisce in essa, di sfere  $E_M^*$  incontranti  $\omega$  in un solo punto ulteriore.

Sarà pertanto *positivo* il limite superiore del diametro delle sfere  $E_M^*$ , ed eventualmente  $+\infty$  ove  $\Theta^*$  sia lo stesso sistema  $\Theta$ .

Tale constatazione può esprimersi (evitando valori infiniti) dicendo che a ciascun punto  $M$  di  $\omega$  è associato un numero (reale, finito):

$$\sigma(M) \geq 0,$$

eguale all'inverso di detto limite superiore (o risp. a zero) se questo è finito (o risp.  $+\infty$ ).

Per la regolarità assicurata dalla circostanza che  $\omega$  è circuito (privo di singolarità ed al finito) di una curva algebrica,  $\sigma(M)$  risulta funzione *continua* del punto variabile su  $\omega$ , sicchè ammetterà un minimo  $\sigma^* \geq 0$ .

Se  $\sigma^* = 0$ , in ciascun punto di  $\omega$  tutte le sfere  $E_M$  sono sfere  $E_M^*$ ; se  $\sigma^* > 0$ , è possibile assegnare un *numero positivo*  $\delta < \frac{1}{\sigma^*}$  perchè, in ciascun punto di  $\omega$ , le sfere  $E_M$  con diametro  $\leq \delta$  siano sfere  $E_M^*$ .

Quando poi vi siano altri circuiti della curva, e con  $d$  s'indichi la *minima distanza* fra un punto di  $\omega$  e un punto situato su uno dei rimanenti circuiti (e sarà certamente  $d > 0$  per l'assenza di punti doppi), basterà assumere un *numero positivo*  $\delta < d$  (e, se occorre, pure  $< \frac{1}{\sigma^*}$ ), perchè ogni sfera  $E_M$  con diametro  $\leq \delta$  nemmeno abbia punti comuni con altri circuiti della curva.

È dunque assodato che assunto per  $C_p$  un modello privo di singolarità ed « al finito » è possibile associare a ciascun suo circuito (orientato)  $\omega$  un numero reale  $\delta > 0$  (peraltro arbitrario ove per  $\omega$  fosse  $\sigma^* = 0$ , ed esso esaurisse la parte reale di  $C_p$ ), tale che tutte le sfere  $E_M$  con diametro  $\leq \delta$  incontrino la curva in un solo punto ulteriore  $M_1$  (situato sullo stesso circuito  $\omega$ ).

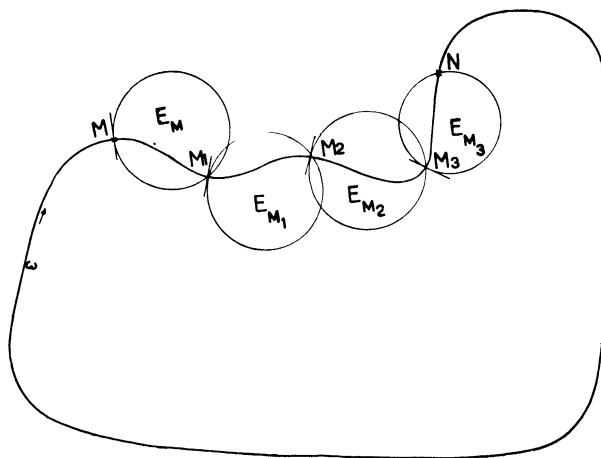
Ma giova aggiungere un'altra constatazione tenendo presente che il circuito  $\omega$  è *rettificabile*, appunto perchè circuito (tutto al finito) di una curva algebrica.

Detta  $l(M)$  la lunghezza dell'arco  $MM_1$  di  $\omega$  incluso nella sfera  $E_M$  di diametro  $\delta$ , anche  $l(M)$  risulta funzione *continua* (e *positiva*) del punto  $M$  variabile su  $\omega$ . Essa ammetterà pertanto un *minimo positivo*  $l^*$ .

Considerato ora su  $\omega$  un segmento  $MN$  (eventualmente, se  $M \equiv N$ , l'intero circuito  $\omega$  pensato come segmento ad estremi coincidenti), s'indichi con  $\mathcal{L}$  la sua lunghezza.

Se  $MN$  è completamente incluso nella sfera  $E_M$  di diametro  $\delta$ , diminuendo convenientemente il diametro si avrà una sfera  $E_M$  che incontra ulteriormente  $\omega$  nel punto  $N$  (una sfera dunque alla quale sono esterni tutti i punti di  $C_p$  che non appartengono al segmento  $MN$ ); diversamente la  $E_M$  di diametro  $\delta$  incontra ulteriormente  $\omega$  in un punto  $M_1$  del segmento  $MN$  (ed ogni punto di  $C_p$ , se non appartiene al segmento  $MM_1$ , risulta esterno alla sfera).

Ma al presentarsi della seconda alternativa si può procedere analogamente movendo dal segmento  $M_1N$ : o s'introdurrà una sfera  $E_{M_1}$  di dia-



metro  $\leq \delta$  che incontra ulteriormente  $\omega$  in  $N$ , ovvero s'introdurrà una sfera  $E_{M_1}$  di diametro  $\delta$  che incontra ulteriormente  $\omega$  in un punto  $M_2$  del segmento  $M_1N$ .

Così procedendo successivamente si raggiunge il punto  $N$ . Altrimenti invero si verrebbero ad introdurre su  $MN$  infiniti segmenti successivi:

$$MM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n, \dots$$

ciascuno di lunghezza  $\geq l^*$ , mentre già il segmento  $MM_n$ , appena sia

$n > \frac{\mathcal{L}}{l^*}$ , ha lunghezza  $\geq n l^* > \mathcal{L}$ , e non può essere contenuto nel segmento  $MN$  di lunghezza  $\mathcal{L}$ .

Lo schizzo riprodotto nella figura può illustrare il procedimento nel caso in cui, essendo  $M$  ed  $N$  distinti, si raggiunga il punto  $N$  dopo quattro successive fasi.

Sussiste dunque la seguente proposizione:

*Assegnata comunque una curva (reale)  $C_p$  dotata di parte reale, ed introdotta in  $S_3$  un modello privo di singolarità e di punti impropri reali (il che è sempre possibile), prefissato arbitrariamente un circuito  $\omega$  della curva (ovvero un segmento  $\tau$  di esso), esiste un gruppo  $\Psi$  di sfere, in numero finito e disposte entro  $\Psi$  in ordine ciclico (ovvero in ordine aperto) con le seguenti proprietà:*

- a) tutti i punti della curva che non appartengano ad  $\omega$  (ovvero a  $\tau$ ) sono esterni a ciascuna sfera di  $\Psi$ ;
- b) le intersezioni delle sfere di  $\Psi$  con  $\omega$  (ovvero con  $\tau$ ) ripartiscono questo in segmenti ciascuno dei quali è incluso in una sola sfera di  $\Psi$ ;
- c) ogni estremo di detti segmenti è comune precisamente a due sfere « successive » di  $\Psi$  (fatta eccezione per gli estremi stessi di  $\tau$  che invece appartengono soltanto alla prima o risp. all'ultima sfera di  $\Psi$ );
- d) nessuna sfera di  $\Psi$  è tangente ad  $\omega$ .

Si noterà che le proprietà c) e d) sono implicite nelle precedenti. Gioverà tuttavia averne qui fatto esplicita menzione.

10. — Ripresa la curva  $C_p$  reale anzi dotata di parte reale, ed introdotto nello  $S_3$  un modello privo di punti multipli e con parte reale tutta al finito, sempre supponendo reali le funzioni  $\lambda$  e  $\mu$ , si vuole ora precisare l'assetto della parte reale della rigata  $F_p$ , costruita col processo di num. 8.

Le coniche  $\Gamma_M$  associate agli zeri  $M''$  (risp. ai poli  $M^*$ ) reali della funzione  $\lambda$ , sono per  $F_p$  generatrici  $G''$  (risp. generatrici  $G^*$ ), nel senso di num. 4. Non vi sono poi altri punti reali di  $C_p$  ai quali si associno generatrici del tipo detto, ed a nessun punto (reale) di  $C_p$  è associata una generatrice  $G'$ .

Si è dunque nelle ipotesi di detto num. 4; e siccome  $\Gamma_M$  risulta dotata o risp. priva di parte reale a seconda che in  $M$  (reale) è  $\lambda > 0$  ovvero risp.  $\lambda < 0$ , come segmenti (o circuiti) *positivi* si presentano quelli in cui  $\lambda > 0$ , essendo gli estremi di segmenti positivi punti  $M''$  ed  $M^*$ .

Tutto ciò, indipendentemente dalle circostanze offerte dalla funzione  $\mu$ , basta a fissare l'assetto della parte reale di  $F_p$  quando non si abbiano circuiti positivi (cfr. n. 4).

In relazione invece ad un circuito positivo  $\omega$  di  $C_p$ , a dirimere i due tipi  $B_1$  e risp.  $B_2$  della falda  $\Sigma$  associata, interviene il comportamento su  $\omega$  della funzione  $\mu$ . Precisamente:

La falda  $\Sigma$  associata ad un circuito  $\omega$ , sul quale sia sempre  $\lambda > 0$ , è orientabile (tipo  $B_1$ ) oppure non orientabile (tipo  $B_2$ ) a seconda che la funzione  $\mu$  presenti su  $\omega$  un numero pari o risp. dispari di zeri<sup>(20)</sup>.

Passando alla dimostrazione, si fissi su  $\omega$  il verso positivo, osservando che in tal modo è indotto il verso positivo sulla tangente  $t_M$  in ciascun punto  $M$  del circuito.

In relazione ad un punto  $M$  generico, cioè distinto dagli zeri della funzione  $\mu$ , la tangente  $t_M$  non giace nel piano  $\pi_M$  (cfr. num. 8) il quale, essendo ivi  $\mu \neq 0$ , non è il piano rettificante. Siccome in  $\pi_M$  giace invece il cerchio  $\Gamma_M$  e questo ha centro in  $M$ , ne deriva che — fissato un verso su  $\Gamma_M$  (inteso ovviamente come circuito della sua parte reale) — è fissata una indicatrice spaziale: quella che appunto si ottiene associando il verso già fissato sulla  $t_M$  con quello che viene indotto, nel fascio di piani avente per sostegno la  $t_M$  stessa, dal verso che si fissa sul cerchio  $\Gamma_M$ .

Si faccia ora descrivere al punto  $M$  il circuito  $\omega$ , con continuità e nel verso fissato, a partire da una posizione iniziale generica e ritornandovi. Fissato allora un verso su  $\Gamma_M$  nella posizione iniziale, sarà dedotto per continuità il verso su ogni  $\Gamma_M$ , e in ciascun punto  $M$  generico sarà fissata l'indicatrice spaziale.

Essa, al variare di  $M$  su  $\omega$ , si conserva, almeno finchè non s'incontri uno zero della funzione  $\mu$ , nel quale  $\pi_M$  (essendo il piano rettificante) contiene  $t_M$ . Ma, se si suppone che il gruppo degli zeri di  $\mu$  sia di punti distinti, quando  $M$  transita per uno zero la tangente  $t_M$  « attraversa » il piano  $\pi_M$  e quindi il cerchio  $\Gamma_M$ , e l'indicatrice spaziale effettivamente si inverte.

Se dunque complessivamente  $M$  incontra un numero pari (risp. dispari) di punti che siano zeri di  $\mu$ , ritornando alla posizione iniziale si ritrova la stessa indicatrice spaziale (risp. la opposta), e, poichè la tangente  $t_M$  ritorna in sè collo stesso orientamento, il circuito  $\Gamma_M$  ritornerà col verso iniziale (risp. coll'opposto) e la falda  $\Sigma$  descritta da  $\Gamma_M$  risulterà orientabile (risp. non orientabile), cioè del tipo  $B_1$  (risp. del tipo  $B_2$ ).

11. — Le rigate astratte  $F_p$  reali ma *prive di generatrici reali* hanno come curva immagine (num. 2) una  $C_p$  reale ma senza parte reale, e sono necessariamente (per  $p > 0$ ) superficie senza parte reale (num. 3).

---

<sup>(20)</sup> Naturalmente su  $\omega$  sarà sempre pari il numero complessivo dei poli e degli zeri di  $\mu$ . Ma soltanto gli zeri, e limitatamente alle circostanze precisate nel testo, hanno ripercussione essenziale.

D'altronde:

TEOR. I<sup>o</sup>. — *Assegnata comunque una curva reale  $C_p$  senza parte reale esistono rigate astratte  $F_p$  reali (ma senza parte reale), aventi  $C_p$  come curva immagine.*

Tali invero sono le  $F_p$  costruite dal processo introdotto a num. 8, movendo dalla  $C_p$  assegnata e da due funzioni  $\lambda$  e  $\mu$  reali ma del resto arbitrarie (cfr. n. 9).

In assenza di generatrici reali, coll'atteggiamento assunto nel presente lavoro (num. 8), nulla è dunque da aggiungere.

Ben maggiore interesse offre però il caso delle  $F_p$  a generatrici reali. Ma gli elementi acquisiti (num. 8-10) permettono di dimostrare senza sforzo una proposizione esistenziale, molto generale, ad esse pertinente.

TEOR. II<sup>o</sup>. — *Assegnata arbitrariamente una curva reale  $C_p$  dotata di parte reale, esistono rigate astratte  $F_p$  reali ed aventi  $C_p$  quale curva immagine (dunque  $F_p$  con generatrici reali) la cui parte reale risponda ad una prefissata ma arbitraria scelta (cfr. num. 6):*

- a) di alcuni (eventuali) circuiti di  $C_p$  come circuiti positivi;
- b) di alcuni (eventuali) circuiti di  $C_p$  come circuiti negativi;
- c) di un numero pari di punti distinti su ciascuno degli (eventuali) circuiti rimanenti;
- d) della distribuzione, su ciascuno di questi, dei segmenti (aventi come estremi detti punti) alternatamente in segmenti positivi e negativi;
- e) della attribuzione degli estremi dei segmenti positivi ai punti  $M''$  (corrispondenti a generatrici  $G''$  della rigata) ed ai punti  $M^*$  (corrispondenti a generatrici  $G^*$  della rigata);
- f) dell'indicazione, per ciascun (eventuale) circuito positivo, dell'orientabilità o meno della falda associata.

Introdotto invero nello  $S_3$  un modello, della  $C_p$  assegnata, privo di punti multipli e con parte reale tutta al finito (num. 9), si attuino su di esso le scelte elencate nell'enunciato.

Per ciascun segmento o circuito positivo s'introduca quindi un gruppo  $\Psi$  di sfere (num. 9), indicando con  $\psi = 0$  l'equazione complessiva delle sfere dei vari gruppi  $\Psi$ . Si noterà che il polinomio  $\psi$ , pensato come funzione del punto corrente su  $C_p$ , ha come zeri reali i punti  $M''$  ed  $M^*$  (zeri del primo ordine) nonchè i punti  $M_0$  (zeri del second'ordine) comuni a due sfere « successive » di uno stesso gruppo  $\Psi$ , non ha altri zeri reali, non ammette poli reali, e (prescindendo dai punti  $M''$ ,  $M^*$ ,  $M_0$ ) assume valore dello stesso segno in tutti i punti dei segmenti o circuiti negativi e segno opposto nei punti dei segmenti o circuiti positivi. Con un eventuale cambiamento di segno si potrà fare in modo che in questi ultimi sia  $\psi > 0$  (sempre eccezion fatta per i punti  $M''$ ,  $M^*$ ,  $M_0$ , nei quali  $\psi = 0$ ).



Dicasi ora  $\psi^* = 0$  l'equazione complessiva dei coni isotropi aventi vertice in ciascuno dei punti  $M^*$  ed  $M_0$ , osservando che potrà supporre che in ogni altro punto (reale) di  $S_3$  sia  $\psi^* > 0$ .

Il polinomio  $\psi^*$ , pensato come funzione del punto corrente su  $C_p$ , ha come zeri reali (del second'ordine) i punti  $M^*$  ed  $M_0$ , mentre in ogni altro punto reale di  $C_p$  assume valore positivo.

La funzione:

$$\lambda = \frac{\psi}{\psi^*}$$

è pertanto nulla nei punti  $M''$ , infinita nei punti  $M^*$  (con zeri e poli tutti del primo ordine), positiva (o risp. negativa) nei segmenti o circuiti positivi (o risp. negativi).

Per qualunque scelta della funzione  $\mu$ , in virtù delle indagini svolte al num. 10, il processo di num. 8 costruisce una  $F_p$  del tipo richiesto salvo il caso in cui si abbiano *circuiti positivi* (cfr. anche num. 6), risultando allora incerta la orientabilità o meno delle singole falde ad essi associate.

Ma, scelto un punto su ciascuno dei circuiti positivi ai quali vogliono associare falde non orientabili (di tipo  $B_2$ ) e, con coppie di punti immaginario-coniugati, formato un gruppo  $H$  di  $\nu \geq p + 1$  punti di  $C_p$ , su questa si consideri una  $g_\nu^1$  che contenga il gruppo  $H$ , serie lineare che certamente esiste essendo  $\nu \geq p + 1$ . Anzi, essendo  $H$  un gruppo reale, sarà reale la serie completa  $|H|$ , sicchè potrà assumersi come  $g_\nu^1$  una serie reale.

Basta allora scegliere come funzione  $\mu$  una qualunque delle infinite funzioni razionali reali (del punto corrente su  $C_p$ ) che hanno la  $g_\nu^1$  come serie dei gruppi di livello e in particolare  $H$  come gruppo degli zeri, per costruire rigate  $F_p$  sicuramente soddisfacenti (cfr. num. 10) anche all'ultima esigenza.

Il teor. II<sup>0</sup> è pertanto completamente dimostrato.

12. — In assenza di incroci, escludendo cioè la esistenza sulla rigata di generatrici  $G'$  (num. 4), il teor. II<sup>0</sup> testé dimostrato esaurisce la questione proposta al num. 7. Questa peraltro si esaurisce rapidamente anche sopprimendo tale restrizione, come accerta il seguente:

TEOR. III<sup>0</sup> — *Assegnata arbitrariamente una curva reale  $C_p$  dotata di parte reale, esistono rigate astratte  $F_p$  reali ed aventi  $C_p$  quale curva immagine, la cui parte reale risponda ad una prefissata ma arbitraria scelta:*

*a), b), c), d), e): come in teor. II<sup>0</sup>;*

*f) di un numero qualunque di punti  $M'$  distinti (corrispondenti a generatrici  $G'$  della rigata), su ciascun segmento o circuito positivo.*

g) della indicazione, per ciascun (eventuale) circuito positivo sprovvisto di punti  $M'$ , della orientabilità o meno della falda associata.

Si costruisca intanto una rigata astratta reale  $F_p$  come al num. prec., prescindendo dunque dalla presenza dei punti  $M'$  e scegliendo a piacere il carattere di orientabilità o meno delle falde associate agli (eventuali) circuiti positivi della  $C_p$  provveduti di punti  $M'$ .

Sulla  $F_p$  in tal modo costruita si considerino le generatrici  $L'$  (irriducibili reali anzi dotate di parte reale) corrispondenti ai punti  $M'$ , e su ciascuna  $L'$  si fissi un punto  $P'$  reale.

Nello  $S_3$  ambiente un sistema lineare di superficie di ordine abbastanza elevato, passanti per i punti  $P'$ , segnerà sulla superficie  $F_p$  un sistema lineare reale di curve, di una certa dimensione  $r \geq 3$ , semplice, avente come punti-base soltanto i punti  $P'$ , privo di curve fondamentali. La immagine proiettiva reale (in un  $S_r$  reale) del sistema di curve fornirà una rigata astratta reale  $F'_p$  anche soddisfacente agli ulteriori requisiti (<sup>21</sup>).

Basta invero rilevare che la trasformazione di  $F_p$  in  $F'_p$  produce l'unico (ed appunto richiesto) effetto di sostituire a ciascuna generatrice  $L'$  di  $F_p$  una generatrice  $G'$  di  $F'_p$ , generatrice  $G'$  spezzata nella effettiva trasformata di  $L'$  e nella retta corrispondente nel noto senso al punto  $P'$ : spezzata cioè in due curve razionali reali unisecantisi, come precisamente occorre.

13. — La trattazione conclusasi al num. prec. risolve, come si è avvertito, le varie questioni che si prospettano con l'atteggiamento precisato al num. 8.

Gioverà tuttavia raccogliere esplicitamente talune conseguenze che se ne traggono, anche per indicare alcune ripercussioni su questioni analoghe ma diversamente impostate.

a) Si fissi comunque una classe (complessa)  $\Omega$  di rigate astratte  $F_p$  di genere  $p > 0$ , si fissi cioè la classe (complessa) della curva  $C_p$  immagine (cfr. num. 2), solo supponendo che  $\Omega$  sia di tipo reale, vale a dire che sia di tipo reale la classe della curva immagine (<sup>22</sup>).

Sono allora ben determinati (num. 3-5) e facilmente dominabili (num. 6) gli assetti presumibili della parte reale delle  $F_p$  reali di  $\Omega$ , sia pure sotto ragionevoli ipotesi semplificatrici (num. 2).

(<sup>21</sup>) Un processo analogo viene utilizzato nel campo complesso in: A. MARONI, (<sup>2</sup>), num. 2, oss.; e nel campo reale in V. E. GALAFASSI, (<sup>4</sup>), num. 6; e: L. BRUSOTTI, (<sup>11</sup>), num. 11.

(<sup>22</sup>) Si usano qui locuzioni adottate ad es. in: A. COMESSATTI, (<sup>3</sup>), d). Comunque una classe (complessa) di varietà algebriche dicesi « di tipo reale » quando contiene varietà reali. Una classe reale di varietà è invece la totalità delle varietà reali equivalenti di fronte alle trasformazioni birazionali reali (dotate generalmente di elementi eccezionali).

Ma di più (teor. I, II, III), ogni assetto presumibile è effettivamente realizzabile entro la classe  $\Omega$ , e senza il sopravvenire di alcun vincolo al di fuori di quelli impliciti nelle circostanze qualitative offerte dallo assetto prescelto.

Se  $\Omega$  non contiene  $F_p$  con generatrici reali (ossia la classe della curva immagine non contiene curve dotate di parte reale), le  $F_p$  reali di  $\Omega$  sono tutte prive di parte reale.

Escluso tale caso si può invece affermare:

1<sup>o</sup>) Il numero  $m \geq 0$  delle falde e, appena sia  $m > 0$ , anche l'ordine di connessione totale  $Z$  (positivo, nullo o negativo) della parte reale sono, entro  $\Omega$ , *assegnabili ad arbitrio*.

2<sup>o</sup>) Pure ad arbitrio possono assegnarsi, per ciascuno dei  $k \leq p + 1$  « circuiti » della rigata, il numero delle falde del tipo « sfera » e quello delle falde non orientabili di un qualunque ordine di connessione.

3<sup>o</sup>) Mai si presentano falde orientabili con ordine di connessione  $> 2$ , e il numero di quelle d'ordine di connessione 2 non può superare il numero  $k \leq p + 1$  dei « circuiti »; il limite superiore può raggiungersi, ma in tal caso non si hanno altre falde della rigata.

4<sup>o</sup>) Asserzioni identiche possono riferirsi alle falde non orientabili ma prive di incroci del fascio delle generatrici. Si può anzi asserire che il numero complessivo delle falde d'ordine di connessione 2, orientabili ovvero non orientabili ma con fascio  $\varphi$  privo d'incroci, non supera mai il numero  $k \leq p + 1$  dei « circuiti »; e che non esistono altre falde della rigata quando detto limite superiore sia raggiunto.

b) Anzichè fissare una classe (complessa ma di tipo reale) di curve  $C_p$  immagini, se ne può assegnare una *classe reale*. Ciò equivale a fissare una *classe reale*  $\Omega^*$  di rigate astratte  $F_p$ , *pensate però come enti  $\infty^1$  di generatrici*.

Quest'ultima precisazione è qui essenziale perchè di regola le rigate di  $\Omega^*$  *si distribuiscono in infinite classi reali di superficie*. Tale circostanza è messa chiaramente in luce dal fatto (assicurato ad es. da Teor. II) che, entro una  $\Omega^*$  rispondente a una curva immagine dotata di parte reale, il numero  $m$  delle falde può assegnarsi ad arbitrio, mentre notoriamente  $m$  è carattere invariante nell'ambito di una classe reale di superficie.

I rilievi registrati in a) per una classe  $\Omega$  possono poi tutti riferirsi anche ad una classe  $\Omega^*$ , nell'ambito della quale anzi è  $k$  un carattere invariante. Così, in particolare, si può affermare:

*Entro ogni  $\Omega^*$  esistono  $F_p$  prive di parte reale; peraltro, appena  $\Omega^*$  contenga  $F_p$  dotate di generatrici reali, si può assegnare ad arbitrio tanto il numero  $m > 0$  delle falde quanto l'ordine di connessione totale  $Z$  della parte reale.*

c) Dopo quanto si è riscontrato in *a*) e in *b*) è chiaro che nell'ambito di una classe  $\Omega$  (oppure di una  $\Omega^*$ ) i problemi di HARNACK e quelli di connessione (e se si vuole pur quelli della base reale) non richiedono ulteriori esami.

d) Detti problemi rimangono invece aperti nell'ambito di una assegnata specie di rigate astratte<sup>(23)</sup>. In proposito si dispone tuttavia di qualche conoscenza (cfr. oss. I e II di num. 6, anche per rinvì).

E nell'ambito di una assegnata classe reale  $\Omega_0$  di rigate astratte (pensate come superficie) rimane aperto il problema della determinazione del numero  $m$  delle falde (che è carattere di  $\Omega_0$ ) e dei possibili caratteri di connessione.

Ma delle questioni accennate in *d*) non vogliamo qui ulteriormente occuparci.

14. — Anche per quanto concerne il processo costruttivo introdotto al num. 8 possono giovare alcune osservazioni.

*a*) già si è notato come il processo possa alleggerirsi, senza ripercussioni nei risultati, quando non si abbiano da costruire falde del tipo  $B_2$  (cfr. num. 4). Allora invero può assumersi  $\mu = \text{cost.}$  (per es.  $\mu = \infty$ ), evitando alcuni sviluppi di num. 10.

*b*) Ma una semplificazione ben più consistente si avrebbe quando si imponessero minori esigenze di generalità ai risultati.

Non occorrerebbero ad es. nemmeno gli sviluppi di num. 9 quando ci si accontentasse di dimostrare, per ogni genere  $p$ , la esistenza di  $F_p$  reali rispondenti a tutti gli assetti presumibili della parte reale (num. 7) esclusi quelli che richiedono una falda di tipo  $B_2$  (num. 3), e senza preoccupazioni concernenti la classe  $\Omega$  (ovvero  $\Omega^*$ ) cui la rigata appartiene nonché la scelta, entro il fascio delle generatrici, di quelle, variamente spezzate, che il prefissato assetto richiede.

Per tale particolare scopo basta invero introdurre in  $S_3$  una curva  $C_p$  reale con  $k$  circuiti tutti al finito, privi di singolarità e di mutue intersezioni, e tali che ciascuno di essi sia includibile in una sfera  $E$  la quale non intersechi od includa nessuno dei rimanenti<sup>(24)</sup>.

<sup>(23)</sup> Cfr. F. SEVERI, <sup>(2)</sup>, num. 14. Comunque due rigate astratte appartengono ad una stessa « specie » quando sono equivalenti di fronte alle trasformazioni birazionali (complesse), senza elementi eccezionali.

<sup>(24)</sup> L'esistenza di curve siffatte è variamente nota. Tali possono assumersi ad es. le curve iperellittiche piane (d'ordine  $2p + 2$ ) utilizzate dal KLEIN per esaurire la parte esistenziale dei problemi di HARNACK per le curve. Cfr. ad es.: F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Leipzig-Berlin 1921, specialmente pp. 234-235.

Nel procedimento utilizzato al num. 11 si può allora sostituire al gruppo  $\Psi$  di sfere associato a ciascun circuito positivo la sfera  $E$  ad esso pertinente, e provvedere alla introduzione di un singolo segmento positivo sopra un circuito mediante una sfera con centro su di esso e di raggio abbastanza piccolo perchè incontri quel circuito in due soli punti senza intersecare i rimanenti, quindi sostituire tale sfera al sistema  $\Psi$  di sfere utilizzato al num. 11.

Dopo di ciò, procedendo come in num. 11 ma con le semplificazioni consentite dalla assenza dei punti  $M_0$  e dell'esigenza pertinente la costruzione di falde del tipo  $B_2$ , e di poi continuando come in num. 12, si raggiungerebbe senz'altro lo scopo prefissato.

c) Altra questione che si può porre concerne la possibilità o meno di realizzare in  $S_3$  modelli di  $F_p$  reali *senza singolarità reali*.

Essi sono certamente esclusi appena si abbia una falda non orientabile d'ordine di connessione pari, oppure due falde (non orientabili) d'ordine di connessione dispari <sup>(25)</sup>.

Se poi si richiedono, sempre in  $S_3$ , modelli di  $F_p$  reali *con parte reale priva di singolarità e tutta al finito*, viene altresì esclusa la presenza di una singola falda d'ordine di connessione dispari la quale, se fosse priva di singolarità, intersecherebbe il piano improprio necessariamente (come falda dispari).

Rimangono pertanto da considerare le rigate  $F_p$  tutte le falde delle quali siano di tipo  $A_1$  ovvero di tipo  $B_1$ , (cfr. num. 3).

Orbene, si può affermare che tutti i modelli di  $F_p$  costruiti al num. 11 (teor. II), quando contengano solo falde dei tipi  $A_1$  e  $B_1$ , *possono realizzarsi con parte reale tutta al finito e priva di singolarità*.

È invero lecita intanto una qualunque assunzione della funzione  $\mu$ : si supponga  $\mu = \infty$  ovunque, il che equivale a fissare  $\pi_M$  (cfr. num. 8) nel piano normale in  $M$  a  $C_p$ .

L'assenza di generatrici  $G^*$  (cioè dei punti  $M^*$  su  $C_p$ ) assicura poi che la funzione  $\lambda$  è priva di poli reali, il che a sua volta assicura che la parte reale della rigata che si costruisce è tutta al finito.

Ma la funzione  $\lambda$  può sostituirsi (senza ripercussioni sensibili) con la funzione  $\varepsilon\lambda$ , ove  $\varepsilon > 0$ ; ed è possibile assumere un  $\varepsilon$  sufficientemente pic-

---

<sup>(25)</sup> In  $S_3$  una falda priva di singolarità è invero falda pari (quindi orientabile) ovvero dispari (quindi non orientabile) secondo che il suo ordine di connessione è pari o risp. dispari. Cfr. ad es. L. BRUSOTTI, <sup>(40)</sup>, num. 5. Ne viene che una falda non orientabile d'ordine di connessione pari ha necessariamente singolarità, cfr. <sup>(40)</sup>, e che due falde d'ordine di connessione dispari se sono prive di singolarità necessariamente si intersecano.

colo da garantire l'assenza di singolarità reali nel modello di  $F_p$  che viene costruito utilizzando la funzione  $\varepsilon \lambda$ .

Tale possibilità, intuitivamente immediata, può accertarsi con rigore osservando dapprima che i raggi dei cerchi  $\Gamma_M$  che costituiscono le generatrici con parte reale della rigata  $F_p$  costruita col tramite della funzione  $\lambda$  non possono ad es. superare il diametro  $\varrho$  di una sfera includente le parti reali di  $C_p$  e di  $F_p$ , sfera che certamente esiste perchè dette parti reali sono tutte al finito. Così ogni valore positivo di  $\lambda$ , in punti reali di  $C_p$ , risulta  $\leq \varrho^2$  (cfr. num. 8).

D'altronde, poichè la parte reale della curva  $C_p$  è tutta al finito e priva di punti multipli, è possibile associare alla curva un numero  $\eta > 0$  in modo che, assunti comunque due cerchi  $\Gamma_M$  e  $\Gamma_N$  (coi rispettivi centri  $M$  e  $N$  in punti reali di  $C_p$  e situati nei piani  $\pi_M$  e  $\pi_N$  ivi risp. normali alla curva) ciascuno di raggio  $\leq \eta$ , essi non abbiano punti (reali) a' comune<sup>(26)</sup>.

Dopo di ciò basta ad es. assumere  $\varepsilon = \frac{\eta^2}{\varrho^2}$  perchè, essendo  $\varepsilon \lambda \leq \eta^2$ , due qualunque generatrici con parte reale della  $F_p$  costruita utilizzando la

<sup>(26)</sup> Ciò del resto può accertarsi con argomentazioni simili a quelle svolte al num. 9.

Se  $C_p$  possiede più circuiti, e  $d > 0$  è la minima distanza fra due punti situati su circuiti diversi, si fissi un numero positivo  $\Delta < \frac{d}{2}$ ; se invece  $C_p$  ha un solo circuito si fissi  $\Delta > 0$  arbitrariamente.

Si rechi ora l'attenzione sopra un circuito  $\omega$  della curva, fissandone un punto  $M$ . In relazione ad un punto  $N$ , variabile su  $\omega$ , s'indichi con  $\alpha_1 \geq 0$  la sua semidistanza (sempre finita) da  $M$ ; s'indichi poi con  $\alpha_2 \geq 0$  la distanza da  $M$  della retta intersezione de' piani  $\pi_M$  e  $\pi_N$  se tale distanza non supera  $\Delta$ , ponendo invece  $\alpha_2 = \Delta$  nel caso opposto (evitando così valori infiniti di  $\alpha_2$ ).

Quando  $\alpha_1 \rightarrow 0$ , il punto  $N$  viene a coincidere con  $M$  (sullo stesso ramo della curva per l'assenza dei punti multipli), ed  $\alpha_2$  tende al raggio di curvatura  $R$  della curva in  $M$ , ovvero — se  $R > \Delta$  — tende a  $\Delta$ ; essendo certamente  $R > 0$  (oltre che  $\Delta > 0$ ), in ogni caso  $\alpha_2$  non si annulla. Ma allora il maggiore  $\alpha$  dei numeri  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  non sarà mai nullo perchè con  $\alpha = 0$  si avrebbe contemporaneamente  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ .

Al variare di  $N$  su  $\omega$  (che è circuito di una curva *algebraica*),  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ed  $\alpha$  si presentano come funzioni *continue*, anzi  $\alpha$  risulta funzione *continua positiva* e quindi ammette un *minimo positivo*  $\alpha^*$ . Questo a sua volta si presenta come funzione *continua e positiva* del punto  $M$  variabile su  $\omega$ , onde ancora ammetterà un *minimo positivo*  $\beta$ ; e giova anche notare che se  $\alpha_1 = 0$  è  $\alpha = \alpha_2 = \Delta$ , sicchè ovunque è  $\alpha^* \leq \Delta$  e quindi necessariamente sarà  $\beta \leq \Delta$ .

Detto  $\eta$  un numero *positivo* che sia minore dei singoli numeri positivi  $\beta$  introdotti per ciascun circuito di  $C_p$ , è verificata l'asserzione del testo.

Se  $M$  ed  $N$  stanno su circuiti diversi i cerchi  $\Gamma_M$  e  $\Gamma_N$  non hanno punti comuni perchè la somma dei raggi ( $\leq 2\eta \leq 2\Delta < d$ ) è minore della distanza dei centri; se  $M$  ed

funzione  $\varepsilon\lambda$  siano cerchi di raggio  $\leq \eta$  e non abbiano quindi punti reali comuni.

Ma allora la  $F_p$  stessa risulta, come volevasi, priva di singolarità reali.

$N$  stanno sullo stesso circuito  $\omega$  perchè (usando notazioni di ovvio significato):

$$\eta < \beta \leq \alpha^*(M) \leq \alpha(M, N)$$

e quindi:

$$\eta < \alpha_1(M, N) \quad \text{oppure} \quad \eta < \alpha_2(M, N)$$

e nel primo caso ancora la somma dei raggi ( $\leq 2\eta$ ) è minore della distanza  $2\alpha_1$  dei centri, mentre nel secondo il raggio di  $\Gamma_M$  è inferiore della distanza ( $\leq \alpha_2$ ) del suo centro  $M$  dalla retta intersezione dei piani dei due cerchi.