ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

E. BAIADA
C. VINTI

Un teorema d'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali del 1° ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 1-2 (1955), p. 115-160
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_1-2_115_0>

UN TEOREMA D'ESISTENZA DELLA SOLUZIONE PER UN'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 1° ORDINE

di E. BAIADA E C. VINTI (Palermo)

INTRODUZIONE

Lo stato attuale della conoscenza dell'esistenza di almeno una soluzione per un'equazione alle derivate parziali di tipo normale, che si scrive, nelle notazioni di Monge:

$$p = f(x, y, z, q),$$

è insoddisfacente; ciò è stato affermato da molti ed è stato illustrato altrove (1).

Fra i tentativi per riportare la situazione alla perfezione già raggiunta nella teoria delle equazioni alle derivate ordinarie, i più cospicui sono stati quelli di Maria Cinquini Cibrario e Silvio Cinquini (2), nonchè quelli di E. Baiada (3).

Noi ci ricollegheremo qui alle idee ed ai metodi di E. Baiada già esposti (4), essi consistono nell'ottenere direttamente la soluzione mediante un metodo di approssimazioni, molto simile a quello adoperato per ottenere la soluzione dei sistemi differenziali ordinari.

---

(1) Vedere l'introduzione al seguente lavoro:
E. BAIADA: *Considerazioni sull'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali con i dati iniziali, nel campo reale.* Annali di Matematica pura ed applicata Serie IV Tomo XXXIV (1953). In detto lavoro v'è anche una bibliografia breve, ma sufficiente per avere un'idea della situazione.

(2) Vedi bibliografia citata in (1) nonchè una relazione al Congresso Internazionale dei Matematici di Amsterdam presentata da S. CINQUINI.

(3) Vedere lavoro citato in (1).

(4) Vedere E. BAIADA: *Sul teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del primo ordine* « Annali della Scuola Normale di Pisa » Serie II, vol. XII (1943) pp. 135-145, vedere pure nota citata in (1).

Questo metodo, da una parte fa a meno della teoria delle caratteristiche e dei teoremi ad essa relative, dall'altra è in armonia con quanto si fa in tutta la teoria delle equazioni funzionali.

È interessante osservare che il procedimento qui adoperato porta tra l'altro anche alla soluzione in senso stretto ([5]) nel caso ormai classico del teorema di Severini-Wazewski-Digel-Kamke-Baiada ([6]).

È pure da notare che il metodo e le considerazioni che saranno qui svolte, si trasportano al caso dei sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine del tipo iperbolico come già è stato fatto per il caso classico da R. Conti ([7]).

Il teorema raggiunto, enunciato in fondo a questo lavoro, dà, come caso particolare, il teorema di E. Baiada della nota citata in ([1]), nonchè alcuni teoremi di continuità e di derivazione rispetto ad un parametro della soluzione di un'equazione alle derivate ordinarie.

Va fatta l'osservazione che, giusto quanto fatto rilevare nella nota citata in ([1]), sono proprio questi teoremi di derivazione rispetto a un parametro che richiedono la relativa onerosità delle condizioni da ammettere onde essere sicuri dell'esistenza di almeno una soluzione.

Il teorema d'esistenza dimostrato in questa nota si differenzia da quello classico in quanto che la ipotesi ammessa sulla funzione $f(x, y, z, q)$ relativamente al suo comportamento rispetto a q, è notevolmente più larga di quelle che si ammettono relativamente al comportamento rispetto a (x, y, z).

1. — Sia $f(x, y, z, q)$ una funzione reale, di variabili reali, definita per $c \leq x \leq \bar{c}$, y, z, q, qualunque, ed avente le seguenti proprietà:

1° $f(x, y, z, q)$ è continua rispetto ad (x, y, z, q) in tutto il campo di definizione.

2° $f(x, y, z, q)$ è Lipschitziana rispetto a q, uniformemente rispetto ad x, y, z con costante Q, in altri termini valga per tutti gli x, y, z, con $c \leq x \leq \bar{c}$, e qualunque siano q_1 e q_2 la relazione

$$|f(x, y, z, q_1) - f(x, q, z, q_2)| \leq Q \, |q_1 - q_2| \, .$$

3° Esiste una costante M con la proprietà che per tutti gli x, y, z, q, con $c \leq x \leq \bar{c}$, sia

$$|f(x, y, z, q)| \leq M \, .$$

([5]) In contrapposto a soluzione in «senso lato» qui studiato.

([6]) Elencati in ordine di data.

([7]) Vedere R. CONTI: *Snl problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma* $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, z_y^{(i)})$ «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei» Serie VIII, Vol. XII fasc. 1-2 Gennaio-Febbraio 1952.

4º $f(x, y, z, q)$ ha le derivate parziali f_y, f_z limitate, esiste cioè una costante L, con la proprietà:

$$|f_y(x, y, z, q)| < L; \qquad |f_z(x, y, z, q)| < L.$$

5º Le derivate parziali f_y ed f_z sono Lipschitziane rispetto ad y, z, q con costante R.

Sia data inoltre una funzione $\omega(y)$, reale, di variabile reale, definita per tutti gli y, che sia:

I) continua con derivata $\omega'(y)$ continua e limitata, in altri termini qualunque sia y, esista una costante N con la proprietà:

$$\left|\frac{\omega(y+h) - \omega(y-h)}{2h}\right| < N.$$

II) Esista una funzione $M(y)$ sommabile in ogni intervallo finito, tale che

$$\left|\frac{\omega'(y+h) - \omega'(y-h)}{2h}\right| < M(y),$$

qualunque siano y ed h.

D'ora in avanti indicheremo con K il maggiore dei numeri Q, L, R, e supporremo inoltre che sia soddisfatta la relazione

$$\text{III)} \quad K[(b-a)+(e-c)+1]^2 \left\{2 + N + (e-c) + [(e-c)+1] \int_{a-(e-c)}^{b+(e-c)} M(y)\, dy \right\}^2 \leq \frac{1}{2},$$

per un certo numero e compreso tra c e $\bar{c}$, ciò può sempre farsi cambiando opportunamente l'unità di misura sull'asse x, riducendo eventualmente l'ampiezza dell'intervallo $(e-c)$ (8). Osserviamo che da questa relazione si ottiene, come conseguenza, che $K < \frac{1}{2}$.

Ci occuperemo nel seguito, dell'esistenza di una soluzione $z(x, y)$ definita in un opportuno campo, dell'equazione alle derivate parziali:

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f\left[x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

---

(8) Vedere nota citata in (4) pag 138.

la quale soddisfi al dato di Cauchy $\omega(y)$ per $x = c$, ossia tale che si abbia identicamente

$$z(c, y) = \omega(y). \tag{2}$$

Preciseremo, nel seguito, in quale senso diremo che $z(x, y)$ è soluzione di (1).

2. — Poniamo

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2}\omega\left(y + \frac{x-c}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega\left(y - \frac{x-c}{2}\right) + \int_{y-\frac{x-c}{2}}^{y+\frac{x-c}{2}} f[c, \eta, \omega(\eta), \omega'(\eta)]\, d\eta . \tag{3}$$

per ogni $c \leq x \leq c + d$, con $d = \dfrac{e-c}{2^m}$ dove, m è un intero arbitrario e positivo. La funzione $\varphi^{(1)}(x, y)$ risulta definita e continua per tutti gli y. Inoltre per teoremi noti sulla derivazione di un integrale, la funzione $\varphi^{(1)}(x, y)$ ammette derivate parziali, sia rispetto ad x che rispetto ad y, e queste derivate sono date dalle espressioni:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}_x(x, y) = {} & \frac{1}{4}\omega'\left(y + \frac{x-c}{2}\right) - \frac{1}{4}\omega'\left(y - \frac{x-c}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left[c, y + \right. \\ & \left. + \frac{x-c}{2}, \omega\left(y + \frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y + \frac{x-c}{2}\right)\right] + \frac{1}{2} f\left[c, y - \frac{x-c}{2}, \right. \\ & \left. \omega\left(y - \frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y - \frac{x-c}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}_y(x, y) = {} & \frac{1}{2}\omega'\left(y + \frac{x-c}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega'\left(y - \frac{x-c}{2}\right) + f\left[c, y + \frac{x-c}{2}, \omega\left(y + \frac{x-c}{2}\right), \right. \\ & \left. \omega'\left(y + \frac{x-c}{2}\right)\right] - f\left[c, y - \frac{x-c}{2}, \omega\left(y - \frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y - \frac{x-c}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5'}$$

Osserviamo che, tanto $\varphi^{(1)}_x(x, y)$, quanto $\varphi^{(1)}_y(x, y)$ sono continue rispetto ad (x, y), ed inoltre che:

$$\varphi^{(1)}_x(c, y) = f[c, y, \omega(y), \omega'(y)], \tag{6}$$

dove $\varphi^{(1)}_x(c, y)$ indica solo la derivata a destra, e

$$\varphi^{(1)}_y(c, y) = \omega'(y), \tag{7}$$

cioè la funzione $\varphi^{(1)}(x, y)$ soddisfa all'equazione (1) sulla ordinata $x = c$ e soddisfa alla condizione iniziale (2).

Dalla (5') abbiamo:

$$\varphi^{(1)}_y(x, y+h) = \frac{1}{2}\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right) +$$
$$+ f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)\right] -$$
$$- f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right],$$

$$\varphi^{(1)}_y(x, y-h) = \frac{1}{2}\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right) + \frac{1}{2}\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right) +$$
$$+ f\left[c, y-h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right] -$$
$$- f\left[c, y-h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right].$$

Da cui otteniamo, per differenza, dopo avere aggiunto e tolto una stessa quantità, l'espressione seguente:

$$\varphi^{(1)}_y(x, y+h) - \varphi^{(1)}_y(x, y-h) = \frac{1}{2}\left[\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right) - \right. \tag{8}$$
$$\left. - \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right] +$$
$$+ \left\{ f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\} +$$
$$+ \left\{ f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - f\left[c, y-h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\} -$$
$$- \left\{ f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\} -$$

$$-\Big\{f\Big[c\,,\,y+h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]-$$

$$-f\Big[c\,,\,y-h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\Big\}+$$

$$+\Big\{f\Big[c\,,\,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y+h+\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\Big]-$$

$$-f\Big[c\,,\,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\,,\,\omega'\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\Big\}-$$

$$-\Big\{f\Big[c\,,\,y+h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y+h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]-$$

$$-f\Big[c\,,\,y+h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\Big\}.$$

Si ha intanto:

$$f\Big[c\,,\,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\Big]- \tag{9}$$

$$-f\Big[c\,,\,y-h+\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\Big]-$$

$$-\Big\{f\Big[c\,,\,y+h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]-$$

$$-f\Big[c\,,\,y-h-\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\Big\}=$$

$$=\int_{y-h+\frac{x-c}{2}}^{y+h+\frac{x-c}{2}} f_y\Big[c\,,\,t\,,\,\omega\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\,d\,t\,-$$

$$-\int_{y-h-\frac{x-c}{2}}^{y+h-\frac{x-c}{2}} f_y\Big[c\,,\,t\,,\,\omega\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h-\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\,d\,t=$$

$$=\int_{y-h}^{y+h} f_y\Big[c\,,\,t+\frac{x-c}{2}\,,\,\omega\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(y-h+\frac{x-c}{2}\Big)\Big]\,d\,t\,-$$

$$-\int_{y-h}^{y+h} f_y\left[c\,,t-\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]dt=$$

$$=\int_{y-h}^{y+h}\left\{f_y\left[c\,,t+\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f_y\left[c\,,t-\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}dt.$$

Inoltre:

$$f\left[c\,,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]- \tag{10}$$

$$-f\left[c\,,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-$$

$$-\left\{f\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\int_{\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)} f_z\left[c\,,y+h+\frac{x-c}{2}\,,z\,,\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]dz-$$

$$-\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)} f_z\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,t\,,\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]dt.$$

Posto per semplicità: $\alpha=\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)$, $\beta=\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)$, $\gamma=\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)$, $\delta=\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)$, operiamo nel primo degli integrali a secondo membro della (10) la sostituzione

$$z=\psi(t)=\frac{(\alpha-\beta)\,t-\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma-\delta},$$

e supponiamo $\gamma \neq \delta$, $\alpha \neq \beta$ (Esamineremo in seguito il caso che queste due ultime ipotesi non siano soddisfatte). Come risultato otteniamo che la (10) si scrive nel seguente modo:

$$(10') \quad f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right] -$$

$$f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]$$

$$-\left\{f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right] -\right.$$

$$\left. -f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)} \left\{ f_z\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \psi(t), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} -\right.$$

$$\left. - f_z\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, t, \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\} dt$$

La (8) diventa:

$$(8') \quad \varphi_y^{(1)}(x, y+h) - \varphi_y^{(1)}(x, y-h) = \left[\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\left\{\frac{1}{2} +\right.$$

$$\left. + \frac{f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)\right] - f\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)}\right\} +$$

$$+ \left[\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{1}{2} - \frac{f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right] - f\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}\right\} +$$

$$+\int_{y-h}^{y+h}\left\{f_y\left[c\,,t+\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f_y\left[c\,,t-\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}d\,t$$

$$+\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)}\left\{f_z\left[c\,,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\psi(t)\,,\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}-\right.$$

$$\left.-f_z\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,t\,,\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}d\,t\,.$$

Poichè le prime due espressioni che compaiono nelle graffe a secondo membro di quest'ultima relazione, in virtù della osservazione fatta a seguito della ipotesi III, non sono mai negative, possiamo scrivere, usando ovvie maggiorazioni,

$$(8'')\qquad |\,\varphi_y^{(1)}(x\,,y+h)-\varphi_y^{(1)}(x\,,y-h)\,|\leq$$

$$\leq\left|\,\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right|\left\{\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{f\left[c,y+h+\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-f\left[c,y+h+\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)}\right\}+$$

$$+\left|\,\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\,.$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}-\frac{f\left[c,y+h-\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right]-f\left[c,y+h-\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}\right\}+$$

$$+\int_{y-h}^{y+h}\left|f_y\left[c,t+\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f_y\left[c\,,t-\frac{x-c}{2}\,,\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right|d\,t+$$

$$+\left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)}\left\{f_z\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \psi(t), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_z\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, t, \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}dt\right|.$$

Per la ipotesi 5^0, il primo degli integrali a secondo membro della (8″) può maggiorarsi nel seguente modo:

$$(9')\qquad \int_{y-h}^{y+h}\left|f_y\left[c, t+\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f_y\left[c, t-\frac{x-c}{2}, \omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right), \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right|dt\leq$$

$$\leq 2hR\left[|x-c|+\left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right],$$

mentre il sècondo degli integrali a secondo membro si può scrivere successivamente, maggiorandolo:

$$(10'')\qquad \left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)}\left\{f_z\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \psi(t), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_z\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, t, \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}dt\right|\leq$$

$$\leq\left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)}\left\{f_z\left[c, y+h+\frac{x-c}{2}, \psi(t), \omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_z\left[c, y+h-\frac{x-c}{2}, t, \omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}dt\right|+$$

$$+\left|\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}-1\right|\cdot\left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)} f_z\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,t\,,\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]d\,t\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\right|\cdot\left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)}\left\{f_z\left[c\,,y+h+\frac{x-c}{2}\,,\psi(t)\,,\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f_z\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,t\,,\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]\right\}d\,t\right|+$$

$$+\left|\frac{\alpha-\beta-(\gamma-\delta)}{\gamma-\delta}\right|\left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)} f_z\left[c\,,y+h-\frac{x-c}{2}\,,t\,,\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]d\,t\right|.$$

Adoperando il fatto che f_z è Lipschitziana rispetto ai suoi argomenti con costante R, e che:

$$\left|\int_{\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}^{\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)}[\psi(t)-t]\,d\,t\right|\leq\frac{1}{2}\,|\gamma-\delta|\,[|\alpha-\gamma|+|\beta-\delta|]\,,$$

il primo membro della (10″) viene ancora maggiorato dalla:

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\right|R\left\{|x-c|\left|\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,|\gamma-\delta|\,[|\alpha-\gamma|+|\beta-\delta|]+$$

$$+\left|\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\,\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\,\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right\}+$$

$$+\left|\frac{\alpha-\beta-(\gamma-\delta)}{\gamma-\delta}\right|L\left|\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|.$$

Ricordando ora il significato di α, β, γ, δ, abbiamo:

$$\alpha-\beta-(\gamma-\delta)=\int\limits_{y+h+\frac{x-c}{2}}^{y-h+\frac{x-c}{2}}\omega'(t)\,d\,t-\int\limits_{y+h-\frac{x-c}{2}}^{y-h-\frac{x-c}{2}}\omega'(t)\,d\,t=$$

$$=\int\limits_{y+h}^{y-h}\left[\omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)\right]d\,t,$$

da cui

$$|\alpha-\beta-(\gamma-\delta)|\leq\int\limits_{y-h}^{y+h}\left|\omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)\right|d\,t,$$

e quindi, in definitiva, il primo membro della (10″) viene maggiorato dalla:

$$(10^*)\qquad R\left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right|\left\{|x-c|+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right]+$$
$$\left.+\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right\}+$$
$$+L\int\limits_{y-h}^{y+h}\left|\omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)\right|d\,t.$$

Nell'operare la sostituzione $z=\psi(t)$ abbiamo supposto $\gamma\neq\delta$, $\alpha\neq\beta$.

Nella ipotesi $\gamma=\delta$, ricordando il significato di γ e di δ si ha: $\int\limits_{y-h}^{y+h}\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)d\,t=0$, ed il secondo membro della (10) viene maggiorato dalla

$$L\left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right|=$$

$$= L\left|\int_{y-h}^{y+h} \omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right) d\,t\right| \leq L\int_{y-h}^{y+h}\left|\omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)\right| d\,t,$$

e quest'ultima espressione non supera in valore l'espressione dataci dalle (10*). Analoga considerazione è valida nella ipotesi $\alpha = \beta$ e si ottiene una formula che è caso particolare della (10*), quindi possiamo tener conto solo della (10*).

La (8″), tenendo presente la (9′) e (10*) si scrive:

$$|\varphi_y^{(1)}(x,y+h)-\varphi_y^{(1)}(x,y-h)| \leq \left|\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right| \left\{\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{f\left[c,y+h+\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-f\left[c,y+h+\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)}\right\}+$$

$$+\left|\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}-\frac{f\left[c,y+h-\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right]-f\left[c,y+h-\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}\right\}+$$

$$+2hR\left[|x-c|+\left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right]+$$

$$+R\left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right|\left\{|x-c|+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right]+$$

$$\left.+\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right\}+L\int_{y-h}^{y+h}\left|\omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)\right|dt.$$

Integrando ora ambo i membri di quest'ultima relazione tra a e b rispetto ad y, comunque si scelgano a e b, con la condizione $a < b$, si deduce:

$$(11)\quad \int_a^b |\varphi_y^{(1)}(x,y+h)-\varphi_y^{(1)}(x,y-h)|dy \leq \int_a^b \left|\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right| \left\{\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{f\left[c,y+h+\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)\right]-f\left[c,y+h+\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)}\right\}dy+$$

$$+\int_a^b \left|\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right| \cdot$$

$$\left\{\frac{1}{2}-\frac{f\left[c,y+h-\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right]-f\left[c,y+h-\frac{x-c}{2},\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right),\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)}\right\}dy+$$

$$+2hR\int_a^b \left[|x-c|+\left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right]dy+$$

$$+R\int_a^b \left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)\right|\left\{|x-c|+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\left|\omega\left(y+h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y+h-\frac{x-c}{2}\right)\right|+\right.$$

$$\left.\left.+\left|\omega'\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|\right]\right\}dy+L\int_a^b dy\int_{y-h}^{y+h}\left|\omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right)\right|dt.$$

Osserviamo ora che:

$$(*)\qquad \int_a^b dy \int_{y-h}^{y+h} \left| \omega'\left(t+\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right) \right| dt \leq 2h \int_{a-h}^{b+h} \left| \omega\left(t+\frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(t-\frac{x-c}{2}\right) \right| dt,$$

basta per sincerarsene fare un cambiamento d'ordine d'integrazione e contemporaneamente un opportuno ampliamento del campo d'integrazione.

La (9) allora, quando nel primo degli integrali a secondo membro si operi la sostituzione

$$y = Y - \frac{x-c}{2},$$

nel secondo degli integrali a secondo membro si operi invece la sostituzione

$$y = Y + \frac{x-c}{2},$$

il terzo e quarto integrale a secondo membro si maggiori tenendo presente che $\left| \frac{\omega(y+h) - \omega(y-h)}{2h} \right| \leq N$, e per l'ultimo termine a seondo membro si applichi la (*), si scrive:

$$(11')\qquad \int_a^b |\varphi_y^{(1)}(x, y+h) - \varphi_y^{(1)}(x, y-h)|\, dy \leq \int_{a+\frac{x-c}{2}}^{b+\frac{x-c}{2}} |\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)| \left\{ \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{f[c, Y+h, \omega(Y+h), \omega'(Y+h)] - f[c, Y+h, \omega(Y+h), \omega'(Y-h)]}{\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)} \right\} dY +$$

$$+ \int_{a-\frac{x-c}{2}}^{b-\frac{x-c}{2}} |\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)| \left\{ \frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{f[c, Y+h, \omega(Y+h), \omega'(Y+h)] - f[c, Y+h, \omega(Y+h), \omega'(Y-h)]}{\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)} \right\} dY +$$

$$+2hR|x-c|\int_a^b (1+N)^2 dy + 2hR(1+N)\int_a^b \left|\omega\left(y-h+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y-h-\frac{x-c}{2}\right)\right|dy+$$

$$+2hL\int_{a-h}^{b+h}\left|\omega'\left(y+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(y-\frac{x-c}{2}\right)\right|dy.$$

Operando nel quarto degli integrali a secondo membro della (11′) la sostituzione

$$Y=y-h,$$

ed aumentando ulteriormente l'intervallo d'integrazione, la (11′), quando al posto di R ed L si sostituisce la costante non minore K, si scrive:

$$(12)\qquad \int_a^b |\varphi_y^{(1)}(x,y+h)-\varphi_y^{(1)}(x,y-h)|\,dy \leq \int_{a+\frac{x-c}{2}}^{b+\frac{x-c}{2}} |\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)|\left\{\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{f[c,Y+h,\omega(Y+h),\omega'(Y+h)]-f[c,Y+h,\omega(Y+h),\omega'(Y-h)]}{\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)}\right\}dY+$$

$$+\int_{a-\frac{x-c}{2}}^{b-\frac{x-c}{2}} |\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)|\left\{\frac{1}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{f[c,Y+h,\omega(Y+h),\omega'(Y+h)]-f[c,Y+h,\omega(Y+h),\omega'(Y-h)]}{\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)}\right\}dY+$$

$$+2hK|x-c|\int_a^b (1+N)^2 dy + 2hK(1+N)\int_{a-h}^{b+h}\left|\omega\left(Y+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(Y-\frac{x-c}{2}\right)\right|dY+$$

$$+2hK\int_{a-h}^{b+h}\left|\omega'\left(Y+\frac{x-c}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{x-c}{2}\right)\right|dY.$$

Maggioreremo ulteriormente il secondo membro della (12), se nel primo degli integrali che in esso compare, mettiamo al posto di $a+\dfrac{x-c}{2}$ la quantità $a - \frac{x-c}{2}$, che è minore, quale limite inferiore dell'intervallo d'integrazione, nel secondo degli integrali mettiamo al posto del secondo estremo dell'intervallo d'integrazione invece di $b - \frac{x-c}{2}$, la quantità maggiore $b + \frac{x-c}{2}$. Con queste modifiche apportate alla (12) otteniamo:

$$(12') \qquad \int_a^b |\varphi_y^{(1)}(x, y+h) - \varphi_y^{(1)}(x, y-h)|\, dy \leq \int_{a-\frac{x-c}{2}}^{b+\frac{x-c}{2}} |\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)|\, dY +$$

$$+ 2hK|x-c| \int_a^b (1+N)^2 dy + 2hK(2+N) \int_{a-h}^{b+h} \left|\omega'\left(Y + \frac{x-c}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{x-c}{2}\right)\right| dY.$$

Se poniamo $x = c + d$, la (12′) diventa:

$$(12'') \qquad \int_a^b |\varphi_y^{(1)}(c+d, y+h) - \varphi_y^{(1)}(c+d, y-h)|\, dy \leq$$

$$\leq \int_{a-\frac{d}{2}}^{b+\frac{d}{2}} |\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)|\, dY + 2hdK \int_a^b (1+N)^2 dy +$$

$$+ 2hK(2+N) \int_{a-h}^{b+h} \left|\omega'\left(Y + \frac{d}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{d}{2}\right)\right| dY.$$

3. — Riprendiamo in esame l'espressione dataci dalla (3). Supposto $y_1 > y_2$ avremo:

$$(13) \qquad \varphi^{(1)}(x, y_1) - \varphi^{(1)}(x, y_2) = \frac{1}{2}\left[\omega\left(y_1 + \frac{x-c}{2}\right) - \omega\left(y_2 + \frac{x-c}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\omega\left(y_1 - \frac{x-c}{2}\right) - \omega\left(y_2 - \frac{x-c}{2}\right)\right] +$$

$$+ \int_{y_1-\frac{x-c}{2}}^{y_1+\frac{x-c}{2}} f[c, \eta, \omega(\eta), \omega'(\eta)]\, d\eta - \int_{y_2-\frac{x-c}{2}}^{y_2+\frac{x-c}{2}} f[c, \eta, \omega(\eta), \omega'(\eta)]\, d\eta.$$

Mediante la sostituzione

$$\eta = Y + \frac{y_1 - y_2}{2}$$

il primo degli integrali a secondo membro diventa:

$$\int\limits_{y_1 - \frac{x-c}{2}}^{y_1 - \frac{x+c}{2}} f[c\,,\eta\,,\omega(\eta)\,,\omega'(\eta)]\,d\,\eta =$$

$$= \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{x-c}{2}} f\left[c\,, Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\,, \omega\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right), \omega'\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right] d\,Y,$$

mentre mediante la sostituzione

$$\eta = Y - \frac{y_1 - y_2}{2}$$

il secondo degli integrali a secondo membro della (13) diventa:

$$\int\limits_{y_2 - \frac{x-c}{2}}^{y_2 + \frac{x-c}{2}} f[c\,,\eta\,,\omega(\eta)\,,\omega'(\eta)]\,d\,\eta =$$

$$= \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{x-c}{2}} f\left[c\,, Y - \frac{y_1 + y_2}{2}\,, \omega\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right] d\,Y.$$

Di conseguenza la (13) si trasforma nella seguente:

$$(14)\quad \varphi^{(1)}(x\,,y_1) - \varphi^{(1)}(x\,,y_2) = \frac{1}{2}\left[\omega\left(y_1 + \frac{x-c}{2}\right) - \omega\left(y_2 + \frac{x-c}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\omega\left(y_1 - \frac{x-c}{2}\right) - \omega\left(y_2 - \frac{x-c}{2}\right)\right] +$$

$$= \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{x-c}{2}} \left\{ f\left[c\,, Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\,, \omega\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right), \omega'\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - f\left[c\,, Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\,, \omega\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right]\right\} d\,Y\,.$$

Aggiungendo e togliendo delle stesse quantità questa espressione si può scrivere sotto la forma seguente:

$$(14') \quad \varphi^{(1)}(x\,,y_1)-\varphi^{(1)}(x\,,y_2)=\frac{1}{2}\left[\omega\left(y_1+\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y_2+\frac{x-c}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\omega\left(y_1-\frac{x-c}{2}\right)-\omega\left(y_2-\frac{x-c}{2}\right)\right]+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}}\left\{f\left[(c\,,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right);\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left[c\,,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\}d\,Y+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}}\left\{f\left[c\,,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left[c\,,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\}d\,Y+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}}\left\{f\left[c\,,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left[c\,,Y-\frac{y_1-y_2}{2}\,,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\}d\,Y$$

Osserviamo che il terzo degli integrali a secondo membro della (14′) può scriversi:

$$\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}} \left\{ f\left[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]- \right.$$

$$\left. -f\left[c\,,\,Y-\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\} d\,Y=$$

$$=\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}} \left\{ \int\limits_{Y-\frac{y_1+y_2}{2}}^{Y+\frac{y_1-y_2}{2}} f_y\left[c,t,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] d\,t \right\} d\,Y\,.$$

Per l'ipotesi 4° del n. 1, avremo pertanto la maggiorazione seguente:

$$\left|\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}} \left\{ f\left[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]- \right.\right. \tag{15}$$

$$\left.\left. -f\left[c\,,\,Y-\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\} d\,Y\right| \leq$$

$$\leq L\,|\,y_1-y_2\,|\;|\,x-c\,|\,.$$

Quanto al secondo degli integrali al secondo membro della (14′) per esso vale la maggiorazione

$$\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x-c}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{x-c}{2}} \left| f\left[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]- \right. \tag{15'}$$

$$\left. -f\left[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right),\,\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right| d\,Y \leq$$

$$\leq L\,N\,|\,x-c\,|\;|y_1-y_2\,|\,.$$

Dalla (14'), sfruttando la Lipschitzianità di f, la relazione (15) e (15'), il fatto che $0 \leq x - c \leq d$, e sostituendo ad L la costante non minore K, avremo:

$$(16) \qquad | \varphi^{(1)}(c+d, y_1) - \varphi^{(1)}(c+d, y_2) | \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \omega\left(y_1 + \frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 + \frac{d}{2}\right) \right| + \frac{1}{2} \left| \omega\left(y_1 - \frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 - \frac{d}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{d}{2}} \left| \omega'\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \right| d\,Y + d\,K\,|y_1 - y_2|\,(1 + N).$$

4. Operando a partire dalla curva $x = c + d$, $y = \varphi^{(1)}(c + d, y)$ come abbiamo operato a partire dalla curva $x = c$, $y = \omega(y)$, definiremo sulla striscia $c + d \leq x \leq c + 2d$, la funzione:

$$\varphi^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2} \varphi^{(1)}\left(c', y + \frac{x - c'}{2}\right) + \frac{1}{2} \varphi^{(1)}\left(c', y - \frac{x - c'}{2}\right) +$$

$$+ \int\limits_{y - \frac{x-c'}{2}}^{y + \frac{x-c'}{2}} f[c', \eta, \varphi^{(1)}(c', \eta), \varphi_y^{(1)}(c', \eta)]\, d\eta\,,$$

dove si è posto per semplificare le notazioni: $c' = c + d$.

Se si ripete questa operazione 2^m volte, sino ad arrivare alla striscia $e - d \leq x \leq e$, per la r-esima striscia viene definita una funzione:

$$(16^*) \quad \varphi^{(r)}(x, y) = \frac{1}{2} \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) + \frac{1}{2} \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) +$$

$$+ \int\limits_{y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}}^{y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}} f[c^{(r-1)}, \eta, \varphi^{(r-1)}(c^{(r-1)}, \eta), \varphi_y^{(r-1)}(c^{(r-1)}, \eta)]\, d\eta\,,$$

dove abbiamo indicato con $c^{(r)}$ il valore $c + r\,d$.

Sulla funzione $\varphi^{(r)}(x, y)$ si possono fare le stesse osservazioni circa l'esistenza e la continuità delle proprie derivate parziali rispetto ad x e a y che si sono fatte a proposito della funzione $\varphi^{(1)}(x, y)$. Inoltre:

$$\varphi^{(r)}(c^{(r-1)}, y) = \varphi^{(r-1)}(c^{(r-1)}, y) \text{ ed anche, } \varphi_x^{(r)}(c^{(r-1)}, y) =$$

$$= f[c^{(r-1)}, y, \varphi^{(r-1)}(c^{(r-1)}, y), \varphi_y^{(r-1)}(c^{(r-1)}, y)],$$

dove naturalmente $\varphi_x^{(r)}(c^{(r-1)}, y)$ indica solo la derivata a destra.

5. Dimostriamo ora che in generale abbiamo:

$$(17) \quad |\varphi^{(r)}(c + r\,d, y_1) - \varphi^{(r)}(c + r\,d, y_2)| \leq \frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1 + r\frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + r\frac{d}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1 - r\frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 - r\frac{d}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\int_{\frac{y_1+y_2}{2} - r\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2} + r\frac{d}{2}} \left|\omega'\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \omega'\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right| d\,Y + r\left|y_1 - y_2\right| \int_{y_2-(r-1)\frac{d}{2}}^{y_1+(r-1)\frac{d}{2}} \left|\omega'\left(Y + \frac{d}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \omega'\left(Y - \frac{d}{2}\right)\right| d\,Y + r\,d\,|y_1 - y_2|,$$

a condizione che

$$a) \quad K[(b - a) + (e - c) + 1][N^{(s)} + 2]^2 \leq \frac{1}{2}, \text{ per } s = 0, 1, 2, \ldots, r - 1,$$

dove $N^{(0)} = N$ ed $N^{(j)}$ è la costante di Lipschitz relativa a $\varphi^{(j)}(c + j\,d, y)$.

Osserviamo che, poichè:

$$\int_{\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{d}{2}} \left[\omega'\left(Y + \frac{y_1 - y_2}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right] d\,Y = \left[\omega\left(y_1 + \frac{d}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \omega\left(y_2 + \frac{d}{2}\right)\right] - \left[\omega\left(y_1 - \frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 - \frac{d}{2}\right)\right]$$

la (14′) pensata scritta per $x = c + d$, può esprimersi nei due modi diversi seguenti

$$
(18) \qquad \varphi^{(1)}(c+d\,,y_1) - \varphi^{(1)}(c+d\,,y_2) = \left[\omega\left(y_1 - \frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 - \frac{d}{2}\right)\right] +
$$

$$
+ \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}} \left[\omega'\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] \cdot
$$

$$
\cdot \left\{\frac{1}{2} + \frac{f\left[c, Y + \frac{y_1+y_2}{2}, \omega\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] - f\left[c, Y + \frac{y_1-y_2}{2}, \omega\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right\} d\,Y +
$$

$$
+ \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}} \left\{ f\left[c\,, Y + \frac{y_1-y_2}{2}\,, \omega\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] - \right.
$$

$$
\left. - f\left[c\,, Y + \frac{y_1-y_2}{2}\,, \omega\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\} d\,Y +
$$

$$
+ \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}} \left\{ f\left[c\,, Y + \frac{y_1-y_2}{2}\,, \omega\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] - \right.
$$

$$
\left. - f\left[c\,, Y - \frac{y_1-y_2}{2}\,, \omega\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]\right\} dY.
$$

$$
(18') \qquad \varphi^{(1)}(c+d\,,y_1) - \varphi^{(1)}(c+d\,,y_2) = \left[\omega\left(y_1 + \frac{d}{2}\right) - \omega\left(y_2 + \frac{d}{2}\right)\right] +
$$

$$
+ \int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}} \left[\omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right) - \omega'\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] \cdot
$$

$$
\cdot \left\{\frac{1}{2} + \frac{f\left[c, Y + \frac{y_1-y_2}{2}, \omega\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right] - f\left[c, Y + \frac{y_1-y_2}{2}, \omega\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right), \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y + \frac{y_1-y_2}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right\} d\,Y +
$$

$$+\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}}\Big\{f\Big[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\Big(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big]-$$

$$-f\Big[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big]\Big\}\,d\,Y+$$

$$+\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}}\Big\{f\Big[c\,,\,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big]-$$

$$-f\Big[c\,,\,Y-\frac{y_1-y_2}{2}\,,\,\omega\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\,,\,\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big]\Big\}\,d\,Y\,.$$

Intanto il secondo e terzo integrale a secondo membro della (14') vengono rispettivamente maggiorati dai secondi membri delle (15'), (15) e quindi, dopo ovvie maggiorazioni, la (18) e (18') ci danno rispettivamente:

$$(18^*)\qquad |\,\varphi^{(1)}(c+d\,,y_1)-\varphi^{(1)}(c+d\,,y_2)\,|\le|\,\omega\Big(y_1-\frac{d}{2}\Big)-$$

$$-\,\omega\Big(y_2-\frac{d}{2}\Big)\,|+d\,L\,|\,y_1-y_2\,|\,(1+N)+$$

$$+\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}}\Big|\,\omega'\Big(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\Big)-\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big|\,\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{f\Big[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\,\omega\Big(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\Big),\omega'\Big(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big]-f\Big[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\,\omega\Big(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\Big),\,\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\Big]}{\omega'\Big(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\Big)-\omega'\Big(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\Big)}\right\}d\,Y$$

$$(18^{**})\qquad |\,\varphi^{(1)}(c+d\,,y_1)-\varphi^{(1)}(c+d\,,y_2)\,|\le|\,\omega\Big(y_1+\frac{d}{2}\Big)-$$

$$\omega\Big(y_2+\frac{d}{2}\Big)\,|+d\,L\,|\,y_1-y_2\,|\,(1+N)+$$

$$+\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|.$$

$$\left\{\frac{1}{2}-\frac{f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right\}dY.$$

Supposto ora che sia vera la relazione

$$b)\qquad K\,[(b-a)+(e-c)+1]^2\,[N^{(r)}+2]^2\leq\frac{1}{2}\qquad\text{per } s=0,1,2,\ldots,r.$$

possiamo applicare la (17), partendo dalla curva $z=\varphi^{(1)}(c',y)$, ove $c'=c+d$, invece che dalla $z=\omega(y)$, facendo solo r operazioni del tipo indicato al numero 2. Avremo:

$$|\varphi^{(r+1)}\left(c+(r+1)d,y_1\right)-\varphi^{(r+1)}\left(c+(r+1)d,y_2\right)|\leq\frac{1}{2}\left|\varphi^{(1)}\left(c+d,y_1+r\frac{d}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi^{(1)}\left(c+d,y_2+r\frac{d}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\varphi^{(1)}\left(c+d,y_1-r\frac{d}{2}\right)-\varphi^{(1)}\left(c+d,y_2-r\frac{d}{2}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-r\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+r\frac{d}{2}}\left|\varphi_y^{(1)}\left(c+d,Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\varphi_y^{(1)}\left(c+d,Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|dY+$$

$$+r\,|y_1-y_2|\int_{y_2-(r-1)\frac{d}{2}}^{y_1+(r-1)\frac{d}{2}}\left|\varphi_y^{(1)}\left(c+d,Y+\frac{d}{2}\right)-\varphi_y^{(1)}\left(c+d,Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY+r\,d\,|y_1-y_2|.$$

In quest'ultima relazione, al posto del primo termine a secondo membro sostituiamo la sua espressione data dalla (18**), mentre al secondo termine sostituiamo l'espressione data dalla (18*), quanto al primo degli integrali che compaiono a secondo membro lo trasformiamo adoperando la (12), ed al secondo applichiamo la (12''). Otteniamo così:

$$|\varphi^{(r+1)}\Bigl(c+(r+1)\,d\,,y_1\Bigr)-\varphi^{(r+1)}\Bigl(c+(r+1)\,d\,,y_2\Bigr)|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1+(r+1)\frac{d}{2}\right)-\omega\left(y_2+(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1-(r+1)\frac{d}{2}\right)-\omega\left(y_2-(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+d\,L\,|\,y_1-y_2\,|\,(1+N)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}+(r-1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r+1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}-\frac{f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y+\frac{y_1+y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right\}d\,Y$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-(r+1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r-1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right.}\right\}d\,Y$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-(r-1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r+1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right\}d\,Y$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-(r+1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r-1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}-\frac{f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]-f\left[c,Y+\frac{y_1-y_2}{2},\omega\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right),\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right]}{\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)}\right\}dY$$

$$+\frac{1}{2}\,|y_1-y_2|\,K\,d\int\limits_{\frac{y_1+y_2}{2}-r\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+r\frac{d}{2}}(1+N)^2\,dy+$$

$$+\frac{1}{2}\,|y_1-y_2|\,K(1+N)\int\limits_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY+$$

$$+\frac{1}{2}\,|y_1-y_2|\,K\int\limits_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY+$$

$$+r\,|y_1-y_2|\int\limits_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY+$$

$$+r\,|y_1-y_2|\,d^2K\int\limits_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}(1+N)^2\,dy+$$

$$+r\,|y_1-y_2|\,d\,K(2+N)\int\limits_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY+r\,d\,|y_1-y_2|.$$

Spezzando il terzo integrale in due integrali, uno con i limiti $\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\right.$ $\left.-(r-1)\frac{d}{2}\right), \left(\frac{y_1+y_2}{2}+(r-1)\frac{d}{2}\right)$ e l'altro con i limiti $\left(\frac{y_1+y_2}{2}+(r-1)\frac{d}{2}\right)$, $\left(\frac{y_1+y_2}{2}+(r+1)\frac{d}{2}\right)$, e spezzando il quarto in due integrali, uno con i limiti $\left(\frac{y_1+y_2}{2}-(r+1)\frac{d}{2}\right), \left(\frac{y_1+y_2}{2}-(r-1)\frac{d}{2}\right)$ e l'altro con i limiti $\left(\frac{y_1+y_2}{2}-(r-1)\frac{d}{2}\right), \left(\frac{y_1+y_2}{2}+(r-1)\frac{d}{2}\right)$, operando le opportune riduzioni e tenendo presente che $L \leq K$, $rd \leq e-c$, e che y_1 e y_2 variano in (a, b), si ottiene:

$$|\varphi^{(r+1)}\left(c+(r+1)d, y_1\right)-\varphi^{(r+1)}\left(c+(r+1)d, y_2\right)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1+(r+1)\frac{d}{2}\right)-\omega\left(y_2+(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1-(r+1)\frac{d}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\omega\left(y_2-(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-(r+1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r+1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|dY+$$

$$+d|y_1-y_2|\{K(1+N)+K(1+N)^2(e-c)+rd(1+N)^2(b-a+e-c)+r\}+$$

$$+|y_1-y_2|\left\{\frac{1}{2}K(1+N)+\frac{1}{2}K+rdK(2+N)+r\right\}\int_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY;$$

e osservando che le parentesi graffe contengono quantità maggiorabili con l'espressione $K[(b-a)+(e-c)+1]^2(N+2)^2+r$, il primo membro di queste disuguaglianze risulta ancora minore di:

$$\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1+(r+1)\frac{d}{2}\right)-\omega\left(y_2+(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1-(r+1)\frac{d}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\omega\left(y_2-(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-(r+1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r+1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|dY+$$

$$+d|y_1-y_2|\{K[(b-a)+(e-c)+1]^2[N+2]^2+r\}+|y_1-y_2|\{K[(b-$$

$$-a)+(e-c)+1]^2(N+2)^2+r\}\int_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY.$$

Ed in virtù della relazione b) scritta per $s=0$ si ottiene:

$$|\varphi^{(r+1)}\left(c+(r+1)d, y_1\right)-\varphi^{(r+1)}\left(c+(r+1)d, y_2\right)|\leq\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1+(r+1)\frac{d}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\omega\left(y_2+(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\omega\left(y_1-(r+1)\frac{d}{2}\right)-\omega\left(y_2-(r+1)\frac{d}{2}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{y_1+y_2}{2}-(r+1)\frac{d}{2}}^{\frac{y_1+y_2}{2}+(r+1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{y_1-y_2}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{y_1-y_2}{2}\right)\right|dY+$$

$$+(r+1)|y_1-y_2|\int_{y_2-r\frac{d}{2}}^{y_1+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|dY+(r+1)d\,|y_1-y_2|.$$

Questa relazione non è altro che la (17) quando si sostituisca ad r, $r+1$. In definitiva, tenendo presente la III del numero 1, possiamo dire che la (17) è vera per $r=1$ poichè $(1+N)L<K[(b-a)+(e-c)+1]^2(2+N)^2<\frac{1}{2}$; come si verifica subito dalla (16). D'altra parte $\varphi^{(1)}(c+d, y)$ è Lipschitziana, infatti dalla (16) si ottiene che esiste una costante di Lipschitz $N^{(1)}$ relativa a $\varphi^{(1)}(c+d, y)$ che soddisfa alla $N^{(1)}\leq N+d+\int_{a-(e-c)}^{b+(e-c)}M(t)\,dt$, da cui

$$K[(b-a)+(e-c)+1]^2[2+N^{(1)}]^2\leq K[(b-a)+(e-c)+1]^2[2+N+d+\int_{a-(e-c)}^{b+(e-c)}M(t)dt]^2\leq\frac{1}{2},$$

sempre in virtù della III, e perciò è verificata la b) per $s=0, 1$. Allora è vera la (17) per $r=2$, e quindi $\varphi^{(2)}(c+2d, y)$ è Lipschitziana, con costante di Lipschitz $N^{(2)}$, con $N^{(2)}\leq N+2d+(e-c+1)\int_{a-(e-c)}^{b+(e-c)}M(t)\,dt$, e così procedendo concludiamo col dire che la (17) è vera per qualunque r.

Osserviamo che dalla (17) discende che in generale

$$N^{(r)}\leq N+(e-c)+(e-c+1)\int_{a-(e-c)}^{b+(e-c)}M(t)\,dt=\overline{N},$$

e quindi

$$(17') \qquad |\varphi^{(r)}(c+r\,d\,,\,y_1)-\varphi^{(r)}(c+r\,d\,,\,y_2)|\leq \overline{N}\,|y_1-y_2|\,,$$

cioè tutte le funzioni $\varphi^{(r)}(c+r\,d\,,\,y)$ sono uniformemente Lipschitziane.

6. — Prendiamo ora in considerazione il modo di variare, rispetto ad y, di $\varphi_y^{(r)}(x\,,\,y)$, e dimostriamo precisamente che in generale abbiamo:

$$(19) \qquad \int_a^b |\varphi_y^{(r)}(c^{(r)},y+h)-\varphi_y^{(r)}(c^{(r)},y-h)|\,d\,Y\leq\int_{a-r\frac{d}{2}}^{b+r\frac{d}{2}}|\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)|\,d\,Y+$$

$$+\,r\,h\int_{a-h-(r-1)\frac{d}{2}}^{b+h+(r-1)\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|d\,Y+r\,h\,d\,,$$

ove per semplicità s'è posto $c^{(r)}=c+r\,d$, a condizione che

a) $\quad K\,[(b-a)+(e-c)+1]^2\,[N^{(s)}+2]^2<\dfrac{1}{2}\quad$ per $\quad s=0\,,1\,,2\,,\ldots,\,r-1.$

Se supponiamo

b) $\quad K\,[(b-a)+(e-c)+1]^2\,[N^{(s)}+2]^2<\dfrac{1}{2}\quad$ per $\quad s=0\,,1\,,2\,,\ldots,\,r\,,$

possiamo applicare la (19) partendo, invece che dalla curva $z=\omega(y)$, dalla curva $z=\varphi^{(1)}(c',y)$, facendo solo r operazioni del tipo indicato al numero 2. Avremo

$$\int_a^b|\varphi_y^{(r+1)}(c^{(r+1)},y+h)-\varphi_y^{(r+1)}(c^{(r+1)},y-h)|dy\leq\int_{a-r\frac{d}{2}}^{b+r\frac{d}{2}}|\varphi_y^{(1)}(c',Y+h)-\varphi_y^{(1)}(c',Y-h)|d\,Y+$$

$$+rh\int_{a-h-(r-1)\frac{d}{2}}^{b+h+(r-1)\frac{d}{2}}\left|\varphi_y^{(1)}\left(c',y+\frac{d}{2}\right)-\varphi_y^{(1)}\left(c',y-\frac{d}{2}\right)\right|d\,Y+rhd.$$

E questa, in virtù della (12″) applicata ai due integrali che compaiono a secondo membro, si scrive:

$$\int_a^b |\varphi_y^{(r+1)}(c^{(r+1)}, y+h) - \varphi_y^{(r+1)}(c^{(r+1)}, y-h)|\, dY \leq$$

$$\leq \int_{a-(r+1)\frac{d}{2}}^{b+(r+1)\frac{d}{2}} |\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)|\, dY + 2hKd \int_{a-r\frac{d}{2}}^{b+r\frac{d}{2}} (1+N)^2 dy +$$

$$+ 2hK(2+N) \int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}} \left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right) - \omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right| dY + rh \int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}} \left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right) - \omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right| dY +$$

$$+ rhd^2K \int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}} (1+N)^2 dY + rhdK(2+N) \int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}} \left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right) - \omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right| dY + rhd$$

e tenendo presente che $rd \leq e - c$ e supposto $h < \frac{1}{2}$, cosa questa che si può sempre ammettere, il secondo membro di quest'ultima relazione viene maggiorato dalla:

$$\int_{a-(r+1)\frac{d}{2}}^{b+(r+1)\frac{d}{2}} |\omega'(Y+h) - \omega'(Y-h)|\, dY +$$

$$+ hd\{2K(1+N)^2[(b-a)+(e-c)] + rdK(1+N)^2[b-a+e-c+1] + r\} +$$

$$+ h\{2K(2+N) + rdK(2+N) + r\} \int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}} \left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right) - \omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right| dY \leq$$

$$\leq \int\limits_{a-(r+1)\frac{d}{2}}^{b+(r+1)\frac{d}{2}} |\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)|\,d\,Y+h\,d\{2K(2+N)^2[(b-a)+(e-c)+1]^2+r\}+$$

$$+h\{2K(2+N)^2[(b-a)+(e-c)+1]^2+r\}\int\limits_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|d\,Y.$$

Ed in virtù della relazione *a*) scritta per $s=0$ si ottiene:

$$\int\limits_a^b |\varphi_y'^{(r+1)}(c^{(r+1)},y+h)-\varphi_y'^{(r+1)}(c^{(r+1)},y-h)|\,d\,y \leq \int\limits_{a-(r+1)\frac{d}{2}}^{b+(r+1)\frac{d}{2}} |\omega'(Y+h)-\omega'(Y-h)|\,d\,Y+$$

$$+(r+1)\,h\int\limits_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}}\left|\omega'\left(Y+\frac{d}{2}\right)-\omega'\left(Y-\frac{d}{2}\right)\right|d\,Y+(r+1)\,h\,d\,.$$

In definitiva, tenendo presente la (*) del numero 1, si conclude col dire che la (19) è vera per $r=1$, poichè $2\,K\,(1+N)^2\,(b-a)\leq$ $\leq 2K(2+N)^2[(b-a)+(e-c)+1]^2\leq 1$ e $2K(2+N)<2K(2+N)^2[(b-a)+$ $+(e-c)+1]^2\leq 1$, come si verifica subito dalla (12''). Essendo inoltre

$$N^{(1)}\leq N+d+\int\limits_{a-(e-c)}^{b+(e-c)} M(t)\,d\,t\,,\ \text{e quindi}\ K\,[(b-a)+(e-c)+1]^2\,(2+N^{(1)})^2\leq$$

$$\leq K\,[(b-a)+(e-c)+1]^2\,[2+N+d+\int\limits_{a-(e-c)}^{b+(e-c)} M\,(t)\,d\,t]^2\leq\frac{1}{2}\,,\ \text{è verificata la}$$

b) per $s=0\,,1$, allora è vera la (19) per $r=2$, e così procedendo possiamo dire che la (19) è vera qualunque sia r.

Applichiamo ora la (12) a partire da $\varphi^{(r)}(c^{(r)},y)$, avremo, se $c^{(r)}\leq x$ $\leq c^{(r+1)}$,

$$\int\limits_b^a |\,\varphi_y^{(r+1)}(x\,,y+h)-\varphi_y^{(r+1)}(x\,,y-h)\,|\,d\,y\leq$$

$$\leq\int\limits_{a-\frac{x-c^{(r)}}{2}}^{b+\frac{x-c^{(r)}}{2}} |\,\varphi_y^{(r)}(c^{(r)}\,,Y+h)-\varphi_y^{(r)}(c^{(r)}\,,Y-h)\,|\,d\,Y+$$

$$+ 2\,h\,K\,|\,x - c^{(r)}\,|\int_a^b (1 + N^{(r)})^2\,d\,y +$$

$$+ 2\,h\,K(2 + N)\int_{a-h}^{b+h}\left|\,\varphi_y^{(r)}\left(c^{(r)}\,,\,y + \frac{x - c^{(r)}}{2}\right) - \varphi_y^{(r)}\left(c^{(r)}\,,\,y - \frac{x - c^{(r)}}{2}\right)\right|\,d\,y\,,$$

ricordando che $N^{(2)} < \overline{N}$ e adoperando per il primo e terzo integrale a secondo membro di quest'ultima relazione la (19) avremo:

$$\int_a^b |\,\varphi_y^{(r+1)}(x\,,\,y + h) - \varphi_y^{(r+1)}(x\,,\,y - h)\,|\,d\,y \leq$$

$$\leq \int_{a-r\frac{d}{2}-\frac{x-c^{(r)}}{2}}^{b+r\frac{d}{2}+\frac{x-c^{(r)}}{2}} |\,\omega'(Y + h) - \omega'(Y - h)\,|\,d\,Y +$$

$$+ r\,h\int_{a-h-(r-1)\frac{d}{2}-\frac{x-c^{(r)}}{2}}^{b+h+(r-1)\frac{d}{2}+\frac{x-c^{(r)}}{2}}\left|\,\omega'\left(Y + \frac{d}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{d}{2}\right)\right|\,d\,Y +$$

$$+ r\,d\,h + 2\,h\,K\,|\,x - c^{(r)}\,|\,(1 + \overline{N})^2\,(b - a) +$$

$$+ 2\,h\,K\,[2 + \overline{N}]\int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}}\left|\,\omega'\left(Y + \frac{x - c^{(r)}}{2}\right) - \omega'\left(Y - \frac{x - c^{(r)}}{2}\right)\right|\,d\,Y +$$

$$+ 2\,h\,K\,[2 + \overline{N}]\,r\,\left|\frac{x - c^{(r)}}{2}\right|\int_{a-h-(r-1)\frac{d}{2}-\frac{x-c^{(r)}}{2}}^{b+h+(r-1)\frac{d}{2}+\frac{x-c^{(r)}}{2}}\left|\,\omega'\left(Y + \frac{d}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \,\omega'\left(Y - \frac{d}{2}\right)\right|\,d\,Y + 2\,h\,K\,[2 + \overline{N}] + r\,d\left|\frac{x - c^{(r)}}{2}\right|\,,$$

ossia adoperando l'ipotesi II del numero 1 e tenendo presente che $|x - c^{(r)}| \leq d$

$$\int_a^b |\varphi_y^{(r+1)}(x, y+h) - \varphi_y^{(r+1)}(x, y-h)|\, dy \leq 2h \int_{a-(r+1)\frac{d}{2}}^{b+(r+1)\frac{d}{2}} M(y)\, dy +$$

$$+ h \{[r + 2K(2+\overline{N})(1+cd)]d\} \int_{a-h-r\frac{d}{2}}^{b+h+r\frac{d}{2}} M(y)\, dy + h\{rd + 2Kd(1+\overline{N})^2(b-a) +$$

$$+ 2rd^2 hK[2+\overline{N}]\}.$$

Siccome tutte le quantità scritte al secondo membro rimangono uniformemente limitate per $r \to \infty$, risulta

$$\int_a^b |\varphi_y^{(r+1)}(x, y+h) - \varphi_y^{(r+1)}(x, y-h)|\, dy \leq 2hA, \tag{20}$$

qualunque sia $r = 0, 1, 2, \ldots$ e qualunque sia x, purchè $c^{(r)} \leq x \leq c^{(r+1)}$, ove A è una opportuna costante.

7. Definiamo adesso la funzione $S^{(m)}(x, y)$, dipendente esclusivamente dalla suddivisione in 2^m parti dell'intervallo (c, e), prendendola uguale a $\varphi^{(1)}(x, y)$ sulla striscia $c \leq x \leq c + d$, uguale a $\varphi^{(2)}(x, y)$ sulla striscia $c + d \leq x \leq c + 2d$ e così di seguito. A causa della continuità delle $\varphi^{(r)}(x, y)$, $S^{(m)}(x, y)$ risulta continua rispetto a (x, y), essa ammette, inoltre, ovunque derivate rispetto alla x (derivate solo a destra per $x = c^{(r)}$ ed ovunque derivate rispetto alla y, continua in virtù della (7) ed analoghe.

Inoltre la funzione $S^{(m)}(x, y)$ soddisfa alla equazione (1), su ogni ordinata del tipo $x = c + rd$, dove però per derivata parziale rispetto alla x, s'intenda solo la derivata destra. Avremo ancora per la (20):

$$\int_a^b |S_y^{(m)}(x, y+h) - S_y^{(m)}(x, y-h)|\, dy \leq 2hA. \tag{21}$$

Conviene ricordare che:

$$\begin{aligned} &S^{(m)}(x, y) = \varphi^{(r)}(x, y) \\ &S_x^{(m)}(x, y) = \varphi_x^{(r)}(x, y) \\ &S_y^{(m)}(x, y) = \varphi_y^{(r)}(x, y), \text{ se } c + \frac{e-c}{2^m}(r-1) \leq x \leq c + \frac{e-c}{2^m} r. \end{aligned} \tag{21'}$$

8. **Studiamo ora il modo di variare di $\varphi^{(r)}(x, y)$ rispetto alle x.**

Se x_1 e x_2 sono due numeri appartenenti all'intervallo $(c, c+d)$, avremo:

$$\varphi^{(1)}(x_1, y) - \varphi^{(1)}(x_2, y) = \frac{1}{2}\left[\omega\left(y + \frac{x_1 - c}{2}\right) - \omega\left(y + \frac{x_2 - c}{2}\right)\right] + \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\omega\left(y - \frac{x_1 - c}{2}\right) - \omega\left(y - \frac{x_2 - c}{2}\right)\right] +$$

$$+ \int_{y-\frac{x_1-c}{2}}^{y+\frac{x_1-c}{2}} f[c, \eta, \omega, (\eta), \omega'(\eta)]\, d\eta - \int_{y-\frac{x_2-c}{2}}^{y+\frac{x_2-c}{2}} f[c, \eta, \omega(\eta), \omega'(\eta)]\, d\eta\,.$$

In generale se x_1 e x_2 appartengono allo stesso intervallo chiuso $(c + r\,d,$ $c + (r+1)\,d$, ricordando che per comodità scriviamo $c^{(r)}$ al posto di $c + r\,d$, avremo:

$$\varphi^{(r+1)}(x_1, y) - \varphi^{(r+1)}(x_2, y) = \tag{22'}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi^{(r)}\left(c + r\,d, y + \frac{x_1 + c^{(r)}}{2}\right) - \varphi^{(r)}\left(c + r\,d, y + \frac{x_2 - c^{(r)}}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\varphi^{(r)}\left(c + r\,d, y - \frac{x_1 - c^{(r)}}{2}\right) - \varphi^{(r)}\left(c + r\,d, y - \frac{x_2 - c^{(r)}}{2}\right)\right] +$$

$$+ \int_{y-\frac{x_1-c^{(r)}}{2}}^{y+\frac{x_1-c^{(r)}}{2}} f[c + r\,d, \eta, \varphi^{(r)}(c + r\,d, \eta), \varphi^{(r)}_y(c + r\,d, \eta)]\, d\eta -$$

$$- \int_{y-\frac{x_2-c^{(r)}}{2}}^{y+\frac{x_2-c^{(r)}}{2}} f[c + r\,d, \eta, \varphi^{(r)}(c + r\,d, \eta), \varphi^{(r)}_y(c + r\,d, \eta)]\, d\eta\,.$$

Possiamo sempre supporre $x_1 > x_2$, di modo che l'intervallo $\left(y - \frac{x_1 - c^{(r)}}{2},\right.$ $\left. y + \frac{x_1 - c^{(r)}}{2}\right)$ di integrazione del primo degli integrali del secondo membro risulta contenere nel suo interno l'intervallo concentrico $\left(y - \frac{x_2 - c^{(r)}}{2},\right.$

$y+\frac{x_2-c^{(r)}}{2}\Big)$, che è l'intervallo d'integrazione del secondo degli integrali al secondo membro della (22'). Di conseguenza la differenza dei due integrali considerati è uguale alla somma dei due integrali, uno sull'intervallo $\left(y-\frac{x_1-c^{(r)}}{2}, y-\frac{x_2-c^{(r)}}{2}\right)$, e l'altro sull'intervallo $\left(y+\frac{x_2-c^{(r)}}{2}, y+\frac{x_1-c^{(r)}}{2}\right)$, e siccome per la ipotesi 3° la funzione integrante si è supposta in modulo minore di M, questi due integrali, complessivamente, sono in valore assoluto inferiori a $M\,|\,x_1-x_2\,|$. Pertanto la (22'), facendo uso della (17'), fornisce con ovvî passaggi, la relazione:

$$|\,\varphi^{(r+1)}(x_1, y)-\varphi^{(r+1)}(x_2, y)\,|\leq(M+\bar{N})\,|\,x_1-x_2\,|\,. \tag{23}$$

9. — Siano adesso $P_1\equiv(x_1, y_1)$ e $P_2\equiv(x_2, y_2)$ due punti che supporremo per adesso ancora appartenenti alla stessa striscia chiusa $(c^{(r)}, c^{(r+1)})$.

Abbiamo evidentemente, identicamente

$$S^{(m)}(x_1, y_1)-S^{(m)}(x_2, y_2)=\varphi^{(r)}(x_1, y_1)-\varphi^{(r)}(x_2, y_2)=\varphi^{(r)}(x_1, y_1)-$$

$$-\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_1)+\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_1)-\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_2)+\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_2)-\varphi^{(r)}(x_2, y_2)\,.$$

Da quest'ultima relazione, prendendo i valori assoluti dei due membri e maggiorando ancora in modo ovvio si ottiene:

$$|\,S^{(m)}(x_1, y_1)-S^{(m)}(x_2, y_2)\,|\leq|\,\varphi^{(r)}(x_1, y_1)-\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_1)\,|+$$

$$+\,|\,\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_1)-\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_2)\,|+|\,\varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_2)-\varphi^{(r)}(x_2, y_2)\,|\,,$$

e questa, facendo uso delle (17') e (23), diventa:

$$|\,S^{(m)}(x_1, y_1)-S^{(m)}(x_2, y_2)\,|\leq(M+\bar{N})\,|\,x_1-c^{(r)}\,|+\bar{N}\,|\,y_1-y_2\,|+ \tag{24}$$

$$+(M+\bar{N})\,|\,x_2-c^{(r)}\,|\leq(M+\bar{N})\,2\,d+\bar{N}\,|\,y_1-y_2\,|\,.$$

Nel caso invece che P_1 e P_2 appartengono a striscie diverse e precisamente

$$c^{(r)}\leq x_1\leq c^{(r+1)}\,;\qquad c^{(s)}\leq x_2\leq c^{(s+1)}\,;\qquad \text{con}\qquad s\leq r\,,$$

avremo:

$$S^{(m)}(x_1, y_1) - S^{(m)}(x_2, y_2) = \varphi^{(r)}(x_1, y_1) - \varphi^{(s)}(x_2, y_2) = \varphi^{(r)}(x_1, y_1) -$$

$$- \varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_1) + \varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_1) - \varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_2) + \varphi^{(r)}(c^{(r)}, y_2) - \varphi^{(r-1)}(c^{(r-1)}, y_2) + \dots$$

$$\dots + \varphi^{(s+1)}(c^{(s+1)}, y_2) - \varphi^{(s)}(c^{(s)}, y_2) + \varphi^{(s)}(c^{(s)}, y_2) - \varphi^{(s)}(x_2, y_2),$$

ed applicando ripetutamente la (24), avremo:

$$(25) \quad |S^{(m)}(x_1, y_1) - S^{(m)}(x_2, y_2)| \leq (M + \overline{N})|x_1 - x_2| + 2(M + \overline{N})d + \overline{N}|y_1 - y_2|.$$

La relazione precedente porta alla seguente conseguenza: comunque si fissi un numero positivo σ, si può determinare un numero positivo δ tale che, se l'indice $\overline{m}$ è sufficientemente grande, e quindi il numero d è sufficientemente piccolo, l'oscillazione delle funzioni $S^{(m)}(x, y)$ risulta sempre minore di σ in ogni cerchio di raggio δ, ogni qualvolta sia $m > \overline{m}$. Siamo pertanto, così, sicuri che la successione $\{S^{(m)}(x, y)\}$, $(m = 1, 2, \dots)$ soddisfa alla condizione di equi — oscillazione infinitesima dell'Arzelà.

D'altra parte, se nella (25) facciamo $x_2 = c$, si ottiene subito che, ammesso sempre che y_1 ed y_2 appartengano all'intervallo (a, b), la successione delle funzioni $\{S^{(m)}(x, y)\}$ è anche equilimitata quando $c \leq x \leq e$.

10. — Ricordiamo la (17′) stabilita alla fine del numero 5:

$$(17') \qquad |\varphi^{(r)}(c + r\, d, y_1) - \varphi^{(r)}(c + r\, d, y_2)| \leq \overline{N}\, |y_1 - y_2|,$$

qualunque siano r, d (e quindi anche m). In altri termini le sezioni della superficie $z = S^{(m)}(x, y)$, che si proiettano sulle ordinate $z = c + r\, d\, (r = 1, 2, \dots)$ sono tutte curve uniformemente Lipschitziane ed inoltre:

$$(26) \qquad |S_y^{(m)}(c + r\, d, y)| = |\varphi_y^{(r)}(c + r\, d, y)| \leq \overline{N},$$

qualunque siano y, r, m.

Studiamo il comportamento di $S_x^{(m)}(x,y)$. Osserviamo a questo proposito, che, dalla (16*) abbiamo

$$(27)\quad \varphi_x^{(r)}(x,y)=\frac{1}{4}\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)},y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)-\frac{1}{4}\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)},y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}f\left[c^{(r-1)},y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2},\varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)},y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right),\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)},y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}f\left[c^{(r-1)},y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2},\varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)},y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right),\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)},y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right],$$

quando $c^{(r-1)}\leq x\leq c^{(r)}$.

Dalle (36) e ricordando l'ipotesi 3ª del numero 2, abbiamo: $|\varphi_x^{(r)}(x,y)|\leq \leq\frac{1}{2}\bar{N}+M$, qualunque siano (x,y) ed m, e di conseguenza:

$$(28)\qquad |S_x^{(m)}(x,y)|\leq\frac{1}{2}\bar{N}+M,$$

qualunque siano (x,y) ed m.

11. Riprendiamo in considerazione la (21) del numero 7.

$$(21)\qquad \int_a^b |S_y^{(m)}(x,y+h)-S_y^{(m)}(x,y-h)|\,dy\leq 2hA.$$

Per quanto è stato osservato alla fine del numero 9, la successione delle funzioni $S^{(m)}(x,y)$ soddisfa alle condizioni del noto teorema di compattezza dell'Arzelà, sappiamo allora che è possibile estrarre dalla successione $\{S^{(m)}(x,y)\}$, un'altra successione, che sarà indicata, per comodità, ancora con $\{S^{(m)'}(x,y)\}$, la quale converge uniformemente ad una funziane continua $S(x,y)$, definita nel rettangolo $(c,e;\,a,b)$. Inoltre per ogni funzione $S^{(m)}(x,y)$ di questa successione vale la relazione (25), qui riportata:

$$(25)\qquad |S^{(m)}(x_1,y_1)-S^{(m)}(x_2,y_2)|\leq(M+\bar{N})|x_1-x_2|+$$
$$+2(M+\bar{N})d+\bar{N}|y_1-y_2|$$

dove ricordiamo che è: $d=\frac{e-c}{2^m}$; per tanto passando al limite per $m\to\infty$, avremo:

$$(29)\quad |S(x_1,y_1)-S(x_2,y_2)|\leq(M+\bar{N})|x_1-x_2|+2(M+\bar{N})d+\bar{N}|y_1-y_2|,$$

in altre parole la funzione limite $S(x, y)$ è Lipschitziana nel suo campo di definizione.

Sappiamo così che le funzioni $S(\bar{x}, y)$ per ogni $\bar{x}$, sono assolutamente continue, mentre le $S^{(m)}(\bar{x}, y)$ convergono uniformemente a $S(\bar{x}, y)$, cosicchè, la (21) ci assicurà che sono soddisfatte le condizioni di un teorema di derivazione per serie in modo approssimativo di E. Baiada (9), otteniamo il risultato seguente: per tutti gli $\bar{x}$ di (c, e), la successione delle derivate $\{S_y^{(m)}(\bar{x}, y)\}$, converge in misura alla derivata $S_y(\bar{x}, y)$, la quale esiste quasi dappertutto.

In altre parole, comunque presi due numeri positlvi ε e δ, si può determinare in corrispondenza ad essi un intero $\bar{m}$, tale che per ogni intero m maggiore di $\bar{m}$, si può ottenere un insieme E_m di misura minore di δ, con la proprietà che:

$$| S_y^{(m)}(\bar{x}, y) - S_y(\bar{x}, y) | < \varepsilon ,$$

per ogni y non appartenente ad E_m. Di conseguenza, avremo, sfruttando la (26),

$$\int_a^b | S_y^{(m)}(c^{(r)}, y) - S_y(c^{(r)}, y) | \, dy \leq \int_{(a,b)-E_m} \varepsilon \, dy + \tag{30}$$

$$+ \int_{E_m} \bar{N} \, dy \leq \varepsilon (b - a) + \bar{N} \delta ,$$

per ogni $m > \bar{m}$ e per ogni $c^{(r)}$. Possiamo allora scrivere:

$$\int_a^b | S_y(c^{(r)}, y + h) - S_y(c^{(r)}, y - h) | \, dy \leq \int_a^b | S_y(c^{(r)}, y + h) - S_y^{(m)}(c^{(r)}, y + h) | \, dy +$$

$$+ \int_a^b | S_y(c^{(r)}, y - h) - S_y^{(m)}(c^{(r)}, y - h) | \, dy + \int_a^b | S_y^{(m)}(c^{(r)}, y + h) - S_y^{(m)}(c^{(r)}, y - h) | \, dy,$$

(9) E. Baiada *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » Vol I-II (1952) pp. 81-90.

e passando al limite per $m \to \infty$, sfruttando le (21) e (30), avremo

$$\int_a^b | S_y(c^{(r)}, y+h) - S_y(c^{(r)}, y-h) | \, dy \leq 2hA \,, \tag{31}$$

e ciò uniformemente rispetto a $c^{(r)}$.

Se consideriamo una successione qualunque di valori $c^{(r_i)}, (i = 1, 2, ...)$ convergente ad un valore x_0 di (c, e) ad una successione di numeri positivi $h_i, (i = 1, 2, ...)$, con la condizione che:

$$\sum_1^\infty h_i = h \,,$$

avremo dalle (21):

$$\sum_{i=1}^\infty \int_a^b | S_y^{(i)}(c^{(r_i)}, y+h_i) - S_y^{(i)}(c^{(r_i)}, y-h_i) | \, dy \leq 2A \sum_{i=1}^\infty h_i = 2hA \,,$$

comunque si scelgano i $c^{(r_i)}$. Pertanto, preso un numero positivo η, si può trovare un intero n pure positivo, tale che

$$\sum_{i=n}^\infty h_i < \eta$$

e quindi:

$$\sum_{i=n}^\infty \int_a^b | S_y^{(i)}(c^{(r_i)}, y+h_i) - S_y^{(i)}(c^{(r_i)}, y-h_i) | \, dy \leq 2A \sum_{i=n}^\infty h_i \leq 2A\eta \,,$$

cioè comunque si prende un numero positivo ε, se indichiamo con E_n l'insieme dei valori y per cui:

$$| S_y^{(i)}(c^{(r_i)}, y+h_i) - S_y(c^{(r_i)}, y-h_i) | \geq \varepsilon \,,$$

per un qualche $i \geq n$, esso sarà tale che:

$$\text{mis } E_n \leq 2A \frac{\eta}{\varepsilon} \,.$$

È dunque possibile, comunque siano fissati $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, trovare un intero positivo n, e in corrispondenza a questo un insieme E_n, di misura minore di δ tale che:

$$| S_y^{(i)} (c^{(r_i)} y + h_i) - S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y - h_i) | \leq \varepsilon ,$$

per ogni $i > n$ e per tutti gli y non appartenenti all'insieme E_n.

Fissiamo allora un intero $l > 0$ e diamo ad ε i valori $\frac{1}{2^s}$ $(s = 1, 2, ...)$ ed a δ i valori $\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^s}$ $(s = 1, 2, ...)$, otteniamo in corrispondenza ad essi una successione (che possiamo pensare crescente) di interi n_s positivi, e una successione di insiemi E_{n_s}, $(s = 1, 2, ...)$, e se indichiamo con E_l, l'insieme di questi insiemi avremo:

$$\text{mis } E_l \leq \sum_{s=1}^{\infty} \text{mis } E_{n_s} \leq \frac{1}{l} .$$

Se y è un numero non appartenente ad E_l, comunque preso un numero positivo ε si trovi il primo s, sia esso $\bar{s}$, per cui $\varepsilon > \frac{1}{2^{\bar{s}}}$ e sarà allora per $i > n_{\bar{s}}$

$$| S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y + h_i) - S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y - h_i) | < \varepsilon , \tag{32}$$

In altre parole, la quantità espressa al primo membro della (32), converge a zero quasi-dappertutto rispetto ad y.

Con analogo calcolo ed analogo ragionamento, avremo che anche le quantità:

$$| S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y + h_i) - S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y) | , \tag{33}$$

$$| S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y) - S_y^{(i)} (c^{(r_i)}, y - h_i) | , \tag{34}$$

convergono a zero quasi dappertutto rispetto ad y, fissato che sia stato un x_0 tale che $\lim_{i \to \infty} c^{(r_i)} = x_0$. D'altra parte, dall'espressione generale di $\varphi_y^{(r)}(x, y)$ cioè da:

$$\varphi_y^{(r)} (x, y) = \frac{1}{2} \left[\varphi_y^{(r-1)} \left(c^{(r-1)}, y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2} \right) + \right. \tag{35}$$

$$\left. + \varphi_y^{(r-1)} \left(c^{(r-1)}, y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2} \right) \right] +$$

$$+f\left[c^{(r-1)}, y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right]-$$

$$-f\left[c^{(r-1)}, y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right],$$

dove $c^{(r-1)} \leq x \leq c^{(r)}$, abbiamo di conseguenza:

$$\varphi_y^{(r)}(x, y)-\varphi_y^{(r)}(c^{(r-1)}, y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)-\varphi_y^{(r)}(c^{(r-1)}, y)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y-\frac{x-c^{(r-1)}}{y}\right)-\varphi_y^{(r)}(c^{(r-1)}, y)\right]+$$

$$+f\left[c^{(r-1)}, y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right]-$$

$$-f\left[c^{(r-1)}, y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, y-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right],$$

ricordando che:

$$\varphi_y^{(r)}(c^{(r-1)}, y)=\varphi_y^{(r-1)}(c^{(r-1)}, y),$$

e sempre ammettendo che $\lim_{r\to\infty} c^{(r)}=x$, sfruttando la continuità della funzione f rispetto al complesso dei propri argomenti, nonchè il comportamento delle quantità (32), (33), (34), avremo:

(36)
$$\lim_{r\to\infty} |\varphi_y^{(r)}(x, y) - \varphi_y^{(r)}(c^{(r-1)}, y)| =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left| \varphi_y^{(r)}\left(c^{(r-1)}, y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - \varphi_y^{(r)}(x, y) \right| =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left| \varphi_y^{(r)}\left(c^{(r-1)}, y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - \varphi_y^{(r)}(x, y) \right| =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left| \varphi_y^{(r)}\left(c^{(r-1)}, y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - \varphi_y^{(r)}\left(c^{(r-1)}, y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) \right| = 0,$$

se $\lim_{r\to\infty} c^{(r)} = x$, per quasi-tutti gli y.

Di conseguenza per un teorema di FUBINI-TONELLI, avremo le relazioni:

(36′)
$$\lim_{r\to\infty} | S_y^{(m)}(x, y) - S_y^{(m)}(c^{(r-1)}, y) | =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left| S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)}, y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - S_y^{(r)}(x, y) \right| =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left| S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)}, y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - S_y^{(m)}(x, y) \right| =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left| S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)}, y + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)}, y - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) \right| = 0,$$

se $\lim_{r\to\infty} c^{(r)} = x$, per quasi tutti (x, y) nel rettangolo $(c, e; a, b)$ e dove m è legato ad r dalla relazione $c^{(r)} = c + r\,d$, $d = \dfrac{e - c}{2^m}$. In altro modo, si può dire che, per quasi tutti gli y di (a, b) i punti x in cui la (36) non vale formano un insieme di misura nulla. Indichiamo con $\bar{y}$ uno di quei valori di y per cui la (36′) vale per quasi tutti gli x. Dalla (27) del numero 10 possiamo scrivere:

(37)
$$\varphi_x^{(r)}(x, y) = \frac{1}{4}\left[\varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, \bar{y} + \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, \bar{y} - \frac{x - c^{(r-1)}}{2}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f\left[c^{(r-1)}, \bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, \bar{y}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, \bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\Bigg]-$$

$$\left.-f[x, \bar{y}, \varphi^{(r)}(x, \bar{y}), \varphi_y^{(r)}(x, \bar{y})]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f\left[c^{(r-1)}, \bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, \varphi^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, \bar{y}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), \varphi_y^{(r-1)}\left(c^{(r-1)}, \bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\Bigg]-$$

$$\left.-f[x, \bar{y}, \varphi^{(r)}(x, \bar{y}), \varphi_y^{(r)}(x, \bar{y})]\right\}+f[x, \bar{y}, \varphi^{(r)}(x, \bar{y}), \varphi_y^{(r)}(x, \bar{y})] .$$

12. In virtù dell'espressione generale di $\varphi_y^{(r)}(x, y)$ riportata nella formula (35) e della relazione (26), si ottiene che le $S_y^{(m)}(x, y)$ sono equilimitate, sia rispetto ad m che rispetto ad (x, y). Possiamo allora applicare un lemma dovuto ad E. Baiada [10], il quale ci permette di affermare che $S_y^{(m)}(x, y)$, per quasi tutti gli y, converge in misura ad $S_y(x, y)$.

Siccome la (37) si può scrivere nella forma:

$$(37') \quad S_x^{(m)}(x,\bar{y})=\frac{1}{4}\left[S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)-S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f\left[c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, S^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f[x,\bar{y}, S^{(m)}(x,\bar{y}), S_y^{(m)}(x,\bar{y})]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f\left[c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}, S^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right), S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-f[x,\bar{y}, S^{(m)}(x,\bar{y}), S_y^{(m)}(x,\bar{y})]\right\}+f[x,\bar{y}, S^{(m)}(x,\bar{y}), S_y^{(m)}(x,\bar{y})],$$

[10] Vedi E. BAIADA. Nota citata in (1), paragrafo 8 (pp. 22-23 della nota).

si otterrà, integrando ambo i membri di questa uguaglianza, rispetto ad x, ed operando semplici passaggi e maggiorazioni ovvie, la relazione seguente:

$$(38) \qquad \left|\int_c^x S_x^{(m)}(x,\bar{y})\,dx - \int_c^x f[x,\bar{y},S^{(m)}(x,\bar{y}),S_y^{(m)}(x,\bar{y})]\,dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_c^e \left| S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right) - S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right| dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_c^e \left| f\left[c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2},S^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right),S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}+\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - f[x,\bar{y},S^{(m)}(x,\bar{y}),S_y^{(m)}(x,\bar{y})]\right| dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_c^e \left| f\left[c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2},S^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right),S_y^{(m)}\left(c^{(r-1)},\bar{y}-\frac{x-c^{(r-1)}}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - f[x,\bar{y},S^{(m)}(x,\bar{y}),S_y^{(m)}(x,\bar{y})]\right| dx .$$

Per quanto è stato osservato alla fine del numero 10, nonchè per il fatto che:

$$\int_c^x S_x^{(m)}(x,y)\,dx = S^{(m)}(x,y) - \omega(y),$$

passando al limite per $m \to \infty$ nella (38), e ricordando che $S_y^{(m)}(x,\bar{y})$ converge in misura a $S_y(x,\bar{y})$ nell'ipotesi che $\bar{y}$ appartenga ad un opportuno insieme, che sappiamo esistere, di misura $b-a$, abbiamo la relazione:

$$S(x,\bar{y}) = \omega(\bar{y}) + \int_c^x f[x,\bar{y},S(x,\bar{y}),S_y(x,\bar{y})]\,dx .$$

Poichè sappiamo già che $S(x,y)$ è Lipschitziana, quindi assolutamente continua rispetto ad x, si ottiene, derivando la relazione precedente rispetto ad x:

$$S_x(x,\bar{y}) = f[x,\bar{y},S(x,\bar{y}),S_y(x,\bar{y})]$$

per tutti gli $\bar{y}$ d'un opportuno insieme di misura $b - a$, e per ognuno di questi $\bar{y}$, per quasi tutti gli x di (c, e).

È chiaro inoltre che la funzione $S(x, y)$ soddisfa alla condizione iniziale (2) identicamente rispetto ad y.

Si ottiene così il teorema:

Se $f(x, y, z, q)$ è definita per $c \leq x \leq \bar{c}, y, z, q$ qualunque, continua, Lipschitziana rispetto a q, con derivate parziali f_y e f_z Lipschitziane rispetto ad y, z, q, ed esiste una costante M tale che: $|f(x, y, z, q)| \leq M$; inoltre se $\omega(y)$ è definita per ogni y, continua, e soddisfa alle:

$$\left| \frac{\omega(y+h) - \omega(y-h)}{2h} \right| \leq N, \qquad \left| \frac{\omega'(y+h) - \omega'(y-h)}{2h} \right| \leq M(y),$$

dove N è costante mentre $M(y)$ è integrabile in ogni intervallo finito; allora, comunque si fissa un intervallo (a, b) esiste un numero e, con $c \leq e \leq \bar{c}$ tale che, nel campo rettangolare $(c, e; a, b)$, una funzione $z(x, y)$ Lipschitziana soddisfa quasi dappertutto alla equazione (1) e soddisfa identicamente alla condizione iniziale $z(c, y) \equiv \omega(y)$.

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 20 Ottobre 1955