Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Salvatore Cherubino

Matrici e sistemi lineari infiniti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 291-315

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_291_0>

MATRICI E SISTEMI LINEARI INFINITI

di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)

In una nostra recente nota (1) abbiamo iniziato la presentazione sistematica delle proprietà delle matrici infinite in forma che consenta di estendere ad esse il simbolismo e gli algoritmi già in uso per le matrici finite (2).

Uno dei primi problemi che si presentano per istituire un calcolo con matrici infinite è quello della risoluzione dei sistemi lineari di infinite equazioni con infinite incognite, la cui trattazione è desiderabile esporre in modo il più possibile formalmente vicino al caso finito. Sorge con ciò la necessità di evitare l'uso di una teoria dei determinanti infiniti da premettere a quella dei sistemi lineari, necessità che non si presenta nel caso dei sistemi finiti (3), perchè le matrici infinite non sempre ammettono un determinante definito in modo analogo al caso finito.

La risoluzione dei sistemi lineari infiniti è l'oggetto della Nota presente. Va da sè che, poichè il problema è già stato risolto (e, sino a un certo punto, esaurito) nella teoria classica, noi qui ci proponiamo soltanto di presentare la soluzione in forma adatta allo scopo che abbiamo di mira. Abbiamo perciò completata o ripresa qualcuna delle osservazioni premesse alla Nota cit. (1). Sono qui state anche riassunte, col nostro simbolismo, le condizioni di esistenza di una soluzione pei sistemi omogenei o non omogenei ottenute nella teoria classica (4), onde istituire un più facile confronto dei risultati e del metodo.

---

(1) *Sulle matrici infinite* [Annali Pisa, s. III, vol. III (1949), pp. 151-166].

(2) Confrontisi, su questo riguardo, anche la Nota di V. CHECCUCCI, dal titolo: *Sui fondamenti del calcolo con matrici infinite* [Annali Pisa, s. III, vol. IV (1950), pp. 205-222].

(3) Per una teoria generale dei sistemi finiti, senza uso di determinanti, vedi la nostra Nota: *Risoluzione senza determinanti dei sistemi lineari di equazioni* [Boll. U. M. I. a. VII (1952) n. I, pp. 54-59].

(4) F. RIESZ: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* [Paris, Gauthier-Villars (1913)].

Abbiamo infine approfittato dell'occasione per ripetere, con minor concisione, la dimostrazione del teorema sul determinante di un prodotto di matrici infinite, di cui al § 5 della Nota più volte citata.

Ci proponiamo di ritornar presto sulla teoria delle matrici infinite per svilupparla nella direzione tracciata dal nuovo punto di vista da cui adesso possiamo guardarla.

§ 1. - **Osservazioni preliminari.**

1. Quando si dice che

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

è una riga infinita non nulla si intende che almeno un elemento che occupa in essa un posto ben determinato, ad es. x_r, è diverso da zero; quindi per un intero n sufficientemente grande almeno uno dei termini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non è zero. Così per la colonna x_{-1}. Perciò, quando per la matrice A ad infinite righe esiste una riga x non nulla per la quale si ha

$$xA = 0, \tag{1.1}$$

accade necessariamente che una certa riga di A, cui corrisponde in x un elemento diverso da zero, è combinazione lineare di tutte le altre: in particolare, tale riga potrebbe esser nulla. Analogamente per le colonne di A, se sono infinite, quando si abbia

$$A x_{-1} = 0, \qquad x \neq 0. \tag{1.2}$$

Ciò porta, nel modo che sarà precisato al § 2, alla possibilità di separare in ogni matrice le righe linearmente indipendenti da quelle dipendenti da esse, quando si sappia che le righe di A non sono tutte linearmente indipendenti. Così per le colonne.

Le proposizioni del § 1 della nota cit. (1) valgono anche senza ricorrere alla separazione effettiva delle linee linearmente indipendenti dalle altre (da esse dipendenti), non essendo questa separazione essenziale per la dimostrazione di esse: tali dimostrazioni resterebbero quasi inalterate anche verbalmente se non si pensa effettuata la separazione (5).

(5) La proposizione I non fa uso di separazione; la II neppure ne ha bisogno e potrebbe sostituirsi col cor. II che è più generale; la dimostrazione della prop. III rimane inalterata se nella (10.1) bv si sostituisce con B'; per la prop. IV la possibilità della separazione è insita nella ipotesi e ne consegue nella tesi.

Per la quarta di dette proposizioni ricordiamo che, come è stato rilevato nella nota [4] a pié di pagina 137, interviene la teoria dei sistemi lineari finiti. Un modo come quest'ultima può stabilirsi senza intervento di determinanti è noto ed è stato ultimamente indicato con l'uso del simbolismo delle matrici [6]. Un altro modo risulterà dal successivo § 2 supponendo finita la matrice A ivi considerata.

§ 2. - Sistemi lineari.

2. Sia A una matrice infinita a righe tutte linearmente indipendenti, e consideriamo l'equazione

$$xA = b \tag{2.1}$$

ove x è una riga infinita incognita, b una riga asssegnata per la quale esiste [7] il prodotto $b\bar{A}_{-1}$. Supporremo anche che A possegga la norma destra $N = A\bar{A}_{-1}$ e che in tutto quel che segue valga sempre la proprietà associativa [8].

Posto, per definizione:

$$x = \lim_{n \to \infty} x^{(n)} \tag{2.2}$$

ove $x^{(n)}$ è l'n-complesso orizzontale dei primi n elementi di x, risolvere l'equazione (2.1) significa trovare una legge che consenta di calcolare i successivi elementi di $x^{(n)}$ per n comunque grande.

Moltiplicando la (2 1) a destra per $\bar{A}_{-1}$ si ha [9]:

$$xN = b\bar{A}_{-1} \tag{2.3}$$

---

(6) v. mia Nota cit. (3).

(7) Per questo basta che siano convergenti la norma di b e quelle delle righe di A: esiste allora anche la norma destra $A A_{-1}$ di A. Ciò segue immediatamente dalla disuguaglianza (di SCHWARZ):

$$(a\bar{b}_{-1})^2 \leqq a\bar{a}_{-1} + b\bar{b}_{-1}.$$

(8) Questa, ad es., vale nello spazio hilbertiano [cfr. R. G. COOKE: *Infinite matrices and sequence Spaces* (London, Mac Millan, 1950), 9. 5 p. 225.

(9) Poichè supponiamo che valga la proprietà associativa, può porsi $xA\bar{A}_{-1} = xN$. La proprietà associativa è soddisfatta se x ed A appartengono allo spazio hilberiano.

relazione soddisfatta da tutte le soluzioni della (2.1). Questa (2 3) è addirittura equivalente alla (2.1) qualora A sia anche a colonne tutte indipendenti, perchè essa può scriversi

$$(x A - b) \bar{A}_{-1} = 0 \tag{2.4}$$

eguaglianza che, per l'indipendenza delle righe di $\bar{A}_{-1}$, cioè delle colonne di A, esige che sia $x A - b = 0$.

Poichè, qualunque sia $x \neq 0$ per cui esiste $x A$, questo prodotto non è mai zero, si ha sempre

$$x A \, . \, \bar{A}_{-1} \bar{x}_{-1} > 0 \, ,$$

cioè che $N = A \bar{A}_{-1}$ è matrice discriminante di una forma hermitiana (infinita) definita positiva, quindi a righe e colonne tutte linearmente indipendenti e che su N può operarsi il procedimento di diagonalizzazione di cui al § 4 della Nota cit. ([1]).

Precisamente, ponendo

$$\begin{cases} N = \left(\begin{array}{c|c} d_1 & a \\ \hline \bar{a}_{-1} & B \end{array}\right) \\[2ex] H_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -\bar{\lambda}_{-1} & I' \end{array}\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

dove $(d_1 \mid a)$ è la prima riga di N, di cui d_1 è il primo elemento, e

$$\lambda_{-1} = d_1^{-1} \, . \, a_{-1} \tag{2.6}$$

posizione possibile perchè gli elementi diagonali di N, come norme delle righe di A, sono numeri tutti > 0, si ha ([10])

$$N_1 = H_1 \, N \, \bar{H}_{1_{-1}} = \left(\begin{array}{c|c} d_1 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right), \qquad d_1 > 0 \, ,$$

dove

$$B_1 = B - \bar{\lambda}_{-1} \, d_1 \, \lambda \, . \tag{2.7}$$

([10]) Poichè $(1 \mid \lambda)(1 \mid \bar{\lambda})_{-1} = d_1^{-2} \, (d_1 \mid a)(d_1 \mid \bar{a})_{-1}$ il prodotto $H_1 \, N \, \bar{H}_{1_{-1}}$ esiste almeno quando A (e perciò N) è hilbertiana, poichè anche H_1 è hilbertiana.

N_1 è anch'essa matrice discriminante di una forma definita positiva, insieme a B_1. Perciò su B_1 può operarsi come su N, cioè esisterà una matrice K analoga alla H_1 la quale ci darà:

$$K B_1 \bar{K}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} d_2 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right), \quad d_2 > 0, \tag{2.8}$$

con B_2 ancora hermitiana definita positiva ([11]).

Posto poi

$$H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right) \tag{2.9}$$

si ha

$$N_2 = H_2 N_1 \bar{H}_{2_{-1}} = \left(\begin{array}{c|c|c} d_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_2 \end{array}\right) \tag{2.10}$$

che sarà ancora hermitiana definita positiva. Così continuando, dopo n operazioni si perverrà ad:

$$N_n = H N \bar{H}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} D_n & 0 \\ \hline 0 & N^* \end{array}\right) \tag{2.11}$$

dove D_n è una matrice diagonale di ordine n i cui elementi diagonali d_1, $d_2, \ldots, d_n$ sono tutti positivi (> 0) ed

$$H = H_n H_{n-1} \ldots, H_2 H_1$$

è prodotto di n matrici a righe e colonne tutte linearmente indipendenti e tutte *triangolari basse,* cioè ad elementi al disopra della diagonale principale tutti zero e quelli diagonali tutti diversi da zero: nel nostro caso questi ultimi sono tutti eguali all'unità positiva. Perciò anche H è diagonale bassa ed ha eguali a $+1$ tutti gli elementi diagonali ([12]). Precisamente si può scrivere

$$H = \left(\begin{array}{c|c} \Delta & 0 \\ \hline \pi & I^* \end{array}\right) \tag{2.12}$$

([11]) Diciamo matrice hermitiana definita positiva ogni matrice che può prendersi come matrice discriminante di una forma hermitiana (finita o infinita) definita positiva.

([12]) Poichè (se lo è Δ) gli n fattori sono tutti hilbertiani, anche H è hilbertiana.

dove Δ è una matrice triangolare bassa di ordine n ad elementi diagonali tutti eguali a $+1$, I^* è una matrice identica infinita, π una matrice ad infinite righe ed n colonne.

La (2.11) ci dice che:

$$D_n = (\Delta \mid 0)\, A\, \overline{A}_{-1}\, (\overline{\Delta} \mid 0)_{-1} \tag{2.13}$$

quindi che

$$D_n = \Delta\, \mathfrak{N}_n\, \overline{\Delta}_{-1} \tag{2.14}$$

dove

$$\mathfrak{N}_n = {}_nA \,.\, {}_n\overline{A}_{-1} \tag{2.15}$$

è prodotto della matrice ${}_nA$ costituita dalle prime n righe di A per la trasposta coniugata.

3. Ponendo

$$\begin{cases} b' = b\, \overline{A}_{-1}\, \overline{H}_{-1} = (b^{*(n)} \mid b^*) \\ x = y\, H \\ y = (y^{(n)} \mid y^*) \end{cases} \tag{2.16}$$

dove $b^{*(n)}$, $y^{(n)}$ indicano gli n-complessi dei primi n elementi delle righe infinite b' ed y, le (2.1)-(2-11) ci danno:

$$y\, N_n = b\, \overline{A}_{-1}\, \overline{H}_{-1} = b' \tag{2.17}$$

e poi:

$$y^{(n)} \,.\, D_n = b^{*(n)} \,. \tag{2.18}$$

Poichè:

$$H^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-1} & 0 \\ \hline -\pi^* & I^* \end{array}\right), \qquad \pi^* = \pi\, \Delta^{-1},$$

ponendo

$$x = (x^{(n)} \mid x^*) \tag{2.19}$$

dalla seconda e terza delle (2.16) si ha che:

$$\begin{cases} y^{(n)} = x^{(n)}\, \Delta^{-1} - x^*\, \pi \\ y^* = x^* \,. \end{cases} \tag{2.20}$$

Dalla (2.18), per la prima delle (2.16), purchè in questa valga la proprietà associativa ([13]), si ottiene:

$$y^{(n)} = b^{*(n)} \,.\, D_n^{-1} = b \,.\, {}_n\overline{A}_{-1}\, \overline{\Delta}_{-1} \,.\, D_n^{-1} \tag{2.21}$$

mentre la (2.17) ci dà, per la (2 11)

$$y^* N^* = b \,.\, {}_n\overline{A}_{-1}\, \overline{\pi}_{-1} + b\, \overline{A}'_{-1} \tag{2.22}$$

A'_{-1} essendo la matrice delle righe che seguono alle prime n in A_{-1}.

Sostituendo la (2.21) nella prima delle (2.20) risulta, per la (2.14):

$$x^{(n)} = b \,.\, {}_n\overline{A}_{-1} \,.\, \mathfrak{N}_n^{-1} + \xi \tag{I}$$

dove si è posto:

$$\xi = y^* \pi \Delta \,. \tag{2.23}$$

Poichè dalla (2.15) risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{N}_n = N = A\, \overline{A}_{-1} \,, \tag{2.24}$$

segue che, se N è invertibile a destra, dalla (I) si ha:

$$x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = b\, \overline{A}_{-1}\, {}^D N^{-1} \tag{II}$$

dove ${}^D N^{-1}$ indica l'inversa a destra di N.

L'esistenza di $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{N}_n^{-1}$ è ovviamente necessaria e sufficiente perchè esista il limite del secondo membro della (I). Che questo sia poi il secondo membro della (II) è evidente perchè ξ svanisce col tendere di $n \to \infty$. Che basti l'invertibilità a destra di N ce la assicura la (2.3), purchè valga la proprietà associativa. Occorre inoltre l'esistenza del secondo membro della (II) ([14]).

4. Da quel che precede raccogliamo che:

a) *se A ammette la norma destra $N = A\,\overline{A}_{-1}$ e se esiste il prodotto $b\,\overline{A}_{-1}$, affinchè la* (2.1) *sia risolubile, occorre che N sia invertibile (almeno)*

([13]) La quale è soddisfatta se b appartiene allo spazio hilbertiano, insieme ad Δ.

([14]) Che è assicurata se Δ è hilbertiana ed il limite inferiore di N è > 0 poichè allora, oltre N, è hilbertiana anche ${}^D N^{-1}$ [Cfr. R. G. COOKE, cit. 8) 6 V p. 265. Anzi, essendo N hermitiana, è addirittura invertibile, cioè ha un'inversa unica per ambo le parti.

a destra, quindi che A sia a righe tutte linearmente indipendenti e che esista il prodotto $b \bar{A}_{-1} {}^{D}N^{-1}$ (k valga la proprietà associativa).

Se A è (non solo a righe ma anche) a colonne tutte linearmente indipendenti, la condizione predetta è pure sufficiente; in caso contrario la soluzione (II) della (2.3) *occorre verificarla sostituendo nella* (2.1).

Un analogo enunciato si ha, com'è ovvio, per la risolubilità dell'equazione:

$$A\, x_{-1} = b_{-1}\,. \tag{2.1$'$}$$

Per la prima parte dell'enunciato si osservi che se potesse aversi $z\,A = 0$ con z riga non nulla, sarebbe anche $z\,N = 0$ da cui, se esiste ${}^{D}N^{-1}$, seguirebbe necessariamente, *per la supposta validità della proprietà associativa,* $z = 0$.

b) *sempre sotto l'ipotesi che esista $A\,\bar{A}_{-1}$ e che sussista la proprietà associativa, affinchè la* (2.1) *sia risolubile per $b = 0$, ed $x \neq 0$ è necessario che $N = A\,\bar{A}_{-1}$, non possegga inversa a destra.*

Infatti, se N ammettesse l'inversa a destra ${}^{D}N^{-1}$, per la supposta validità della proprietà associativa, da $x\,A = 0$ seguirebbe $x\,N = 0$ quindi $x\,N\,.\,{}^{D}N^{-1} = x = 0$. Inoltre:

c) *sempre sotto la condizione della validità della proprietà associativa, la esistenza ed invertibilità a destra della norma destra di A assicura la risolubilità, con soluzione unica, della* (2.3) *per ogni riga b moltiplicabile a destra per $\bar{A}_{-1}$. Se la* (2.1)$'$ *è pur essa risolubile per ogni tal riga segue anche l'invertibilità di A e di entrambe le sue norme.*

Infatti, in quest'ultimo caso, l'equazione

$$X\,A = I\,, \tag{2.25}$$

ove I è la matrice identica ed X è una matrice incognita, sarebbe risolubile. Cioè A ammetterebbe l'inversa a sinistra e poichè è a righe tutte indipendenti linearmente, A sarebbe addirittura invertibile ([15]) insieme alla sua coniugata e rispettive trasposte. Perciò si ha:

$$\bar{A}_{-1}^{-1}\,.\,A^{-1} = (A\,\bar{A}_{-1})^{-1}$$

$$A^{-1}\,.\,\bar{A}_{-1}^{-1} = (\bar{A}_{-1}\,A)^{-1},$$

purchè questi prodotti esistano e valga la proprietà associativa, che ci consentirà di scrivere

$$\bar{A}_{-1}^{-1}\,.\,A^{-1}\,.\,(A\,\bar{A}_{-1}) = \bar{A}_{-1}^{-1}\,\bar{A}_{-1} = I = (A\,\bar{A}_{-1})\,.\,\bar{A}_{-1}^{-1}\,A^{-1}\,.$$

([15]) Cfr. il t. II, § 2 della Nota cit. 1).

Il primo di questi tre prodotti esiste, perchè il secondo membro delle (2.25) è moltiplicabile a sinistra per $\bar{A}_{-1}^{-1}$, quindi, per la proprietà associativa, esiste $\bar{A}_{-1}^{-1} X = \bar{A}_{-1}^{-1} . A^{-1}$. Il secondo si deduce analogamente da $A X = I$, che si può scrivere $\bar{A}_{-1}^{-1} \bar{X}_{-1}^{-1} = I$ e quindi può moltiplicarsi a sinistra per A^{-1}. .

Si ha infine che:

d) *nelle ipotesi di cui in c), la soluzione (II) della* (2.1) *diventa*

$$x = b\, A^{-1} \tag{2.26}$$

ed è risolubile anche l'equazione

$$A\, x_{-1} = b_{-1} \tag{2 1)'}$$

purchè esista $\bar{A}_{-1}\, b_{-1}$.

La prima parte è ovvia. Per la seconda si osservi che dalla (2.1)′ segue che

$$(\bar{A}_{-1}\, A)\, x_{-1} = \bar{A}_{-1}\, b_{-1} \tag{2.27}$$

e che può scriversi

$$N'^{-1} = (\bar{A}_{-1}\, A)^{-1} = A^{-1}\, \bar{A}_{-1}^{-1}$$

quindi che meltiplicando la (2.27) a sinistra per N'^{-1}, e se vale la proprietà associativa, si ha

$$x_{-1} = A^{-1}\, b_{-1} .$$

5. La esistenza dell'inversa a destra di A è necessaria e sufficiente quando il sistema (2.1) si vuol risolvere con b riga arbitraria: purchè esista $b . {}^{D}A^{-1}$, il che implica una condizione per l'inversa di A, quindi per A.

Se questa matrice è *hilbertiana* (o *limitata* che dir si voglia) cioè se per ogni coppia di righe infinite y, z per le quali si abbia

$$y\, \bar{y}_{-1} \leqq 1\,, \qquad z\, \bar{z}_{-1} \leqq 1$$

risulta

$$y\, A\, \bar{z}_{-1} \leqq M_A$$

ove M_A è il limite (o estremo) inferiore di A ed è un numero positivo diverso da zero determinato da A, indipendente dalla coppia y, z, e se b è un punto dello spazio hilbertiano, sicchè $b\, \bar{b}_{-1}$ converge ma può essere qualunque, si può richiedere che anche la soluzione x della (2.1) rappresenti un punto dello spazio hilbertiano.

Allora ${}^{D}A^{-1}$ deve essere anch'essa hilbertiana, senza di che non potrebbe ogni punto b dello spazio hilbertiano esser da essa cambiato in un altro $x = b^{D} A^{-1}$ dello stesso spazio. Perchè ciò accada occorre e basta ([16]) che il limite inferiore della norma destra di A sia un numero positivo, il che è anche condizione sufficiente (ma non necessaria) perchè la norma stessa sia invertibile ([17]).

Che l'esistenza della inversa a destra di $N = A\,\bar{A}_{-1}$ dia luogo all'esistenza di ${}^{D}A^{-1}$ è poi immediata conseguenza del fatto che nel campo delle matrici hilbertiane vale la proprietà associativa ([18]), sicchè può scriversi:

$$I = (A\,\bar{A}_{-1})\,{}^{D}N^{-1} = A\,(\bar{A}_{-1}\,{}^{D}N^{-1}).$$

E poichè A è a righe tutte linearmente indipendenti, $N = A\,\bar{A}_{-1}$ risulta a righe e colonne tutte linearmente indipendenti ([19]) e la esistenza della inversa a destra assicura addirittura la invertibilità di N, cioè si ha anche

$${}^{D}N^{-1}\,(A\,\bar{A}_{-1}) = I$$

e può porsi ${}^{D}N^{-1} = N^{-1}$ e per la proprietà associativa $N^{-1}A$ è l'inversa a sinistra di $\bar{A}_{-1}$. Ne segue che N^{-1} è hermitiana, come N. Quanto all'invertibilità di questa con inversa hilbertiana, per la prima delle proprietà ricordate ([20]), occorre e basta che il limite inferiore di $N\,\bar{N}_{-1} = N^2$ sia positivo, mentre la positività del limite inferiore di $N = A\,\bar{A}_{-1}$ è solo sufficiente. Analogamente per la norma sinistra di A.

6. Le teoria classica ([21]), in condizioni alquanto più generali di quelle ora considerate, dà la soluzione di (2.1) quando esiste, come limite forte per $n \to \infty$, della riga infinita ([22])

$$\xi^{(n)} = b^{(n)}\,N'^{-1}_{n}\,\bar{A}^{(n)}_{-1} \tag{2.28}$$

([16]) Cfr. R. G. COOKE, loc. cit. 8) (9. 6, VI) pag. 267.

([17]) Ibidem, (9. 6, V) pag. 265.

([18]) Ibidem, (9. 6, III) pp. 264-265.

([19]) Come si è visto in principio di questo §.

([20]) Cioè per quella di cui in 16).

([21]) SCHMIDT E. *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* [Rend. Pal. t. XXV (1° sem, 1908) pp. 53-77].

([22]) Cfr. F. RIESZ: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* [Paris, Gauthier-Villars (1913)] n. 47, p. 55.

dove $N'_n = \bar{A}_{-1}^{(n)} A^{(n)}$ è il quadrante superiore sinistro, di ordine n, della norma sinistra $N' = \bar{A}_{-1} A$ di A ed $A^{(n)}$ indica la matrice delle prime n colonne di A. Precisamente, la (2.28) tende fortemente alla soluzione estremale di (2.1). La condizione perchè questa esista ed abbia norma finita, è che (23) la successione numerica crescente

$$M_n = b^{(n)} N'^{-1}_n \bar{b}_{-1}^{(n)} = \xi^{(n)} \bar{\xi}_{-1}^{(n)}, \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

sia limitata, quindi che esistano $\lim\limits_{n \to \infty} N'^{-1}_n$ e $\lim\limits_{n \to \infty} M_n$. Volendo che la norma della soluzione estremale, che nel nostro caso è l'unica di (2.1), non superi M^2, occorrerà avere

$$M_n \leqq M^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

e, in primo luogo, che la norma sinistra N' di A sia invertibile, quindi che A sia a colonne tutte linearmente indipendenti. Dopo di che, la soluzione di (2.1) può scriversi

$$x = \dot{b} A^{-1}$$

perchè A riesce invertibile a sinistra, ed essendo; per ipotesi, a righe tutte linearmente indipendenti, è addirittura invertibile.

7. Si osservi ora che nelle matrici della successione

$$(2.29) \qquad N_0 = N, \quad N_1, \quad N_2, \ldots, N_r, \ldots$$

non vi sono elementi diagonali eguali a zero finchè, come si è supposto, A è a righe tutte linearmente indipendenti, nel qual caso anche le matrici della successione

$$(2.30) \qquad A_0 = A, \quad A_1 = H_1 A, \quad A_2 = H_2 A_1, \ldots, A_r = H_r A_{r-1}, \ldots$$

hanno le righe tutte linearmente indipendenti, con gli elementi principali norme delle corrispondenti righe della successione (2.29).

Se A non è a righe tutte linearmente indipendenti, altrettanto accade per tutte le matrici delle successioni (2.29) e (2.30), perchè le matrici H_r sono invertibili. Allora si avrà una riga $x \neq 0$ in cui, ad es., l'elemento x_s, di posto s^{mo}, è diverso da zero, per la quale si ha $x N_t = 0$ onde, se $t \geqq s$,

---

(23) Ibidem, pp. 66-67.

sarà necessariamente $d_s = 0$. Viceversa, se in N_t, $t \geqq s$, è $d_s = 0$, una riga x in cui sia $x_s \neq 0$ e tutti gli altri elementi zero darà $x N_t = 0$ e corrispondentemente $A_s = H_s A_{s-1}$ avrà nulla la riga s^{ma}.

A questo proposito si osservi che se $d_s = 0$, mentre d_r con $r < s$ è diverso da zero, si ha che in

$$N_{s-1} = \left(\begin{array}{c|c} D_{s-1} & 0 \\ \hline 0 & B_{s-1} \end{array}\right)$$

D_{s-1} è non degenere, mentre il primo elemento principale di B_{s-1} è zero. Orbene, N_{s-1} è la norma destra di A_{s-1}, perciò l'elemento principale d_s ora detto è la norma della s^{ma} riga di A_{s-1} la qual riga è dunque zero. Perciò in N_{s-1} la s^{ma} riga e la s^{ma} colonna sono zero, cioè in B_{s-1} sono nulle la prima riga e la prima colonna. Ne segue che può prendersi $H_s = I$, matrice identica, e che risulta

$$N_s = N_{s-1}; \quad A_s = H_s A_{s-1} = A_{s-1},$$

ed inoltre:

$$H_s H_{s-1} \ldots H_1 = H_{s-1} \ldots H_1 = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_s & 0 \\ \hline \pi & I \end{array}\right)$$

ove Δ_s è una matrice triangolare bassa i cui elementi principali sono tutti eguali all'unità.

Se nelle (2.29) si avesse $d_1 = d_2 = \ldots = d_r = 0$, in A_r saranno nulle le prime r righe, cioè potrà scriversi:

$$H_r A_{r-1} \doteq H_r H_{r-1} \ldots H_1 A = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline A' \end{array}\right)$$

dove 0 indica una matrice ad r righe tutte nulle.

Poichè:

$$H_r H_{r-1} \ldots H_1 = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_r & 0 \\ \hline \pi & I \end{array}\right), \tag{2.31}$$

con Δ_r matrice triangolare bassa di ordine r, ad elementi principali tutti eguali a $+1$, I è una matrice identica infinita, e π una ad infinite righe ed r colonne, segue che anche A ha nulle le prime r righe.

Orbene, è ovvio che potrà sempre supporsi che A non abbia alcuna riga e alcuna colonna zero, quindi, oltre ad essere $d_1 \neq 0$, *gli elementi d_r eguali a zero non verranno mai consecutivi in principio.*

Invece di avere le prime r righe nulle, la matrice A potrebbe avere le prime r righe ciascuna linearmente dipendente dalle rimanenti, cioè potrebbe scriversi:

$$A = \left(\frac{\mu A''}{A''} \right)$$

con μ matrice ad r righe. In tal caso, considerando la matrice infinita invertibile:

$$K = \left(\begin{array}{c|c} I_r & -\mu \\ \hline 0 & I^* \end{array} \right)$$

ove I_r, I^* sono matrici identiche, la prima di ordine r, la seconda infinita, si avrebbe:

$$K A \bar{A}_{-1} \bar{K}_{-1} = K \left(\begin{array}{c|c} \mu N'' \bar{\mu}_{-1} & \mu N'' \\ \hline N'' \bar{\mu}_{-1} & N'' \end{array} \right) \bar{K}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & N'' \end{array} \right) \tag{2.32}$$

dove N'' è la norma destra di A''. Basterebbe dunque sostituire A con $K A$ perchè i primi $r + 1$ termini della successione (2.29) vengano a coincidere con l'ultimo membro della (2.32).

Osservando che se A'' è a righe tutte linearmente indipendenti, altrettanto accade per le righe e le colonne di N'' e che gli elementi principali di N'' rimarranno diversi da zero anche nelle successive operazioni come quelle precedenti, si conclude che la matrice A avrà tante righe linearmente dipendenti dalle rimanenti quant'è il massimo numero di zeri che compaiono nella diagonale principale dei termini della successione (2.29) e che dette righe dipendenti occupano gli stessi posti occupati dagli elementi principali eguali a zero nella successione (2.29).

Quanto si è detto in questo n. 7 è d'accordo, in tutte le sue parti, con la prop. III del § 1 della solita Nota cit. [1]) ed è, in sostanza, conseguenza di essa.

§ 3. - **Sistemi omogenei.**

8. La risolubilità di

$$x A = 0 \tag{3.1}$$

con $x \neq 0$ esige ovviamente la non invertibilità a destra di A, ed anche la non esistenza dell'inversa a destra della norma destra di A (se questa norma esiste), perchè le soluzioni di (3.1) son certo soluzioni di

$$x\, N = 0\, \bar{A}_{-1} = 0$$

e non avendo questa, se N è invertibile a destra (e vale la proprietà associativa), altra soluzione che $x = 0$, lo stesso accadrebbe di (3.1).

Si osservi pure che la (3.1) equivale ad $x\, N = 0$ perchè, se questa si verifica, è pure $x\, N\, \bar{x}_{-1} = 0$ cioè è zero la norma di $x\, A$. Inoltre, per definizione, si esige che A non sia a righe tutte indipendenti, anzi l'essere le righe di A non tutte indipendenti equivale appunto alla risolubilità della (3.1) con $x \neq 0$.

Immaginiamo di aver trovato il massimo numero di soluzioni linearmente indipendenti della (3.1), cioè di aver trovata una matrice X, a righe tutte indipendenti, per la quale si abbia

$$X A = 0 \tag{3.2}$$

e tale che ogni soluzione di (3.1) è necessariamente combinazione lineare delle righe di X. Allora le soluzioni di (3.1) sono tutte e sole quelle del tipo

$$x = \lambda\, X \tag{3.3}$$

con λ riga arbitraria, moltiplicabile a destra per X.

Se le righe di X sono in numero finito, diciamo n, in X vi sono non più di n colonne linearmente indipendenti, altrimenti si avrebbe una matrice finita non quadrata con più colonne che righe linearmente indipendenti. Siano dunque $m < n$ le colonne di X linearmente indipendenti ed a sia una matrice di m colonne di X linearmente indipendenti sicchè ogni altra colonna di X è combinazione lineare di quelle di a. Cioè *salvo l'ordine delle colonne* si potrà scrivere:

$$X = (a \mid a\, \nu) \tag{3.4}$$

dove a è una matrice ad $m < n$ colonne ed n righe quindi avente non più di m righe linearmente indipendenti. Perciò può porsi, a meno dell'ordine delle righe:

$$a = \left(\frac{b}{\mu\, b}\right)$$

con b matrice ad $m < n$ righe e μ matrice opportuna. Ne se segue che

$$X = \left(\frac{b}{\mu\, b}\middle|\frac{b\, \nu}{\mu\, b\, \nu}\right) = \left(\frac{B}{\mu\, B}\right), \qquad B = (b \mid b\, \nu),$$

onde le righe di X non sarebbero tutte linearmente indipendenti. Nella (3.4) si potrà dunque supporre che a sia una matrice di ordine n non degenere ed X potrà sostituirsi, a tutti gli effetti, con la matrice

$$a^{-1}(a \mid a\,\nu) = (I_n \mid \nu)$$

ove I_n è la matrice identica di ordine n. Allora si ha

$$A = \left(\frac{-\,\nu\,A'}{A'}\right) \tag{3,5}$$

dove A' è una matrice opportuna contenuta in A, i cui posti in A restano fissati quando l'ordine delle colonne di X è fissato in modo da poter scrivere la (3.4).

Le righe di A' sono tutte linearmente indipendenti, perchè se così non fosse esisterebbe una riga infinita $y \neq 0$ tale che:

$$y\,A' = 0$$

e posto

$$H = \left(\begin{array}{c|c} 0 & y \\ \hline I_n & \nu \end{array}\right) \tag{3.6}$$

con I_n matrice identica di ordine n, si avrebbe

$$H\,A = 0\,. \tag{3.7}$$

Orbene, H è a righe tutte indipendenti linearmente poichè se si avesse

$$(x_0\,, x_1\,, \ldots, x_n)\,H = 0$$

sarebbe

$$(x_1\,, \ldots, x_n) = 0\,, \quad x_0\,y + (x_1 \ldots x_n)\,\nu = x_0\,y = 0\,, \quad x_0 = 0$$

e quindi $(x_0\,, x_1\,, \ldots, x_n) = 0$. Ne segue che (3.1) ammetterebbe $n+1$ soluzioni linearmente indipendenti, anzichè n, come supposto.

Osserviamo che questo ragionamento assicura l'esistenza in X di una matrice di ordine n non degenere, ma non ci dice come essa si trovi, data che sia X, se esiste.

9. Supponiamo ora che le soluzioni linearmente indipendenti di (3.1) siano infinite, cioè che X abbia infinite righe tutte linearmente indipendenti ([24]). Perciò, salvo il modo come ciò può ottenersi, che si vedrà di qui

([24]) Cfr. la Nota cit. 1) n. 5, cor. IV, pag. 139.

a poco, la X potrà scriversi nella forma (3.4) ove a è però una matrice ad infinite colonne tutte linearmente indipendenti. Ragionando come poco fa, si trova che a è anche a righe tutte indipendenti. Potremo perciò scrivere

$$X = a\,(I \mid \nu)$$

con I matrice identica infinita e ne segue che, ancora come prima, la matrice $(I \mid \nu)$ potrà sostituirsi ad X a tutti gli effetti, perchè dalla (3.2), essendo a a colonne tutte indipendenti, segue necessariamente che:

$$(I \mid \nu)\,A = 0\,,$$

quindi che A può scriversi come la (3.5). Si sarà così riusciti a separare in A una matrice A' delle cui righe tutte le rimanenti sono combinazioni lineari.

Anche qui A' risulta a righe tutte linearmente indipendenti, altrimenti si avrebbe una matrice come la (3.6), soddisfacente sempre alla (3.7), in cui I_n è sostituita da una matrice identica infinita, la quale sarebbe ancora a righe tutte indipendenti linearmente, sicchè le soluzioni di (3.1) non sarebbero necessariamente combinazioni lineari delle righe di X, ossia di $(I \mid \nu)$.

10. Andiamo ora a esporre come può ottenersi la matrice X. Poichè le righe di A non sono tutte linearmente indipendenti, la (3.1) è risolubile con una certa riga $x \neq 0$.

Per trovare la riga x basta riferirsi a quanto si è detto al n. 7 del § 2.

Poichè, se A è a righe non tutte linearmente indipendenti altrettanto accadrà di N; percorrendo la successione (2.29) ci fermeremo al primo elemento, sia N_r, in cui l'ultimo elemento diagonale d_r di D_r è zero. Si avrà così $y\,N_r = 0$ con una riga y che ha eguali a zero tutti gli elementi, meno quello di posto r^{mo} che è invece arbitrario. Risulterà corrispondentemente $x\,A = 0$ per

$$x = y\,(H_r\,H_{r-1}\ldots H_1) \neq 0\,.$$

Poichè:

$$(H_r\,H_{r-1}\ldots H_1) = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_r & 0 \\ \hline \pi & I' \end{array}\right)$$

ove Δ_r è la solita matrice triagolare bassa invertibile di ordine r, I' una matrice identica infinita, posto, al solito modo:

$$x = (x^{(r)} \mid x')\,,$$

si ha

$$(3.8) \qquad \begin{cases} x^{(r)} = (0, \dots, 0, y_r)\Delta_r \\ x' = 0 \end{cases}$$

e la riga x è perfettamente determinata, a meno del fattore scalare y_r, che resta arbitrario.

In $x^{(r)}$ sarà diverso da zero *almeno* l'ultimo elemento, cioè, in x, quello di posto r^{mo}: precisamente si ha $x_r = y_r =$ arbitrario.

Il modo di risoluzione qui indicato può servire anche nel caso del sistema non omogeneo. Basta scrivere la (2.1) sotto la forma

$$(1 \mid x)\left(\frac{-b}{A}\right) = 0,$$

riducendosi così a risolvere un sistema omogeneo di matrice dei coefficienti $\left(\frac{-b}{A}\right)$, sotto la condizione che il primo elemento della soluzione sia eguale ad 1. Perchè questo avvenga è sufficiente, come mostra la prima delle (3.8), che l'ultimo elemento della prima colonna di Δ_r, cioè l'r^{mo} elemento della prima colonna del prodotto $H_r H_{r-1} \dots H_1$ sia diverso da zero. È da rilevare che basta che r sia il posto occupato da qualche elemento, anche non il primo, della successione (2.29) nel quale si ha $d_r = 0$.

Tornando al sistema omogeneo e ad una sua soluzione $x \neq 0$, percorriamo gli elementi di x nell'ordine in cui sono scritti, fermandoci al primo di essi che non è zero: questo corrisponderà ad una riga di A che risulta quindi combinazione lineare di tutte le altre e che porteremo al primo posto in A. Se le rimanenti righe di A sono ancora linearmente dipendenti si potrà, allo stesso modo, separare una di esse come combinazione lineare delle altre e portarla al secondo posto in A; così continueremo sino a che ciò sia possibile. Scritta la A nel nuovo ordine, quel che si è detto ci assicura che la (3.1) è risoluta da un certo numero di righe di cui la prima ha il primo elemento diverso da zero, la seconda ha zero il primo elemento ma non il secondo, la terza ha zero i primi due elementi ma non il terzo; e così via. In tal modo si ha una matrice X di cui un certo numero di colonne consecutive in principio danno una matrice *triangolare alta* i cui elementi diagonali sono tutti diversi da zero:

$$(3.9) \qquad X = (V \mid X').$$

Se il numero delle righe di X è finito la matrice triangolare alta V è non degenere e può porsi $X' = V\nu$, $V = a$ ottenendo così la (3.4). Se il numero delle righe di X è infinito alla (3.4) non si è senz'altro arrivati. In ogni caso, però, le righe di A che corrispondono alle successive colonne di V sono, per il procedimento sopra descritto, combinazioni lineari delle rimanenti [25].

Si potrà dunque scrivere la (3.5), nella quale le righe di A' sono quelle che corrispondono alle colonne di V in X. Le righe di A', eventualmente in numero finito, sono tutte linearmente indipendenti perchè, se non lo fossero, esisterebbe una soluzione linearmente indipendente dalle righe di X, contro l'ipotesi. Non può accadere che X sia esaurita da V, cioè che $X = V$. Se ciò si verificasse, ciascuna riga di A dipenderebbe, nel nuovo ordinamento, dalle successive e la separazione delle righe linearmente indipendenti di A da cui dipenderebbero linearmente tutte le altre sarebbe impossibile. Ma poichè le matrici triangolori alte aventi tutti gli elementi diagonali diversi da zero sono invertibili (univocamente) a sinistra [26], e *purchè valga la proprietà associativa,* moltiplicando a sinistra la (3.2) per quest'inversa, si avrebbe $A = 0$. Perciò il caso ora supposto non può verificarsi.

Concludiamo che, dopo conveniente ordinamento delle righe, A può scriversi nella forma (3.5) e che può prendersi $X = (I \mid \nu)$.

Non occorre, perchè ovvio, osservare che A si può sempre supporre priva di righe o di colonne nulle.

---

(25) Scriviamo, col nuovo ordinamento delle righe :

$$A = \begin{pmatrix} a' \\ \hline a'' \\ \hline B \end{pmatrix}$$

dove a', a'' indicano le prime due righe di A. Sarà, per l'ipotesi :

$$a' = (x_1 \mid x') \begin{pmatrix} a'' \\ \hline B \end{pmatrix}, \qquad a'' = x'' B$$

con $(x_1 \mid x')$ ed x'' entrambe righe non nulle. Quindi

$$a' = (x_1 x'' + x') B$$

e perciò

$$\begin{pmatrix} a' \\ \hline a'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x'' + x' \\ \hline x'' \end{pmatrix} B.$$

Così se si considerano tutte le righe di A corrispondenti alle colonne di V in X.

(26) Cfr. G. COOKE, loc. cit. 8) (2. 1. I) pag. 19. L'inversa a sinistra (a destra) di una matrice triangolare alta (bassa) se esiste è ancora triangolare alta (bassa).

11. Abbiamo visto che se A non è a righe tutte linearmente indipendenti, può scriversi (scambiando $-\nu$ con $+\nu$):

$$A = \left(\frac{\nu A'}{A'}\right).$$

Allora la risoluzione del sistema (2.1) si riduce ad

$$y A' = b \,. \tag{3.10}$$

Infatti, scrivendo

$$x = (x' \mid x'')$$

dove x'' allinea gli elementi di x corrispondenti alle righe di A' in A, la (2.1) diventa:

$$(x' \nu A' + x'' A') = (x' \nu + x'') A' = b$$

quindi, risoluta la (3.10), si porrà

$$x'' = y - x' \nu \tag{3.11}$$

lasciando x' arbitrario. Si potrà anche porre

$$x' \nu = y - x'' \tag{3.12}$$

lasciando arbitrario x'' purchè questa equazione sia risolubile rispetto ad x'.

Ad x poi può aggiungersi ogni soluzione dell'equazione omogenea (3.1), cioè ogni riga della matrice X od ogni combinazione lineare delle righe di X.

12. Non ci soffermiamo sull'equazione

$$A x_{-1} = 0 \tag{2.1$'$}$$

che ovviamente dà luogo a considerazioni del tutto analoghe a quelle cui ha dato luogo la (3.1).

Chiudiamo invece con qualche osservazione sulla equazione (2.1) ([27]), pel caso in cui le colonne di A non siano tutte linearmente indipendenti.

([27]) Estensibili all'equazione trasposta $A x_{-1} = b_{-1}$.

In tal caso si potrà porre, salvo l'ordine delle colonne:

$$A = (A' \nu \mid A') = A' (\nu \mid I) \tag{3.13}$$

con A' a colonne tutte linearmente indipendenti, e la proposta equazione (2.1) si scrive

$$x A' (\nu \mid I) = (x A' \nu \mid x A') = (b' \mid b'')$$

dove gli elementi della riga b'' corrispondono alle colonne della parte A' di A. Se ne deduce che deve necessariamente aversi

$$b' = b'' \nu \tag{3.14}$$

e che se questa è verificata, basta risolvere:

$$x A' = b'' \tag{3.15}$$

in cui A' è a colonne tutte linearmente indipendenti.

Come poco fa, si vede che non è possibile che ogni colonna di A sia combinazione lineare di tutte le rimanenti. Anzi, se A è a righe tutte linearmente indipendenti, A' risulta anch'essa tale, altrimenti ciò non accadrebbe per A, come subito si vedrebbe ponendo nella (3.13): $A' = \left(\dfrac{A''}{\mu A''}\right)$.

Se ne deduce che la risoluzione di un sistema lineare infinito si riconduce sempre a quella di un sistema in cui la matrice dei coefficienti sia a righe e colonne tutte linearmente indipendenti.

Il che è d'accordo con la conclusione del n. 6.

13. I risultati conseguiti sinora in questo § non ci dicono ancora sotto quali condizioni qualche riga (o qualche colonna) di A risulta combinazione lineare delle rimanenti o di una parte di esse in modo che i coefficienti che esprimono detta combinazione diano una riga (o colonna) di norma finita. Queste condizioni, già note dalla teoria classica, si riconducono a quelle qui ricordate per la risoluzione dei sistemi non omogenei, osservando che al sistema omogeneo (3.1) può sempre sostituirsi l'altro [28]

$$y' A = a_j \tag{3.16}$$

---

[28] RIESZ F., loco cit. 4), cap. III, n. 48, pp. 67-69.

ove $y = (y_1, y_2, \ldots)$ è una riga infinita di indeterminate ed a_j è la j^{ma} riga di A. Ogni soluzione del sistema (3.16) dà luogo ad una del sistema (3.1) togliendo l'unità dall'elemento di posto j^{mo} della riga che risolve (3.16). In questa, ovviamente, j può assumere tutti i valori intieri $1, 2, \ldots, \infty$.

La soluzione estremale di (3.16) è quindi il limite forte, per $n \to \infty$, di

$$\eta^{(n)(j)} = a_j^{(n)} N_n'^{-1} \bar{A}_{-1}^{(n)} \tag{3.17}$$

ed affinchè questa soluzione esista e sia di norma finita occorre e basta che la successione delle norme di (3.17), cioè

$$M_n' = a_j^{(n)} N_n'^{-1} (\bar{a}_j^{(n)})_{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{3.18}$$

sia limitata. L'esistenza dell'inversa a sinistra di N', richiesta da questa condizione, dà luogo alla invertibilità a sinistra di A ed alla indipendenza lineare di tutte le colonne di A, ma non necessariamente all'invertibilità di A, nè a quella a destra della norma destra di A, le quali ci darebbero $x = 0$ come unica soluzione di (3.1).

E poichè (3.16) ammette per soluzione la riga che ha gli elementi tutti zero meno quello di posto j, che sarà eguale ad 1, si ha necessariamente che:

$$a_j^{(n)} N_n'^{-1} (\bar{a}_j^{(n)})_{-1} \leqq 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{3.19}$$

Indicando con $\eta^{(j)}$ la soluzione ottenuta da (3.17) per $n \to \infty$, cioè la soluzione estremale del sistema (3.16), si ottengono, per $j = 1, 2, \ldots, \infty$ infinite soluzioni del sistema omogeneo (3.1).

§ 4. - **Determinante di un prodotto.**

14. Siano A, B due matrici, la prima a p righe ed infinite colonne, la seconda ad infinite righe e p colonne ed esista la matrice C di ordine p, prodotto di A per B:

$$A\,B = C = \| c_{rs} \| \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, p). \tag{4.1}$$

Se:

$$A = \| a_{rt} \|, \qquad B = \| b_{ts} \|$$

si ha

$$c_{rs} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{rt}\, b_{ts} \qquad r, s = 1, 2, \ldots, p$$

i cui secondi membri, per ipotesi, sono serie convergenti.

Applicando ad $A\,B$ il solito procedimento della scomposizione di un determinante avente una linea ad elementi polinomi (che nel nostro caso sono invece serie convergenti) in determinanti in cui quella linea è ad elementi monomi, si trova subito che

$$\det C = \det(A\,B) = \sum_{t_1 \ldots t_p}^{1 \ldots \infty} \varphi_{t_1 t_2 \ldots t_p} B_{t_1 t_2 \ldots t_p} \qquad t_1 < t_2 < \ldots < t_p \tag{4.2}$$

ove $B_{t_1 t_2 \ldots t_p}$ indica il determinante del minore di ordine p estratto da B che ha per righe quelle di posto $t_1, t_2, \ldots t_p$ di B, mentre $\varphi_{t_1 t_2 \ldots t_p}$ è una funzione razionale intera negli elementi a_{rs} di A.

Poichè la (4.2) si è ottenuta con procedimento formale da det C, essa è valida qualunque siano i valori degli elementi a_{rt}, b_{ts}, quindi anche per b_{ts} tutti di valore zero salvo quelli di p righe, ad es. quelle di posti $r_1 < r_2 < \ldots < r_p$ che, in quest'ordine, supponiamo diano la matrice identica di ordine p. Sostituendo in (4.2) risulta immediatamente che:

$$\varphi_{r_1 r_2 \ldots r_p} = A^{r_1 r_2 \ldots r_p}$$

cioè il determinante del minore di ordine p estratto da A, formato dalle colonne di posti $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Il risultato ottenuto vale quali che siano i valori degli elementi a_{rt} di A e quale che sia la p-pla di interi $r_1 < r_2 <, \ldots$ $\ldots, < r_p$ scelti nella serie naturale $1, 2, \ldots, n, \ldots \infty$.

La convergenza della serie a secondo membro della (4.2) è manifesta perchè detta serie si ottiene partendo dal determinante di C che esiste *a priori*. Un ragionamento dimostrativo è sostanzialmente contenuto nel n. che segue.

15. Ciò posto, si consideri la matrice infinita

$$Q = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline -B & I \end{array} \right\| \tag{4.3}$$

dove 0 è la matrice nulla di ordine p ed I la matrice identica di ordine infinito. Se come determinante di Q si definisce, quando esiste, il limite della successione dei determinanti dei minori principali estratti dalle prime n righe di Q, per $n = 1, 2, \ldots, \infty$, si trova che:

$$\det Q = \det C = \det(A\,B)\,.$$

Infatti, il minore principale delle prime n righe di Q, per $n \geqq 2p$, è

$$Q_n = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & a \\ \hline -b & I_{n-p} \end{array} \right\| \tag{4.4}$$

dove a è la matrice delle prime $n-p$ colonne di A, b quella delle prime $n-p$ righe di B ed I_{n-p} è la matrice identica di ordine $n-p$.

Sviluppando il determinante di Q_n con la regola di LAPLACE secondo le prime p righe, si ottiene che

$$\det Q_n = \sum_{t_1 < t_2 < \dots < t_p}^{1,2,\dots,n-p} a^{t_1 \dots t_p} \,.\, b_{t_1 \dots t_p} \tag{4.5}$$

il cui secondo membro, di significato ormai ovvio, non è altro che $\det(a\,.\,b)$.

Ciò può ottenersi anche operando su Q_n la trasformazione ben nota che conduce alla relazione:

$$\det Q_n = \det \left| \begin{array}{c|c} a\,b & a \\ \hline 0 & I_{n-p} \end{array} \right| = \det(a\,b)\,. \tag{4.6}$$

Questa e la (4.5) mostrano che, al crescere di n, il determinante di Q_n tende al determinante di $A\,B$. Quindi si può scrivere senz'altro

$$\det Q = \det \left| \begin{array}{c|c} A\,B & A \\ \hline 0 & I \end{array} \right|\,. \tag{4.7}$$

Il passaggio del determinante di Q dalla forma (4.3) alla forma (4.7), si ottiene precisamente come nel caso finito, cioè aggiungendo alla r^{ma} colonna $(r = 1, 2, \dots, p)$ di Q la somma di tutte le infinite colonne dalla $(p+1)^{ma}$ in poi moltiplicate rispettivamente per gli elementi della r^{ma} colonna di B. Dunque è consentito, almeno nelle presenti condizioni, di aggiungere a una linea di una matrice infinita una combinazione lineare di infinite linee parallele, purchè la combinazione lineare sia convergente, senza alterare il suo determinante, se esiste [29].

16. Passiamo ora a considerare una matrice *bi-infinita,* cioè una matrice come:

$$\left\| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right\| \tag{4.8}$$

---

[29] È così pienamente giustificato quanto è affermato nel § 5, n. 19 della Nota cit. 1).

nella quale A, B, C, D sono quattro matrici ad infinite righe e infinite colonne.

Come è stato definito nel § 5, n. 16 della Nota cit. 1), per determinante della matrice bi-infinita (4.8) si intende, se esiste, il limite della successione dei determinanti dei suoi minori principali di ordine $2n$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$:

$$P_n = \left| \begin{array}{c|c} A_n^n & B_n^n \\ \hline C_n^n & D_n^n \end{array} \right|$$

dove A_n^n indica il minore principale delle prime n righe (e colonne) di A; analogamente per B_n^n, etc.

Se si considera la matrice bi-infinita

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I & B \end{array} \right\| \tag{4.9}$$

il suo determinante è dunque il limite, se esiste, della successione

$$P_n = \det \left| \begin{array}{c|c} A_n^n & 0 \\ \hline -I_n & B_n^n \end{array} \right|, \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

che, come subito si vede, può scriversi

$$P_n = \det \left| \begin{array}{c|c} A_n^n & A_n^n B_n^n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right| = \det \left| \begin{array}{c|c} A_n^n B_n^n & A_n^n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right| =$$

$$= (\det A_n^n)(\det B_n^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Se esistono i tre determinanti di A, B ed AB, si ha quindi senz'altro:

$$\det P = \lim_{n \to \infty} P_n = \det \left| \begin{array}{c|c} AB & A \\ \hline 0 & I \end{array} \right| = \det (AB) = (\det A)(\det B) \tag{4.10}$$

e si conclude che:

se esistono i determinanti di due o più matrici infinite ed esistono la matrice loro prodotto ed il suo determinante [30], *quest'ultimo è eguale al prodotto dei determinanti delle matrici fattori.*

---

[30] Sarebbe facile persuadersi che questa terza ipotesi discende dalle prime due.

Si vede anche, dal confronto della (4.9) con la (4.10) che, come si affermava nel § 5, n. 18 della Nota cit. 1), è possibile aggiungere alle colonne dei quadranti pari di P combinazioni lineari delle infinite colonne dei quadranti dispari (con coefficienti gli elementi delle successive colonne di B) e scambiare poi i quadranti pari coi dispari, mutando segno a uno di questi ultimi, senza alterare, se esiste, il determinante della matrice P ([31]).

([31]) Con ciò è eliminato il dubbio che il sig. D. E. RUTHERFORD ha espresso nel recensire la mia Nota più volte citata [Math. Rev. vol. 12 p. 235]. È abbastanza ovvio che l'ultimo periodo del n. 17 voleva riferirsi soltanto ai successivi nn. 18 e 19; ma purtroppo questo esplicito riferimento è rimasto sulla penna dello scrivente. Ringrazio il sig. D. E. RUTHERFORD per avermi dato l'occasione di specificarlo.