

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. BOULIGAND

**Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série*, tome 7,  
n° 3-4 (1953), p. 287-299

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1953\\_3\\_7\\_3-4\\_287\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_3-4_287_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

par G. BOULIGAND (Paris)

• 1. — La géométrie infinitésimale directe m'a permis de lier à la théorie des ensembles divers sujets classiques, entre autres :

a) Le *théorème de Meusnier* et ses applications aux équations différentielles; la notion de *contingent circulaire* les ramène à une forme ensembliste <sup>(1)</sup>.

b) Le *comportement d'intégrales* d'une famille  $f(x, y, z, p, q) = \lambda$  qui pour  $\lambda$  tendant vers zéro, est *infinitement voisine d'une équation aux différentielles totales* dépourvue de surfaces intégrales. Cela, grâce aux notions *paratingent, intégrale paratingente* <sup>(2)</sup>. La définition de celles-ci sera rappelée plus loin (cf. n° 6).

c) Les *transformations de contact* : dans l'espace ordinaire par exemple, on cherche si le continu image d'une surface à paratingent partout plan peut avoir des points intérieurs. Ayant obtenu des cas d'exclusion <sup>(3)</sup>, j'ai formulé des hypothèses, plus larges, entraînant que ce continu est *aplati* en chaque point, en un sens prolongeant celui de G. CHOQUET dans le plan <sup>(4)</sup>. Si les principes de définition permettant d'étendre les notions *tangente à une courbe, plan tangent à une surface*, sont nombreux (contigent, paratingent, idée de différentielle approximative, recours à une droite ou à un plan qui minimise le moment d'inertie d'une portion infinitement petite de la variété autour d'un point) <sup>(5)</sup>, les transformations de contact valorisent l'idée d'aplatissement.

---

<sup>(1)</sup> G. B. Journ. Math., 9, t. XI, 1932, p. 137-151 et 385-387. Act. sc. Hermann, fasc. 184, p. 32-34. Ens. Math (Genève) t. 36, 1937, p. 5-27.

<sup>(2)</sup> G. B. Bull. Sc. Math. 2, t. LX, 1936, t. 203-224; Journ. Math. 9, t. XVI, 1937, p. 251-260.

<sup>(3)</sup> G. B., C. R. Ac. Sc., t. 232, 1951, p. 911 et 1791.

<sup>(4)</sup> G. CHOQUET. Mathematica (Cluj) 20, 1944; p. 36-47.

<sup>(5)</sup> G. B., C. R. Ac. Sc.; t. 236, 1953, p. 1217 et 2136 t. 237, 1953, p. 772.

2. — Dans l'esprit indiqué, la présente recherche concerne les *systèmes triples orthogonaux* (*STO*). Ayant deux *STO*, il y a en chaque point  $M(x, y, z)$  un cône du second degré portant les six arêtes de leurs trièdres à faces tangentes. C'est le cône des normales en  $M$  pour une équation  $f(x, y, z, p, q) = 0$ , ayant les six familles de ces *STO* pour intégrales. A savoir, en coordonnées rectangulaires

$$(1) \quad A_1(p^2 - 1) + B_1(q^2 - 1) + 2Cpq + 2Ap + 2Bq = 0$$

où les coefficients sont soumis, pour l'existence des deux *STO*, à des conditions un peu compliquées. Si, indépendamment d'elles, on envisage l'équation (1), le plan tangent en un point courant  $M$  d'une intégrale quelconque coupe le cône des normales suivant deux droites rectangulaires. Le fait qu'elles soient conjuguées est une des conditions signalées, qui au n° 4, sera explicitée sur un exemple: on obtient dans tous les cas une équation du second ordre linéaire et homogène en  $r, s, t$ . Si cette équation du second ordre n'a pas de solutions communes avec (1), formant au moins six familles à un paramètre, il est impossible que l'équation (1) soit fournie par deux *STO*, dans les conditions indiquées.

En associant à un *STO* les plans  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ ,  $z = \gamma$ , on a une équation (1) du type réduit

$$(2) \quad \varphi = pq + Ap + Bq = 0.$$

En lui associant d'autre part les plans  $x - y = h$ ,  $x + y = k$ ,  $z = \gamma$ , on obtient de même

$$(3) \quad \psi = \frac{p^2 - q^2}{2} + Gp + Hq = 0.$$

Il suffit d'ailleurs d'avoir une famille de LAMÉ, celle des surfaces de niveau d'une  $U(x, y, z)$  vérifiant

$$A = \begin{vmatrix} \Gamma_{xxx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{zz} & \Gamma_{yz} & \Gamma_{zx} & \Gamma_{xy} \\ U_{xxx} & U_{yy} & U_{zz} & U_{yz} & U_{zx} & U_{xy} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2U_x & 0 & 0 & 0 & U_z & U_y \\ 0 & 2U_y & 0 & U_z & 0 & U_x \\ 0 & 0 & 2U_y & U_y & U_x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{\text{grad}^2 U}}.$$

pour déterminer, avec un *STO* contenant les  $U(x, y, z) = \lambda$ , les quatre fonctions  $A, B, G, H$ .

3. — Cherchons les équations qui conditionnent celles-ci, en partant du système (2), (3) à coefficients d'abord arbitraires. Pour qu'il existe un  $STO$  dont les trois familles soient des intégrales communes à (2) et (3), il faut que, outre la normale aux plans  $z = \gamma$ , leurs deux cônes de normales aient toujours en commun trois génératrices formant un trièdre trirectangle. Un tel trièdre ( $T$ ) une fois choisi sur le cône (2), le cône (3) s'en déduit. D'où, entre  $A, B, G, H$ , la condition très immédiate

$$(4) \quad 2(GB - HA) + 1 = 0.$$

En outre, pour avoir des intégrales communes tangentes en  $M$  à chaque face de ( $T$ ), il faut que  $\varphi = \psi = 0$  entraîne

$$\varphi_p(\psi_x + p\psi_z) + \varphi_q(\psi_y + q\psi_z) - (\varphi_x + p\varphi_z)\psi_p - (\varphi_y + q\varphi_z)\psi_q = 0,$$

relation qui, en tenant compte de (2) et (3), donne ici

$$\begin{aligned} (A + q)(G_x p + H_x q) + (B + p)(G_y p + H_y q) - (G + p)(A_x p + B_x q) - \\ - (H - q)(A_y p + B_y q) - (A p + B q)(G_z p + H_z q) - \\ - (G p + H q)(A_z p + B_z q) = 0. \end{aligned}$$

En chaque point  $M$ , cette équation, qui sera notée en bref  $\theta = 0$ , définit dans le plan des  $p, q$  une conique. Elle doit se réduire à une hyperbole équilatère, portant les points communs à  $\varphi = 0, \psi = 0$ , d'où, en sus de la condition

$$H_x + G_y - A_x + B_y - (AG)_z - (BH)_z = 0,$$

celles provenant de l'identité

$$\begin{aligned} \theta \equiv [G_x + H_y - B_x + A_y - (BG)_z - (AH)_z] \varphi + \\ + [G_y - A_x - H_x - B_y - (AB)_z + (BH)_z] \psi. \end{aligned}$$

En définitive, on a ainsi le système en  $A, B, G, H$  formé par (4) et trois équations contenant, avec ces fonctions, leurs dérivées premières qui figurent sous forme linéaire et homogène.

De chaque solution  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{G}, \bar{H}$  de ce système, résulte un couple (2), (3) d'équations aux dérivées partielles associant à chaque point  $M$  trois plans contenant  $M$  et formant un trièdre trirectangle, de telle manière qu'autour de chaque  $M$ , soit intégrable l'équation aux différentielles totales

associant à  $M$  un de ces plans  $\bar{\omega}(M)$ , formée en laissant continue la dépendance entre  $M$  et l'élément de contact  $[M; \bar{\omega}(M)]$ . De chaque solution du système en  $A, B, G, H$  résulte ainsi un  $STO$ .

Finalement, on obtient donc une nouvelle formulation, en toute généralité, de la recherche des  $STO$ , en évitant d'en dissocier les trois familles. Malgré les inconvénients qui peuvent en résulter, on pourrait sans doute ramener à ces notations divers résultats connus. Ainsi, pour rejoindre les profonds travaux de L. BIANCHI, on partirait d'une solution du système en  $A, B, G, H$  qui assure des solutions communes aux équations homogènes

$$(2^{\text{bis}}) \quad U_x U_y = U_z (A U_x + B U_y) \quad \text{et} \quad (3^{\text{bis}}) \quad \frac{U_x^2 - U_y^2}{2} = U_z (G U_x + H U_y);$$

il faudrait ensuite conditionner  $A, B, G, H$  de manière que, sur chaque surface  $U(M) = \text{const.}$ , extraite d'une des familles du  $STO$  (cela produit la dissociation évitée jusqu'ici), la courbure totale, déduite des dérivées premières et secondes de  $U$  soit une fonction de  $U$  <sup>(6)</sup>.

4. — Sans aborder ici la réalisation de ce programme, je noterai que, vu la forme simple de l'équation (2), il est naturel de chercher sous quelles conditions pour  $A, B$  il existe un  $STO$  dont les trois familles soient solutions de (2). À chaque solution  $U$  de l'équation de LAMÉ  $A = 0$  (fin du n° 2) correspond ainsi un couple  $A, B$ . D'ailleurs, en prenant une équation (2) pour laquelle  $A, B$  soient des fonctions continues quelconques, il est facile, selon un principe rappelé au cours du n° 2, d'obtenir pour qu'elle soit de ce type particulier une condition nécessaire. On écrit que les deux tangentes rectangulaires situées sur le cône des normales de (2) sont conjuguées, d'où la condition nécessaire : existence de solutions communes à (2) et à l'équation du second ordre

$$(5) \quad Bqr + Apt - (Aq + Bp - 1)s = 0;$$

condition non suffisante, car elle est remplie pour une équation (2) déduite d'une  $U(M)$  dont les surfaces de niveau ne forment pas une famille de LAMÉ, en imposant au cône des normales en chaque  $M$  de porter les deux tangentes principales correspondantes.

---

<sup>(6)</sup> Au sujet de la précédente recherche des  $STO$ , voir aussi C. R. Ac. Sc., t. 236, 1953, p. 2193 et 2462.

Etant donnée une équation (2), il peut y avoir plus d'un  $STO$ , distinct des plans parallèles aux plans de coordonnées, dont les trois familles vérifient cette équation. Ainsi, les quadriques homofocales d'un ellipsoïde donné, symétrique par rapport aux faces du trièdre des axes vérifient une équation à coefficients  $\alpha, \beta$  constants, de la forme

$$(6) \quad \alpha \left( 1 + \frac{x}{pz} \right) + \beta \left( 1 + \frac{y}{qz} \right) = 0.$$

Elle a pour intégrales, avec les surfaces de ce  $STO$ , celles de ses homothétiques par rapport au centre commun. Sans m'arrêter à l'exemple analogue provenant d'un paraboloides, où une infinité de  $STO$ , translatés de l'un d'eux, donnent des intégrales de

$$(7) \quad \frac{x}{p} - \frac{y}{q} = \gamma$$

je noterai qu'interviennent encore les homothéties de centre  $O$  quand on prend l'équation

$$(8) \quad pqz(x^2 - y^2) + py(z^2 + x^2) - qx(z^2 + y^2) = 0$$

provenant des surfaces dont la somme ou la différence des distances aux axes  $Ox, Oy$  reste constante, ce qui ne donne qu'un seul  $STO$ , complété, par les paraboloides  $xy = cz$ . Mais cette équation est satisfaite par un autre  $STO$  formée de deux familles de cônes du second degré de sommet  $O$  et des sphères de centre  $O$  (7). Ces exemples font évoquer divers thèmes annexes, et en particulier, le calcul donnant l'équation (2) pour un  $STO$  formé d'une famille de surfaces parallèles et des deux familles de normales développables qui leur sont communes. Pour déterminer un tel  $STO$ , il suffit de se donner une surface  $S$  de la première famille: on la définira comme enveloppe d'un plan

$$(9) \quad z = ux + vy - \varphi(u, v)$$

d'où, pour  $S$ , la représentation paramétrique

$$(10) \quad x = \varphi_u, \quad y = \varphi_v, \quad z = u\varphi_u + v\varphi_v - \varphi(u, v).$$

Avec ces notations, les équations d'une normale prennent la forme

$$(11) \quad \begin{cases} x + uz - (1 + u^2)\varphi_u - uv\varphi_v + u\varphi = 0 \\ y + vz - uv\varphi_u - (1 + v^2)\varphi_v + v\varphi = 0. \end{cases}$$

(7) *Gazeta Matematica*, Lisbonne, 1950, n. 43.

Le système (11) permet de déterminer, en chaque point  $(x, y, z)$ , les valeurs de  $u, v$ , soit encore les directions des diverses normales passant en ce point. Pour l'une d'entre elles, on déduit les tangentes principales correspondantes de l'équation

$$(12) \quad \frac{d(x + uz)}{du} = \frac{d(y + vz)}{dv}$$

où l'on égale  $x, y, z$  à leurs valeurs (10). Sans détailler le calcul, on voit qu'en donnant à (2<sup>bis</sup>) la forme

$$(13) \quad \xi \eta = (u \xi + v \eta) (A \xi + B \eta)$$

et tenant compte de

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\varphi_{uu} du + \varphi_{uv} dv}{\varphi_{uv} du + \varphi_{vv} dv},$$

on sera ainsi conduit, après transformation de (12) en une équation quadratique en  $\xi, \eta$  et identification avec (13), à évaluer les fonctions  $A, B$  figurant au premier membre de (2) pour chaque couple  $(u, v)$  déterminant un point de  $S$ . Une fois ces fonctions connues sur  $S$ , on les étendra à tous les points  $x, y, z$  liés à  $u, v$  par les équations (11). Malgré sa simplicité géométrique, ce cas conduit à des calculs assez pénibles. On pourrait achever assez facilement lorsque  $S$  est une quadrique de centre  $O$ , par exemple. Bien que l'équation (6) où l'on choisit  $\alpha, \beta$  de manière qu'elle admette cette quadrique pour solution admette en même temps pour solutions les surfaces qui lui sont parallèles, l'équation obtenue sera distincte de (6), du fait qu'il passe, par chaque point  $M(x, y, z)$  six normales à la quadrique. Dès lors, l'équation cherche associée à chaque  $M$  six cônes du second degré distincts, dont chacun est support de normales en  $M$ .

A plus forte raison, la formation de l'équation (2) se complique-t-elle si l'on prend les  $STO$  étudiés par DARBOUX au ch. III de ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2<sup>e</sup> ed. 1910), et dont une des familles s'obtient en passant de chacune de ses surfaces soit  $S(u)$  à une autre  $S(u + du)$ , infiniment voisine, par un parallélisme infinitésimal effectué, non plus par recours à des normales rectilignes selon les conditions ordinaires, mais aux cercles ayant rôle de géodésiques normales et obtenus en mettant l'espace  $(x, y, z)$  sous l'influence d'une métrique de LOBATCHEPSKY, pour laquelle la sphère jouant le rôle d'absolu peut varier d'une manière continue avec le paramètre  $u$ .

5. — Au lieu de m'y arrêter, je préfère dire comment la voie précédente rejoint le genre de questions signalées au n<sup>o</sup> 1. Reprenons à titre auxiliaire un système de quadriques homofocales, non réduites à des cônes ou à des cylindres. En général, et ici, sauf un petit nombre d'entre elles, ces surfaces n'ont pas (contrairement à ce qui se produit pour un  $STO$  contenant une famille de surfaces parallèles) d'arêtes de rebroussement, et en particulier, pas de lignes d'arrêt; et non plus, de points coniques. Sur toute leur étendue, ces surfaces, à part les trois d'entre elles réduites à une région plane bordée par une conique, sont donc vis-à-vis de (2) ou de (3), des *intégrales paratingentes* sans coupure.

Avant de préciser la définition de ce dernier terme, tirons des conséquences de la remarque ci-dessus. A cette fin, notons que si l'on donne une équation  $f(x, y, z, p, q) = 0$ , par exemple (2) ou (3), les intégrales privées d'arête de rebroussement sont assez raréfiées. Pour préciser, supposons que  $f = 0$  ait une intégrale complète  $g(x, y, z, u, v) = 0$ . Peut-on choisir  $v = \varphi(u)$  de manière que, sur l'enveloppe des surfaces  $g[x, y, z, u, \varphi(u)] = 0$ , les caractéristiques, ou bien n'aient pas d'enveloppe, ou bien aient un contact d'ordre 2 avec l'enveloppe; ce qui exclut l'arête de rebroussement; en pareille occurrence, la quantité

$$\gamma = g_u[x, y, z, u, \varphi(u)] + \varphi'(u) g_v[x, y, z, u, \varphi(u)]$$

doit, moyennant choix de  $\varphi(u)$ , ou bien s'annuler pour tout système  $x, y, z, u$ , toutes dérivées de  $\gamma$  par rapport à  $u$  étant nulles de ce fait; ou bien s'annuler ainsi que  $\gamma_u$  et  $\gamma_{uu}$ . Le second cas englobe donc le premier. De toutes manières, et bien que les conditions exprimées, et qui sont nécessaires, ne soient pas toujours suffisantes, de tels choix de  $\varphi(u)$  ne seront réalisables qu'à titre exceptionnel. En dehors d'eux, on a une surface intégrale  $S_\varphi$  avec arête de rebroussement, courbe qui est une intégrale de l'équation de MONGE associée à  $f = 0$ .

Ainsi, avant de rechercher, à partir de (2) ou (3), une famille de LAMÉ, il s'effectue donc, d'après ce qui précède, un *filtrage préliminaire*, pouvant faciliter l'enquête ultérieure. Toutefois, ces considérations ont un inconvénient: celui de supposer connue une intégrale complète de (2) ou de (3), ce qui, en général, n'aura pas lieu.

6. — C'est pourquoi il est indiqué de recourir à la notion d'*intégrale paratingente* d'une équation  $f(x, y, z, p, q) = 0$ . Pour y parvenir, on définit d'abord, en un point  $A$  non isolé d'un ensemble fermé  $\Phi$ , ce que j'ai appelé une *paratingente* de  $\Phi$  (notion rencontrée aussi par. M. F. SEVERI, lorsqu'il a considéré les cordes impropres d'une courbe algébrique). Une droite

$A$   $T$  est une paratingente de  $\Phi$  en  $A$  si elle est limite d'une suite infinie de droites dont chacune porte un segment  $P_i Q_i$  dont les deux extrémités  $P_i$  et  $Q_i$  appartiennent à  $\Phi$ , ces extrémités étant de plus astreintes à la condition de tendre vers  $A$ . La collection de toutes les paratingentes en  $A$  forme, par définition, le *paratingent* de  $\Phi$  en  $A$ . Dans la gerbe des droites issues de  $A$ , c'est un fermé. Son complémentaire est un ouvert (quand il n'est pas vide): il est constitué par les *non-paratingentes*. Dès qu'il existe une non-paratingente en  $A$ , elle est donc plongée dans un pinceau de non-paratingentes en  $A$ . D'une propriété facile à établir et qui est la semi-continuité supérieure du paratingent, regardé comme une fonction de son origine  $A$ , il découle que l'existence de non-paratingentes à  $\Phi$ , si elle est réalisée pour  $A$ , se transmet sur  $\Phi$  à un certain voisinage de ce point. On peut même choisir ce voisinage de  $A$  sur  $\Phi$  de manière qu'une même direction  $A$  ait rôle de non-paratingente aux divers points de ce sous-ensemble. Il en résulte alors, dans l'espace à trois dimensions par exemple, une correspondance biunivoque entre ce nouveau voisinage et sa projection faite parallèlement à  $A$  sur un plan sécant à  $A$  (lemme d'univocité). Grâce à cette propriété, se dégage la notion de surface admettant en chaque point une non-paratingente au moins, avec la possibilité de représenter une telle surface, autour de chaque point, par une équation  $z = g(x, y)$ , l'axe des  $z$  ayant la direction d'une non-paratingente dans tout le voisinage ainsi représenté, sur lequel la fonction  $g$  est, en outre, à pentes bornées. Cela posé, on dira que  $z = g(x, y)$  est une *intégrale paratingente* d'une  $f(x, y, z, p, q) = 0$  dans le cas où sont réalisées les conditions suivantes :

a) Le paratingent de la surface  $z = g(x, y)$  est formé, en chacun de ses points, par toutes les directions d'un plan; celui-ci jouera le rôle de plan tangent (à définition précisée) et sera réparti d'une manière continue, comme il résulte de la semi-continuité supérieure du paratingent.

b) La normale en un point courant  $M$  à  $z = g(x, y)$  sera située sur le cône des normales en  $M$  pour l'équation  $f(x, y, z, p, q) = 0$ .

Cette définition ne se distingue de celle d'intégrale ( $C$ ) (ou : au sens de CAUCHY) que par le fait d'y substituer au plan tangent, pris au sens vulgaire, un plan tangent introduit par une définition précisée. Or cette nuance a des répercussions profondes, car en cheminant sur une courbe portée par une intégrale ( $C$ ), on peut y rencontrer et y franchir des arêtes de rebroussement, ce qui, sur une intégrale paratingente, n'a plus lieu : une telle intégrale est en effet contrainte à présenter des lignes d'arrêt, qui sont justement les courbes qui auraient rôle d'arêtes de rebroussement sur l'intégrale ( $C$ ) dont l'intégrale paratingente n'est qu'une portion. Aussi bien, doit-on supprimer un petit voisinage de chaque point conique, en vue d'obtenir une intégrale paratingente.

7. — Ces remarques permettent d'analyser le mécanisme de la production des arêtes de rebroussement sur une intégrale  $(C)$  d'une  $f(x, y, z, p, q) = 0$ . Je vais d'abord montrer, sur un exemple, que de telles singularités peuvent être très resserrées sur une intégrale  $(C)$ . Dans ce but, partons de l'équation de PFAFF

$$dz = y dx$$

qui, dans le champ réel, peut s'écrire sous forme d'une équation aux dérivées partielles

$$(p - y)^2 + q^2 = 0.$$

Soit maintenant la famille d'équations

$$(E_\varepsilon) \quad (p - y)^2 + q^2 = \varepsilon^2$$

où intervient le paramètre  $\varepsilon$ , qui dans la suite, tendra vers zéro. Les intégrales de cette équation passant par l'axe des  $x$  sont des cylindres dont les sections  $x = \text{const.}$  sont déterminées par l'équation différentielle

$$(e_\varepsilon) \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \varepsilon^2 - y^2$$

Les droites  $y = \pm \varepsilon$  portent des rebroussements de ces courbes, faciles à construire d'après  $(e_\varepsilon)$  et cela confirme le comportement annoncé. Plus généralement, soit une équation de PFAFF

$$\vec{V} \cdot dM = 0$$

pour laquelle la quantité  $\vec{V} \cdot \text{rot } \vec{V}$  n'est pas nulle. Soit

$$f(x, y, z, p, q, \varepsilon) = 0$$

une famille d'équations ayant cette propriété : quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, le cône des normales, supposé convexe et contenant  $\vec{V}$  à son intérieur devient de plus en plus effilé, l'angle aigu maximum d'une génératrice avec  $\vec{V}$  tendant vers zéro. Pour qu'une courbe  $\Gamma$  livre passage, pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit, à des intégrales réelles de  $f = 0$ , il faut que  $\vec{V}$  soit partout normal à  $\Gamma$ , laquelle sera donc une intégrale de  $\vec{V} \cdot dM = 0$ . Cela posé, l'absence de quelque morceau de surface qui, pour  $\vec{V} \cdot dM = 0$  serait une intégrale paratingente (c'est-à-dire, dont le paratingent, partout plan, serait normal à  $\vec{V}$ ) ne se produit pas seulement pour  $\varepsilon = 0$ , lorsqu'on essaie de réaliser

cette intégrale sous forme d'une surface transverse aux lignes intégrales du champ  $\vec{V}$ , balayant l'intérieur d'un petit tube donné dont la paroi est aussi un lieu de telles lignes; en appelant ces dernières les  $\lambda$ , les trajectoires orthogonales des  $\lambda$  sur la paroi ne se ferment pas, et cela se produit encore si l'on remplace l'orthogonalité rigoureuse par une orthogonalité suffisamment approchée.

On n'aura donc pour intégrales paratingentes de  $f(x, y, z, p, q, \varepsilon) = 0$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro que des rubans de plus en plus étroits, et donnant lieu, comme configurations limites, à des courbes intégrales de  $\vec{V} \cdot dM = 0$ . Cet exemple typique montre bien le rôle dévolu aux intégrales paratingentes dans l'économie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

8. — Revenons maintenant à la recherche dont l'opportunité a été reconnue à la fin du n° 5, en vue d'obtenir des *STO* privés de certaines singularités. Ces *STO* sont à construire au moyen d'intégrales communes à une équation (2) et à une équation (3), dont est garantie la compatibilité; une étude complète du problème doit donc partir d'une solution du système en  $A, B, G, H$  et du couple (2), (3) correspondant. Toutefois, et c'est à cet objet que je me bornerai ici, cette étude bénéficiera des informations obtenues sur les intégrales paratingentes d'une équation du type (2), prise isolément, en cherchant à séparer l'ensemble de telles intégrales. Essayons de faire les premiers pas dans la voie de ce filtrage. L'équation (2) résulte de l'élimination de  $\omega$  entre les suivantes

$$p = B(\omega - 1) \quad q = A \frac{1 - \omega}{\omega}$$

On est donc ramené à choisir une  $\omega(x, y, z)$  telle que l'équation de PFAFF

$$dz = B(\omega - 1) dx + A \frac{1 - \omega}{\omega} dy$$

soit complètement intégrable. Or, soit en général une équation  $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$  à laquelle on puisse substituer un système de la forme

$$(s) \quad p = \alpha(x, y, z, \omega), \quad q = \beta(x, y, z, \omega);$$

ce qui conduit à un nouveau problème dans l'espace  $(x, y, z, \omega)$ , avec retour possible au problème initial par projection sur la variété  $\omega = 0$ . Il s'agira de prendre une variété

$$\omega = \omega(x, y, z),$$

laquelle soit une solution de l'équation

$$(\lambda) \quad \alpha_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \beta_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\beta \alpha_{\omega} - \alpha \beta_{\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial z} + \alpha_y - \beta_x + \alpha_z \beta - \beta_z \alpha = 0$$

linéaire par rapport aux trois dérivées premières de  $\omega$ , et où les indices inférieurs opposés aux  $\alpha, \beta$ , indiquent des dérivées partielles portant sur celles-ci. Cette variété à trois dimensions ayant été fixée, il faudra prélever sur elle des surfaces  $\sigma$  satisfaisant à l'équation, rendue ainsi intégrable

$$(A) \quad dz = \alpha [x, y, z, \omega(x, y, z)] dx + \beta [x, y, z, \omega(x, y, z)] dy$$

et prendre les surfaces  $\bar{\omega}$ , déduites de ces  $\sigma$  par projection sur  $\omega = 0$ . A ce tournant, il faut noter qu'en tout point d'une intégrale quelconque  $\bar{\omega}$  de  $f = 0$ , les deux équations de (s) ont une solution commune en  $\omega$ . Cela introduit, dans l'espace ( $\Omega$ ) du point  $(x, y, z, \omega)$  une surface  $\sigma$  déduite de  $\bar{\omega}$  en associant à un point courant de cette dernière une quatrième coordonnée à laquelle on assigne la précédente valeur  $\omega$ . En chaque point de cette surface  $\sigma$ , laquelle se projette sur la variété  $\omega = 0$  suivant  $\bar{\omega}$ , il passe une caractéristique de ( $\lambda$ ), projetée sur  $\omega = 0$  suivant une caractéristique, portée par  $\bar{\omega}$ , de notre équation initiale  $\varphi = 0$ . D'ailleurs,  $\sigma$  livre passage à un ensemble d'hypersurfaces  $h$  qui sont des intégrales paratingentes de ( $\lambda$ ); l'importance de cet ensemble peut s'estimer comparativement en réduisant de 1 le nombre des dimensions et prenant les intégrales paratingentes d'une équation linéaire en  $p, q$  passant par une caractéristique isolée de cette dernière équation. Vis-a-vis de ( $\lambda$ ), bien que  $\sigma$  ne soit pas une hypersurface, et ainsi n'ait pas le nombre de dimensions ordinairement requis d'une intégrale, on peut dire que cette  $\sigma$  joue encore le rôle d'une intégrale paratingente en adaptant à ce cas la notion d'intégrale au sens de Lie, et notant que le paratingent de  $\sigma$  en chaque point est formé avec les diverses directions d'un plan qui contient toujours, en ce point, le vecteur de l'espace ( $\Omega$ ) déterminant ( $\lambda$ ).

Voici maintenant le point essentiel :

*Les intégrales paratingentes de l'équation initiale  $\varphi = 0$  s'obtiennent en projetant sur  $\omega = 0$ , les intégrales paratingentes de ( $\lambda$ ) formées par des variétés bidimensionnelles de l'espace ( $\Omega$ ), obtenues par le processus indiqué ci-dessus, et en outre, dépourvues de tangentes parallèles à l'axe des  $\omega$ .*

De telles tangentes interviendraient justement, si définissant les intégrales de  $\varphi = 0$  au sens de CAUCHY, on prenait une telle intégrale offrant des arêtes de rebroussement.

En définitive, l'énoncé obtenu à l'instant fournit donc une condition nécessaire, qui à partir de (1), permettra d'accomplir l'opération de filtrage annoncée, pour aboutir à des intégrales paratingentes de  $\varphi = 0$ . Naturellement, dans le cas présent, l'application simultanée de cette méthode à (2) et (3) donnera un filtrage plus complet.

Je tiens à souligner qu'on reste ainsi au seuil d'un terrain difficile d'accès. On ne le rendrait productif qu'en trouvant des classes particulières de systèmes (2), (3) pour lesquels la condition nécessaire ci-dessus donnerait lieu à des applications substantielles.

9. — *Autre remarque.* Une équation du type (2) est fixée en se donnant une fonction de point  $U(M)$  solution de (2 bis) et en chaque point d'une surface  $U = \text{const.}$ , un couple de tangentes rectangulaires astreintes à se trouver sur le cône des normales en  $M$ . En choisissant pour  $U$  une fonction ayant, sans plus, des dérivées premières continues, et en assurant la continuité des deux tangentes en  $M$ , on a une équation du type (2) à coefficients continus sans plus. Le choix de  $U$  pourra se faire en complétant les conditions qui précèdent par la suivante : c'est que les surfaces  $U = \text{const.}$ , aient en chaque point, au moins dans une région  $R$ , leur paratingent plan, et soient ainsi des intégrales paratingentes de (2) dans  $R$ . Le fait que les coefficients de (2) soient continus sans plus rend alors plausible une raréfaction assez poussée des intégrales paratingentes de (2) et l'on pressent des cas, où seules, les surfaces  $U = \text{const.}$ , auraient ce caractère.

En particulier, pour une équation (2) provenant d'un *STO* qui en livre trois familles d'intégrales paratingentes avec le moins possible d'attributs de dérivabilité, il y a lieu d'approfondir le problème. Les directions des tangentes principales sont alors réparties d'après une loi continue, mais non dérivable, ce qui se transmet aux coefficients de (2). D'où le thème d'une étude délicate, à mener en liaison avec des travaux récents de *MM.* G. LLENSA<sup>(8)</sup> et J. COLMEZ<sup>(9)</sup>.

10. — En terminant je remercie le Professeur S. CHERUBINO, directeur de l'Institut Léonida Tonelli de m'avoir encouragé à faire connaître, aux réunions de Pise du 26 septembre 1953, ces vues que soulignent, sans plus, des relations entre problèmes. L'exposé plus détaillé qui j'en présente ici cherche à favoriser des recherches ultérieures. En consacrant, voici quelques années<sup>(10)</sup> un court travail au sujet que résume ci-dessus le n° 8, je

(8) G. LLENSA, C. R. Ac. Sc. t. 220, 1945, p. 297, et t. 222, 1946, p. 845.

(9) J. COLMEZ, Ann. Ec. N. Sup. 3, t. XLV, 1948, p. 71-99.

(10) G. B., Ann. Soc. Polon. Math. t. XX, 1947 (à la mémoire de St. Zaremba).

n'avais pas en l'occasion de produire, faute de posséder la liaison explicitée au n° 2, ces aspects en devenir relatifs à une théorie, en style *funktion theoretisch*, des *STO*, que je signale ici. D'autres voies vers un tel objectif pourront être proposées et s'affirmer plus fécondes. De toutes manières, la liaison sur laquelle j'ai insisté suggère des problèmes d'un genre plus classique, et par exemple, au bénéfice de la notion d'intégrale complète, la recherche des équations (2), qui à l'exemple de (6) et (7), conviennent à une famille continue à un paramètre de *STO*.

D'autres voies s'ouvrent en partageant les équations (2), selon divers principes, en classes d'équivalence, par exemple, en associant celles provenant d'un même *STO*, auquel on attribue toutes les positions possibles par rapport aux axes, ou encore en associant celles provenant d'un *STO* et de ceux qui s'en déduisent par la transformation de Combescure. Mais, je le répète, c'est surtout vers les *STO* de BIANCHI, dans l'intérêt de progrès généraux, que l'effort doit ici se porter.