

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ENRICO MAGENES

**Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari  
del secondo ordine di tipo ellittico**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 8,  
n° 1-2 (1954), p. 93-120*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1954\\_3\\_8\\_1-2\\_93\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_1-2_93_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUI PROBLEMI AL CONTORNO MISTI PER LE EQUAZIONI LINEARI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO ELLITTICO

di ENRICO MAGENES (Modena) <sup>(1)</sup>

È noto che dicesi problema al contorno « misto » per l'equazione lineare del secondo ordine alle derivate parziali di tipo ellittico, in  $m$  variabili, assegnata in un dominio  $\mathcal{D}$

$$(I) \quad E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^m b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c u = f$$

il problema consistente nel ricercare una soluzione  $u$  della (I) per la quale sia data su una parte  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  della frontiera di  $\mathcal{D}$  la soluzione stessa e sulla restante parte  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  la sua derivata conormale  $\frac{du}{d\nu}$  <sup>(2)</sup>. Esso rientra nel problema più generale della « derivata obliqua », ma ne rappresenta un caso dei più singolari e difficili. E infatti se si tolgono alcuni studi relativi all'equazione di LAPLACE, per lo più in due variabili <sup>(3)</sup>, le questioni esistenziali per il problema « misto » erano rimaste fino a poco tempo addietro assai incomplete, a differenza dei cosiddetti problemi « uniformi » (problema di DI-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito per l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo e comunicato al Congresso Internazionale di Matematica di Amsterdam (1-9 settembre 1954).

<sup>(2)</sup> Alcuni Autori chiamano problema « misto » anche il problema in cui come condizione al contorno si dà su tutta  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  una combinazione lineare del tipo  $h \frac{du}{d\nu} + k u$  con  $h$  continua e sempre di uno stesso segno; questo problema è sostanzialmente distinto da quello che noi qui consideriamo e meglio sarebbe, come fa G. GIRAUD, chiamarlo problema del tipo di NEUMANN; in realtà esso si studia proprio come il problema di NEUMANN ed anzi ad esso si può ricondurre.

<sup>(3)</sup> Si vedano V. VOLTERRA [21], P. KOEBE [15 § 4], S. ZAREMBA [22], A. SIGNORINI [20], A. LIÉNARD [24], A. GHIZZETTI [14], L. MYRBERG [18], A. ZITAROSA [23], Y. KOMATU [16]; alcuni risultati di autori russi (M. V. KELDYSH, L. I. SEDOV) sono riportati da N. I. MUSKHELISVILI [25; § 94, 95]. I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale del presente lavoro.

RICHLET e di NEUMANN, caso « regolare » del problema della derivata obliqua).

I risultati più notevoli erano dovuti a G. GIRAUD, ma in ipotesi particolari sulle porzioni  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  della frontiera di  $\mathcal{D}$ : in un primo caso (v. [12], chap. XII), in definitiva del tutto analogo ai problemi « uniformi », supponendo che  $\mathcal{D}$  fosse a connessione ipersuperficiale multipla e  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  avessero distanza positiva; in un secondo caso (v. [13]) supponendo che nei punti dell'insieme di separazione su  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  di  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  queste due parti formassero un angolo assegnato e precisamente che la conormale a  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  fosse tangente a  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ . Anche questo secondo caso, assai più delicato del primo e studiato dal GIRAUD mediante un ingegnoso principio di simmetria, era però in sostanza un caso particolare.

Le difficoltà che il problema presentava ai diversi metodi risolutivi (si pensi per es. alla riduzione ad equazione integrale di seconda specie) erano in realtà di tipo essenzialmente nuovo nei confronti dei problemi « uniformi ».

Solo recentemente il problema esistenziale è stato studiato a fondo da G. FICHERA (v. [6], [7]). Chiarita anzitutto la questione della ricerca della classe di funzioni nella quale si pone la soluzione e il modo secondo il quale i valori al contorno debbano essere assunti dalla soluzione stessa (questione della massima importanza perchè il problema sia compatibile (v. [9], [11])), il FICHERA, rifacendosi ad una traduzione del problema « misto » in una equazione integrale di prima specie, riesce a risolvere questa equazione integrale, nel caso che la (I) sia *autoaggiunta*, mediante un nuovo procedimento esistenziale, di assai vasta applicazione anche in altri problemi di analisi funzionale lineare, pervenendo così ad un teorema di esistenza e di unicità per il problema misto.

Il procedimento del FICHERA urta però contro difficoltà nel caso generale, cioè se la (I) non è autoaggiunta, tant'è che in questo caso la questione non era stata finora risolta.

Il metodo che esporrò in questo lavoro è invece applicabile in generale, anche se la (I) non è autoaggiunta. Esso si inquadra nei procedimenti dell'analisi funzionale lineare moderna, basandosi sostanzialmente su un teorema di completezza e su un teorema di chiusura o di convergenza.

Sistemi di funzioni completi, relativamente ai problemi misti, sono già stati trovati dallo stesso FICHERA recentemente (v. [5]); e appunto questi risultati del FICHERA mi hanno assicurato l'esistenza di un sistema  $\{w_k(P)\}$  di soluzioni dell'equazione  $E(u) = 0$  tale che il sistema di vettori, di componenti  $w_k$  su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $-\frac{dw_k}{d\nu}$  su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , risulti completo per l'approssimazione lineare in media dei vettori a due componenti di quadrato sommabile rispettivamente su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ .

Del tutto nuove sono invece le questioni legate al teorema di convergenza. Anzitutto possiamo supporre che sia  $f \equiv 0$  e siano pure nulli i valori della derivata conormale assegnati su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , perchè a questo caso ci si può sempre ricondurre, risolvendo preventivamente un problema di NEUMANN.

Dopo di che il primo punto essenziale è quello di provare la convergenza in media in tutto  $\mathcal{D}$  della successione  $\{u_n\}$  di combinazioni lineari delle  $\{w_k\}$ , tale che i vettori di componenti  $u_n$  su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $-\frac{d u_n}{d \nu}$  su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$

convergono in media al vettore di componenti la funzione assegnata su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e lo zero su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . Sono riuscito a dimostrare questa convergenza, considerando accanto al problema misto in cui i valori al contorno assegnati sono assunti « puntualmente » sia su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  che su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , un problema misto in cui essi vengono assunti « puntualmente » su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , mentre su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  vengono assunti « in media » in un senso analogo a quello che G. CIMMINO ha posto alla base della Sua trattazione del problema generalizzato di DIRICHLET<sup>(4)</sup>. Una volta precisato in che senso ora si debba parlare di convergenza « in media » verso i valori assegnati su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , mi sono stati naturalmente utili ragionamenti del tipo di quelli usati dal CIMMINO.

Dimostrata così la convergenza in media in  $\mathcal{D}$  della  $\{u_n\}$ , il secondo punto essenziale del metodo consiste nel dimostrare che la funzione  $u$ , limite della  $\{u_n\}$ , assume i valori al contorno prescritti.

Alquanto delicata è la dimostrazione che la  $u$  ha derivata conormale nulla su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . Per quanto riguarda poi i valori della  $u$  su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , gli stessi ragionamenti che conducono alla convergenza in media della  $\{u_n\}$  in  $\mathcal{D}$ , dimostrano che la  $u$  assume « in media » i valori assegnati su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , nella sola ipotesi che essi costituiscano una funzione ivi di quadrato sommabile; e si ottiene contemporaneamente il teorema di unicità per il problema misto così inteso.

Se poi si suppone in più che i valori assegnati su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  costituiscano una funzione ivi continua, si riesce a dimostrare anche che la soluzione trovata assume « puntualmente » su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  detti valori. In definitiva si ottengono due distinti teoremi di esistenza corrispondenti alle due diverse impostazioni del problema.

Per motivi di semplicità mi sono limitato a esporre il metodo per l'equazione in due variabili, supponendo inoltre  $\mathcal{D}$  delimitato da una sola

(4) Dei numerosi lavori di G. CIMMINO mi limito a citare la memoria [3] e la conferenza [4], cui è unita una completa bibliografia. Si osservi che in [4] il CIMMINO accenna anche, per l'equazione  $\Delta_2 u = 0$  in due variabili, ad un problema al contorno « misto », in cui i valori al contorno sono assunti in modo diverso da quelli studiati nel presente lavoro. Del problema però il CIMMINO si limita a dare un teorema di unicità.

curva chiusa semplice e  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  (e quindi  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ ) costituito da un solo arco di questa curva. Ma non si ha difficoltà ad estendere il metodo ad equazioni in più variabili e a domini anche non semplicemente connessi,  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  potendo essere costituiti da un numero finito qualunque di varietà; e si può anche assegnare su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  anzichè la  $\frac{du}{dv}$  una combinazione lineare  $\frac{du}{dv} + hu$  con  $h$  funzione non positiva.

Osserverò ancora che ho voluto considerare per ora l'equazione (I) in condizioni che portassero all'unicità della soluzione (almeno in una opportuna classe di funzioni); ritengo però che il metodo qui esposto debba servire anche a studiare il problema in condizioni generali per la (I), in cui è da presumersi valga un *teorema dell'alternativa*.

Il metodo poi può senz'altro applicarsi anche ai problemi misti per le equazioni di tipo parabolico, come mostrerò in un prossimo lavoro, che apparirà sui Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Ai Prof. CIMMINO e FICHERA, con i quali ho avuto utili conversazioni sull'argomento, desidero qui esprimere il mio ringraziamento. E voglio infine anche aggiungere, che a compilazione ormai avvenuta del presente lavoro, il Prof. FICHERA mi ha informato che, applicando un metodo per pervenire ai teoremi di esistenza per i problemi al contorno, esposto nel Suo corso « *Lezioni sulle trasformazioni lineari* », Vol. 1<sup>o</sup>, 1954 (Istituto Matematico Univ. Trieste) e diverso dal metodo da Lui usato in [6] e [7], ha potuto dimostrare, relativamente al problema misto per le equazioni di tipo ellittico in due variabili, un teorema di esistenza nella classe delle funzioni continue in  $\mathcal{D}$  e dotate delle derivate prime continue in  $(\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}) + \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . Il procedimento seguito nel presente lavoro e quello impiegato dal FICHERA hanno fondamenti completamente diversi.

1. PRELIMINARI — Si consideri l'equazione

$$(1) \quad E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^2 b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c u = f$$

i coefficienti  $a_{hk}$ ,  $b_h$ ,  $c$ ,  $f$  essendo funzioni del punto  $P$  definite in un campo  $A$  del piano euclideo  $(x_1, x_2)$ . Si supponga che la (1) sia di tipo *ellittico* in  $A$ , essendo inoltre uguale ad uno il determinante della matrice  $\|a_{hk}\|$ , ciò che non toglie generalità al problema

Ci converrà anche senz'altro supporre fin d'ora che  $E(u)$  soddisfi a ipotesi tali da assicurare l'esistenza della funzione di GREEN  $G(Q, P)$  e di quella di NEUMANN  $N(Q, P)$  relative alla (1) e ad ogni dominio regolare contenuto in  $A$ . Ciò avviene per esempio, come è noto<sup>(5)</sup>, se gli  $a_{hk}$ ,  $b_h$ ,  $c$

(5) Avrò di frequente bisogno di adoperare risultati classici e ormai ben noti sui problemi di DIRICHLET e di NEUMANN per la (1), dovuti a diversi Autori e in particolare a

sono rispettivamente in  $A$  di classe  $2H$ ,  $1H$ ,  $0H$  <sup>(6)</sup> ed è  $c \leq 0$ . Ci metteremo dunque senz'altro in queste ipotesi. Osserviamo però che il metodo che esporremo non è legato ad esse, come risulterà dalla stessa esposizione.

Ciò premesso, la  $E(u)$  ammette l'operatore aggiunto  $E^*(v)$

$$E^*(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^2 b_h^* \frac{\partial v}{\partial x_h} + c^* v$$

$$b_h^* = -b_h + 2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_h}, \quad c^* = \sum_{h,k}^{1,2} \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{h=1}^2 \frac{\partial b_h}{\partial x_h} + c$$

Sia  $\mathcal{D}$  un dominio regolare limitato, contenuto in  $A$ , la cui frontiera  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  sia costituita da una curva semplice chiusa di classe 2 in ogni suo punto; e sia

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \quad a_1 \leq t \leq a_2$$

una rappresentazione parametrica regolare di  $\mathcal{F}\mathcal{D}$ . Mediante i punti  $Q_1 \equiv [x_1(t_1), x_2(t_1)]$  e  $Q_2 \equiv [x_1(t_2), x_2(t_2)]$  ( $a_1 < t_1 < t_2 < a_2$ ) dividiamo  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  in due sottoarchi aperti e privi di estremi,  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ ;  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  sia il sottoarco che si ottiene dalle (2) per  $t_1 < t < t_2$ ,  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  il rimanente,  $\overline{\mathcal{F}_1\mathcal{D}}$  e  $\overline{\mathcal{F}_2\mathcal{D}}$  siano gli stessi archi cui si siano aggiunti gli estremi  $Q_1$  e  $Q_2$ .

Poniamo

$$b = \sum_{h=1}^2 \left( b_h - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \right) \cos(x_h, n)$$

dove  $n$  è la normale a  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  orientata verso l'interno di  $\mathcal{D}$ , e indichiamo con  $\nu$  la direzione conormale orientata pure verso l'interno.

Vogliamo considerare il problema misto consistente nell'assegnare su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  i valori  $\mu(P)$  della soluzione di (1) e su  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  quelli  $\delta(P)$  della derivata conormale.

M. GEVREY, G. GIRAUD, E. E. LEVI. Essendo la bibliografia in proposito assai vasta, mi limiterò a citare qui, e una volta per sempre, la raccolta di monografie sull'argomento di G. ASCOLI, P. BURGATTI e G. GIRAUD [1], con particolare riferimento agli articoli di ASCOLI e di GIRAUD, in cui sono ampiamente riportati risultati e citazioni bibliografiche. Riferimenti ancora più completi si troveranno in una monografia di C. MIRANDA di prossima pubblicazione nella collezione « *Ergebnisse der Mathematik* ».

(6) Secondo una nomenclatura abituale, diremo che una funzione è di classe  $r$  in un insieme, se essa è ivi continua insieme alle sue derivate parziali d'ordine  $\leq r$ ; diremo che è di classe  $rH$ , se, inoltre, le derivate d'ordine  $\leq r$  soddisfano ad una condizione di HÖLDER; diremo analogamente che una curva continua è di classe  $r$  o  $rH$  in un suo punto  $M$ , se risulta definita in un intorno di  $M$  da una rappresentazione parametrica con funzioni di classe  $r$  o  $rH$ .

Il problema può ridursi al caso in cui sia  $\delta(P) \equiv 0$  su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  e  $f(P) \equiv 0$  in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$ , se si conosce una funzione  $u_0$ , avente derivata conormale uguale a  $\delta(P)$  su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  e soluzione della (1) in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$ . Questa  $u_0$  esiste certamente se  $\delta(P)$  è la traccia su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  di una funzione  $\delta^*(P)$  continua su  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  e se è risolubile il problema di NEUMANN

$$E(u) = f \quad \text{in } \mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}, \quad \frac{d u}{d \nu} = \delta^* \quad \text{su } \mathcal{F} \mathcal{D};$$

e sono ben note le ipotesi sulla  $f$  perchè ciò sia possibile.

Supporremo dunque senz'altro  $f(P) \equiv 0$  e  $\delta(P) \equiv 0$ ; si tratterà ora di precisare il nostro problema al contorno determinando in quale classe di funzioni si debba cercare la soluzione e in che senso debbano essere assunti i dati al contorno.

2. **TEOREMA DI COMPLETEZZA** — È opportuno però prima richiamare un teorema di completezza dovuto a G. FICHERA: in condizioni che preciseremo, vale il seguente

**TEOREMA DI COMPLETEZZA:** *Esiste una successione  $\{w_k(P)\}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) di soluzioni regolari in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  <sup>(7)</sup> e di classe 1 in  $\mathcal{D}$  dell'equazione  $E(u) = 0$ , tale che il sistema dei vettori  $\{\omega_k\}$  nello spazio  $S_2$  di componenti*

$$w_k(P) \quad \text{su } \mathcal{F}_1 \mathcal{D}, \quad - \frac{d w_k(P)}{d \nu} \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$$

*risulti hilbertianamente completo nella totalità dei vettori di  $S_2$  di componenti di quadrato sommabile rispettivamente su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ .*

L'esistenza di una tale successione  $\{w_k(P)\}$  è stata esplicitamente dimostrata dal FICHERA (v. [5]) nel caso dell'equazione  $\Delta_2 u = 0$ ; ma i Suoi ragionamenti e risultati sono facilmente generalizzabili alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine, come del resto ha osservato lo stesso FICHERA (v. [8]), dato che il tipo di singolarità della soluzione fondamentale è sempre lo stesso. Le seguenti brevi considerazioni serviranno a precisare questa affermazione e le condizioni di validità del teorema stesso <sup>(8)</sup>.

<sup>(7)</sup> Diremo che una funzione  $u$  è soluzione regolare della  $E(u) = 0$  in un insieme, se essa è ivi continua insieme alle derivate parziali che compaiono nell'operatore  $E(u)$  e soddisfa ivi alla  $E(u) = 0$ .

<sup>(8)</sup> Naturalmente bisognerà tener presente anche l'estensione della teoria classica dei potenziali di linea e delle equazioni integrali lineari relative, che è stata fatta dal GIRAUD e dal GEVREY (v. [1]) per l'operatore di tipo ellittico generale; e serviranno anche i ragionamenti che L. AMERIO ha svolto per il Suo teorema di inversione della formula di GREEN (v. [2]); per una questione analoga relativa all'equazione del calore si può vedere [17].

Osserviamo anzitutto che, nelle ipotesi poste, relativamente al dominio  $\mathcal{D}$  e all'equazione  $E^*(v) = 0$  vale il noto *teorema di inversione della formula di GREEN* di L. AMERIO (v. [2]). Sia  $(v)$  la classe delle soluzioni di  $E^*(v) = 0$  in cui vale detto teorema.

La dimostrazione dell'esistenza del sistema  $\{w_k(P)\}$  si basa su un teorema di unicità in una opportuna sottoclasse di  $(v)$  per il problema <sup>(9)</sup>

$$(3) \quad E^*(v) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}, \quad v = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_1\mathcal{D}, \quad \frac{dv}{d\nu} - bv = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}$$

e il procedimento del FICHERA permette sostanzialmente di ottenere questo teorema di unicità ogni qualvolta dalla seguente nota formula (valida per ogni soluzione  $v$  regolare in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  e di classe 1 in  $\mathcal{D}$  di  $E^*(v) = 0$  e ogni funzione  $u$  opportunamente regolare)

$$(4) \quad 2 \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} u v \left( \frac{dv}{d\nu} - bv \right) ds = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} v^2 \left( \frac{du}{d\nu} - bu \right) ds + \iint_{\mathcal{D}} \left\{ v^2 [E(u) + c^*u] - \right. \\ \left. - 2u \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial v}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\} dx_1 dx_2,$$

si possa dedurre l'unicità della soluzione del problema (3) nella classe delle soluzioni di  $E^*(v) = 0$  regolari in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  e di classe 1 in  $\mathcal{D}$ . E questo avviene per es. senz'altro, come risulta dalla stessa (4), se esiste una funzione  $u$  di classe 2 in  $\mathcal{D}$  tale che

$$E(u) + c^*u \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad u < 0 \quad \text{in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}, \quad \frac{du}{d\nu} - bu \geq 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}$$

Si osservi che questa ipotesi è certamente verificata se  $E(u)$  è autoaggiunto in  $\mathcal{D}$  (basta prendere  $u \equiv -1$ ).

3. IDENTITÀ FONDAMENTALE. —  $\alpha$ ) Sia

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t, r) \\ x_2 = x_2(t, r) \end{cases}$$

<sup>(9)</sup> Si noti che questo problema è il *problema aggiunto* del seguente

$$E(u) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}, \quad u = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_1\mathcal{D}, \quad \frac{du}{d\nu} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}.$$



una trasformazione biunivoca e bicontinua del rettangolo  $R \equiv [0 \leq r \leq r_1; t_1 \leq t \leq t_2]$  del piano  $(t, r)$  nel dominio  $\mathfrak{D}$  del piano  $(x_1, x_2)$ , tale che:

I) Per ogni  $r$  le (5) diano una rappresentazione parametrica regolare di una curva regolare  $\gamma_r$ , la quale coincide con l'arco  $\overline{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{D}}$  per  $r = 0$ ;

II) Almeno per  $r$  in un intorno dello zero, gli estremi di  $\gamma_r$ ,  $Q_{i,r} \equiv [x_1(t_i, r), x_2(t_i, r)]$  ( $i = 1, 2$ ), e solo essi, siano punti di  $\mathfrak{F}_2 \mathfrak{D}$ , e precisamente sia per  $0 \leq r \leq r_0$  ( $r_0 < r_1$ )

$$(6) \quad \begin{cases} x_1(t_1, r) = x_1(t_1 - r) & x_1(t_2, r) = x_1(t_2 + r) \\ x_2(t_1, r) = x_2(t_1 - r) & x_2(t_2, r) = x_2(t_2 + r) \end{cases}$$

III) Esistano e siano generalmente continue e limitate le derivate parziali delle  $x_i(t, r)$  rispetto a  $t$  e  $r$ ,  $x_{i,r}$  e  $x_{i,t}$  ( $i = 1, 2$ ), in  $R$  e siano tali che  $x_{1,t}x_{2,r} - x_{1,r}x_{2,t} > 0$ ; inoltre siano verificate per  $0 < r \leq r_0$  le relazioni

$$(7) \quad [a_{22}(Q_{i,r})x_{1,t}(t_i, r) - a_{12}(Q_{i,r})x_{2,t}(t_i, r)]x_{1,r}(t_i, r) - [a_{21}(Q_{i,r})x_{1,t}(t_i, r) - a_{11}(Q_{i,r})x_{2,t}(t_i, r)]x_{2,r}(t_i, r) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Si osservi che le (7), in virtù delle (6), esprimono in sostanza il fatto che, per  $0 < r < r_0$ ,  $\gamma_r$  abbia nei punti  $Q_{1,r}$  e  $Q_{2,r}$  tangente che coincide, a meno eventualmente del verso, con la derivata conormale a  $\mathfrak{F} \mathfrak{D}$  negli stessi punti.

Consideriamo poi per ogni  $(t, r)$  di  $R$  il seguente sistema di equazioni

$$(8) \quad x_{1,r} = \alpha(a_{21}x_{1,t} - a_{11}x_{2,t}) + \beta x_{1,t}, \quad x_{2,r} = \alpha(a_{22}x_{1,t} - a_{12}x_{2,t}) + \beta x_{2,t}$$

gli  $a_{hk}$  intendendosi naturalmente calcolati per  $x_1 = x_1(t, r)$  e  $x_2 = x_2(t, r)$ . Si ha per le funzioni  $\alpha$  e  $\beta$

$$(9) \quad \alpha = \frac{x_{1,t}x_{2,r} - x_{1,r}x_{2,t}}{a_{22}x_{1,t}^2 - (a_{21} + a_{12})x_{1,t}x_{2,t} + a_{11}x_{2,t}^2},$$

$$\beta = \frac{(a_{22}x_{1,t} - a_{12}x_{2,t})x_{1,r} - (a_{21}x_{1,t} - a_{11}x_{2,t})x_{2,r}}{a_{22}x_{1,t}^2 - (a_{21} + a_{12})x_{1,t}x_{2,t} + a_{11}x_{2,t}^2}.$$

Introduciamo ora una funzione « peso »  $P(t, r)$  sulla quale supporremo che

a)  $P(t, r)$  sia continua e positiva in tutto  $R$  e tale che il prodotto  $P\alpha$ , considerato, attraverso l'inversa delle (5), come funzione di  $(x_1, x_2)$ , sia in  $\mathfrak{D} - \overline{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{D}}$  funzione di classe 2;

b) per ogni  $r$  tale che  $0 < r \leq r_0$  esista e sia limitata quasi-ovunque in  $(t_1, t_2)$  la derivata  $(P\beta)_t$ ; per gli stessi  $r$  e per quasi-tutti i  $t$  di  $(t_1, t_2)$

esista la derivata  $P_r$  e sia limitata nell'intorno di ogni tale  $r$  al variare di  $t$  in  $(t_1, t_2)$ .

$\beta$ ) Fatte queste premesse, sia  $u(x_1, x_2)$  una funzione soddisfacente alle seguenti condizioni:

- 1) è soluzione regolare di  $E(u) = 0$  in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$
- 2) è continua in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}_1\mathcal{D}$
- 3) ha derivate parziali prime continue in  $\mathcal{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathcal{D}}$ .

Si consideri per  $0 < r \leq r_0$  la funzione di  $r$

$$(10) \quad \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) u^2 [x_1(t, r), x_2(t, r)] dt.$$

Possiamo derivare la (10) rispetto ad  $r$  sotto il segno di integrale e in virtù delle (8) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} P u \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} x_{1,r} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{2,r} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} P \alpha u \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} (a_{21} x_{1,t} - a_{11} x_{2,t}) + \frac{\partial u}{\partial x_2} (a_{22} x_{1,t} - a_{12} x_{2,t}) \right] dt + \\ &\quad + 2 \int_{t_1}^{t_2} P \beta u \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} x_{1,t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{2,t} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dt + \\ &\quad + 2 \int_{t_1}^{t_2} P \beta u \frac{\partial u}{\partial t} dt + 2 \int_{\mathcal{F}_1\mathcal{D}_r} P \alpha u \frac{du}{ds} ds \end{aligned}$$

dove con  $\mathcal{D}_r$  indichiamo il dominio regolare delimitato da  $\gamma_r$  e dall'arco di  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  avente per estremi  $Q_{1,r}$  e  $Q_{2,r}$ , con  $\mathcal{F}\mathcal{D}_r$  indichiamo la frontiera di  $\mathcal{D}_r$ , con  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}_r$  la parte di  $\mathcal{F}\mathcal{D}_r$  costituita da  $\gamma_r$  stessa e infine con  $\nu$  la conormale a  $\mathcal{F}\mathcal{D}_r$  orientata verso l'interno di  $\mathcal{D}_r$ .

Mediante un'integrazione per parti e tenendo presenti le (7), si ha

$$2 \int_{t_1}^{t_2} P \beta u \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_1}^{t_2} u^2 (P \beta)_t dt.$$

Posto  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r = \mathcal{F} \mathcal{D}_r - \overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_r}$  si ha dunque

$$\frac{d}{d r} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 a t = \int_{t_1}^{t_2} [P_r - (P \beta)_t] u^2 d t + 2 \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} P \alpha u \frac{d u}{d v_r} d s - 2 \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} P \alpha u \frac{d u}{d v} d s.$$

D'altra parte, come conseguenza delle formula di reciprocità di GREEN, si ha

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} P \alpha u \frac{d u}{d v_r} d s = \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} \left[ \frac{d(P \alpha)}{d v_r} - b P \alpha \right] u^2 d s - \\ & - 2 \iint_{\mathcal{D}_r} P \alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} d x_1 d x_2 + \iint_{\mathcal{D}_r} [E^*(P \alpha) + c P \alpha] u^2 d x_1 d x_2 \end{aligned}$$

e quindi in definitiva otteniamo

$$\begin{aligned} (11) \quad \frac{d}{d r} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 d t &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P_r - (P \beta)_t + \left[ \frac{d(P \alpha)}{d v_r} - b P \alpha \right] \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \right\} u^2 d t - \\ & - 2 \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} P \alpha u \frac{d u}{d v} d s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} \left[ \frac{d(P \alpha)}{d v} - b P \alpha \right] u^2 d s - \\ & - 2 \iint_{\mathcal{D}_r} P \alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} d x_1 d x_2 + \iint_{\mathcal{D}_r} [E^*(P \alpha) + c P \alpha] u^2 d x_1 d x_2 \end{aligned}$$

che è l'identità fondamentale cui volevamo arrivare.

4. DETERMINAZIONE DELLA CLASSE  $\{u\}$  E TEOREMA DI UNICITÀ IN ESSA. — Si consideri ora la classe  $\{u\}$  delle funzioni  $u(x_1, x_2)$  ciascuna delle quali soddisfi alle condizioni 1), 2), 3), del numero precedente e inoltre alle seguenti:

$$4) \quad \frac{d u}{d v} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$$

5) converge « in media » sul sistema delle curve  $\gamma_r$  nel senso che esiste una funzione  $\mu(t)$  di quadrato sommabile in  $(t_1, t_2)$  tale che:

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) \{u[x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t)\}^2 d t = 0$$

Si osservi che, poichè  $P$  è positiva e continua in  $R$ , la condizione (12) equivale alla seguente

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \{u[x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t)\}^2 dt = 0$$

Fissata così la classe  $\{u\}$ , abbiamo anche contemporaneamente precisato mediante le 4) e 5) il problema « misto », in una delle due impostazioni che gli daremo, per quanto riguarda il modo di assumere i dati al contorno.

Del problema così impostato possiamo ora dimostrare il teorema di unicità con un procedimento analogo a quello ideato da G. CIMMINO per il problema generalizzato di DIRICHLET (v. [3]); precisamente

**TEOREMA DI UNICITÀ.** — *Se*

i) *in tutti i punti interni a  $\mathcal{D}$  è*

$$E^*(P\alpha) + c P\alpha \leq 0,$$

ii) *esiste un numero  $M$  tale che per  $r$  sufficientemente piccolo ( $0 < r \leq r_0$ ) e per  $t_1 < t < t_2$  sia*

$$P_r - (PB)_t + \left[ \frac{d(P\alpha)}{d r_r} - b P\alpha \right] \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \leq M P,$$

iii) *nei punti di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  è*

$$\frac{d(P\alpha)}{d r} - b P\alpha \leq 0,$$

*allora esiste nella classe  $\{u\}$  solo la funzione identicamente nulla che soddisfi alla condizione*

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dt = 0$$

Infatti dalla (11) si avrebbe almeno per  $0 < r \leq r_0$

$$\frac{d}{d r} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dt \leq M \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dt - 2 \iint_{\mathcal{D}_r} P \alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 dx_2$$

e se  $u$  non fosse  $\equiv 0$  in  $\mathcal{D}$  il secondo membro, per la (13) e poichè  $P\alpha$  è positiva in  $\mathcal{D}$  e l'equazione è ellittica, sarebbe negativo, per  $r$  sufficientemente piccolo, e quindi pure il primo membro lo sarebbe; e allora la funzione di  $r \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dt$  sarebbe decrescente nell'intorno dello zero e, poichè essa è positiva per  $r$  positivo, la (13) sarebbe assurda.

Il teorema di unicità è stato dunque dimostrato nell'ipotesi che la trasformazione (5) e la funzione peso  $P$  soddisfino alle I), II), III), a), b) del n. 3 e alle i), ii), iii) del presente numero; ora l'esistenza di una tale trasformazione e di una tale funzione è senz'altro assicurata in condizioni assai generali sull'equazione (1), condizioni che (si pensi alle i) e ii)) sono in sostanza in relazione con la possibilità di risolvere in  $\mathcal{D}$  il problema di NEUMANN per la (1).

Del resto non sarebbe difficile confortare la nostra affermazione in modo analogo a quanto ha fatto G. CIMMINO per il problema generalizzato di DIRICHLET (v. [3]; n. 7). In particolare, in ipotesi di maggiore regolarità sulla trasformazione (5), l'ipotesi ii) può esprimersi diversamente: basta per esempio supporre, oltre alle I), II), III), che le  $\gamma_r$  siano curve di livello di una funzione  $r(x_1, x_2)$  continua in  $\mathcal{D}$  con derivate parziali prime continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  e nulla su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  e che le derivate parziali  $x_{1,t}, x_{1,r}, x_{2,t}, x_{2,r}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial r}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial r}$  siano continue su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ , per  $r$  positivo; l'identità (11) diventa allora la seguente, dopo semplici trasformazioni per le quali rimandiamo a [3] (n. 15, 16),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} [E^*(P\alpha r) - r E^*(P\alpha)] (x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t}) u^2 dt - \\ &- 2 \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}_r} P \alpha u \frac{du}{dr} ds + \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}_r} \left[ \frac{d(P\alpha)}{dr} - b P \alpha \right] u^2 ds - 2 \iint_{\mathcal{D}_r} P \alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 dx_2 + \\ &+ \iint_{\mathcal{D}_r} [E^*(P\alpha) + c P \alpha] u^2 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

e la ii) viene sostituita dalla

$$[E^*(P\alpha r) - r E^*(P\alpha)] (x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t}) \leq M P \quad \begin{pmatrix} 0 < r \leq r_0 \\ t_1 < t < t_1 \end{pmatrix}$$

In particolare ancora se la trasformazione (5) è tale che  $\alpha$  risulti continua

in  $R$ , prendendo per  $P$  la funzione  $\frac{1}{\alpha}$  le ipotesi  $i)$ ,  $ii)$ ,  $iii)$ , si riducono alle seguenti

$$c^* + c \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \quad b \geq 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$$

$$[E^*(r) - e^* r](x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t}) \leq M \quad (0 < r \leq r_0; t_1 < t < t_2)$$

e, più in particolare ancora, se  $E(u)$  è autoaggiunto, alla unica ipotesi

$$\sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{h=1}^2 b_h \frac{\partial r}{\partial x_h} \leq M \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right]$$

e la costruzione di una tale funzione  $r(x_1, x_2)$  è sempre possibile date le ipotesi di regolarità fatte su  $\mathcal{D}$  e sugli  $a_{hk}$ ,  $b_h$  e  $c$ . Per esempio, se è  $E(u) = \Delta_2 u$ , mediante una trasformazione conforme ci si può sempre ricondurre al caso che il dominio  $\mathcal{D}$  sia il rettangolo

$$-2 \leq x_1 \leq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$

e  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  sia il segmento  $-1 < x_1 < 1, x_2 = 0$  (la presenza dei vertici di  $\mathcal{D}$  non influisce evidentemente sul significato dell'esempio, potendosi del resto « smussare » i vertici stessi con un opportuno procedimento di arrotondamento). Si costruisca la (5) così:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, r) & (0 \leq r \leq 1) \\ x_2 &= x_2(t, r) & (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

dove per ogni  $r$  di  $(0, 1)$  è

$$x_1(t, r) = 1 - r, x_2(t, r) = t(2 + 4r) \quad \text{per } 0 \leq t \leq \frac{r}{2 + 4r}$$

$$x_1(t, r) = (2 + 4r)t - 2r - 1, x_2(t, r) = r \quad \text{per } \frac{r}{2 + 4r} < t \leq \frac{3r + 2}{2 + 4r}$$

$$x_1(t, r) = 1 + r, x_2(t, r) = (1 - t)(2 + 4r) \quad \text{per } \frac{3r + 2}{2 + 4r} < t \leq 1;$$

si ha

$$\alpha = \frac{1}{2 + 4r}; \beta = \begin{cases} \frac{4t}{2 + 4r} & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{r}{2 + 4r} \\ \frac{-2 + 4t}{2 + 4r} & \text{per } \frac{r}{2 + 4r} < t \leq \frac{3r + 2}{2 + 4r} \\ \frac{4(t - 1)}{2 + 4r} & \text{per } \frac{3r + 2}{2 + 4r} < t \leq 1 \end{cases}$$

Posto  $P = \frac{1}{\alpha}$  si verificano immediatamente le I), II), III), a), b), i), ii), iii).

5. IL TEOREMA DI ESISTENZA NELLA CLASSE  $\{u\}$ . — Vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA. *Se sono soddisfatte le ipotesi che assicurano la validità del teorema di completezza del n. 2 e del teorema di unicità del n. 4, esiste allora una (e naturalmente una sola) funzione  $u$  nella classe  $\{u\}$  soddisfacente alla*

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) \{u[x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t)\}^2 dt = 0$$

dove  $\mu(t)$  è una funzione assegnata di quadrato sommabile in  $(t_1, t_2)$ .

$\alpha$ ) In virtù del teorema di completezza del n. 2 possiamo costruire una successione  $\{u_n(P)\}$  di combinazioni lineari delle funzioni del sistema  $\{w_k(P)\}$  tale che

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \{u_n[x_1(t), x_2(t)] - \mu(t)\}^2 dt + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{d u_n}{d v} \right)^2 ds \right\} = 0$$

Supponiamo inizialmente che esista una costante  $H$  per cui sia

$$(15) \quad \int_{\mathcal{D}} u_n^2 dx_1 dx_2 \leq H \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Dimostriamo allora subito alcune limitazioni integrali per le funzioni  $u_n$  sulla parte  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  della frontiera di  $\mathcal{D}$ .

In condizioni note di regolarità per la funzione  $v$ <sup>(10)</sup>, come conseguenza della formula di GREEN, vale per ogni  $u$  la seguente relazione

$$(16) \quad 2 \int_{\mathcal{F} \mathcal{D}} v u_n \frac{d u_n}{d v} ds - \int_{\mathcal{F} \mathcal{D}} \left( \frac{d v}{b v} - b v \right) u_n^2 ds - \iint_{\mathcal{D}} [E^*(v) + c v] u_n^2 dx_1 dx_2 + \\ + 2 \iint_{\mathcal{D}} v \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u_n}{\partial x_h} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} dx_1 dx_2 = 0$$

<sup>(10)</sup> Per esempio basta che  $v$  sia continua in  $\mathcal{D}$ , con derivate prime continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  e limitate in tutto  $\mathcal{D}$ , con derivate seconde continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  e tali che  $E^*(v) + c v$  risulti sommabile in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$ .

Sia ora  $\varphi$  una qualunque funzione definita su  $\overline{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}}$  non negativa, continua e con derivata generalmente continua e limitata <sup>(11)</sup>; inoltre  $\varphi$  si annulli in  $Q_1$  e  $Q_2$ ; prendiamo nella (16) la funzione  $v$  in modo che siano soddisfatte le condizioni:

$$\frac{dv}{dv} - b v \geq \varphi^2 \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}, \quad E^*(v) + c v \quad \text{limitato in } \mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$$

$$v \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad v = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_1 \mathcal{D}, \quad |v| \leq k \varphi \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D} \quad (k \text{ costante}).$$

Si avrà allora per ogni  $n$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 u_n^2 ds &\leq \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{dv}{dv} - b v \right) u_n^2 ds \leq \text{estr. sup.}_{\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}} [E^*(v) + c v] \int_{\mathcal{D}} u_n^2 dx_1 dx_2 + \\ &+ \text{estr. sup.}_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} \left| \frac{dv}{dv} - b v \right| \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 ds + 2k \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi |u_n| \left| \frac{du_n}{dv} \right| ds \leq \\ &\leq K_\varphi \left\{ \int_{\mathcal{D}} u_n^2 dx_1 dx_2 + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 ds \right\} + H_\varphi \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 u_n^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{du_n}{dv} \right)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

con  $K_\varphi$  e  $H_\varphi$  costanti positive dipendenti solo dalla funzione  $\varphi$ . Ne segue, da relazioni immediate sulle disequazioni di secondo grado

$$(17) \quad \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 u_n^2 ds \leq L_\varphi \left\{ \int_{\mathcal{D}} u_n^2 dx_1 dx_2 + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 ds + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{du_n}{dv} \right)^2 ds \right\}$$

con  $L_\varphi$  costante positiva dipendente solo dalla  $\varphi$ ; quindi anche, per la (15) e la (14),

$$(18) \quad \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 u_n^2 ds \leq L'_\varphi$$

con  $L'_\varphi$  costante dipendente solo da  $\varphi$ , e per ogni coppia  $m$  e  $n$

$$(19) \quad \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 ds \leq 4 L'_\varphi$$

<sup>(11)</sup> La derivazione lungo la curva  $\overline{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}}$  si intenderà evidentemente fatta rispetto al parametro cui è riferita la curva stessa, per es. la lunghezza d'arco.



$\beta$ ) Applichiamo ora l'identità (11) alla differenza  $u_m - u_n$  di due qualunque delle  $u_n$ ; per le ipotesi ammesse si ha, per  $0 < r \leq r_0$

$$\frac{d}{dr} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) (u_m - u_n)^2 dt \leq M \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) (u_m - u_n)^2 dt + 2 \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} P \alpha |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| ds$$

da cui

$$e^{-Mr} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) (u_m - u_n)^2 dt \leq M e^{-Mr} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) (u_m - u_n)^2 dt + \\ + 2 e^{-Mr} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} P \alpha |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| ds$$

$$\frac{d}{dr} \left( e^{-Mr} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) (u_m - u_n)^2 dt \right) \leq C \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| ds$$

dove  $C$  è una costante positiva; integrando tra  $\varepsilon$  e  $r$  ( $0 < \varepsilon < r$ ) e facendo tendere  $\varepsilon$  a zero si ha

$$(20) \quad e^{-Mr} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) (u_m - u_n)^2 dt \leq \int_{t_1}^{t_2} P(t, 0) \{ u_m [x_1(t), x_2(t)] - \\ - u_n [x_1(t), x_2(t)] \}^2 dt + C \int_0^r d\rho \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_\rho} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| ds.$$

Consideriamo l'ultimo integrale della (20); riferiamo la curva  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  alla lunghezza d'arco  $s$  e i punti  $Q_2$  e  $Q_1$  corrispondano rispettivamente ai valori  $s_2$  e  $s_1$ , con  $s_2 < s_1$ ; così pure i punti  $Q_{2,r}$  e  $Q_{1,r}$ , per  $0 < r \leq r_0$ , corrispondano ai valori  $s_2(r)$  e  $s_1(r)$  di  $s$ . Ovviamente  $s_2(r)$  è funzione crescente di  $r$  in  $(0, r_0)$  mentre  $s_1(r)$  è ivi funzione decrescente e risulta  $s_2(0) = s_2$ ,  $s_1(0) = s_1$ ; inoltre  $s_2(r)$  e  $s_1(r)$  sono funzioni di classe 1 e le funzioni inverse  $r_2(s)$  [ $s_2 \leq s \leq s_2(r_0)$ ] e  $r_1(s)$  [ $s_1(r_0) \leq s \leq s_1$ ] sono anche di classe 1 e rispettivamente crescente e decrescente, risultando inoltre  $r_2(s_2) =$

$= r_1(s_1) = 0$ . Si ha allora per  $0 < r \leq r_0$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^r d_\rho \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_\rho} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| d s = \int_0^r d_\rho \int_{s_2(\rho)}^{s_1(\rho)} |\dots| d s \leq \int_0^{r_0} d r \int_{s_2(r)}^{s_1(r)} |\dots| d s = \\
 & = \int_0^{r_0} d r \int_{s_2(r)}^{s_2(r_0)} |\dots| d s + \int_0^{r_0} d r \int_{s_2(r)}^{s_1(r_0)} |\dots| d s + \int_0^{r_0} d r \int_{s_1(r_0)}^{s_1(r)} |\dots| d s = \\
 & = \int_{s_2}^{s_2(r_0)} d s \int_0^{r_2(s)} |\dots| d r + \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} d s \int_0^{r_0} |\dots| d r + \int_{s_1(r_0)}^{s_1} d s \int_0^{r_1(s)} |\dots| d r = \\
 & \int_{s_2}^{s_2(r_0)} r_2(s) |\dots| d s + \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} r_0 |\dots| d s + \int_{s_1(r_0)}^{s_1} r_1(s) |\dots| d s = \\
 & = \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| d s \leq \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 d s \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right|^2 d s \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

dove  $\varphi(s)$  è la funzione così definita

$$\varphi(s) = \begin{cases} r_2(s) & s_2 \leq s < s_2(r_0) \\ r_0 & s_2(r_0) \leq s < s_1(r_0) \\ r_1(s) & s_1(r_0) \leq s \leq s_1. \end{cases}$$

Possiamo allora concludere in virtù delle (19) che è, per ogni  $m$  e  $n$  e per  $0 < r \leq r_0$ ,

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) \{ u_m [x_1(t, r), x_2(t, r)] - u_n [x_1(t, r), x_2(t, r)] \}^2 d t \leq \\
 & \leq \int_{t_1}^{t_2} P(t, 0) \{ u_m [x_1(t), x_2(t)] - u_n [x_1(t), x_2(t)] \}^2 d t + \\
 & + 2 C \sqrt{L'} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right|^2 d s \right\}^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Come prima conseguenza della (21) si ha per ogni  $r^*$  fissato tra 0 e  $r_0$

$$\begin{aligned} & \int_0^{r^*} \int_{t_1}^{t_2} \{u_m[x_1(t, r), x_2(t, r)] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r)]\}^2 dr dt \leq \\ & \leq L^* \left\{ \int_0^{r^*} dr \int_{t_1}^{t_2} P(t, 0) \{u_m[x_1(t), x_2(t)] - u_n[x_1(t), x_2(t)]\}^2 dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{r^*} dr \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_r} \left| \frac{du_m - du_n}{dv} \right|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

con  $L^*$  costante opportuna, e quindi per la (14), si ha la convergenza in media delle  $u_n[x_1(t, r), x_2(t, r)]$  nel rettangolo  $(0 \leq r \leq r^*, t_1 \leq t \leq t_2)$ . Ma allora si ha la convergenza in media delle  $u_n(x_1, x_2)$  nel dominio  $\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}$ , poichè è

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}} (u_m - u_n)^2 dx_1 dx_2 &= \int_0^{r^*} \int_{t_1}^{t_2} (u_m - u_n)^2 (x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t}) dr dt \leq \\ &\leq L \int_0^{r^*} \int_{t_1}^{t_2} (u_m - u_n)^2 dr dt \end{aligned}$$

con  $L$  costante.

*Voglio dimostrare che si ha addirittura la convergenza in media delle  $u_n(x_1, x_2)$  in tutto  $\mathcal{D}$ .*

Si prenda infatti nella (16) la funzione  $v$  in modo che risulti:

$$\text{estr. inf.}_{\mathcal{D}_{r^*}} [E^*(v) + cv] > 0; \quad E^*(v) + cv \text{ limitato in } \mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D};$$

$$v \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}; \quad v = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_1 \mathcal{D}; \quad \frac{dv}{dv} - bv \geq 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}.$$

Si ottiene allora per ogni  $n$

$$\begin{aligned} \text{estr. inf.}_{\mathcal{D}_{r^*}} [E^*(v) + cv] \int_{\mathcal{D}_{r^*}} u_n^2 dx_1 dx_2 &\leq \int_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}} |E^*(v) + cv| u_n^2 dx_1 dx_2 + \\ &+ 2 \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} |v| |u_n| \left| \frac{du_n}{dv} \right| ds + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} \left| \frac{dv}{dv} - bv \right| u_n^2 ds \leq \\ &\leq \text{estr. sup.}_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}} |E^*(v) + cv| \iint_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}} u_n^2 dx_1 dx_2 + \\ &+ 2 \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} v^2 u_n^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{du_n}{dv} \right)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} + \text{estr. sup.}_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} \left| \frac{dv}{dv} - bv \right| \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 ds. \end{aligned}$$

e in definitiva per la (18)

$$\iint_{\mathcal{D}_{r^*}} u_n^2 d x_1 d x_2 \leq K^* \left\{ \iint_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}} u_n^2 d x_1 d x_2 + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 d s + \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{d u_n}{d v} \right)^2 d s \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

con  $K^*$  costante dipendente da  $v$ ; e questa formula vale anche se si sostituisce ad  $u_n$  la differenza  $u_m - u_n$  tra due qualunque delle  $u_n$ ; ne segue, per la (14) e per la provata convergenza in media delle  $u_n$  in  $\mathcal{D} - \mathcal{D}_{r^*}$ , la convergenza in media delle  $u_n$  in  $\mathcal{D}_{r^*}$  e quindi in tutto  $\mathcal{D}$ .

γ) Diciamo dunque  $u(x_1, x_2)$  la funzione verso la quale converge in media in  $\mathcal{D}$  la successione delle  $u_n(x_1, x_2)$ , per cui cioè si ha

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\mathcal{D}} (u_n - u)^2 d x_1 d x_2 = 0$$

Segue allora per un teorema di G. FICHERA (v. [6], teor. VI) che le  $u_n(x_1, x_2)$  convergono uniformemente insieme alle derivate prime in ogni insieme chiuso contenuto in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  e la funzione limite  $u(x_1, x_2)$  è soluzione regolare di  $E(u) = 0$  in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$ .

Il teorema è stato dimostrato dal FICHERA nel caso in cui  $E(u)$  sia autoaggiunto ma la stessa dimostrazione, con ovvie modifiche, vale anche in generale nelle nostre ipotesi <sup>(12)</sup>.

δ) Veniamo ora a dimostrare che la funzione  $u(x_1, x_2)$  così trovata appartiene alla classe  $\{u\}$ .

Anzitutto possiamo subito verificare che la  $u$  soddisfa alla condizione 5), convergendo in media verso la  $\mu(t)$  assegnata. Infatti, come conseguenza della (21), si ha, in virtù della (14), la convergenza in media in  $(t_1, t_2)$  (naturalmente verso  $u[x_1(t, r), x_2(t, r)]$ ), rispetto alla funzione peso  $P(t, r)$  e quindi anche alla funzione peso 1, delle  $u_n[x_1(t, r), x_2(t, r)]$  uniformemente rispetto a  $r$  in  $(0, r_0)$ ; e poichè si ha

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t) \}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r)] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r)] \}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

<sup>(12)</sup> Si potrebbe anche pervenire alla stessa conclusione servendosi di una formula di media, recentemente trovata da B. PINI, per le soluzioni dell'equazione  $E(u) = 0$  (v. [19]); questa stessa formula di media ci permetterebbe anche di dimostrare, in virtù delle (15), che le  $u_n(x_1, x_2)$  sono equicontinue ed equilimitate in  $\mathcal{D}$ .

$$+ \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \{ u_n [x_1(t, r), x_2(t, r)] - u_n [x_1(t), x_2(t)] \}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \{ u_n [x_1(t), x_2(t)] - \mu(t) \}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ne scende, in virtù della (14) e della continuità delle  $u_n(x_1, x_2)$  in  $\mathcal{D}$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u [x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t) \}^2 dt = 0$$

cioè la (12)

ε) Facciamo ora una nuova osservazione sulla successione  $\{u_n\}$ .

Sia  $\mathcal{D}^*$  un qualunque dominio regolare, il quale sia contenuto in  $\mathcal{D}$  ed abbia comune con  $\mathcal{D}$  una parte di frontiera e precisamente un sottoarco proprio  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}^*$  di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  avente entrambi gli estremi contenuti in  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , mentre la rimanente parte di frontiera  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}^* = \mathcal{F} \mathcal{D}^* - \mathcal{F}_2 \mathcal{D}^*$  sia interna a  $\mathcal{D}$ ; chiameremo un tale dominio di tipo (\*).

Si prenda nella (16) la funzione  $v$  in modo che risulti:

$$v > 0 \text{ in } \mathcal{D}^*; \quad v \geq 0 \text{ in } \mathcal{D}; \quad v = 0 \text{ su } \mathcal{F}_1 \mathcal{D}; \\ \frac{dv}{dv} - b v \leq 0 \text{ su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}; \quad E^*(v) + c v \text{ limitato in } \mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}.$$

Si ottiene allora per ogni  $n$

$$2 \iint_{\mathcal{D}^*} v \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u_n}{\partial x_h} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} dx_1 dx_2 \leq 2 \iint_{\mathcal{D}} v \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u_n}{\partial x_h} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} dx_1 dx_2 \leq \\ \leq \text{estr. sup.}_{\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}} |E^*(v) + c v| \iint_{\mathcal{D}} u_n^2 dx_1 dx_2 + \\ + 2 \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} v^2 u_n^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{dv}{dv} \right)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} + \text{estr. sup.}_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} \left| \frac{dv}{dv} - b v \right| \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 ds$$

e quindi

$$\iint_{\mathcal{D}^*} \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u_n}{\partial x_h} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} dx_1 dx_2 \leq \\ \leq H^* \left\{ \iint_{\mathcal{D}} u_n^2 dx_1 dx_2 + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} u_n^2 ds + \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{dv}{dv} \right)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

con  $H^*$  costante dipendente da  $v$ ; questa formula vale anche se si sostituisce ad  $u_n$  la differenza  $u_m - u_n$  tra due qualunque delle  $u_n$ ; e allora dalla (22) e dalla (14) e dal fatto che la forma quadratica  $\sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \lambda_h \lambda_k$  è definita positiva, si ottiene la convergenza in media in  $\mathcal{D}^*$  delle derivate parziali  $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}$ ; precisamente si ha

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

ζ) Sia ora  $M$  un punto qualunque di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . Consideriamo tutti i possibili domini  $\mathcal{D}^*$  del tipo (\*), i quali inoltre siano delimitati da una curva semplice chiusa di classe 1  $H$  e contengano il punto  $M$  come punto frontiera, e più precisamente come punto interno all'arco  $\overline{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}^*}$ , cioè non coincidente con gli estremi di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}^*$ .

Affermo che fra essi ve ne è almeno uno  $\mathcal{D}_M^*$  (ed anzi infiniti) tale che la successione  $\{u_n\}$  o una sua sottosuccessione, che per brevità chiameremo ancora  $\{u_n\}$ , soddisfi alla

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Infatti nel verso fissato su  $\overline{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}}$  dal verso di percorrenza di  $\mathcal{F} \mathcal{D}$ , i punti  $Q_1, Q_2$  e  $M$  si seguano in questo ordine:  $Q_2 < M < Q_1$ . Sia  $M_1$  un punto tra  $M$  e  $Q_1$  distinto da essi:  $M < M_1 < Q_1$ . Si consideri una trasformazione biunivoca e bicontinua

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(s, z) \\ x_2 = \varphi_2(s, z) \end{cases}$$

del rettangolo  $R^* \equiv [0 \leq s \leq l, z_1 \leq z \leq z_2]$  del piano  $(s, z)$  in un dominio  $\mathcal{D}^*$  del tipo (\*) in modo tale che

a')  $\overline{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}^*}$  coincida con il sottoarco  $\gamma(M, M_1)$  di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  di estremi  $M$  e  $M_1$  e si ottenga dalla (25) per  $s = 0$ ;

b') per ogni  $z$  fissato di  $(z_1, z_2)$  le (25) diano la rappresentazione parametrica in funzione della lunghezza d'arco  $s$  di una curva aperta  $\gamma_z$  di classe 1  $H$ , la quale nel punto  $M_z$ , che si ottiene dalle (25) per  $s = 0$ , sia tangente (in direzione e verso) alla  $\gamma(M, M_1)$  e costituisca insieme all'arco  $\gamma(M, M_2)$  una curva pure di classe 1  $H$ ;

c') la trasformazione inversa della (25)

$$\begin{cases} s = s(x_1, x_2) \\ z = z(x_1, x_2) \end{cases}$$

abbia derivate  $s_{x_1}, s_{x_2}, z_{x_1}, z_{x_2}$  continue in  $\mathcal{D}^* - \mathcal{F}\mathcal{D}^*$  e Jacobiano  $\frac{\partial(s, z)}{\partial(x_1, x_2)}$  ivi diverso da zero e di quadrato sommabile. Le condizioni di regolarità supposte su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  permettono senz'altro la costruzione della (25), in modo da riferire il dominio  $\mathcal{D}^*$  alle nuove coordinate curvilinee  $s$  e  $z$  <sup>(13)</sup>

Applicando al dominio  $\mathcal{D}^*$  così costruito le (23), si ottiene la convergenza in media del primo ordine nel rettangolo  $R^*$  delle derivate parziali  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ , calcolate naturalmente per  $x_1 = \varphi_1(s, z)$  e  $x_2 = \varphi_2(s, z)$ ; infatti risulta per  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \iint_{R^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dz &= \iint_{\mathcal{D}^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial(s, z)}{\partial(x_1, x_2)} \right| dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq \left\{ \iint_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \iint_{\mathcal{D}^*} \left( \frac{\partial(s, z)}{\partial(x_1, x_2)} \right)^2 dx_1 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e quindi per la (23) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dz = 0 \quad (i = 1, 2)$$

<sup>(13)</sup> Per esempio se  $\gamma(M, M_1)$  è il segmento (0,1) dell'asse  $x_2$ ,  $\mathcal{D}$  trovandosi nel semipiano  $x_1 \leq 0$ , la trasformazione cercata può costruirsi mediante le

$$\begin{aligned} z &= x_2 - |x_1|^\alpha \\ s &= \int_0^{|x_1|} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \eta^{2\alpha-2}}} d\eta \end{aligned} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

Le curve  $\gamma_z$  sono ora le curve di equazione  $x_2 = z + |x_1|^\alpha$ . Mediante una opportuna trasformazione di coordinate si può riportare questo esempio al caso generale.

Ne segue per un teorema di G. FICHERA (v. [10]) la convergenza in misura a zero nell'intervallo  $(z_1, z_2)$  della successione di funzioni

$$\psi_{i,n}(z) = \int_0^1 \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds \quad (i = 1, 2)$$

e quindi l'esistenza di una sottosuccessione della  $\{\psi_{i,n}(z)\}$ , che per brevità indicheremo ancora con  $\{\psi_{i,n}(z)\}$ , che converge quasi-dappertutto a zero in  $(z_1, z_2)$ . Possiamo dunque fissare un valore  $z'$  (ed anzi infiniti) interno a  $(z_1, z_2)$  per il quale risulterà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{i,n}(z') = 0 \quad (i = 1, 2)$$

e cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{z'}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Operando in modo analogo sull'arco di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  di estremi  $Q_2$  e  $M$ <sup>(14)</sup>, potremo costruire una curva aperta  $\gamma_{z''}$  avente solo un estremo  $M_{z''}$  sull'arco  $\gamma(M_2, M)$  di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  ( $M_2 < M_{z''} < M$ ), per il resto interna a  $\mathcal{D}$ , costituente con l'arco  $\gamma(M_{z''}, M)$  di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  una curva regolare di classe  $1H$  e tale che su di essa la successione  $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$ , o una sottosuccessione, converga in media del primo ordine a  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{z''}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Potremo allora unire  $\gamma_{z'}$  e  $\gamma_{z''}$  mediante un arco  $\gamma^*$  interno completamente a  $\mathcal{D}$  e sul quale quindi le successioni  $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$  convergono uniformemente a  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  ( $i=1,2$ ), così da ottenere che la curva  $\gamma(M_{z''}, M_{z'}) + \gamma_{z'} + \gamma^* + \gamma_{z''}$  costituisca una curva semplice chiusa di classe  $1H$ , delimitante il dominio  $\mathcal{D}_M^*$  che cercavamo, per il quale dunque vale la (24).

<sup>(14)</sup> L'unica differenza da tener presente nella costruzione del sistema di curve  $\gamma_z$ , cioè della (25) è che  $\gamma_z$  e  $\gamma(M_2, M)$  abbiano nel punto  $M_z$  tangenti coincidenti in direzione ma di verso opposto.



Sia ora  $N^*(Q, P)$  la funzione di NEUMANN per il dominio  $\mathcal{D}_M^*$  così costruito; per ogni  $n$ , se  $P$  è un qualunque punto interno a  $\mathcal{D}_M^*$ , si ha

$$(26) \quad \begin{aligned} u_n(P) &= k_n + \int_{\mathcal{F} \mathcal{D}_M^*} \frac{d u_n(z)}{d v_Q} N^*(Q, P) d s_Q = \\ &= k_n + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M^*} \frac{d u_n(Q)}{d v_Q} N^*(Q, P) d s_Q + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_M^*} \frac{d u_n(Q)}{d v_Q} N^*(Q, P) d s_Q \end{aligned}$$

con  $k_n$  costante che è certamente nulla se  $c$  non è  $\equiv 0$  in  $\mathcal{D}_M^*$ . Il primo membro di (26), essendo  $P$  interno a  $\mathcal{D}$ , converge a  $u(P)$ , per  $n \rightarrow \infty$ ; nell'ultimo membro, in virtù delle (14) e (24), si può fare il passaggio al limite sotto il segno di integrale per  $n \rightarrow \infty$ , così da ottenere in definitiva

$$u(P) = k + \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M^*} \frac{d u(Q)}{d v_Q} N^*(Q, P) d s_Q$$

con  $k$  costante che è certamente nulla se  $c$  non è  $\equiv 0$  in  $\mathcal{D}_M^*$ .

Valendo questa relazione per ogni  $P$  interno a  $\mathcal{D}_M^*$ , ne deduciamo che  $u(P)$  è continua in  $M$  con le sue derivate prime e soddisfa ivi alla

$$\frac{d u(M)}{d v} = 0$$

Dunque la funzione  $u$ , di cui abbiamo dimostrata l'esistenza nell'ipotesi che siano verificate le (15), appartiene alla classe  $\{u\}$  e soddisfa alla (12).

$\eta$ ) Dimostriamo ora la legittimità delle (15). Se infatti esse non fossero verificate, esisterebbe una sottosuccessione della  $\{u_n\}$ , che indicheremo ancora con  $\{u_n\}$ , tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\mathcal{D}} u_n^2 d x_1 d x_2 = +\infty$$

Posto allora

$$\bar{u}_n = u_n / \left\{ \iint_{\mathcal{D}} u_n^2 d x_1 d x_2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

le nuove funzioni  $\bar{u}_n$  sono ancora soluzioni regolari in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  di  $E(u) = 0$

e di classe 1 in  $\mathcal{D}$ ; e inoltre soddisfano alle

$$(27) \quad \iint_{\mathcal{D}} \bar{u}_n^2 \, d x_1 \, d x_2 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} \bar{u}_n^2 \, d s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left( \frac{d \bar{u}_n}{d \nu} \right)^2 \, d s \right\} = 0$$

Potremo ripetere su di esse i ragionamenti fatti ed arrivare così ad una soluzione  $\bar{u}$  di  $E(u) = 0$ , appartenente alla classe  $\{u\}$ , alla quale le  $\bar{u}_n$  convergono in media in tutto  $\mathcal{D}$ . Ma allora per il teorema di unicità del n. 4 dovrebbe essere  $\bar{u} \equiv 0$  in tutto  $\mathcal{D}$ , mentre invece per le (27) sarebbe anche  $\iint_{\mathcal{D}} \bar{u}^2 \, d x_1 \, d x_2 = 1$ .

Il teorema di esistenza nella classe  $\{u\}$  è dunque dimostrato.

6. IL TEOREMA DI ESISTENZA NELLA CLASSE  $[u]$ . — Ferme restando le ipotesi nelle quali si è dimostrato il teorema di esistenza del numero precedente, supponiamo ora che la funzione  $\mu(M)$  assegnata su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  sia in più ivi continua. Allora la soluzione  $u$  trovata nel numero precedente è continua anche in ogni punto  $M$  di  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e assume ivi proprio il valore  $\mu(M)$ .

Infatti, poichè vale la (22), fissato comunque  $M$  su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , possiamo costruire, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli svolti nel n. 5,  $\zeta$ ), un dominio  $\mathcal{D}_M$  regolare, limitato da una curva di classe 1  $H$ , contenuto in  $\mathcal{D}$  e avente con  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  a comune solo un sottoarco  $\overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M}$  di  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , il quale contenga nel suo interno (cioè distinto dagli estremi) il punto  $M$ , in modo che la successione  $\{u_n\}$ , o una sua sottosuccessione, soddisfi alla

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_M} |u_n - u| \, d s = 0$$

dove  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_M = \mathcal{F} \mathcal{D}_M - \overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M}$ . Detta allora  $G^*(Q, P)$  la funzione di GREEN per il dominio  $\mathcal{D}_M$ , si ha, per ogni  $n$  e per  $P$  interno a  $\mathcal{D}_M$

$$u_n(P) = \int_{\overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M}} u_n(Q) \frac{d G^*(Q, P)}{d \nu_Q} \, d s_Q + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_M} u_n(Q) \frac{d G^*(Q, P)}{d \nu_Q} \, d s_Q$$

e quindi, per la (28) e per la (14) e poichè risulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = u(P)$ , si ha

$$u(P) = \int_{\overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}_M}} \mu(Q) \frac{d G^*(Q, P)}{d v_Q} d s_Q + \int_{\overline{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_M}} u(Q) \frac{d G^*(Q, P)}{d v_Q} d s_Q.$$

Dunque  $u(P)$  è continua anche in  $M$  e soddisfa ivi alla

$$u(M) = \mu(M).$$

In sostanza abbiamo con ciò ottenuto un nuovo teorema di esistenza in cui entrambe le condizioni su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  sono assunte « puntualmente ». Precisamente, detta  $[u]$  la classe delle funzioni  $u(P)$  che soddisfano alle condizioni :

- 1) sono soluzioni regolari di  $E(u)$  in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$
- 2) sono continue in  $\mathcal{D} - \overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D} \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{D}}$ , cioè in tutto  $\mathcal{D}$  ad eccezione dei punti  $Q_1$  e  $Q_2$
- 3) hanno derivate parziali prime continue in  $\mathcal{D} - \overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}}$ ,

si ha il seguente

**TEOREMA.** — *Nelle ipotesi che assicurano la validità del teorema di esistenza del n. 5, esiste almeno una funzione  $u(P)$  nella classe  $[u]$  che soddisfa alle condizioni al contorno*

$$\frac{d u(P)}{d v} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D}, \quad u(P) = \mu(P) \quad \text{su } \mathcal{F}_1 \mathcal{D}$$

dove  $\mu(P)$  è una assegnata funzione continua e di quadrato sommabile su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ .

**OSSERVAZIONE I.** — Si osservi che il teorema di esistenza nella classe  $[u]$  si dimostra in sostanza basandosi esclusivamente sulla completezza del sistema  $\{w_k(P)\}$  e sulla convergenza in media in  $\mathcal{D}$  della successione  $\{u_n\}$  (e basterebbe di una successione da essa estratta). Ed è proprio per dimostrare questa convergenza, oltre che per l'interesse in sè, che abbiamo introdotto e studiato il problema « misto » nella classe  $\{u\}$  nei n. 3, 4, 5. Non è naturalmente escluso che essa possa dimostrarsi anche più rapidamente in altro modo, arrivando così a semplificare la dimostrazione del teorema di esistenza nella classe  $[u]$ .

**OSSERVAZIONE II.** La dimostrazione dei teoremi di esistenza si semplificherebbe se si potesse sostituire al sistema  $\{w_k(P)\}$  un sistema di soluzioni della  $E(u) = 0$ , aventi derivata conormale nulla su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , il quale fosse completo hilbertianamente su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ . Sarebbe interessante dimostrare un tale teorema di completezza.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 - G. ASCOLI-P. BURGATTI-G. GIRAUD: *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*, Sansoni - Firenze, 1936.
- 2 - L. AMERIO: *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Amer. Journ. of Math. Vol. LXIX - 1947, pp. 447-489).
- 3 - G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. LXI - 1937, pp. 177-221).
- 4 - G. CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico* (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, vol. XXIII, 1952 pp. 1-23).
- 5 - G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni* (Ann. Mat. pura e app. s. IV, t. XXVII, 1948, pp. 1-28).
- 6 - G. FICHERA: *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione ed ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunti* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. I, 1949, pp. 75-100).
- 7 - G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. IV, 1950, pp. 35-99).
- 8 - G. FICHERA: *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Naz. per le applicazioni del Calcolo* (Mem. Acc. Lincei, s. 8, vol. III, 1950, pp. 1-80).
- 9 - G. FICHERA: *Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace* (B. U. M. I., s. III, vol. VII, 1952, pp. 367-377).
- 10 - G. FICHERA: *Intorno al passaggio al limite sotto il segno di integrale* (Portugaliae Math. vol. 4, 1943, pp. 1-20).
- 11 - G. FICHERA: *Condizioni perchè sia compatibile il problema principale della statica elastica* (Rend. Acc. Lincei, s. 8, vol. XIV, 1953, pp. 397-400).
- 12 - G. GIRAUD: *Sur certaines problèmes non linéaires de Neumann et sur certaines problèmes non linéaires mixtes* (Ann. Scient. École Norm. Sup. t. 49, 1932, pp. 1-105, 245-308).
- 13 - G. GIRAUD: *Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique* (Ann. Soc. Polonaise de Math. t. 12, 1933, pp. 35-54).
- 14 - A. GHIZZETTI: *Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace* (Rend. Mat. e sue appl., s. V, vol. 5, 1946, pp. 131-168).
- 15 - P. KOEBE: *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I.* (Journ. f. Math. B. 138, 1910, pp. 192-253).
- 16 - Y. KOMATU: *Mixed value problems* (Journ. Fac. Scient. Univ. Tokyo, sec. I, vol. VI, p. 5, 1953, pp. 343-391).
- 17 - E. MAGENES: *Sull'equazione del calore: teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone. Note I-II*, (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXI, 1952, pp. 99- 123, 136-170).

- 18 - L. MYRBERG : *Über die vermischte Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen* (Ann. Acc. Scient. Fennicae, s. A. I, Math. Phys. n. 103, 1951).
- 19 - B. PINI : *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico* (Rend. Acc. Lincei, s. 8, vol. XI, 1951, pp. 325-333).
- 20 - A. SIGNORINI : *Sopra un problema al contorno della teoria delle funzioni di variabile complessa* (Ann. Mat. pura e appl., s. III, vol. XXV, 1916 pp. 253-273).
- 21 - V. VOLTERRA : *Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa* (Ann. Mat. pura e appl., s. II, t. XI, 1882-83, pp. 1-55).
- 22 - S. ZAREMBA : *Sur un problèmes mixte relatif à l'équation de Laplace* (Bull. Acad. Scien. Cracovie, 1910, pp. 313-344).
- 23 - A. ZITAROSA : *Su un problema misto di Dirichlet-Neumann* (Ricerche di Mat., vol. 1, 1952, pp. 255-286).
- 24 - A. LIÉNARD : *Problème plan de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel* (Journ. Ecole Politec. III, 5-7, 1938, pp. 35-158, 177-226).
- 25 - N. I. MUSKHELISHVILI : *Singular integral equations* (Translations by J. R. M. Radok) Noordhoff, Groningen, 1953.