

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI PRODI

## **Intorno ad una formula asintotica di Hartman e Wintner**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 7, n° 3-4 (1953), p. 277-286*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1953\\_3\\_7\\_3-4\\_277\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_3-4_277_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INTORNO AD UNA FORMULA ASINTOTICA DI HARTMAN E WINTNER

di GIOVANNI PRODI (Milano)

È ben noto che una equazione differenziale del tipo  $\Phi'' - f(s)\Phi = 0$ , nel caso in cui  $f(s)$  sia continua per  $0 \leq s < +\infty$  e tenda a  $+\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$ , ammette un integrale infinitesimo per  $s \rightarrow +\infty$  e che questo è unico, prescindendo naturalmente da una costante moltiplicativa. Se consideriamo l'equazione

$$(1) \quad \Phi'' + (\lambda - f(s))\Phi = 0$$

dove  $\lambda$  è reale ed  $f(s)$  soddisfa ancora alle stesse condizioni, avremo, per ogni valore di  $\lambda$ , un integrale infinitesimo per  $s \rightarrow +\infty$  (e diverso da zero da un certo punto in poi). Ma, per  $\lambda$  sufficientemente grande, questo integrale avrà degli zeri; sorge allora il problema di dare una espressione asintotica (per  $\lambda \rightarrow +\infty$ ) del suo massimo zero. Se  $f(s)$  è definitivamente crescente, per  $\lambda$  sufficientemente grande, detto  $\sigma$  il numero per cui è  $f(\sigma) = \lambda$ , gli zeri dell'integrale infinitesimo cadranno tutti nell'intervallo  $0 \leq s < \sigma$ : è naturale allora che si cerchi di legare il massimo zero al numero  $\sigma = f^{-1}(\lambda)$ .

Il problema è stato posto qualche anno fa Ph. HARTMAN e A. WINTNER<sup>(1)</sup>; essi sono pervenuti a due enunciati: uno, più generale, dedotto come conseguenza quasi immediata da un lemma che completa ed estende alcune considerazioni di KNESER<sup>(2)</sup>, ed un secondo che si ottiene come caso particolare dal precedente, ma risulta più espressivo e di più facile applicazione. Quest'ultimo si può porre in questi termini:

---

<sup>(1)</sup> Ph. HARTMAN e A. WINTNER, *On the asymptotic problems of the zeros in wave mechanics*. Am. Jour. of Math. 70, 461-480 (1948).

<sup>(2)</sup> A. KNESER, *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments*, Jour. für die reine und ang. Math. 116, 178-212 (1896).

Nell'equazione (1) la funzione  $f(s)$  tenda a  $+\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$  ed abbia le derivate prime e seconda continue. Inoltre sia:

$$(a) \quad f''(s) = o\{f'(s)\}^{2/3} \quad (s \rightarrow +\infty)$$

$$(b) \quad f''(s) \geq 0$$

allora vale la seguente espressione asintotica per l'ultimo zero  $s^*(\lambda)$  dell'integrale infinitesimo della (1):

$$(2) \quad f^{-1}(\lambda) - s^*(\lambda) \sim \iota 3^{-1/3} \{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{1/3} \quad (\lambda \rightarrow +\infty)$$

dove  $f^{-1}$  è la funzione inversa della  $f$  ed  $\iota$  è una costante assoluta. Precisamente  $\iota$  è il primo zero positivo della funzione cilindrica di Airy che è così definita:

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \cos(r^3 + rt) dr.$$

L'uso della funzione inversa è giustificato dal fatto che, per valori di  $s$  sufficientemente grandi, la funzione  $f(s)$  è crescente.

In questa nota ci occuperemo soltanto di migliorare la proposizione ora riferita. Noi dimostreremo che:

(I) *L'ipotesi (a), da sola, è sufficiente per la validità dell'asserto;*

(II) *L'ipotesi (b), da sola, non basta per la validità dell'asserto. Infatti esporremo un esempio in cui l'ipotesi (b) è soddisfatta, senza che valga la formula (2). Questo stesso esempio servirà anche a provare che l'enunciato non sussiste più se, al posto della condizione (a), si pone la*

$$(a') \quad f''(s) = O\{f'(s)\}^{2/3} \quad (s \rightarrow +\infty)$$

e questo anche quando si continui a porre la (b).

Noi assumeremo senz'altro, come punto di partenza, l'impostazione di HARTMAN e WINTNER; in particolare ci serviremo del lemma di cui abbiamo sopra parlato. Rinviamo alla memoria di questi Autori anche per una più completa illustrazione del problema, come pure per la bibliografia.

(I) Cominciamo col dimostrare che, in virtù della sola ipotesi (a) unita alla relazione  $f(s) \rightarrow +\infty$  ( $s \rightarrow +\infty$ ), la  $f(s)$  risulta crescente. Indichiamo con  $\varphi(s)$  la derivata  $f'(s)$ . Fissato un numero  $\varepsilon > 0$ , per la (a) esisterà un numero  $\delta_\varepsilon$  tale che, per ogni  $s \geq \delta_\varepsilon$ , sia

$$(3) \quad |\varphi'(s)| < \varepsilon |\varphi(s)|^{2/3}.$$

D'altra parte, essendo  $f(s) \rightarrow +\infty$  ( $s \rightarrow +\infty$ ), esisterà almeno un punto  $s_0 \geq \delta_\varepsilon$  tale che sia  $\varphi(s_0) > 0$ . Per la continuità della  $\varphi(s)$  esisterà tutto un intorno di  $s_0$  il cui  $\varphi(s)$  manterrà in segno positivo. In tale intorno si potrà scrivere

$$(3') \quad |\varphi'(s)| < \varepsilon \varphi(s)^{1/3}.$$

Ma questo implica che, detti  $\bar{\varphi}(s)$  e  $\underline{\varphi}(s)$  gli integrali delle due equazioni

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}'(s) &= \varepsilon \bar{\varphi}(s)^{1/3} \\ \underline{\varphi}'(s) &= -\varepsilon \underline{\varphi}(s)^{1/3} \end{aligned}$$

che assumono per  $s = s_0$  il medesimo valore  $\varphi(s_0)$ , si avrà, per  $s > s_0$

$$\underline{\varphi}(s) < \varphi(s) \quad \text{e} \quad \varphi(s) < \bar{\varphi}(s)$$

dovunque  $\varphi(s)$  e  $\bar{\varphi}(s)$  sono definite e dovunque è  $\underline{\varphi}(s) > 0$ . Con calcoli del tutto ovvi si trova

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi(s) < \frac{3^3 \varphi(s_0)}{(3 - \varepsilon [s - s_0] \varphi(s_0)^{1/3})^3} & (s_0 < s < s_0 + 3/(\varepsilon \varphi(s_0)^{1/3})) \\ \varphi(s) > \frac{3^3 \varphi(s_0)}{(3 + \varepsilon [s - s_0] \varphi(s_0)^{1/3})^3} & (s_0 < s < +\infty) \end{cases}$$

In modo analogo si trova, per  $s < s_0$ ,

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(s) < \frac{3^3 \varphi(s_0)}{(3 + \varepsilon [s - s_0] \varphi(s_0)^{1/3})^3} & (\max[\delta_\varepsilon, s_0 - 3/(\varepsilon \varphi(s_0)^{1/3})] < s < s_0) \\ \varphi(s) > \frac{3^3 \varphi(s_0)}{(3 - \varepsilon [s - s_0] \varphi(s_0)^{1/3})^3} & (\delta_\varepsilon < s < s_0) \end{cases}$$

Dalla seconda delle (4) e dalla seconda delle (5) si vede che, per  $s > \delta_\varepsilon$ ,  $\varphi(s)$  è sempre positiva: dunque potremo parlare, almeno per valori di  $\lambda$  sufficientemente grandi, della funzione inversa  $f^{-1}(\lambda) = \sigma$ . Si avrà  $\sigma \rightarrow +\infty$  per  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Seguendo il metodo di H. e W., mutiamo ora la variabile indipendente  $s$  in una nuova variabile  $t$  mediante la sostituzione

$$(6) \quad t = \{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{1/3} (s - f^{-1}(\lambda))$$

Otterremo l'equazione

$$(7) \quad \omega'' + F(t, \lambda) \omega = 0$$

dove si è posto

$$\omega(t) = \Phi(f^{-1}(\lambda) + t/\{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{1/s})$$

ed è

$$(8) \quad F(t, \lambda) = \{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{-2/s} (\lambda - f(f^{-1}(\lambda) + t/\{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{1/s}))$$

La validità della formula (2) sarà provata se sarà provato che

$\alpha$ ) per  $\lambda$  sufficientemente grande, la sostituzione (6) fa corrispondere all'intervallo  $0 \leq s < +\infty$  un intervallo che contiene l'intervallo

$$(9) \quad -3^{-1/s} \leq t < +\infty$$

$\beta$ ) si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(t, \lambda) = -t$$

uniformemente per  $t$  variabile in ogni intervallo finito contenuto nell'intervallo (9).

Infatti, se questo accade, in virtù del lemma di H. e W. citato sopra, l'ultimo zero dell'integrale infinitesimo della (7) tenderà all'ultimo zero dell'integrale infinitesimo della

$$(10) \quad \psi'' - t\psi = 0$$

che è appunto  $-t 3^{-1/s}$  (3).

---

(3) Osserviamo qui, incidentalmente, che non c'è bisogno di supporre l'esistenza della  $F(t, \lambda)$  (e la convergenza verso  $-t$ ) per  $\lambda \rightarrow +\infty$  in un intervallo

$$-(t 3^{-1/s} + \delta) \leq t < +\infty \quad (\delta > 0)$$

più ampio dell'intervallo (9), come fanno H. e W. Infatti, se  $\omega_\lambda(t)$  e  $\psi(t)$  sono gli integrali infinitesimi della (7) e della (10) rispettivamente (normalizzati con la condizione  $\omega_\lambda(0) = \psi(0) = 1$ ) e se  $t_\lambda^*$  è l'ultimo zero di  $\omega_\lambda$ , essendo  $F(t, \lambda) \geq 0$  per  $t < 0$ , si avrà, per  $t_\lambda^* < t < 0$ ,

$$\omega_\lambda''(t) = -F(t, \lambda) \omega_\lambda(t) \leq 0$$

Da questo fatto e dalla relazione

$$|\omega_\lambda(t) - \psi(t)| \rightarrow 0$$

(per  $\lambda \rightarrow +\infty$ , uniformemente nello intervallo  $-t 3^{-1/s} \leq t \leq 0$ ) si deduce

$$t_\lambda^* \rightarrow -t 3^{-1/s} \quad (\lambda \rightarrow +\infty).$$

$\alpha$ ) La sostituzione (6) fa corrispondere all'intervallo  $0 \leq s < +\infty$  l'intervallo

$$-f^{-1}(\lambda) \{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{1/s} \leq t < +\infty$$

che potremo indicare, con i simboli introdotti

$$-\sigma \{\varphi(\sigma)\}^{1/s} \leq t < +\infty$$

Basterà dimostrare che è

$$(11) \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma \{\varphi(\sigma)\}^{1/s} = +\infty$$

Applichiamo la seconda delle (4). Avremo, per  $\sigma > s_0$ ,

$$\sigma \{\varphi(\sigma)\}^{1/s} > \frac{\sigma \varphi(s_0)^{1/s}}{3 + \varepsilon [\sigma - s_0] \varphi(s_0)^{1/s}}$$

e poichè è

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{3 \sigma \varphi(s_0)^{1/s}}{3 + \varepsilon [\sigma - s_0] \varphi(s_0)^{1/s}} = \frac{3}{\varepsilon}$$

dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  scaturisce il nostro asserto.

$\beta$ ) Dimostriamo ora che si ha

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \varphi(\sigma)^{-1/s} \{f(\sigma) - f(\sigma + t/\{\varphi(\sigma)\}^{1/s})\} = -t$$

uniformemente in ogni intervallo  $-m \leq t \leq +m$  (con  $m$  positivo arbitrario).

Applicando la formula di Taylor potremo scrivere

$$\varphi(\sigma)^{-1/s} \{f(\sigma) - f(\sigma + t/\{\varphi(\sigma)\}^{1/s})\} = -t - \frac{1}{2} t^2 \frac{\varphi'(\sigma + \theta t \varphi(\sigma)^{-1/s})}{\varphi(\sigma)^{4/s}}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

Basterà dunque dimostrare che è

$$(12) \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(\sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/s})}{\varphi(\sigma)^{4/s}} = 0$$

uniformemente per  $-m \leq r \leq +m$ .

Premettiamo questa osservazione: si ha

$$(13) \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} (\sigma - m \varphi(\sigma)^{-1/s}) = +\infty$$

Infatti si può scrivere

$$\sigma - m \varphi(\sigma)^{-1/3} = \sigma \left\{ 1 - \frac{m}{\sigma \varphi(\sigma)^{1/3}} \right\}$$

ed applicare la (11).

Fissiamo ora un  $\varepsilon$  positivo arbitrario; è possibile, come abbiamo visto, determinare un  $\delta_\varepsilon$  tale che, per  $s \geq \delta_\varepsilon$ ,  $\varphi(s)$  sia sempre positiva e soddisfi alla disequaglianza (3'); allora essa soddisferà anche alle limitazioni (4) e (5), dove  $s_0$  è un qualunque numero tale che sia  $s_0 \geq \delta_\varepsilon$ . In virtù della (13) potremo determinare un secondo numero  $\delta'_\varepsilon$  (con  $\delta'_\varepsilon > \delta_\varepsilon$ ) tale che per  $\sigma > \delta'_\varepsilon$  sia

$$\sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/3} \geq \delta_\varepsilon \quad (-m \leq r \leq +m)$$

Applicando la (3') avremo:

$$\frac{|\varphi'(\sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/3})|}{\varphi(\sigma)^{4/3}} < \varepsilon \left[ \frac{\varphi(\sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/3})}{\varphi(\sigma)} \right]^{4/3}.$$

Applicando la prima delle (4) e la prima delle (5), con  $s_0 = \sigma$ ,  $s = \sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/3}$ , avremo:

$$\varphi(\sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/3}) < \frac{3^3 \varphi(\sigma)}{(3 - \varepsilon |r|)^3} \quad (m < 3/\varepsilon).$$

Perciò, per  $\sigma > \delta'_\varepsilon$ ,  $r \leq m < \frac{3}{\varepsilon}$ , avremo:

$$\frac{|\varphi'(\sigma + r \varphi(\sigma)^{-1/3})|}{\varphi(\sigma)^{4/3}} < \varepsilon \frac{3^4}{(3 - \varepsilon m)^4}$$

e questo dimostra il nostro asserto.

(II) Consideriamo l'equazione differenziale del tipo della (1) in cui la funzione  $f(s)$  è data mediante il valore iniziale  $f(0) = 0$  e la definizione che ora esporremo per la sua derivata  $\varphi(s)$ .

Converremo di indicare con  $w(x)$  il polinomio

$$w(x) = 3x^2 - 2x^3.$$

Avremo:

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1, \quad w'(0) = w'(1) = 0, \quad w'(1/2) = 3/2.$$

Ciò posto, consideriamo la funzione  $\varphi(s)$ , così definita per  $0 \leq s < +\infty$ :

$$(14) \quad \begin{cases} \varphi(s) = 2^{n-1} \{1 + w([s-n] 2^{n/3})\} & \text{per } n \leq s \leq n + 2^{-n/3} \\ \varphi(s) = 2^n & \text{per } n + 2^{-n/3} \leq s \leq n + 1 \end{cases} \\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Si riconosce facilmente che la funzione così definita è continua insieme con la sua derivata.

Consideriamo dunque l'equazione

$$(15) \quad \Phi'' + \left\{ \lambda - \int_0^s \varphi(\xi) d\xi \right\} \Phi = 0.$$

È evidente che la condizione (b) è soddisfatta, essendo sempre, come si verifica immediatamente,

$$f''(s) = \varphi'(s) \geq 0.$$

Dimostriamo che la condizione (a), invece, non è soddisfatta. Consideriamo infatti la successione

$$s_n = n + 2^{-n/3-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Avremo

$$\frac{\varphi'(s_n)}{\varphi(s_n)^{4/3}} = \frac{2^{3/4} n^{-1} w'(1/2)}{2^{3/4} \{1 + w(1/2)\}^{4/3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}.$$

D'altra parte si verifica facilmente che la funzione  $f(s) = \int_0^s \varphi(\xi) d\xi$  soddisfa alla condizione (a'); si ha cioè

$$\varphi'(s) = O\{\varphi(s)^{4/3}\} \quad (s \rightarrow +\infty)$$

Dimostriamo ora che per l'ultimo zero dell'integrale infinitesimo della (15) non vale l'espressione asintotica (2). Precisamente noi troveremo che esiste una particolare successione di valori  $\{\lambda_n\}$  (con  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ) tale che per l'ultimo zero dell'integrale infinitesimo della (15) vale una formula asintotica



diversa dalla (2). Consideriamo infatti la successione

$$\lambda_n = \int_0^n \varphi(\xi) d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Per maggiore comodità faremo uso dei corrispondenti

$$\sigma_n = f^{-1}(\lambda_n) = n$$

che costituiscono la successione degli interi naturali. Applichiamo alla (15) la sostituzione (6) che qui diventa

$$t = \varphi(n)^{1/s} (s - n) = 2^{-\frac{n-1}{3}} (s - n)$$

ed esaminiamo il comportamento del coefficiente  $F(t, \lambda_n)$  dell'equazione analoga alla (7) che così si ottiene. Avremo per  $F(t, \lambda_n)$  l'espressione

$$(16) \quad F(t, \lambda_n) = -\varphi(n)^{-2/s} \int_n^{n+t\varphi(n)^{-1/s}} \varphi(\xi) d\xi = -2^{-\frac{2(n-1)}{3}} \int_n^{n+t 2^{-\frac{n-1}{3}}} \varphi(\xi) d\xi$$

Supponiamo dapprima  $t$  positivo e variabile nell'intervallo  $0 \leq t \leq m$  ( $m$  cost.  $> 0$ ). Prendiamo allora  $n$  tanto grande che sia

$$(17) \quad m 2^{-\frac{n-1}{3}} \leq 1$$

in questo modo l'integrale che compare nella (16) sarà esteso ad un intervallo che non esce da  $(n, n+1)$ . Eseguiremo i calcoli supponendo dapprima  $0 \leq t \leq 2^{-1/s}$  e poi supponendo  $2^{-1/s} < t \leq m$  (nel caso in cui sia  $m > 2^{-1/s}$ ); questo, evidentemente, per tener conto delle diverse espressioni analitiche della  $\varphi(s)$ , secondo la (14).

Avremo, per  $0 \leq t \leq 2^{-1/s}$ :

$$\begin{aligned} F(t, \lambda_n) &= -2^{-\frac{2(n-1)}{3}} \int_n^{n+t 2^{-\frac{n-1}{3}}} 2^{n-1} \{1 + w([s-n] 2^{n/3})\} ds = \\ &= -t - 2^{-\frac{1}{3}} \int_0^{2^{1/s} t} w(\xi) d\xi = -t - 2^{2/3} t^3 + t^4 \end{aligned}$$

e, per  $m \geq t \geq 2^{-1/3}$ :

$$\begin{aligned} F(t, \lambda_n) &= -2^{\frac{n-1}{3}} \int_n^{n+2^{-n/3}} \{1 + w([s-n] 2^{n/3})\} ds - 2^{-\frac{2(n-1)}{3}} \int_{n+2^{-n/3}}^{n+2^{-\frac{n-1}{3}}} 2^n ds = \\ &= -2^{-1/3} - 2^{-1/3} \int_0^1 w(\xi) d\xi - 2^{2/3} [t 2^{1/3} - 1] = -2t + 2^{-4/3}. \end{aligned}$$

Sia nell'uno che nell'altro caso, purchè, naturalmente,  $n$  sia tanto grande da soddisfare alla (17),  $F(t, \lambda_n)$  non dipende più dall'indice  $n$ . Analogamente (anzi in modo più semplice per quanto riguarda i calcoli) si può procedere per  $-m \leq t \leq 0$ : si vede subito che, pur di prendere  $n$  tanto grande che sia

$$m 2^{-\frac{n-1}{3}} \leq 1 - 2^{-n/3}$$

$F(t, \lambda_n)$  non dipende più da  $n$  e si ha

$$F(t, \lambda_n) = -t.$$

Concludendo, si ha, per  $-m \leq t \leq m$ , uniformemente

$$F(t, \lambda_n) \rightarrow -G(t) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

dove la funzione  $G(t)$  è così definita:

$$(18) \quad G(t) = \begin{cases} t & \text{per } t \leq 0 \\ t + 2^{2/3} t^3 - t^4 & \text{per } 0 \leq t \leq 2^{-1/3} \\ 2t - 2^{-4/3} & \text{per } t \geq 2^{-1/3} \end{cases}$$

In base al lemma di H. e W. si può affermare che, per  $n \rightarrow +\infty$ , si ha

$$f^{-1}(\lambda_n) - s^*(\lambda_n) \sim \gamma / \{f'(f^{-1}(\lambda))\}^{1/3}$$

dove  $-\gamma$  è l'ultimo zero dell'integrale infinitesimo dell'equazione

$$\psi'' - G(t)\psi = 0.$$

Ma, essendo  $G(t) \geq t$  (anzi, essendo  $G(t) > t$  per  $t > 0$ ), deve essere  $\gamma > \epsilon 3^{-1/3}$ ; infatti  $-\epsilon 3^{-1/3}$  è l'ultimo zero dell'integrale infinitesimo dell'equa-

zione  $\psi'' - t\psi = 0$ ; si può allora applicare un semplice criterio di confronto (4).

Abbiamo così trovato una particolare successione di valori  $\{\lambda_n\}$  del parametro, per cui non vale più la formula asintotica (2). Con questo il nostro asserto risulta completamente dimostrato.

(4) Il criterio di confronto che si può applicare al nostro caso è questo:

« Le equazioni

$$u'' - A(t)u = 0$$

$$v'' - B(t)v = 0$$

abbiamo i coefficienti  $A(t)$  e  $B(t)$  continui, definitivamente positivi per  $t \rightarrow +\infty$  e tali che esista per ambedue un integrale infinitesimo per  $t \rightarrow +\infty$ . Si abbia poi  $A(t) \geq B(t)$ ; inoltre esistano valori arbitrariamente grandi di  $t$  per cui è  $A(t) > B(t)$ .

Allora, se l'integrale infinitesimo della prima ammette zeri, anche l'integrale infinitesimo della seconda ne ammette e, detto  $\alpha$  l'ultimo zero dell'integrale della prima,  $\beta$  l'ultimo dell'integrale della seconda, si ha  $\beta > \alpha$ .

La dimostrazione si ottiene estendendo in modo ovvio le considerazioni che si fanno di solito per il caso dell'intervallo finito; la riferiamo per comodità del lettore.

Siano  $\bar{u}(t)$  e  $\bar{v}(t)$  gli integrali infinitesimi; supponiamo, per assurdo che, nell'intervallo  $\alpha < t < +\infty$ ,  $\bar{v}(t)$  non si annulli mai. Potremo supporre che in questo intervallo sia  $\bar{u}(t) > 0$ ,  $\bar{v}(t) > 0$ . Integrando membro a membro la nota identità

$$\frac{d}{dt} [\bar{u}\bar{v}' - \bar{u}'\bar{v}] = \bar{u}\bar{v}'' - \bar{u}''\bar{v} = \bar{u}\bar{v}(B(t) - A(t))$$

tra  $\alpha$  ed un certo  $\delta > \alpha$ , avremo (ricordando che è  $u(\alpha) = 0$ )

$$\bar{u}(\delta)\bar{v}'(\delta) - \bar{u}'(\delta)\bar{v}(\delta) + \bar{u}'(\alpha)\bar{v}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\delta} \bar{u}\bar{v}(B(t) - A(t)) dt$$

Se facciamo tendere  $\delta$  a  $+\infty$  il primo membro tende a  $\bar{u}'(\alpha)\bar{v}(\alpha)$ , che è un numero positivo o nullo (infatti anche le derivate prime degli integrali infinitesimi sono infinite-sime) mentre il secondo membro tende ad un limite negativo o a  $-\infty$ . Questo è assurdo: deve dunque esistere uno zero di  $\bar{v}(t)$  nell'intervallo  $\alpha < t < +\infty$ .