ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GINO ARRIGHI

Sulle funzioni polidrome di matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 8, nº 3-4 (1954), p. 141-156

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_3-4_141_0>

SULLE FUNZIONI POLIDROME DI MATRICI

di GINO ARRIGHI (a Pisa)

INTRODUZIONE

Nelle varie ricerche attorno la definizione di funzione di una matrice A, cioè della corrispondenza fra una funzione $\varphi(z)$ ed una matrice da indicarsi con $\varphi(A)$, prendo in considerazione due indirizzi fondamentali pure da me seguiti in questa nota (nel modo che appresso dirò) nella prospettiva di definire la funzione polidroma di A.

Primo indirizzo dirò quello che, fondandosi sostanzialmente sulla formula di interpolazione di Lagrange o sopra una sua estensione (1), conduce a definire $\varphi(A)$ come un polinomio in A mediante una formula che ancora diremo di interpolazione.

Secondo indirizzo dirò quello che, ridotta la A ad una forma canonica C e considerato il comportamento delle funzioni razionali intere delle matrici componenti di C si estende questo con analogia sostituendovi un simbolo funzionale più generale per poi pervenire alla $\varphi(A)$ con la trasformazione inversa della canonizzante.

Nel primo indirizzo si trova la formula di Sylvester (2) relativa al caso di radici caratteristiche tutte distinte; Cartan (3) ne suggerisce la estensione al caso di radici caratteristiche non tutte distinte consigliando che, per ciascuna di esse, la $\varphi(z)$ e una funzione razionale intera $R(z)$ siano eguali e lo siano pure le loro successive derivate sino all'ordine eguale alla molteplicità, diminuita di 1, della radice che si considera; pone quindi $\varphi(A) = R(A)$.

---

(1) HERMITE C. *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, in « Journal für die reine angewandte Mathematik » Band LXXXIV (1878), Heft 1, pag. 70.

(2) SYLVESTER J. J. *Outhe Equation to the Secular Inequalities in the Planetary theory*, in « Philosophical Magazine and Journal of Science ». Series V, Vol. 16 (1883), pag. 267.

(3) CARTAN E. *Nombres complexes. Exposé, d'après l'article allemand de E. Study*, in « Encyclopédie des sciences mathématiques », Tome I, Vol. 1, fasc. 3, pag. 329. Vedi pagg. 438-439

Il Cartan infine, relativamente al caso di polidromia di $\varphi(z)$, considera la possibilità di mutare determinazione al mutare di radice caratteristica ed inoltre cita Buchheim ([4]) come autore della generalizzazione della formula di Sylvester al caso di radici caratteristiche non tutte distinte.

In realtà il Buchheim, nella sua ricerca, mantiene una aderenza alla questione maggiore di quella consigliata da Cartan giacchè limita la eguaglianza delle derivate all'ordine eguale all'indice, diminuito di 1, della radice che si considera; ma la formula conclusiva di Buchheim, che senza alcuna osservazione in proposito è citata da Cartan e altrove ([5]), è errata. Pertanto si è ritenuto opportuno riprendere in esame la questione.

Il secondo indirizzo può dirsi aperto dalle fondamentali ricerche di Giorgi ([6]) che, usufruendo della forma canonica di Jordan, tratta successivamente i casi di radici tutte distinte e di radici non tutte distinte; ma in esse non si trova il dettaglio da seguirsi nel caso di polidromia.

Crònologicamente fra la prima e la seconda nota di Giorgi, compaiono la ricerca di Fantappiè ([7]) e il suggerimento dato da Cartan a Giorgi riportato nella seconda nota di questi. Successivamente, la questione è stata ripresa dal Cipolla ([8]) che rielabora la definizione di Giorgi e, per il caso di polidromia, introduce la possibilità di variare determinazione della $\varphi(z)$ al variare di matrice componente della forma canonica; ma la « matrice espressione analitica di A » fornita dalla formula (10) della sua nota ci sembra dedotta con trasformazione inversa di una canonizzante fissata; il che è di non lieve limitazione; comunque, anche per mostrare la immediata esten-

---

([4]) BUCHHEIM A. *An Extension of a Theorem of Professor Sylvester's relating to Matrices*, in « Philosophical Magazine and Journal of Science ». Series V, Vol. 22 (1886), pag. 173.

([5]) MAC DUFFEC C. C. *The Theory of Matrices*, in « Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete ». Band II (1933), Heft 5. La citazione è alla pag. 100. La citazione si trova pure nell'opera di Cartan citata in [3]) alla pag. 438, ma non nel ricordato articolo: STUDY E. *Theorie der gememen und höheren complexen Grossen*, in « Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften ». Band I, pag. 147.

La formula fornita dal Buchheim, trascritta nei nostri simboli, reca il divisore $\overset{m}{\underset{1}{\pi}}{}^{(s)}_{p}(\varrho_s - \varrho_p)^{\imath_p+1}$ al termine generico della sommatoria.

([6]) GIORGI G. *Sulle funzioni di matrici*, in « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Serie 6ª, Vol. VII (1928), pag. 179. GIORGI G. *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici*, in Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Serie 6ª, vol. VIII (1928), pag. 3.

([7]) FANTAPPIÈ L. *Le calcul des matrices*, in « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ». Tome CLXXXVI (1928), pag. 619.

([8]) CIPOLLA M. *Sulle matrici espressione analitica di un'altra*, in « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». Tomo LVI (1932), pag. 144.

sione della definizione ad una importante classe di matrici infinite, si ritiene oppoituno riprendere la questione.

Ciò posto, passo ad esporre i risultati di questa mia ricerca attorno le funzioni polidrome di matrici, avendo distinto le due parti corrispondentemente ai due indirizzi di sopra citati.

Nella Parte I, rifacendomi alle condizioni di Buchheim come a mio avviso più aderenti alla questione, dò al § 1 la definizione di funzione polidroma di matrice che, per quanto conveniente ad ogni matrice A, intendo chiamare *definizioae ristretta* giacchè qui il mutare di determinazione è limitato al mutare di radice caratteristica. In tal definizione si fornisce la esatta generalizzazione della formula d'interpolazione di Sylvester al caso di radici caratteristiche non tutte distinte. Tale definizione è valida altresì nel caso di radici caratteristiche tutte eguali e, in particolare, per la matrice identica.

Nel § 2 pongo lo studio della omografia di un S_{n-1} proiettivo in sè caratterizzata dalla matrice $\varphi(A)$, mostrando il suo comportamento all'interno dei vari spazi fondamentali associati alle singole radici caratteristiche di A. Nel § 3 tratto delle radici caratteristiche di $\varphi(A)$ ed analizzo particolarmente i suoi termini. Nel § 4 ricavo alcune proprietà fondamentali cui sodisfa la $\varphi(A)$ ora definita, proprietà già poste in evidenza da Fantappiè e Cipolla per le loro definizioni.

Nella parte II mi pongo nella prospettiva più generale della definizione di funzione polidroma di matrice conservando come in Cipolla la varietà di determinazione della $\varphi(z)$ al variare di matrice componente della forma canonica ma introducendo la generalità circa la matrice canonizzante che compare nella definizione; tutto ciò è oggetto del § 1 unitamente a rapide considerazioni circa le matrici canonizzanti che, ferma restando altra determinazione, forniscono determinazioni di $\varphi(A)$ eguali o meno.

Nel § 2 tratto del caso $A = I$ e qui vale bene mostrare la generalità della definizione trattando il classico problema (9) delle radici della matrice identica esaurientemente concluso da Cecioni (10) anche a confermare ragionamenti precedentemente svolti circa la matrice canonizzante. Nel § 3 tratto delle radici caratteristiche di $\varphi(A)$ e mostro la verifica delle proprietà fondamentali del § 4 della Parte I da parte della nuova definizione.

---

(9) FROBENIUS. *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, in « Journal für die reine cngewandte Mathematik ». Band LXXXIV (1878), Heft 1, pag. 1. Vedi pag. 16. SYLVESTER J. J. *Sur les puissauces et les racines des substitution linéaires*, in « Comptes Rendus de l'Academie des Sciences ». Tome XCIV (1882), pag. 55.

(10) CECIONI F. *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici*, in « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » Vol. XI (1909). Vedi n.i 42-45.

Nel § 4 estendo la definizione di funzione polidroma alle matrici di ordine infinito composte di infinite matrici di ordine finito e ricordo la sussistenza delle proprietà fondamentali come detto precedentemente.

Prima di concludere queste considerazioni vale far notare che, operando nel secondo indirizzo e volendosi considerare la forma canonica di Cherubino ([11]), questo autore ha già fornito ([12]) la espressione della funzione razionale intera nei termini della sua forma canonica; donde la estensione come al solito del simbolo funzionale.

Per agevolare la lettura di questa nota avverto che la numerazione delle formule inizia nuovamente nella Parte II, mentre continua la numerazione delle note.

PARTE I.

§ 1. — Siano.

a) A una matrice complessa di ordine n, con $m \leq n$ radici caratteristiche distinte, la quale relativamente alla sua radice caratteristica ϱ_s di molteplicità μ_s abbia indice $i_s + 1$.

b) $\varphi(z)$ una funzione polidroma della variabile z della quale, in corrispondenza ad ogni ϱ_s, si intenda con $\varphi_s(z)$ una determinazione qualsiasi e non necessariamente la stessa per ogni s, previa separazione delle singole determinazioni mediante un opportuno sistema di tagli, ma tale che ϱ_s appartenga al campo in cui $\varphi_s(z)$ è regolare.

c) $P(z)$ un polinomio nella variabile z, di grado $m - 1 + \sum_{1}^{m}{}_s\, i_r$, sodisfacente le condizioni

$$(1) \quad \left[\left(\frac{d}{d\,z}\right)^j P(z)\right]_{z=\varrho s} = \left[\left(\frac{d}{d\,z}\right)^j \varphi_s(z)\right]_{z=Ps} \quad (s = 1\,,2\,,\ldots,m\,; j = 0\,,1\,,2\,,\ldots,i_s)$$

In tali ipotesi e significazioni porremo

$$\varphi(A) = P(A)$$

come definizione ristretta di $\varphi(A)$ *funzione polidroma della matrice A*. È chiaro come dalla scelta delle determinazioni in *b*) segna la determinazione di $\varphi(A)$.

([11]) CHERUBINO S. *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica.* Note I e II, in « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Serie 6ª, Vol. XXIII (1936), pag. 478 e pag. 647.

([12]) CHERUBINO S. *Sulle matrici permutabili con una data,* in « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova ». Anno VII (1936), N. 3-4. Vedi pagg. 21-23.

Il problema della determinazione di $P(z)$ è determinato ed anzi è

$$(2)\qquad P(z) = \sum_{1}^{m}{}_{s} \left\{ \frac{\varphi_s(z)}{\prod_{1}^{m}{}_{p}^{s} (z-\varrho_p)^{i_p+1}} \right\}_{\varrho_s}^{i_s} \prod_{1}^{m}{}_{p}^{s} (z-\varrho_p)^{i_p+1}$$

dove: nel prodotto si intende soppresso il fattore che compete all'indice segnato in alto a destra del simbolo e sia

$$(3)\qquad \left\{ F(z) \right\}_{\lambda}^{l} = F(\lambda) + F'(\lambda)\frac{z-\lambda}{1\,!} + F''(\lambda)\frac{(z-\lambda)^2}{2\,!} + \ldots + F^{(l)}(\lambda)\frac{(z-\lambda)^l}{l\,!}$$

Avremo pertanto in definitiva

$$(4)\qquad \varphi(A) = \sum_{1}^{m}{}_{s} \left[\frac{\varphi_s(z)}{\prod_{1}^{m}{}_{p}^{s} (z-\varrho_p)^{i_p+1}} \right]_{\varrho_s}^{i_s} \prod_{1}^{m}{}_{p}^{s} (A-\varrho_p I)^{i_p+1}$$

dove: I è la matrice identica di ordine n ed ora si intenda

$$(5)\qquad \left[F(z) \right]_{\lambda}^{l} = F(\lambda) I + F'(\lambda)\frac{A-\lambda I}{1\,!} + F''(\lambda)\frac{(A-\lambda I)^2}{2\,!} + \ldots + F^{(l)}(\lambda)\frac{(A-\lambda I)^l}{l\,!}\,.$$

Nel caso di radici caratteristiche tutte eguali ($m = 1$) la (2) diviene

$$P(z) = \{\varphi(z)\}_{\varrho}^{i}$$

con la intesa (3) e dove $i+1$ è l'indice di A rispetto a ϱ; cosicchè, in luogo della (4) avremo

$$\varphi(A) = [\varphi(z)]_{\varrho}^{i}$$

con la intesa (5) e dove per la $\varphi(z)$ è possibile assumere qualsiasi determinazione purchè sodisfacente alla condizione come in *b*). Più particolarmente, per $A = I$ si ha la formula

$$\varphi(I) = \varphi(1)\,.\,I$$

che evidentemente non ci fornisce, ad esempio, tutte le radici h^e di I.

Nel caso di radici caratteristiche tutte distinte ($m = n$, ogni $i_s = 0$) si ha la formula di Sylvester

$$(6)\qquad \varphi(A) = \sum_{1}^{m}{}_{s} \varphi_s(\varrho_s) \prod_{1}^{n}{}_{p}^{s} \frac{A-\varrho_p I}{\varrho_s-\varrho_p}$$

Forse alla inesatta forma di $P(z)$ sodisfacente le (1) data da Buchheim in luogo della (2) è dovuta la inesattezza per la $\varphi(A)$ che pertanto va sostituita con la (4).

§ 2. — Si facciano ora alcuni richiami geometrici [13] considerando la omografia di un S_{n-1} proiettivo complesso in sè determinata dalla matrice A. Ordinati per dimensione crescente, siano

$$S_0^{(s)}, S_1^{(s)}, \dots, S_{i_s}^{(s)}$$

gli spazi fondamentali associati alla radice ϱ_s; il punto individuato dall'n-complesso orizzontale $x^{(s,r)}$ appartenga a $S_r^{(s)}$ ma non a $S_{r-1}^{(s)}$ (per $r = 0$ non avendo luogo questa esclusione) sarà allora

$$(A - \varrho_s I)^r x_{-1}^{(s,r)} \neq 0 \qquad (A - \varrho_s I)^{r+1} x_{-1}^{(s,r)} = 0$$

e quindi, con q intero assoluto,

$$A^q x_{-1}^{(s,r)} = \left[\varrho_s I + (A - \varrho_s I)\right]^q x_{-1}^{(s,r)} = \left[\varrho_s^q I + \sum_1^r{}_s \binom{q}{s} \varrho_s^{q-s} (A - \varrho_s I)^j\right] x_{-1}^{(s,r)} =$$

$$= \left[\varrho_s^q I + \sum_1^r{}_j \frac{d^s \varrho_s^q}{d \varrho_s^j} \frac{(A - \varrho_s I)^j}{s!}\right] x_{-1}^{(s,r)}$$

Se $Q(z)$ è un polinomio in z sarà allora

$$Q(A)\, x_{-1}^{(s,r)} = [Q(z)]_{\varrho_s}^r\, x_{-1}^{(s,r)},$$

con la intesa (5), e per il generico punto di $S_{i_s}^{(s)}$ individuato dall'n-complesso orizzontale $x^{(s)}$ sarà comunque

$$Q(A)\, x_{-1}^{(s)} = [Q(z)]_{\varrho_s}^{i_s}\, x_{-1}^{(s)} \tag{7}$$

Il generico punto dell' S_{n-1} può individuarsi coll'n-complesso orizzontale

$$u = \sum_1^m{}_s\, c_s\, x^{(s)} \tag{8}$$

([13]) CHERUBINO S. *Sulla teoria delle omografie di uno Spazio S_{n-1} in sè,* in « Rendiconti del Sommario Matematico della R. Università di Roma ». Serie IV, Vol. 1 (1937), fasc. 3 Vedi § 2.

dove i c_s sono scalari arbitrari, pertanto dalle (4), (7) si ha successivamente

$$\varphi(A)\,u_{-1} = \sum_1^m{}_s\, c_s \left[\frac{\varphi_s(z)}{\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} \prod_1^m{}_p^s (A-\varrho_p I)^{i_p+1}\, x_{-1}^{(s)} = \sum_1^m{}_s\, c_s \,.$$

$$\cdot \left[\frac{\varphi_s(z)}{\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} \left[\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}\right]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)} \,.$$

Ma per la intera (5) vale la

$$(9) \qquad \left[\frac{\varphi_s(z)}{\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} \left[\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}\right]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)} = [\varphi_s(z)]_{\varrho_s}^{i_s}\, x_{-1}^{(s)}$$

e quindi

$$(10) \qquad \varphi(A)\,u_{-1} = \sum_1^m{}_s\, c_s \left[\varphi_s(z)\right]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)} \,.$$

Per $c_s = 1$ e $c_j = 0$ con $j \neq s$, questa ci fornisce

$$\varphi(A)\, x_{-1}^{(s)} = [\varphi_s(z)]_{\varrho_s}^{i_s}\, x_{-1}^{(s)}$$

che è la generalizzazione della (7) per quanto riguarda il simbolo funzionale; più dettagliatamente si ha

$$\varphi(A)\, x_{-1}^{(s,r)} = [\varphi_s(z)]_{\varrho_s}^{r}\, x_{-1}^{(s,r)} \qquad (r = 0\,, 1\,, \ldots\,, i_s)$$

Con queste formule caratterizzanti il comportamento della omografia di matrice $\varphi(A)$ all'interno dei singoli spazi fondamentali associati ad ogni radice caratteristica di A concludiamo queste considerazioni geometriche; vogliamo però indicare due questioni sulle quali d'altra parte non intendiamo soffermarci: 1ª la deduzione di $\varphi(A)$ partendo dalla (10); 2ª con opportuna scelta di punti linearmente indipendenti nei varii spazi fondamentali associati ad ogni radice caratteristica distinta di A (*latent points* di Buchheim [14]), trovare lo sviluppo di una trasformata di $\varphi(A)$ dove sono poste diagonalmente

---

[14] BUCHHEIM A. *On the Theory of Matrices*, in « Proceedings of the London Mathematical Society » Vol. XVI (1884-85), pag. 63. La formula di pag. 77, riga 22ª, è errata e con opportune sostituzioni, va cambiata con la nostra (7).

in evidenza le sue matrici componenti ciascuna delle quali caratterizza il comportamento della omografia di matrice $\varphi(A)$ all'interno degli spazi fondamentali più ampi associati a ciascuna radice caratteristica ϱ_s.

§ 3. Supposte ordinate le radici caratteristiche di A nell'ordine Θ stabilito da una sua canonizzante, si passi a studiare le matrici degeneri

$$K(A, \varrho_s) = \left[\frac{1}{\prod\limits_1^m{}_p^s (z - \varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} \prod_1^m{}_p^s (A - \varrho_p I)^{i_p+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

Dalla identità fondamentale

$$\prod_1^m (A - \varrho_p I)^{i_p+1} = 0 \tag{12}$$

per $s \neq j$ discende

$$K(A, \varrho_s) . K(A, \varrho_j) = 0 \tag{13}$$

Dalle (8), (7) si ha successivamente

$$\sum_1^m{}_s K(A, \varrho_s) u_{-1} = \sum_1^m{}_s c_s K(A, \varrho_s) x_{-1}^{(s)} = \sum_1^m{}_s c_s x_{-1}^{(s)} = u_{-1}$$

e, per l'arbitrarietà di u,

$$\sum_1^m{}_s K(A, \varrho_s) = I. \tag{14}$$

Da questa, per la (13), si ha infine

$$\{K(A, \varrho_s)\}^2 = K(A, \varrho_s). \tag{15}$$

Per le (13), (15), (9) si ha successivamente inoltre

$$\varphi(A).K(A, \varrho_s) x_{-1}^{(s)} = K(A, \varrho_s).\varphi(A) x_{-1}^{(s)} = \left[\frac{\varphi_s(z)}{\prod\limits_1^m{}_p^s (z - \varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} \left[\frac{1}{\prod\limits_1^m{}_p^s (z - \varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_p}^{i_s} .$$

$$. \left\{\prod_1^m{}_p^s (A - \varrho_p I)^{i_p+1}\right\}^2 x_{-1}^s = \Big[\varphi_s(z)\Big]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)}$$

Nell'ordine Θ, le radici caratteristiche di $\overset{m}{\underset{1}{\Pi}}{}^{s}_{p}(A-\varrho_p I)^{i_p+1}$ sono

$$\underbrace{0\,,0\,,\dots,0}_{\substack{\text{in numero di}\\ \mu_1\,\mu_2+\dots+\mu_{s-1}}}\,,\ \underbrace{\overset{m}{\underset{1}{\Pi}}{}^{s}_{p}(\varrho_s-\varrho_p)^{i_p+1},\dots,\overset{m}{\underset{1}{\Pi}}{}^{s}_{p}(\varrho_s-\varrho_p)^{i_p+1}}_{\text{in numero di } \mu_s}\,,\ \underbrace{0\,,\dots,0\,,0}_{\substack{\text{in numero di}\\ \mu_{s+1}+\mu_{s+1}+\dots+\mu_m}} \tag{16}$$

quelle del primo addendo di $\left[\dfrac{1}{\overset{m}{\underset{1}{\Pi}}{}^{s}_{p}(z-\varrho_p)^{i_p+1}}\right]^{i_s}_{\varrho_s}$ sono tutte eguali a

$$\overset{m}{\underset{1}{\Pi}}{}^{s}_{p}(\varrho_s-\varrho_p)^{-i_p-1}$$

e di quelle degli altri addendi sono nulle tutte le corrispondenti alle non nulle delle (16); pertanto, nell'ordine Θ, le radici caratteristiche di $K(A\,,\varrho_s)$ saranno

$$0\,,0\,,\dots,0\,,1\,,\dots,1\,,0\,,\dots,0\,,0 \tag{17}$$

in quantità ordinatamente come in (16). Dalla (4) e dalle considerazioni superiori discende che la matrice $\varphi(A)-\varphi_s(\varrho_s)\,I$ ha μ_s radici caratteristiche nulle e quindi le $\varphi_s(\varrho_s)$ sono le radici caratteristiche di $\varphi(A)$ con la evidente non necessarietà che siano distinte in numero di m.

La matrice $K'(A\,,\varrho_s)$ aggiunta di $K(A\,,\varrho_s)$ è fornita dalla formula generale ([15])

$$\begin{aligned}K'(A\,,\varrho_s)=(-1)^{n+1}\{[K_{-1}(A\,,\varrho_s)]^{n-1}-\sigma_1\,[K_{-1}(A\,,\varrho_s)]^{n-2}+\\ +\sigma_2\,[K_{-1}(A\,,\varrho_s)]^{n-3}-\dots+(-1)^{n-1}\,\sigma_{n-1}I\}\end{aligned}$$

dove: σ_r è l'invariante r^{o} di $K(A\,,\varrho_s)$ e $K_{-1}(A\,,\varrho_s)$ è la trasporta di $K(A\,,\varrho_s)$. Dalla (15), (17) segue

$$\{K_{-1}(A\,,\varrho_s)\}^2=K_{-1}(A\,,\varrho_s)\,;$$

$$\sigma_1=\binom{\mu_s}{1},\ \sigma_2=\binom{\mu_s}{2},\dots,\ \sigma_{\mu_s}=\binom{\mu_s}{\mu_s},\ \sigma_{\mu_s+1}=\dots=\sigma_{n-1}=0$$

([15]) Burali-Forti C., Boggio I. *Espaces courbes.* Sten, Torino, 1924. Vedi pag. 21, formula (10) con varianti di annotazioni.

pertanto avremo

$$K'(A\,,\varrho_s) = (-1)^{n+1}\left\{1 - \binom{\mu_s}{1} + \binom{\mu_s}{2} - \dots + (-1)^{\mu_s}\binom{\mu_s}{\mu_s}\right\} K(A\,,\varrho_s) = 0$$

Quindi, riguardando $K(A\,,\varrho_s)$ come rappresentativa di una omografia vettoriale per l'S_n euclideo complesso, potrebbe confrontarsi $K(A\,,\varrho_s)$ con una estensione delle diadi di Gibbs (16); ma non intendiamo soffermarci su questo. Limitiamoci a considerare che nel caso di radici caratteristiche tutte distinte le (11) ci danno le matrici

$$\prod_{1}^{n}{}_p^s \frac{A - \varrho_p I}{\varrho_s - \varrho_p} \qquad (s = 1\,, 2\,, \dots\,, n)$$

che compaiono in modo essenziale al secondo membro delle (6).

§ 4. L'insieme delle matrici $\varphi(A)$, definite dalla (4), gode della commutabilità al suo interno e delle seguenti proprietà.

a) Per $\varphi(z) = k$ (costante), è $\varphi(A) = k\,I$.

Dalla (14) si ha

$$\varphi(A) = k \sum_{1}^{m}{}_s K(A\,,\varrho_s) = k\,I$$

b) Per $\varphi(z) = z$, è $\varphi(A) = A$.

Dalle (10), (8) si ha

$$\varphi(A)\,u_{-1} = \sum_{1}^{m}{}_s c_s\,[z]_{\varrho_s}^{i_s}\,x_{-1}^{(s)} = \sum_{1}^{m}{}_s c_s\,A\,x_{-1}^{(s)} = A\,u_{-1}$$

e, per l'arbitrarietà di u, segue l'asserto.

c) Per $\varphi(z) = \psi(z) + \chi(z)$ con $\psi(z)\,,\chi(z)$ funzioni polidrome, è $\varphi(A) = \psi(A) + \chi(A)$.

Dalle (10), (8) si ha

$$\varphi(A)\,u_{-1} = \sum_{1}^{m}{}_s c_s \Big[\psi_s(z) + \chi_s(z)\Big]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)} =$$

$$= \left\{\sum_{1}^{m}{}_s c_s \Big[\psi_s(z)\Big]_{\varrho_s}^{i_s} + \sum_{1}^{m}{}_s c_s \Big[\chi_s(z)\Big]_{\varrho_s}^{i_s}\right\} x_{-1}^{s} = \Big\{\psi(A) + \chi(A)\Big\}\,u_{-1}$$

(16) WILSON E. B. *Vector analysis*. Scribner, New-York, 1902. Vedi pag. 265. Occorrerebbe pure tener presenti le opere: BURALI-FORTI C., MARCOLONGO R. *Trasformazioni lineari*. Zanichelli, Bologna, 1929. Vedi pagg. 83-87 dove i teoremi sono estensibili a spazi di dimensione maggiore. BURGATTI P., BOGGIO T., BURALI-FORTI C. *Geometria differenziale*. Zanichelli, Bologna, 1930. Vedi pagg. 147-148. Opera citata in nota (15), vedi pagg. 13, 19-21.

e, per l'arbitrarietà di u, segue l'asserto

d) Per $\varphi(z) = \psi(z)\,\chi(z)$ con $\psi(z)$, $\chi(z)$ funzioni polidrome, è $\varphi(A) = \psi(A)$. $\chi(A)$.

Dalle (10), (12), (8) si ha

$$\varphi(A)\,u_{-1} = \sum_1^m{}_s\, c_s \left[\psi_s(z)\,.\,\chi_s(z)\right]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)} = \sum_1^m{}_s\, c_s \left[\psi_s(z)\right]_{\varrho_s}^{i_s} \left[\chi_s(z)\right]_{\varrho_s}^{i_s} x_{-1}^{(s)} =$$

$$= \sum_1^m{}_s\, c_s \left[\frac{\psi_s(z)}{\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} \left[\frac{\chi_s(z)}{\prod_1^m{}_p^s (z-\varrho_p)^{i_p+1}}\right]_{\varrho_s}^{i_s} .$$

$$.\left\{\prod_1^m{}_p^s (A-\varrho_p I)^{i_p+1}\right\}^2 x_{-1}^{(s)} = \left[\psi(A)\,.\,\chi(A)\right] u_{-1}$$

e, per l'arbitrarietà di u, segue l'asserto.

Circa le proprietà *c*), *d*) è opportuno fare la seguente osservazione: la somma o il prodotto delle funzioni polidrome $\psi(z)$, $\chi(z)$ non devono introdurre e sopprimere termini determinanti polidromia. Così ad esempio per $\psi(z) = z^2 + \sqrt[3]{z}$, $\chi(z) = z - \sqrt[3]{z}$ non deve assumersi, relativamente a *c*), $\psi(z) + \chi(z) = z^2 + z$; e per $\psi(z) = z^2 \sqrt[3]{z}$, $\chi(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}$ non deve assumersi, relativamente a *d*), $\psi(x)\,.\,\chi(z) = z^2$; ma è giusta invece la soppressione come alla formula (9).

Parte II.

§ 1 — Siano

a) A una matrice complessa di ordine n, con $m \leq n$ radici caratteristiche ϱ_s distinte, avente la caratteristica di Segre [17]

$$[(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)})\,(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}) \dots (e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, \dots, e_{k_s}^{(s)}) \dots (e_1^{(m)}, e_2^{(m)}, e_{km}^{(m)})]$$

---

(17) Segre C. *Mehrdimensionale Raüme*, in «Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften». Band IIIa, pag. 769. Vedi pag. 865. Oppure: Cherubino S. *Segnature, divisori elementari e forme canoniche di una matrice*, in «Bollettino della Unione Matematica Italiana». Serie II, Anno IV (1941), N. 1. Vedi pag. 8 dove è pure indicata chiaramente la costruzione della forma canonica di Jordan date le radici caratteristiche e la caratteristica di Segre.

e C come forma canonica di Jordan la quale è composta di $\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_s}} k_s$ matrici tali che la $C_r^{(s)}$ di posto $\left(\overset{s-1}{\underset{1}{\Sigma_j}} K_j + r\right)^0$ è di ordine $e_r^{(s)}$ e quindi tale da potersi scrivere

$$(1) \quad \begin{aligned} C = C_1^{(1)} \dotplus C_2^{(1)} \dotplus \dots \dotplus C_{k_1}^{(1)} \dotplus C_4^{(2)} + C_2^{(2)} + \dots \\ \dots \dotplus C_{k_2}^{(2)} \dotplus \dots \dotplus C_1^{(s)} \dotplus C_2^{(s)} \dotplus \dots \dotplus C_{k_s}^{(s)} \dotplus \dots \dotplus C_1^{(m)} \dotplus C_2^{(m)} \dotplus \dots \dotplus C_{k_m}^{(m)} \end{aligned}$$

b) $\varphi(z)$ una funzione polidroma nella variabile z della quale, in corrispondenza di ogni matrice componente $C_r^{(s)}$ si intenda con $\varphi_{s,r}(z)$ una sua determinazione qualsiasi, e non necessariamente la stessa per tutte, ma tale che ϱ_s appartenga al campo in cui $\varphi_{s,r}(z)$ esiste finita con le sue derivate sino all'ordine $e_r^{(s)} - 1$ (salvo il caso in cui sia $e_r^{(s)} = 1$ dove basta sia $\varphi_{s,r}(\varrho_s)$ finita). Con $I_r^{(s)}$ matrice identica di ordine $e_r^{(s)}$ si ponga

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_{s,r}^*(C_r^{(s)}) = \varphi_{s,r}(\varrho_s)\, I_r^{(s)} + \varphi_{s,r}'(\varrho_s)\, \frac{C_r^{(s)} - \varrho_s I_r^{(s)}}{1\,!} + \dots \\ \dots + \varphi_{s,r}^{(e_r^{(s)}-1)}(\varrho_s)\, \frac{(C_r^{(s)} - \varrho_s I_r^{(s)})^{e_r^{(s)}-1}}{(e_r^{(s)} - 1)\,!} \end{aligned}$$

come estensione di una analoga formula valida per una funzione razionale intera di $C_r^{(s)}$; ed ancora si ponga

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi^*(C) = \varphi_{1,1}^*(C_1^{(1)}) \dotplus \varphi_{1,2}^*(C_2^{(1)}) \dotplus \dots \dotplus \varphi_{1,k_1}^*(C_{k_1}^{(1)}) \dotplus \varphi_{2,1}^*(C_1^{(2)}) \dotplus \varphi_{2,2}^*(C_2^{(2)}) \dotplus \dots \\ \dots \dotplus \varphi_{2,k_2}^*(C_{k_2}^{(2)}) \dotplus \dots \dotplus \varphi_{s,1}^*(C_1^{(s)}) \dotplus \varphi_{s,2}^*(C_2^{(s)}) \dotplus \dots \dotplus \varphi_{s,k_s}^*(C_{k_s}^{(s)}) \dotplus \dots \\ \dots \dotplus \varphi_{m,1}^*(C_1^{(m)}) \dotplus \varphi_{m,2}^*(C_2^{(m)}) \dotplus \dots \dotplus \varphi_{m,k_m}^*(C_{k_m}^{(m)}) \,. \end{aligned}$$

Nelle ipotesi e significazioni superiori, indicando con T una arbitraria matrice (non degenere) tale che $T^{-1} A\, T = C$, porremo

$$(4) \quad \varphi(A) = T \cdot \varphi^*(C) \cdot T^{-1}$$

come definizione generale di $\varphi(A)$ *funzione polidroma della matrice* A. È chiaro come dalla scelta di T e dalla scelta della determinazione in *b*) segua la determinazione di $\varphi(A)$.

Vale però osservare quanto qui di seguito. Ferma restando la scelta come in *b*), cioè la determinazione di $\varphi^*(C)$, due scelte diverse T_1 e T_2 per T daranno la stessa $\varphi(A)$, cioè

$$T_1 \varphi^*(C) \,.\, T_1^{-1} = T_2 \varphi^*(C) \,.\, T_2^{-1} ,$$

quando sia

$$T_2^{-1} \,.\, T_1 \,.\, \varphi^*(C) \,.\, T_1^{-1} \,.\, T_2 = \varphi^*(C)$$

che equivale a

$$\varphi^*(C) \,.\, T_1^{-1} \,.\, T_2 = T_1^{-1} \,.\, T_2 \,.\, \varphi^*(C) ,$$

cioè quando $T_1^{-1} \,.\, T_2$ trasformi $\varphi^*(C)$ in sè stessa che equivale a dire quando $T_1^{-1} \,.\, T_2$ è permutabile con $\varphi^*(C)$ [18].

Da tutto ciò segue che è $T_2 = T_1 \bar{X}$ dove $\bar{X}$ è una matrice (non degenere) permutabile con $\varphi^*(C)$; mentre, ferma restando $\varphi^*(C)$, la scelta T_3 per T darà per la (4) una $\varphi(A)$ diversa da $T_1 \varphi^*(C) \,.\, T_1^{-1}$ quando $T_1^{-1}\, T_3$ non trasformi $\varphi^*(C)$ in sè stessa che equivale a dire quando $T_1^{-1} \,.\, T_3$ non è permutabile con $\varphi^*(C)$.

§ 2. — Nel caso particolare di $A = I$, per cui la caratteristica di Segre è $[(1, 1, \ldots, 1)]$ ed è $C = I$, sarà

$$\varphi^*(I) = \varphi_1(1) \dotplus \varphi_2(1) \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n(1)$$

donde segue

$$\varphi(I) = T \,.\, \varphi^*(I) \,.\, T^{-1}$$

dove ora si consideri l'arbitrarietà di T (non degenere).

A scopo dimostrativo della generalità della definizione e della importanza della generalità della canonizzante T che in essa figura tratteremo delle radici h^e della matrice identica di ordine n. Per $\varphi(z) = z^{\frac{1}{h}}$, dalla

$$\varphi^*(I) = \begin{pmatrix} \varepsilon, 0 & \ldots & 0 \\ 0\ \varepsilon_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

---

(18) Per l'analisi profonda della commutabilità vedi opera citata in [10]), *ni* 16-17.

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sono radici h^e qualunque (eguali o distinte) dell'unità, segue

$$\sqrt[h]{I} = T \,.\, \varphi^*(I) \,.\, T^{-1} \tag{9}$$

con T matrice arbitraria di ordine n (non degenere). Proviamo ora che la (9) ci fornisce tutte le determinazioni relative a tale problema.

Infatti se Y è una matrice di ordine n ciclica di grado m, tale lo sarà pure la sua forma canonica di Jordan

$$Y_c = H^{-1} \,.\, Y \,.\, H \,.$$

Allora posto

$$Y_c = Y_c^{(1)} \dot{+} Y_c^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} Y_c^{(k)} ,$$

dove sono in evidenza tutte le matrici componenti di ordine più basso, se si vuole che $(Y_c^{(i)})^m$, con $i = 1, 2, \ldots, k$, sia eguale alla matrice identica di ordine eguale a quello di $Y_c^{(i)}$, così come deve essere, occorre che ciascuna componente di Y_c sia di ordine 1 cioè sia

$$Y_c = \varphi^*(I)$$

dove nella (8) si è effettuata una particolare determinazione: quella che compete a Y_c. Dalla (9) discende allora Y quando, ferma restando questa determinazione, si prenda $T = H$.

Ferma restando la scelta per $\varphi^*(I)$, due matrici (non degeneri), tali che il prodotto di una per l'inversa dell'altra non è commutabile con $\varphi^*(I)$, quando siano poste in luogo di T, dànno per la (9) due determinazioni diverse di $\sqrt[k]{I}$. Così, ad esempio, per $h = 2$ e I_2 del secondo ordine, scelta

$$\varphi^*(I_c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e assumendo per T le scelte

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{p}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

sodisfacenti alla condizione predetta di non commutabilità con $\varphi^*(C)$ del prodotto di una per l'inversa dell'altra, si hanno le due determinazioni diverse di $\sqrt[2]{I_2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. — Si consideri la matrice $\varphi(A) - \varphi_{s,r}(\varrho_s)\, I$, per la (7) essa è eguale a

$$T\,[\varphi^*(C) - \varphi_{s,r}(\varrho_s)\, I]\, T^{-1},$$

ma la matrice $\varphi^*(C) - \varphi_{s,r}(\varrho_s)\, I$ ha nulli almeno $\overset{(s)}{e_r}$ termini della sua diagonale principale cioè, atteso la sua forma, ha determinante nullo e, pertanto, le $\varphi_{s,r}(\varrho_s)$ sono le radici caratteristiche di $\varphi(A)$.

L'insieme delle matrici $\varphi(A)$ definite dalla (7) gode della commutabilità al suo interno e, come al § 4 della Parte I per la definizione astratta, delle seguenti proprietà.

a) Per $\varphi(z) = k$ (costante), è $\varphi(A) = k\, I$.

Dalla (6) si ha $\varphi^*_{s,r}(C_r^{(s)}) = k\, I_r^{(s)}$, dalla (5): $\varphi^*(C) = k\, I$, e per la (7) è in definitiva

$$\varphi(A) = k\, T\, I\, T^{-1} = k\, I.$$

b) Per $\varphi(z) = z$, è $\varphi(A) = A$.

Dalla (6) si ha $\varphi^*_{s,r}(C_r^{(s)}) = C_r^{(s)}$, dalle (5), (1): $\varphi^*(C) = C$, e per la (7) è in definitiva

$$\varphi(A) = T\, C\, T^{-1} = A.$$

c) Per $\varphi(z) = \psi(z) + \chi(z)$ con $\varphi(z)$, $\chi(z)$ funzioni polidrome, è $\varphi(A) = \psi(A) + \chi(A)$.

Dalla (6) si ha $\varphi^*_{s,r}(C_r^{(s)}) = \psi_{s,r}(C_r^{(s)}) + \chi^*_{s,r}(C_r^{(s)})$, dalla (5): $\varphi^*(C) = \psi^*(C) + \chi^*(C)$, e per la (7) è in definitiva

$$\varphi(A) = T\, \psi^*(C)\, T^{-1} + T \,.\, \chi^*(C) \,.\, T^{-1} = \psi(A) + \chi(A).$$

d) Per $\varphi(z) = \psi(z) \,.\, \chi(z)$ con $\psi(z)$, $\chi(z)$ funzioni polidrome, è $\varphi(A) = \psi(A) \,.\, \chi(A)$.

Dalla (6) si ha $\varphi^*_{s,r}(C_r^s) = \psi^*_{s,r}(C_r^{(s)}) \,.\, \chi^*_{s,r}(C_r^{(s)})$, dalla (5): $\varphi^*(C) = \psi^*(C) \,.\, \chi^*(C)$, e per la (7) è in definitiva

$$\varphi(A) = T \,.\, \psi^*(C) \,.\, T^{-1} \,.\, T\, \chi^*(C)\, T^{-1} = \psi(A) \,.\, \chi(A).$$

Per le *c*) *d*) vale ancora la osservazione svolta in corrispondenza delle *c*), *d*) del § 4 della Parte I.

§ 4. — Sia A ora una matrice complessa di ordine infinito composta di infinite matrici di ordine finito, cioè

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dot{+} \ldots \dot{+} A_q \dot{+} \ldots$$

e per ciascuna di esse, nel senso indicato nel § 1, si ponga la definizione generale di funzione polidroma; allora porremo come definizione generale di *funzione polidroma* di A

$$\varphi(A) = \varphi(A_1) \dot{+} \varphi(A_2) \dot{+} \dots \dot{+} \varphi(A_q) \dot{+} \dots \tag{10}$$

dove la determinazione di $\varphi(A)$ consegue dalle determinazioni scelte come in (6) per ciascuna matrice componente A_q di A e dalla scelta della matrice

$$T = T_1 \dot{+} T_2 \dot{+} \dots \dot{+} T_q \dot{+} \dots$$

di ordine infinito composta di infinite matrici (non degeneri) di ordine finito ma tali che $T_q^{-1} \,.\, A_q \,.\, T_q$ è la forma, canonica di Jordan della A_q.

L'insieme delle matrici $\varphi(A)$ definite dalla (2) gode della commutabilità al suo interno e, analogamente a quanto nel § 4 della Parte I e nel § 2 della Parte II, delle seguenti proprietà

a) Per $\varphi(z) = k$ (costante), è $\varphi(A) = k\, I_\infty$

b) Per $\varphi(z) = z$, è $\varphi(A) = A$.

c) Per $\varphi(z) = \psi(z) + \chi(z)$ con $\psi(z)$, $\chi(z)$ funzioni polidrome è $\varphi(A) = \psi(A) + \chi(A)$.

d) Per $\varphi(z) = \psi(z) \,.\, \chi(z)$ con $\psi(z)$, $\chi(z)$ funzioni polidrome, è $\varphi(A) = \psi(A) \,.\, \chi(A)$.

Lascio al lettore la verifica di queste ma ricordo la osservazione che per le *c*), *d*) è stata fatta nei luoghi di sopra citati.