Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Ernst Mohr

Zur Theorie der tschebyscheffschen Polynome

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 245-253
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_245_0>

ZUR THEORIE DER TSCHEBYSCHEFFSCHEN POLYNOME

VON ERNST MOHR in Berlin (*)

1. Stellung der Aufgabe. Vor einiger Zeit zeigte Herr Heuser (1), dass die Tschebyscheffschen Polynome, im folgenden abgekürzt durch T-Polynome, die folgende interessante Eigenschaft besitzen:

Sei in seinen Bezeichnungen

$$x = \psi(t) = t + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots \tag{1}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $|t| > r_0$ auf eine einfach zusammenhängende Umgebung von $x = \infty$. C_r sei das Bild von $|t| = r$, wo $r_0 < r$. Sei $t_n(r; x)$ das zu C_r gehörigente n^{te} T-Polynom $x^n + \dots$, welches dadurch eindeutig definiert ist, dass das Maximum von $|t_n(r; x)|$ auf C_r unter allen Polynomen n^{ten} Grades von der Form $x^n + \dots$ am kleinsten ist. Sei weiter $p_n(x)$ das zu der Abbildung (1) gehörige n^{te} Fabersche Polynom, im folgenden kurz F-Polynom genannt, von der Form $x^n + \dots$ ($p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$), welches dadurch eindeutig definiert ist, dass es durch die Verpflanzung vermöge (1) von der x- in die t-Ebene in

$$t^n + \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

(*) Lehrstuhl für Mathematik an der technischen Universität Berlin-Charlottenburg bivg.

(1) P. HEUSER, *Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome,* Math., Zeitschr. 51. Bd., 5 Heft, 1949, S. 574-585.

übergeht, wo $f\left(\frac{1}{t}\right)$ eine Potenzreihe bedeutet, die mindestens für $|t| > r_0$ konvergiert. $t_n(r;x)$ lässt sich dann eindeutig so darstellen:

$$t_n(r;x) = p_n(x) + b_1(r)\,p_{n-1}(x) + \ldots + b_{n-1}(r)\,p_1(x) + b_n(r). \tag{2}$$

Herr Heuser hat nun bewiesen:

$$\lim_{r\to\infty} b_\nu(r)\,r^{n-\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n). \tag{3}$$

Für dieses Resultat soll hier ein neuer, einfacher Beweis gegeben werden.

2. Sei

$$t_n(r;x) = \prod_{\nu=1}^{n} \{x - \alpha_\nu(r)\} = x^n + c_1(r)\,x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(r)\,x + c_n(r). \tag{4}$$

Aus (1) folgt, dass für genügend grosse r, etwa $r > R$, die Kurve C_r in dem Kreisringgebiet liegt

$$r - \frac{a}{r} < |x| < r + \frac{a}{r}, \tag{5}$$

wo $a > 0$ eine Konstante unabhängig von r bedeutet, und bereits $R - \frac{a}{R} > 0$ sei. Denken wir uns nun die zu $t_n(r;x)$ gehörige Figur im Verhältnis $1:r$ ähnlich verkleinert, und die darauf bezüglichen Grössen durch einen Strich gekennzeichnet, also $x = r\,x'$, $\alpha_\nu(r) = r\,\alpha'_\nu(r)$ gesetzt, so ist

$$t'_n(r;x') = \prod_{\nu=1}^{n} \{x' - \alpha'_\nu(r)\} \tag{6}$$

das zu der ähnlich verkleinerten Kurve C'_r gehörige T-Polynom; nach (5) liegen diese Kurven C'_r in dem Ringgebiet

$$1 - \frac{a}{r^2} < |x'| < 1 + \frac{a}{r^2}. \tag{7}$$

Wir behaupten:

$$\lim_{r\to\infty} \alpha'_\nu(r) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Beweis. O. B. d. A. sei r schon so gross, dass in (7) rechts gilt $|x'| < 2$. Dann gilt zunächst: $|\alpha'_\nu(r)| < 4$.

Würde nämlich die se Schranke z. B. von $\alpha'_1(r)$ verletzt, so wäre für $x' \in C'_r$: $|x' - \alpha'_1(r)| \geqq |\alpha'_1(r)| - |x'| \geqq 4 - |x'| > 4 - 2 = 2 > |x'|$, und daher

$$(9)\qquad \begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{n} |x' - \alpha'_\nu(r)| &> |x' - 0| \cdot \prod_{\nu=2}^{n} |x' - \alpha'_\nu(r)| = \\ &= \left| x' \prod_{\nu=2}^{n} \{x' - \alpha'_\nu(r)\} \right| . \end{aligned}$$

Nimmt also das Polynom in (9) *rechts* sein Maximum für $x' = \eta' \in C'_r$ an, so folgt speziell

$$(10)\qquad |t'_n(r; \eta')| > \left| \eta' \prod_{\nu=2}^{n} \{\eta' - \alpha'_\nu(r)\} \right| ,$$

und daher umso mehr

$$(11)\qquad \underset{x' \in C'_r}{\mathrm{Max}} |t'_n(r; x')| > \underset{x' \in C'_r}{\mathrm{Max}} \left| x' \prod_{\nu=2}^{n} \{x' - \alpha'_\nu(r) | \right\} ,$$

was der Definition von $t'_n(r; x')$ widerspricht. Gälte nun (8) nicht, so gäbe es eine Teilfolge $r_k \to \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so dass die T-Polynome für die zugehörigen C'_{r_k}-Kurven

$$(12)\qquad t'_n(r_k; x') = \prod_{\nu=1}^{n} \{x' - \alpha_\nu(r_k)\}$$

in jedem beschränkten x'-Bereich gleichmässig nach einem Polynom

$$(13)\qquad T(x') = \prod_{\nu=1}^{n} \{x' - A'_\nu\} \text{ mit } \alpha'_\nu(r_k) \to A'_\nu$$

streben, wo nicht alle A'_ν Null sind. Das T-Polynom (12) nehme sein Maximum auf C'_{r_k} für $x' = \xi'_k$ an, und es sei $d_k = \mathrm{Max}\ |x'|$ für $x' \in C'_{r_k}$, wo also $d_k \to 1$ für $k \to \infty$ wegen (7).

Weiter nehme das Polynom (13) auf $|x'| = 1$ sein Maximum für $x' = \eta'$ an, und es sei η'_k ein Punkt auf C'_{r_k}, der auf dem Ursprungsstrahl $0 \ldots \eta'$ liegt (²). Ersetzen wir dann in der folgenden Zeile

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\eta' - A'_\nu|, \quad \prod_{\nu=1}^{n} |\eta' - \alpha'_\nu(r_k)|, \quad \prod_{\nu=1}^{n} |\eta'_k - \alpha'_\nu(r_k)| \tag{14}$$

den ersten Ausdruck durch den zweiten, und anschliessend den zweiten durch den dritten, so ist der dabei jeweils begangene Fehler absolut $< \frac{\varepsilon}{2}$ für genügend grosse k, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist: denn für $k \to \infty$ ist ja sowohl $\alpha'_\nu(r_k) \to A'_\nu$, als auch wegen (7) $\eta'_k \to \eta'$; dies sei der Fall für $k \geqq K$. Für diese k ist also:

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\eta' - A'_\nu| = \prod_{\nu=1}^{n} |\eta'_k - \alpha'_\nu(r_k)| + \varepsilon_k \text{ mit } |\varepsilon_k| < \varepsilon . \tag{15}$$

Weiter ist nach Definition des T-Polynoms

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\eta'_k - \alpha'_\nu(r_k)| \leqq \prod_{\nu=1}^{n} |\xi'_k - \alpha'_\nu(r_k)| \leqq \operatorname*{Max}_{x' \varepsilon C'_{r_k}} |x'^n| = d_k^n, \tag{16}$$

und also

$$\operatorname*{Max}_{|x'|=1} |J(x')| \leqq d_k^n + \varepsilon . \tag{17}$$

Da wegen (7) $d_k \to 1$ für $k \to \infty$, so folgt, dass das betr. Maximum auch $\leqq 1 + \varepsilon$ ist, und da $\varepsilon > 0$ beliebig, so ergibt sich schliesslich

$$\operatorname*{Max}_{|x'|=1} |T(x')| \leqq 1 . \tag{18}$$

Nun betrachten wir die Funktion $\chi(x') = T(x') : x'^n$ für $|x'| \geqq 1$. Ihr Betrag auf $|x'| = 1$ ist, wie (18) zeigt, $\leqq 1$, anderseits ist $\chi(\infty) = 1$, und also nach dem Maximumprinzip $|\chi(x')| \equiv 1$, daher auch $\chi(x') \equiv 1$

(²) Hier muss noch vorausgesetzt werden, dass k genügend gross ist, da erst dann sicher ist, dass C'_{r_k} den Nullpunkt im Innern enthält. Diese Bemerkung verdanke ich Herrn P. Heuser, der das Manuskript kritisch durchgesehen hat, wofür ich ihm auch an dieser Stelle herzlich danke.

für $|x'| \geqq 1$, d. h. $J(x') \equiv x'^n$, im Widerspruch zu der Annahme von oben. Es gilt also (8), oder

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\alpha_\nu(r)}{r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Nach (4) ist $(-1)^\nu c_\nu(r)$ die ν^{te} elementarsymmetrische Funktion von $\alpha_1(r), \ldots, \alpha_n(r)$

$$(-1)^\nu c_\nu(r) = \Sigma\, \alpha_{i_1}(r)\, \alpha_{i_2}(r) \ldots \alpha_{i_\nu}(r). \tag{20}$$

$$1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu \leqq n.$$

Dividiert man hier durch r^ν und wendet (19) an, so folgt:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{c_\nu(r)}{r^\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Setzen wir für $k = 1, 2, \ldots n$

$$p_k(x) = x^k + \overset{(k)}{d_1} x^{k-1} + \ldots + \overset{(k)}{d_{k-1}} x^1 + \overset{(k)}{d_k}, \tag{22}$$

so folgt aus (2) und (4)

$$\begin{aligned}
c_1(r) &= \overset{(n)}{d_1} + b_1(r) \\
c_2(r) &= \overset{(n)}{d_2} + b_1(r) \overset{(n-1)}{d_1} + b_2(r) \\
&\cdot \\
c_{n-1}(r) &= \overset{(n)}{d_{n-1}} + b_1(r) \overset{(n-1)}{d_{n-2}} + b_2(r) \overset{(n-2)}{d_{n-3}} + \ldots + b_{n-1}(r) \\
c_n(r) &= \overset{(n)}{d_n} + b_1(r) \overset{(n-1)}{d_{n-1}} + b_2(r) \overset{(n-2)}{d_{n-2}} + \ldots + b_{n-1}(r) \overset{(1)}{d_1} + b_n(r),
\end{aligned} \tag{23}$$

wo die d-Zahlen unabhängig von r sind. Dividiert man also die 1^{te} Gleichung durch r, so ergibt sich nach (21), dass $\lim \dfrac{b_1(r)}{r} = 0$ für $r \to \infty$. Auf Grund davon ergibt die 2^{te} Gleichung, wenn man sie durch r^2 dividiert, und wieder (21) anwendet, dass auch $\lim \frac{b_2(r)}{r^2} = 0$ für $r \to \infty$, und so weiterschliessend erkennt man, dass allgemein

$$\lim_{r\to\infty} \frac{b_\nu(r)}{r^\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

ist.

3. Ist nun für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$p_\nu(\psi(t)) = t^\nu + \frac{1}{t} f_\nu\left(\frac{1}{t}\right) = t^\nu + \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu k} \frac{1}{t^k}, \tag{25}$$

so lautet (2) nach der Verpflanzung in die t-Ebene

$$\begin{aligned} t_n(r; \psi(t)) &= \{t^n + b_1(r) t^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(r) t + b_n(r)\} \\ &+ \frac{1}{t}\left[1 \cdot f_n\left(\frac{1}{t}\right) + b_1(r) f_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right) + \ldots + b_{n-1}(r) f_1\left(\frac{1}{t}\right)\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Wir verpflanzen nun die Aussage

$$\operatorname*{Max}_{x \in C_r} |t_n(r; x)| \leqq \operatorname*{Max}_{x \in C_r} |p_n(x)| \tag{27}$$

ebenfalls von der x- in die t-Ebene, und erhalten

$$\operatorname*{Max}_{|t|=r} |t_n(r; \psi(t))| \leqq \operatorname*{Max}_{|t|=r} \left| t^n + \frac{1}{t} f_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| < r^n + \frac{C}{r}, \tag{28}$$

wo $C > 0$ eine Konstante unabhängig von r ist. Setzen wir $t = \frac{r}{\tau}$, so ergibt (28) nach Division durch r^n ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} \operatorname*{Max}_{|\tau|=1} &\left| \left\{\frac{1}{\tau^n} + \frac{b_1(r)}{r} \frac{1}{\tau^{n-1}} + \ldots + \frac{b_{n-1}(r)}{r^{n-1}} \frac{1}{\tau} + \frac{b_n(r)}{r^n}\right\} \right. \\ &\left. + \frac{\tau}{r^{n+1}}\left[1 \cdot f_n\left(\frac{\tau}{r}\right) + b_1(r) f_{n-1}\left(\frac{\tau}{r}\right) + \ldots + b_{n-1}(r) f_1\left(\frac{\tau}{r}\right)\right] \right| \\ &< 1 + \frac{C}{r^{n+1}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Klammern wir in (29) den Faktor $\frac{1}{\tau^n}$ aus, der ja absolut $= 1$ ist, so ist auch

(30)
$$\operatorname*{Max}_{|\tau|=1}\left|\begin{array}{l}\left\{1+\frac{b_1(r)}{r}\tau+\ldots+\frac{b_{n-1}(r)}{r^{n-1}}\tau^{n-1}+\frac{b_n(r)}{r^n}\tau^n\right\}\\ +\frac{\tau^{n+1}}{r^{n+1}}\left[1\,.\,f_n\left(\frac{\tau}{r}\right)+b_1(r)f_{n-1}\left(\frac{\tau}{r}\right)+\ldots+b_{n-1}(r)f_1\left(\frac{\tau}{r}\right)\right]\end{array}\right| < 1+\frac{C}{r^{n+1}}\,.$$

Hierin schreiben wir für den Ausdruck zwischen dem Absolutzeichen

(31)
$$1+\frac{1}{r^n}\,\Phi(r\,;\tau)\,,$$

wo $\Phi(r\,;\tau)$ so aussieht:

(32)
$$\begin{aligned}&\{b_1(r)\,r^{n-1}\,.\,\tau+\ldots+b_{n-1}(r)\,r\,.\,\tau^{n-1}+b_n(r)\,.\,\tau^n\}\\ &+\frac{\tau^{n+1}}{r}\left[1\,.\,f_n\left(\frac{\tau}{r}\right)+b_1(r)f_{n-1}\left(\frac{\tau}{r}\right)+\ldots+b_{n-1}(r)f_1\left(\frac{\tau}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

τ ist im folgenden stets auf $|\tau| = 1$ beschränkt. Wir setzen $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

(33)
$$\begin{aligned}f_{n-\nu}\left(\frac{\tau}{r}\right)&=a_{n-\nu,0}+a_{n-\nu,1}\frac{\tau}{r}+\ldots+a_{n-\nu,\nu-2}\left(\frac{\tau}{r}\right)^{\nu-2}\\ &+\left(\frac{\tau}{r}\right)^{\nu-1}f^*_{n-\nu}\left(\frac{\tau}{r}\right),\end{aligned}$$

wo $f^*_{n-\nu}\left(\frac{1}{t}\right)$ denselben Konvergenzradius wie $f_{n-\nu}\left(\frac{1}{t}\right)$ besitzt. Dann ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

(34)
$$\begin{aligned}\frac{b_\nu(r)}{r}f_{n-\nu}\left(\frac{\tau}{r}\right)&=\frac{b_\nu(r)}{r}\left\{a_{n-\nu,0}+\frac{a_{n-\nu,1}}{r}\tau+\ldots+\frac{a_{n-\nu,\nu-2}}{r^{\nu-2}}\tau^{\nu-2}\right\}\\ &+\tau^{\nu-1}\frac{b_\nu(r)}{r^\nu}f^*_{n-\nu}\left(\frac{\tau}{r}\right),\end{aligned}$$

wo der zweite Summand rechts wegen (24) für $r \to \infty$ gleichmässig für alle τ mit $|\tau| = 1$ nach Null geht.

4. Sei jetzt wie bei Heuser

$$B(r) = \operatorname{Max}\{|b_1(r)|\, r^{n-1}, \ldots, |b_{n-1}(r)|\, r, |b_n(r)|\}, \tag{35}$$

so lautet die Behauptung

$$\lim_{r \to \infty} B(r) = 0. \tag{36}$$

Beweis indirekt. Sonst gäbe es eine Teilfolge $r_k \to \infty$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ mit $B(r_k) \geqq$ einer Konstanten $\gamma > 0$. Wir dürfen dann $\Phi(r_k; \tau)$ durch $B(r_k)$ dividieren, und erhalten, wenn wir von (32) nur den von der geschweiften Klammer herrührenden Teil anschreiben, und den Rest durch ... andeuten, eine Funktion $\Phi^*(r_k; \tau)$ vom folgenden Bau

$$\Phi^*(r_k; \tau) = \{B_1(r_k)\tau + \ldots + B_{n-1}(r_k)\tau^{n-1} + B_n(r_k)\tau^n\} + \ldots; \tag{37}$$

hier ist jeder B-Koeffizient absolut $\leqq 1$, und mindestens einer absolut $= 1$. Bringen wir in (34), angewandt auf $r = r_k$ das $\frac{b_\nu(r_k)}{r_k}$ auf die Gestalt $\frac{b_\nu(r_k)\, r_k^{n-\nu}}{r_k^{n-\nu+1}}$, und bedenken, dass nach Division durch $B(r_k)$ dieser Ausdruck absolut $\leqq \frac{1}{r_k^{n-\nu+1}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ wird, so erhellt aus (34) und dem dort Gesagten, dass der in (37) durch die Punkte ... angedeutete Rest für $r_k \to \infty$ gleichmässig in τ nach σ geht. Indem wir uns die Folge (r_k) bereits passend gesiebt denken, folgt, dass $\Phi^*(r_k; \tau)$ auf $|\tau| = 1$ gleichmässig gegen ein Polynom

$$\varphi^*(\tau) = B_1\tau + B_2\tau^2 + \ldots + B_{n-1}\tau^{n-1} + B_n\tau^n \tag{38}$$

strebt, welches nicht $\equiv 0$ ist, da in (37) und also auch in (38) stets mindestens ein Koeffizient absolut $= 1$ ist. Betrachten wir jetzt die durch $\omega = \varphi^*(\tau)$ vermittelte konforme Abbildung von $|\tau| \leqq 1$ auf eine ω-Ebene. Da $\varphi^*(0) = 0$ ist, folgt, dass die Bildkurve von $|\tau| = 1$ in der ω-Ebene die reelle Achse mindestens einmal in einem Punkte $\omega_0 = \varphi^*(\tau_0) > 0$ durchschneidet. Infolge der gleichmässigen Konvergenz $\Phi^*(r_k; \tau) => \varphi^*(\tau)$ auf $|\tau| = 1$ und daher auch auf $|\tau| \leqq 1$ gibt es einen Zeiger K, derart, dass für jedes $k \geqq K$ analog ein τ_k mit $|\tau_k| = 1$ existiert, für welches $\Phi^*(r_k, \tau_k)$ reell positiv und $\geqq$ einer Zahl $\beta > 0$ ist. Für diese r_k und wäre aber dann

$$1 + \frac{1}{r_k^n} \Phi(r_k; \tau_k) = 1 + \frac{B(r_k)}{r_k^n} \Phi^*(r_k; \tau_k) > 1 + \frac{\gamma}{r_k^n} \beta, \tag{39}$$

und es ergäbe sich nach (31) und (32) der Widerspruch

$$1 + \frac{\gamma}{r_k^n} \beta < 1 + \frac{C}{r_k^{n+1}}. \tag{40}$$