Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Michele Sce

Su una generalizzazione delle matrici di Riemann (memoria seconda)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 301-327

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_301_0>

SU UNA GENERALIZZAZIONE DELLE MATRICI DI RIEMANN

(Memoria seconda)

di MICHELE SCE (Pisa)

Nell'Introduzione premessa alla prima parte di questo lavoro (1) abbiamo già dato conto anche della seconda parte che qui presentiamo e non è perciò il caso di porre qui un'altra introduzione. Ci limitiamo perciò a rilevare che l'unico mutamento di qualche importanza (rispetto a quel che si disse nella citata introduzione) è stato apportato alla definizione delle Rgd. riducibili.

PARTE II

LE MATRICI DI RIEMANN GENERALIZZATE

9. Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ ed $\mathcal{F}$ i campi definiti al principio del n. 2 e sia W una matrice di WEYL su $\mathcal{F}$ con elementi in $\mathcal{C}'$ di ordine n e numero tipo ε; sia inoltre C' una matrice diagonale con elementi in $\mathcal{C}$, di ordine m non degenere e tale che:

$$C' = \varepsilon \, \overline{C}'_{-1} \tag{9.1}$$

cioè reale od immaginaria pura secondo che W è pari o dispari.

DEF. 1: diciamo *matrici di* RIEMANN *generalizzate destre* (Rgd.) [*sinistre* (Rgs.)] *su* $\mathcal{F}$ le matrici R con elementi in $\mathcal{C}$, di tipo (m, n) $[(n, m)]$ a righe [a colonne] linearmente indipendenti tali che:

$$R\,W = C'\,R \quad (9.2) \qquad [W\,R = R\,C' \quad (9.2')]$$

(1) M SCE: *Su una generalizzazione delle matrici di* RIEMANN (Memoria prima) [questi Annali (3) V 81-103]; quando si vorrà richiamare una Definizione (od un Teorema) della Prima parte si porrà un I davanti al numero d'ordine.

purchè W e C' non siano entrambe scalari; diciamo *matrici principali* di R le matrici principali C di W e *matrice secondaria* di R la C' e, secondo che quest'ultima è reale od immaginaria pura, diciamo che R è *pari* o *dispari*.

Ovviamente le Rg. possono essere quadrate; le indicheremo con Rgdq., Rgsq., Rgq. Poichè le Rgq. hanno righe (o colonne) linearmente indipendenti sono non degeneri e quindi, se R è una Rgdq., R^{-1} è una Rgsq e viceversa.

Siano $k_1, \ldots, k_\mu$ gli interi della segnatura di W, α_i gli elementi di C' e $p_1, \ldots, p_\nu$ gli interi della segnatura di C' che non sono poi altro che le molteplicità delle α_i. Poniamo la

D e f. 2: diciamo *indice* di R l'intero ν indice di C' e *generi* di R gli interi p_i; le Rg. di indice uno, due,... le diciamo (rispettivamente) *monogeneri, digeneri,..., poligeneri*; se una Rg. poligenere ha tutti i generi eguali ad un intero p, diciamo che p è il suo *genere*.

Poichè la matrice secondaria C' di una Rg. è diagonale, con opportuni scambi delle linee (righe nel caso di Rgd., colonne nel caso di Rgs.) di R, possiamo sempre supporre che nella sua matrice secondaria gli elementi eguali siano consecutivi(2); C' risulta dunque composta mediante le ν matrici scalari $\alpha_i I_{p_i}$. Se R è una Rgd. [Rgs.], suddividiamola, in corrispondenza alle $\alpha_i I_{p_i}$, in gruppi di p_i righe [colonne] e scriviamo:

$$(9.3) \qquad R = \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \hline R^i \\ \hline \vdots \end{array} \right\| \qquad (9.3') \quad [R = (\ldots \mid R_i \mid \ldots)]$$

dove R^i è di tipo (p_i, n) [R_i di tipo (n, p_i)]. Quando in seguito useremo questa suddivisione, esprimeremo ciò dicendo che suddividiamo R in corrispondenza a C'.

Nel caso delle Rgq. le (9.2) ci dicono che C' è la forma canonica della W e quindi le α_i sono radici caratteristiche della W; inoltre gli interi (9.3) e (9.4) coincidono ed, in particolare, $\mu = \nu$. Per Rg. generiche sussiste una ben nota proprietà che enunciamo come

LEMMA 1: *gli elementi α_i della matrice secondaria di una Rg. vanno ricercati tra le radici caratteristiche della matrice di* WEYL; *inoltre p_i non supera la molteplicità k_i di α_i come radice caratteristica di W e $\mu \geq \nu$.*

---

(2) Infatti una tale matrice si ottiene dalla C' trasformandola per contragredienza mediante una matrice I le cui linee hanno gli elementi tutti nulli tranne uno eguale all'unità.

Infatti suddividendo R in corrispondenza a C', le (9.2), (9.2') si traducono, rispettivamente, nelle ν eguaglianze:

$$R^i W = \alpha_i R^i \qquad (9.4) \qquad\qquad W R_i = R_i \alpha_i I_{p_i} \qquad (9.4')$$

che possiamo anche scrivere:

$$R^i (W - \alpha_i I_n) = 0 \qquad (9.5) \qquad\qquad (W - \alpha_i I_n) R_i = 0 \qquad (9.5')$$

Da queste, con l'abituale semplice ragionamento, segue subito l'enunciato.

DEF. 3: una Rg. la diciamo *completa* se (3)

$$p_i = k_i \qquad (i = 1, \ldots, \nu).$$

Le Rgq. sono Rg. complete per le quali $\mu = \nu$.

10. LEMMA 2: *se R è una Rgd. [Rgs.] posto $W = \Gamma C^{-1}$, come nella Def.* I 4, *si ha che:*

$$R \Gamma \overline{R}_{-1} = C' R C \overline{R}_{-1} = R C \overline{R}_{-1} C' \tag{10.1}$$

$$\overline{R}_{-1} \Gamma^{-1} R = C'^{-1} \overline{R}_{-1} C^{-1} R = \overline{R}_{-1} C^{-1} R C'^{-1} \tag{10.1'}$$

sono matrici adp.

Infatti, nelle ipotesi fatte le (9.2), (9.2') si possono scrivere:

$$R \Gamma = C' R C \qquad (10.2) \qquad\qquad C^{-1} R C'^{-1} = \Gamma^{-1} R \qquad (10.2')$$

(3) Naturalmente la nozione di completezza ha senso quando si consideri la Rg. in relazione ad una data matrice di WEYL perchè altrimenti è sempre possibile determinare una matrice di WEYL relativamente alla quale la Rg. sia completa. Per giustificare la denominazione osserviamo poi che se R è completa, nelle (9,5), $(W - \alpha_i I_n)$ ha nullità eguale alla caratteristica di R^i $[R_i]$ e quindi una matrice $\left\| \frac{R^i}{x} \right\|$ $[(R_i \mid x)]$ tale che:

$$\left\| \frac{R^i}{x} \right\| (W - \alpha_i I_n) = 0 \quad [(W - \alpha_i I_n)(R_i \mid x) = 0]$$

non può far parte di una Rgd. [Rgs]. perchè a righe [a colonne] linearmente dipendenti.

Trasponendo e coniugando e ricordando la (9.1) si ottiene che:

(10.3) $\Gamma \bar{R}_{-1} = C \bar{R}_{-1} C'$ (10.3') $C'^{-1} \bar{R}_{-1} C^{-1} = \bar{R}_{-1} \Gamma^{-1}$

Moltiplicando la (10.2) a destra per $\bar{R}_{-1}$ e la (10.3) a sinistra per R e confrontando si ottiene appunto la (10.1); moltiplicando la (10.2') a sinistra per $\bar{R}_{-1}$ e la (10.3) a destra per R, si ottiene poi la (10.1'). Poichè le righe [colonne] di R sono linearmente indipendenti, la matrice $R\, \Gamma\, \bar{R}_{-1}$ $[\bar{R}_{-1}\, \Gamma^{-1} R]$ è adp.

TEOR. 1: *una matrice R è una Rgd [Rgs.] allora e solo che*

(10.4) $\Gamma = C' R C \bar{R}_{-1}$ (10.4)' $\Gamma = \bar{R}_{-1} C^{-1} R C'^{-1}$

sia una matrice adp.

La necessità della condizione discende subito dal Lemma 2.

Per la sufficienza, possiamo senz'altro supporre che se (m, n) è il tipo di R, sia $m < n$ oppure $m > n$ secondo che si tratti di Rgd. o di Rgs., ottenendo il caso in cui sia $m = n$ come caso particolare. Consideriamo intanto il primo caso in cui R è una Rgd.. Poichè la caratteristica di R è m, a meno di uno scambio delle sue colonne, potremo scrivere:

(10.5) $$R = (S \mid S \lambda)$$

con S quadrata non degenere e λ di tipo $(m, n - m)$. Posto allora:

$$\Lambda = \left\| \begin{array}{c|c} I_m & -\lambda \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array} \right\|$$

si ottiene:

(10.6) $$R' = R \Lambda = (S \mid 0) .$$

Dalla (10.4) si ha:

(10.7) $$\Gamma = C' R C \bar{R}_{-1} = C' R \Lambda (\Lambda^{-1} C \bar{\Lambda}^{-1}_{-1}) \bar{\Lambda}_{-1} \bar{R}_{-1}$$

che posto

(10.8) $$\Lambda^{-1} C \bar{\Lambda}^{-1}_{-1} = C'' = \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right\|$$

si scriverà:

(10.9) $$\Gamma = C' R' C'' \bar{R}'_{-1}$$

che, sostituendovi le (10.6), (10.8), diventa:

$$\Gamma = C' \, S \, C_1 \overline{S}_{-1} . \tag{10.10}$$

Poichè S è non degenere, esiste una matrice $\Gamma' = S^{-1} \, \Gamma \, \overline{S}_{-1}^{-1}$ ancora adp. Perciò dalla (10.10), sempre per la non degenerescenza di S, si ottiene:

$$S \, \Gamma' = C' \, S \, C_1 \tag{10.11}$$

dalla quale si ha:

$$(S \mid O) \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array} \right\| = C' (S \mid O) \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right\| \tag{10.12}$$

dove si è posto $\Gamma_2 = S^{-1} \, C' \, S \, C_2$. È poi facile vedere che usufruendo della arbitrarietà di Γ_4 (4), si può ottenere che

$$\Gamma'' = \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array} \right\| \tag{10.13}$$

sia adp.. Ricordando le (10.6), (10.8), (10.13), la (10.12) si scrive:

$$R' \, \Gamma'' = C' \, R' \, C'' \tag{10.14}$$

che a causa delle posizioni fatte, e posto $\Gamma_0 = \Lambda \, \Gamma'' \, \overline{\Lambda}_{-1}$ con Γ_0 ancora adp., diventa:

$$R \, \Gamma_0 = C' \, R \, C \tag{10.15}$$

che dimostra il teorema per le Rgd.. La dimostrazione è del tutto analoga per le Rgs. nel qual caso sono le righe ad essere linearmente dipendenti.

11. Lemma 3.: *Se R è una Rg., suddivisa R in corrispondenza alla sua matrice secondaria C', si ha:*

$$R^i \, C \, \overline{R}^j_{-1} = R^i \, \Gamma \, \overline{R}^j_{-1} = 0 \qquad R^i \, C \, \overline{R}^i_{-1} = \alpha_i \, R^i \, \Gamma \, \overline{R}^i_{-1} \tag{11.1}$$

oppure:

$$\begin{gathered} \overline{(R_i)}_{-1} \, C^{-1} \, R_j = \overline{(R_i)}_{-1} \, \Gamma^{-1} \, R_j = 0 \, , \\ \overline{(R_i)}_{-1} \, C^{-1} \, R_i = \alpha_i \, \overline{(R_i)}_{-1} \, \Gamma^{-1} \, R_i \end{gathered} \tag{11.1'}$$

(*con* $i \neq j \, ; \, i, j = 1, 2, \dots, \nu$) *secondo che R è una Rgd. od una Rgs..*

---

(4) Anzi, per ottenere che Γ'' sia adp., basta poter disporre degli elementi della diagonale principale di Γ_4.

Infatti, sia R una Rgd.; suddividendola in corrispondenza alla sua matrice secondaria C' si ottiene:

$$R\,C\,\overline{R}_{-1} = \| R^i\,C\,\overline{R}^j_{-1} \| \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,\ldots\,,\nu)$$

Per la (10.1), $R\,C\,\overline{R}_{-1}$ è permutabile con C', quindi:

$$R^i\,C\,\overline{R}^j_{-1}\,\alpha_j\,I_{p_j} = \alpha_i\,R^i\,C\,\overline{R}^j_{-1}\,; \tag{11.2}$$

avendo supposto tutte le α_i distinte la (11.2), per $i \neq j$, implica:

$$R^i\,C\,\overline{R}^j_{-1} = 0\,.$$

Perciò la $R\,C\,\overline{R}_{-1}$ risulta composta mediante le $R^i\,C\,\overline{R}^i_{-1}$ e la (10.1) diventa:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c} \alpha_1\,R^1\,C\,\overline{R}^1_{-1} & \cdots\cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots\cdots & \alpha_\nu\,R^\nu\,C\,\overline{R}^\nu_{-1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c|c} R^1\,\Gamma\,\overline{R}^1_{-1} & \cdots\cdots & R^1\,\Gamma\,\overline{R}^\nu_{-1} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline R^\nu\,\Gamma\,\overline{R}^1_{-1} & \cdots\cdots & R^\nu\,\Gamma\,\overline{R}^\nu_{-1} \end{array} \right\|$$

la quale oltre ad assicurarci che anche $R^i\,\Gamma\,\overline{R}^j_{-1} = 0$ per $i \neq j$, ci dice che $R\,\Gamma\,\overline{R}_{-1}$ è composta mediante le matrici

$$R^i\,\Gamma\,\overline{R}^i_{-1} = \alpha_i\,R^i\,C\,\overline{R}^i_{-1}\,.$$

Il lemma è dunque dimostrato nel caso delle Rgd.; la dimostrazione è identica nel caso delle Rgs., salvo che, in luogo della (10.1), si adopera la (10.1').

Osserviamo ora che dalle (11.1) è facile ottenere le (10.1) e perciò il Lemma 3 è equivalente al Lemma 2; ma il Teorema 1 ci assicura che una matrice soddisfacente le (10.1) è una Rgd.: possiamo dunque concludere con il

TEOR. 2: *La definizione di una Rg. si può porre indifferentemente mediante le* (9.2) *o mediante le* (11.1).

12. — Il Teorema 2 ci permette di enunciare il seguente

TEOR. 3: *Le matrici di* RIEMANN ω, *le matrici* $\left\| \dfrac{\omega}{\overline{\omega}} \right\|$, *le matrici omega di* ALBERT, *le matrici dei periodi degli integrali multipli di prima specie di una varietà algebrica, sono tutte Rgd..*

La giustificazione di questo teorema (non la dimostrazione, perchè si tratta di una semplice applicazione del teorema 2) ci porterebbe troppo lontano; perciò rimandiamo ai lavori originali (5).

13. — Def. 4: date due matrici Rgd. [Rgs.] R ed S diciamo loro *forma simultanea* una matrice A con elementi in $\mathcal{F}$ tale che:

$$R\,A\,\bar{S}_{-1} = 0 \qquad [\bar{R}_{-1}\,A\,S = 0]\,. \tag{13.1}$$

È chiaro che combinazioni lineari con coefficienti in $\mathcal{F}$ di forme simultanee di R ed S sono ancora forme simultanee di R ed S.

Def. 5: Il massimo numero $h'+1$ di forme simultanee di R ed S linearmente indipendenti (in $\mathcal{F}$) si dice *primo carattere simultaneo* di R ed S; se $h'+1>0$ diciamo che R ed S sono *legate,* altrimenti *non legate.*

Date due matrici Rgd. [Rgs.] R ed S, suddividiamole in corrispondenza alle loro matrici secondarie C' e C''; poniamo la

Def. 6: Diciamo *matrice simultanea* di R ed S una matrice A in $\mathcal{F}$ tale che, per qualunque $i \neq j$, si abbia:

$$R^i\,A\,\bar{S}^j_{-1} = 0 \qquad [(\overline{R_i})_{-1}\,A\,S_j = 0] \tag{13.2}$$

È facile convincersi che combinazioni lineari con coefficienti in $\mathcal{F}$ di matrici simultanee sono ancora matrici simultanee. Se gli indici di R ed S sono, rispettivamente, ν_1 e ν_2 (con $\nu_2 \geq \nu_1$) le relazioni (13.2) sono in numero di: $\nu_1(\nu_2-1)$; consideriamo i $\nu_1(\nu_2-1)$ primi caratteri simultanei di R^i ed S^j $[R_i$ ed $S_j]$ $h'_{ij}+1$ e poniamo la

Def. 7: Diciamo *secondo carattere simultaneo* di R ed S, $h''+1$, il minore dei numeri $h'_{ij}+1$; quando $h''+1>0$ diciamo che R ed S sono *vincolate,* altrimenti le diciamo *non vincolate;* se le $R^i\,A\,\bar{S}^j_{-1}$ $[(\overline{R_i})_{-1}\,A\,S_j]$ hanno caratteristica massima diciamo che R ed S sono *non vincolate in senso stretto.* Quando R ed S coincidono il loro secondo carattere simultaneo si dice il *carattere* $h+1$ di R.

È sempre $h \geq 0$ perchè esiste sempre almeno una matrice simultanea di R e sè stessa e precisamente la sua matrice principale.

---

(5) Per i primi tre tipi di matrici si può vedere [2], per il quarto [13]; [2] e [13] non sono nè i primi nè gli ultimi lavori in proposito ma ci riferiamo ad essi per la loro particolare importanza.

DEF. 8: diciamo *matrice principale simultauea* di R ed S una matrice antisimmetrica od antiemisimmetrica A che soddisfi le (13.2) e tale che $R^i A \overline{S}^i_{-1}$ sia adp. a meno di una costante moltiplicativa sempre reale od immaginaria pura al variare di i (6); quando R coincida con S si riottiene la definizione di *matrice principale* di una Rgd.

È chiaro che soltanto Rg. con gli stessi generi ammettono matrici principali simultanee.

DEF. 9: il numero $k+1$ di matrici simultanee di R e sè stessa antisimmetriche od antiemisimmetriche secondo che R sia pari o dispari linearmente indipendenti in $\mathcal{F}$ è l'analogo del numero $h+1$ di Definizione 7 e k si dice *indice di singolarità* della Rg.; se $k>0$ la Rg. si dice *singolare,* altrimenti *non singolare.*

È forse bene notare che non sempre combinazioni lineari con coefficienti in $\mathcal{F}$ di matrici antisimmetriche sono ancora antisimmetriche.

Prima di vedere qualche limitazione per h e k enunciamo l'ovvio

TEOR. 4: *per tutto le Rg. si ha sempre:*

$$0 \leq k \leq h \leq h'_{ij}$$

quando si indichi con $h'_{ij}+1$ *il primo carattere simultaneo di* R^i *ed* R^j $[R_i$ *ed* $R_j]$.

Sia ora R una Rgd. di tipo (m, n); aggiungendo ad essa $n-m$ righe possiamo ottenere una matrice R' non degenere. Ragionando al modo abituale su questa R', tornando alla R e ricordando quale sia la somma dei suoi generi, si ottiene che in $\mathcal{C}$

$$h+1 \leq n^2 - 2 \sum_{0<i<k}^{k=2,\ldots,\nu} p_i p_k . \tag{13.3}$$

Se F è un campo reale, il secondo membro della (13.4) deve essere moltiplicato per 2; se poi una R^j è la coniugata di R^i bisogna aggiugere $2p_i^2$.

Un discorso analogo vale per $k+1$ con l'ulteriore complicazione che se F è reale bisogna distinguere il caso di Rg. pari da quello di Rg. dispari;

---

(6) Quando R ed S siano entrambe pari od entrambe dispari, A sarà antisimmetrica nel primo caso, antiemisimmetrica nel secondo; corrispondentemente la costante moltiplicativa sarà reale o immaginaria pura. Questa precisazione vale, in particoclare per le Rg. di una stessa classe (ved. successiva definizione 11).

tutto questo rende assai poco maneggevoli queste limitazioni che perciò non useremo mai [7].

14. Siano C' e C'' due matrici diagonali che abbiano lo stesso indice ν. Poniamo la

DEF. 10: diciamo che C' e C'' sono *omomorfe*, se quando C' è composta mediante le ν matrici scalari $\alpha_i I_{p_i}$, C'' è composta mediante le ν matrici scalari $\alpha_i I_{q_i}$ essendo

$$p_i = \varrho \lambda_i , \quad q_i = \varrho' \lambda_i \qquad (i = 1 , \ldots , \nu) \tag{14.1}$$

È chiaro che matrici omomorfe dello stesso ordine sono eguali.

DEF. 11: diciamo che due Rg. R ed S di tipi (m , n) ed (m' , n') sono della stessa *classe* se hanno matrici secondarie omomorfe e se

$$n = \varrho k \qquad n' = \varrho' k \tag{14.2}$$

dove ϱ e ϱ' hanno gli stessi valori che nella (14.1)

Sommando le (14.1) rispetto ad i, si ottiene subito che

$$m = \varrho \lambda \qquad m' = \varrho' \lambda \tag{14.3}$$

dove si è posto $\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i = \lambda$ con $\lambda \geq \nu$. Confrontando la (14.3) con la (14.2) si ha che

$$m : m' = n : n'$$

cioè che, come talvolta diremo, R ed S hanno tipi proporzionali. Poiche il ragionamento fatto è invertibile, si ha il

TEOR. 5: *due Rg. sono della stessa classe allora e solo che hanno tipi proporzionali e matrici secondarie omomorfe.*

---

(7) Osserviamo che la (13.4) si riduce in un caso particolare ad una nota formula ma tale riduzione è illusoria: si tratta della compensazione di due errori.

DEF. 12: date due matrici Rgd. [8] R ed S diciamo che R è *formalmente equiforme ad* S, se R ed S sono della stessa classe [9] e se esiste in $\mathcal{C}$ una matrice π ed in $\mathcal{F}$ una matrice T tali che:

(14.4) $\pi R = S T$ (14.5) $\pi C' = C'' \pi$

dove C' e C'' sono le matrici secondarie di R ed S; se esistono anche una matrice π^* in $\mathcal{C}$ ed una T^* in $\mathcal{F}$ tali che:

(14.4′) $\pi^* S = R T^*$ (14.5′) $\pi^* C'' = C' \pi^*$

diciamo che R ed S sono *formalmente equiformi.* Quando π e T hanno righe linearmente indipendenti diciamo che R è *equiforme* ad S; se inoltre π^* e T^* sono a colonne linearmente indipendenti diciamo che R ed S sono *equiformi.* Quando R è equiforme ad S e sono dello stesso tipo diciamo che R ed S sono *isomorfe.* Se poi R ed S sono equiformi a meno di uno scambio delle righe di π diciamo che R ed S sono *quasi equiformi.*

Poichè C' e C'' sono composte mediante le $\alpha_i I_{p_i}$, $\alpha_i I_{q_i}$, posto $\pi = \| \pi_{ik} \| \, (i, k = 1, \ldots, \nu)$ con le π_{ik} di tipo (q_i, p_k), la (14.5) dà:

$$\alpha_i \pi_{ik} = \pi_{ik} \alpha_k$$

dalle quali, per essere le α_i distinte si ottiene che $\pi_{ik} = 0$ per $i \neq k$, e perciò π è composta mediante le ν matrici π_{ii} di tipo (q_i, p_i). Ne segue che suddividendo R ed S in corrispondenza alle loro matrici secondarie, la (14.4) equivale alle ν relazioni:

(14.6) $$\pi_{ii} R^i = S^i T$$

Ragionando allo stesso modo sulle (14.4′), (14.5′) si conclude col

TEOR. 6.: *Due matrici Rgd. R ed S della stessa classe sono equiformi allora e solo che suddivisele in corrispondenza alle loro matrici secondarie (di indice ν) esistano in $\mathcal{C}$ ν matrici π_{ii} a righe e ν matrici π^*_{ii} a colonne linear-*

---

(8) Sin qui, pur occupandoci di preferenza delle Rgd, non abbiamo del tutto tralasciato le Rgs.; d'ora innanzi ci occuperemo invece soltanto di Rgd., per quanto tutto ciò che diremo sia facilmente estendibile alle Rgs..

(9) In realtà quello che ci occorre continuamente è l'omomorfismo delle matrici secondarie; per quanto riguarda i tipi delle matrici quello che importa è che $m = m'$ o $m < m'$ implichino, rispettivamente $n = n'$ o $n < n'$ e viceversa.

mente indipendenti ed in $\mathcal{F}$ una matrice T a righe ed una matrice T^* a colonne linearmente indipendenti, tali che soddisfano la (14.8) *e la* :

$$\pi_{ii}^* S^i = R^i T^* . \tag{14.6'}$$

Supponiamo ancora che R ed S siano equiformi e che A sia una loro matrice simultanea. Moltiplicando a destra per $\overline{(\pi_j^*)}_{-1}$ la (13.2), si ha:

$$R^i A \overline{S}_{-1}^j \overline{(\pi_j^*)}_{-1} = 0 \tag{14.7}$$

che, a causa della indipendenza delle colonne di π_j^*, equivale alla (13.2); mediante l'uso della (14.6'), si ottiene poi:

$$R^i A \overline{T}_{-1}^* \overline{R}_{-1}^j = 0 \tag{14.8}$$

e, poichè, a meno che non si tratti di isomorfismo, non tutte le forme simultanee di R^i ed R^j si possono esprimere nella forma $A\ \overline{T}_{-1}^*$, il primo carattere simultaneo di R^i ed S^j non supera quello di R^i ed R^j. Ma d'altra parte nella (13.2) è sempre possibile porre $A = B\ \overline{T}_{-1}$ per l'indipendenza delle righe di T; perciò, usando anche la (14.6), in luogo della (13.2) potremo scrivere:

$$R^i A \overline{R}_{-1}^j \overline{(\pi_j)}_{-1} = 0 \tag{14.9}$$

che non equivarrà in generale alla (13.2) e ci dice che il primo carattere simultaneo di R^i ed S^j non è inferiore a quello di R^i ed R^j. Ricordando perciò che il secondo carattere simultaneo ed il carattere si definiscono come minimi ed osservando che per il primo carattere simultaneo di S^i ed S^j si può fare un discorso del tutto analogo, possiamo concludere con il

TEOR. 7: *due Rgd. equiformi hanno i caratteri eguali al loro secondo carattere simultaneo.*

In modo del tutto analogo si può dimostrare il

TEOR. 8: *date quattro Rgd. R, S, R' ed S', R ed S, R' ed S' equiformi, il secondo carattere simultaneo di R ed R' è eguale a quello di S ed S'; in particolare, è invariante rispetto all'equiformismo la nozione di vincolo.*

Ricalcando la Definizione 12, poniamo la

DEF. 13: date due Rgd. R ed S, diciamo R *formalmente prosomilica* ad S se R ed S sono della stessa classe e se vale la (14.4) con π in $\mathcal{C}$ e T in $\mathcal{F}$; se poi sussiste anche la (14.4') diciamo che R ed S sono *formal-*

mente prosomiliche. Quando π e T siano a righe, π^* e T^* a colonne linearmente indipendenti, diciamo che R ed S sono *prosolimiche:* in particolare, se R ed S sono prosolimiche dello stesso tipo le diciamo *associate.*

Val forse la pena di osservare che le Rgd. monogeneri hanno la matrice secondaria scalare e quindi, in questo caso, le (14.5), (14.5′) sono automaticamente soddisfatte; perciò tutte le Rgd. ad esse prosolimiche sono anche ad esse equiformi. Si può anche rilevare che nella definizione di matrice simultanea e in quelle connesse si è tacitamente supposto che le matrici considerate abbiano almeno due generi, perchè altrimenti svanirebbero o si ricadrebbe nel caso delle forme simultanee. Analogo discorso si può fare per i Teoremi 7 ed 8; il Teorema 8, ad esempio, si ridurrebbe al

TEOR. 9: *se R, S, R' ed S' sono quattro Rgd., R ed S, R' ed S' pros-omiliche (in particolare, equiformi), il primo carattere simultaneo di R ed R' è eguale a quello a quello di S ed S'; ne segue che è invariante rispetto al prosomilicismo (in particolare, all'equiformismo) la nozione di legame.*

15. Siano R ed S due Rgd. equiformi di indice almeno eguale a due, di matrici principali C_1 e C_2 e di matrici secondarie C' e C''; inoltre le loro matrici di WEYL saranno $W = \Gamma_1 C_1^{-1}$, $W' = \Gamma_2 C_2^{-1}$.

Moltiplicando a sinistra per π la (10.1) ed utilizzando le (14.4), (14.5), si ottiene:

$$S\, T\, C_1\, \overline{R}_{-1}\, C' = C''\, S\, T\, C_1\, \overline{R}_{-1}\,. \tag{15.1}$$

In modo del tutto analogo si ottiene:

$$S\, C_2\, \overline{T}^*_{-1}\, \overline{R}_{-1}\, C' = C''\, S\, C_2\, \overline{T}^*_{-1}\, \overline{R}_{-1}\,. \tag{15.1'}$$

Poichè C' e C'' sono omomorfe, suddividendo R ed S in corrispondenza ad esse, le (15.1), (15.1′) equivalgono alle:

$$S^j\, T\, C_1\, \overline{R}^i_{-1} = 0 \qquad (i \neq j\,;\ i, j = 1, \ldots, \nu) \tag{15.2}$$

$$S^j\, C_2\, \overline{T}^*_{-1}\, \overline{R}^i_{-1} = 0 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \tag{15.2'}$$

Se R ed S hanno entrambe il carattere 1, per il Teorema 7, anche il loro secondo carattere simultaneo è 1 e le (15.2), (15.2′) devono coincidere (almeno per una coppia di valori di i ed j); si ha cioè:

$$T\, C_1 = \pm\, C_2\, \overline{T}^*_{-1} = \eta\, C_2\, \overline{T}^*_{-1}\,. \tag{15.3}$$

Dunque

TEOR. 10: *se R ed S sono Rgd. equiformi di carattere* 1 [10] *ed indice* ≥ 2, *le matrici T e T^* si individuano reciprocamente (una volta fissate le matrici principali di R ed S).*

Moltiplicando a destra per C_1 la (14 4) ed usando la (15.3) si ha:

$$\pi R C_1 = \eta S C_2 \overline{T}^*_{-1} \tag{14.4}$$

che moltiplicata a destra per $\overline{R}_{-1}$ ed utilizzando la (14.4′) offre:

$$\pi R C_1 \overline{R}_{-1} = \eta S C_2 \overline{S}_{-1} \overline{\pi}^*_{-1} . \tag{15.5}$$

Poichè C' e C'' sono omomorfe, C_1 e C_2 sono insieme antisimmetriche od antiemisimmetriche; dunque moltiplicando per π a sinistra la (15.5) trasposta coniugata si ottiene infine:

$$\pi R C_1 \overline{R}_{-1} \overline{\pi}_{-1} \quad \eta \pi \pi^* S C_2 \overline{S}_{-1} \tag{15.6}$$

dove $\pi \pi^*$ è non degenere. È chiaro che sia la matrice $\pi \pi^*$ che $S C_2 \overline{S}_{-1}$ sono permutabili con C'' e perciò sono composte mediante le matrici ϱ_i e σ_i di ordini q_i; ne segue che anche il primo membro della (15.6) sarà composta mediante le ν matrici $\tau_i = \eta \varrho_i \sigma_i$. Ricordando il Lemma 3 e che le righe di π sono linearmente indipendenti si vede facilmente che $\alpha_i \sigma_i$ e $\alpha_i \tau_i$ sono matrici adp.. Si ha dunque il

TEOR. 11: *nelle ipotesi di Teorema* 10, *$\pi \pi^*$ è pseudo-simmetrica definita positiva o negativa secondo che $\eta = 1$ o -1.*

Dimostriamo il

TEOR. 12: *nelle stesse ipotesi, tutte le radici caratteristiche di $\pi \pi^*$ sono anche radici caratteristiche di $T T^*$.*

Mediante le (14 4), (14.4′), otteniamo che:

$$\pi \pi^* S = S T T^* . \tag{15.7}$$

---

[10] L'ipotesi che i caratteri di R ed S siano uno è sufficiente ma non necessaria; noi in pratica supporremo sempre verificata la (15.3).

Sia ora G la matrice che porta $\pi \pi^*$ alla forma canonica D composta mediante t matrici scalari $\beta_i I_{r_i}$; suddividendo allora $G S = S'$ in corrispondenza a D ([11]), la (15.7) dà luogo alle:

$$S_i (T T^* - \beta_i I_{n'}) = 0 \tag{15.8}$$

che, per l'indipendenza delle righe di S_i implica che β_i sia una radice caratteristica di $T T^*$ di molteplicità almeno eguale ad r_i, e ciò vale per ogni i.

Se S è una Rgdq. ([12]) essa è non degenere e la (15.7) ci dice che $\pi \pi^*$ e $T T^*$ sono simili per contragredienza; quindi si ha il

TEOR. 13: *nelle ipotesi di Teorema* 10, *se* S *è una Rgdq.,* $T T^*$ *ha le stesse radici caratteristiche di* $\pi \pi^*$ *ed è pseudosimmetrica definita.*

16. Sin qui abbiamo supposto R ed S equiformi; ma è chiaro che se R ed S fossero soltanto formalmente equiformi $\pi\pi^*$ sarebbe ancora pseudosimmetrica anche se semidefinita anzichè definita. Allora insieme alla (15.6) con ragionamento del tutto analogo si otterrebbe la

$$\pi^* \pi R C_1 \overline{R}_{-1} = \eta \pi^* S C_2 \overline{S}_{-1} \overline{\pi}^*_{-1} \tag{16.1}$$

dalla quale si ottiene che anche $\pi^* \pi$ è pseudo-simmetrica semidefinita. Osserviamo ora che, per la (15.5), π e π^* hanno la stessa caratteristica; ma poichè per la (15.6) π e $\pi\pi^*$ mentre per la (16.1) π^* e $\pi^* \pi$ hanno la stessa caratteristica, anche $\pi \pi^*$ e $\pi^* \pi$ hanno la stessa caratteristica. Questa osservazione non è che un corollario del

TEOR. 14: *nelle ipotesi di Teorema* 10, $\pi\pi^*$ *e* $\pi^*\pi$ *sono pseudo-simmetriche semi-definite con le stesse radici caratteristiche; inoltre le radici caratteristiche non nulle di* $\pi\pi^*$ *e* $\pi^*\pi$ *hanno le stesse molteplicità.*

Se h è la caratteristica di $\pi \pi^*$, possiamo porre

$$G \pi Q^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| , \qquad Q \pi^* G^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} \pi_1 & \pi_2 \\ \hline \pi_3 & \pi_4 \end{array} \right\|$$

([11]) D non è la matrice secondaria di $G S$ ma è chiaro che cosa intenda con l'espressione del testo.

([12]) Se R ed S sono della stessa classe, come richiede la nostra definizione di equiformismo, ciò implica che anche R è una Rgdq.; ma come abbiamo già rilevato, potrebbe definirsi un equiformismo con R ed S non necessariamente della stessa classe ed allora il supporre soltanto S quadrata è meno restrittivo.

e quindi:

$$G\,\pi\,\pi^*\,G^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} \pi_1 & \pi_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad Q\,\pi^*\,\pi\,Q^{-1} \left\| \begin{array}{c|c} \pi_1 & 0 \\ \hline \pi_3 & 0 \end{array} \right\| .$$

Poichè dalle (15.5) si ricava che π_1 è quadrata di ordine h e non degenere, ne segue subito il nostro teorema [13].

Consideriamo ora il polinomio caratteristico di $\pi\pi^*$:

$$(16.2) \qquad | \lambda I_{m'} - \pi\pi^* | = \lambda^{m'} + a_{m'} \lambda^{m'-1} + \ldots + a_2 \lambda + a_1 ;$$

poichè le radici caratteristiche di di $\pi\pi^*$ sono tutte positive, l'annullarsi di a_s porta l'annullarsi di tutti gli a_r con $r < s$ e poichè $\pi\pi^*$ è diagonalizzabile ciò implica l'annullarsi di s radici caratteristiche (non tutte necessariamente distinte). Perciò la caratteristica di $\pi\pi^*$ è $m' - s$ che sarà anche la caratteristica di π e π^*. Ma allora, a causa delle (15.7), (14.4) possiamo enunciare il

TEOR. 15: *l'annullarsi di a_s nella (16.2) porta che la caratteristica comune di π, π^*, $\pi\pi^*$, $\pi^*\pi$ è $m' - s = m - s'$ e che le caratteristiche di T e di $T\,T^*$ (non necessariamente eguali) non superano $n' - s$, quelle di T^* e di $T^*\,T$ non superano $n - s'$.*

Se, in particolare $s = m'$, le matrici π e π^* si annullano; se perciò poniamo la

DEF. 14: una Rgd. su F la diciamo *primitiva* se le sue colonne sono linearmente indipendenti in F.

si ha il

TEOR. 16: *quando S $[R]$ sia primitiva, l'annullarsi della traccia di $\pi\pi^*$ porta l'annullarsi di T $[T^*]$.*

17. LEMMA 4: *se A, B e X sono tre matrici rispettivamente di tipi $(m, n), (p, n), (n, n-m)$, e quindi $n < m$, tali che sia:*

$$A\,X = 0 \qquad B\,X = 0$$

e se A è di caratteristica m, X di caratteristica $n - m$, esiste almeno una matrice θ per la quale si abbia:

$$B = \theta\,A$$

---

(13) Nel caso in cui π e π^* siano matrici arbitrarie non si può adoperare la non degeneresoenza di π_1; si ottiene però che $\pi\pi^*$ e $\pi^*\pi$ hanno le stesse radici caratteristiche e quelle non nulle con la stessa segnatura.

Infatti, dicendo h la caratteristica di $\left\| \frac{A}{B} \right\|$, e quindi intanto $h \geq m$, si ha che l'equazione $\left\| \frac{A}{B} \right\| x_{-1} = 0$ è risoluta dalle $n - m$ colonne indipendenti di X, perciò si ha $n - h \geq n - m$ onde $h \leq m$ ed infine $h = m$. Perciò le righe di B sono combinazioni lineari di quelle di A ([14]).

È allora facile dimostrare il

TEOR. 17: *se date due Rgdq. R ed S, R è formalmente equiforme ad S, anche S è formalmente equiforme ad R e vale la* (15.3).

Infatti, a causa delle (11.1), (15.2), si ha insieme:

$$R^j\, C_1\, \overline{T}_{-1}\, C_2^{-1}\, C_2\, \overline{S}^i_{-1} = 0 \qquad S^j\, C_2\, \overline{S}^i_{-1} = 0 \quad \text{per } i \neq j.$$

Questo teorema poteva anche ottenersi adoperando l'osservazione che si trova nella nota I ([20]) ed il

TEOR. 18: *se R ed S sono Rgdq. equiformi, anche le loro matrici di* WEYL *sono equiformi.*

Infatti dalla (9.2) con la sua analoga per S, mediante le (14.4), (14.5), si ottiene:

$$S\, T\, W = S\, W'\, T; \tag{17.1}$$

analogamente, mediante le (14.4'), (14.5'), si ha:

$$R\, T\, W' = R\, W\, T. \tag{17.1'}$$

Quindi se S ed R sono Rgdq. si ha l'enunciato.

Il Teorema 18 può essere generalizzato nel caso dell'isomorfismo; sussiste infatti il

TEOR. 19: *due matrici Rgd. isomorfe, hanno isomorfe le loro matrici di* WEYL.

([14]) Questa semplicissima dimostrazione è del prof. CHERUBINO; in una nostra precedente dimostrazione (ispirata da un teorema di [1]) si era trovato che:

$$\theta = B\,[X' - X\,(A'\,X)^{-1}\,A'\,X']\,(A\,X')^{-1}$$

dove A' ed X' sono matrici arbitrarie tali che $\left\| \frac{A}{A'} \right\|$ e $(X \mid X')$ siano quadrate non degeneri.

Procedendo formalmente come nel precedente teorema si giunge alla (17.1) e quindi subito alla:

$$S\ T\ W = C''\ S\ T \tag{17.2}$$

da cui essendo T in $\mathcal{F}$ e (ora) non degenere si ricava che $T\ W\ T^{-1}$ è una matrice di WEYL di S.

Come teorema inverso si ha il

TEOR. 20: *due Rgd. R ed S complete di tipo proporzionale e con le matrici secondarie C' e C'' omomorfe, sono equiformi se le loro matrici di* WEYL *sono equiformi in senso stretto* [15].

Se W e W' sono le matrici di WEYL di R ed S, D e D' sono matrici diagonali aventi per elementi radici caratteristiche di W e W' e tali che

$$E = \left\| \begin{array}{c|c} C' & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right\| \qquad E' = \left\| \begin{array}{c|c} C'' & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array} \right\|$$

siano ancora omomorfe, determiniamo due matrici R' ed S' a righe linearmente indipendenti tali che $R'' = \left\| \frac{R}{R'} \right\|$, $S'' = \left\| \frac{S}{S'} \right\|$ siano Rgdq. con le matrici di WEYL W e W' e le matrici secondarie E ed E'; quindi

$$W = R''^{-1}\ E\ R'' \qquad W' = S''^{-1}\ E'\ S''$$

che, sostituite nella relazione dell'equiformismo delle W e W', danno

$$S''\ T\ R''^{-1}\ E = E'\ S''\ T\ R''^{-1} \tag{17.3}$$

La (17.3) insieme alla posizione:

$$\pi\ R'' = S''\ T \tag{17.4}$$

ci assicura che R'' è equiforme ad S''. Per la completezza di S ed R, C' e D (e quindi C'' e D') non hanno elementi eguali, quindi la (17.3) ci assicura che π deve essere composta, mediante π_1 e π_2, come E ed E'. Perciò dalla (17.4) si ha immediatamente che R è equiforme ad S; è poi chiaro come si dimostri completamente il teorema.

---

[15] Diciamo *equiformi in senso stretto* due matrici di WEYL equiformi e della stessa classe.

Il caso particolare più importante è quello in cui si tratti di isomorfismo; in questo caso basta supporre una delle Rgd. completa e le due matrici di WEYL isomorfe.

Supponiamo ora che R ed S siano equiformi insieme alle loro matrici di WEYL W e W'; è immediato che

$$(17.5) \qquad T\,T^*\,W' = W'\,T\,T^* \qquad\qquad (17.5') \qquad T^*\,T\,W = W\,T^*\,T$$

e quindi che $T\,T^*$ appartiene all'algebra moltiplicazione di W' e $T^*\,T$ a quella di W. Ne segue che se W e W' sono pure, $T\,T^*$ e $T^*\,T$ devono essere non degeneri.

18. DEF. 15: una matrice quadrata A di ordine n con elementi in $\mathcal{F}$ si dice una *proiettività* della Rgd. R di tipo (m, n) se:

$$(18.1) \qquad \pi\,R = R\,A$$

dove π è una matrice quadrata di ordine m, permutabile con la matrice secondaria C' di R, con elementi in $\mathcal{C}$, e che diciamo una *sostituzione* di R; l'equazione (18.1) la diciamo poi una *moltiplicazione* di R. L'insieme delle moltiplicazioni di R costituisce un'algebra che diciamo l'*algebra moltiplicazione* di R; l'ordine μ di tale algebra lo diciamo l'*indice moltiplicazione* di R.

È chiaro che anche l'insieme delle proiettività e quello delle sostituzioni costituiscono due algebre che diremo l'algebra proiettività e l'algebra sostituzione; per mostrare poi l'isomorfismo tra l'algebra proiettività e l'algebra moltiplicazione basterà mostrare che la corrispondenza definita dalla (18.1) tra moltiplicazioni e proiettività è biunivoca.

Che, data la moltiplicazione, risulti univocamente determinata mediante la (18.1) una proiettività, è ovvio. Viceversa, data la proiettività A, supponiamo che esistano due distinte determinazioni della corrispondente moltiplicazione e siano

$$(18.1') \qquad \pi'\,R = R\,A \qquad\qquad (18.1'') \qquad \pi''\,R = R\,A\,;$$

confrontando la (18.1') e la (18.1''), si ottiene:

$$(\pi' - \pi'')\,R = 0$$

la quale, essendo le righe di R linearmente indipendenti, implica che la (18.1') e la (18.1'') non sono distinte. Perciò l'algebra moltiplicazione $\mathcal{A}$ e l'algebra proiettività $\mathcal{P}$ sono isomorfe. Qualora poi la Rgd. R fosse primitiva, in modo del tutto analogo si vede che anche l'algebra sostituzione $\mathcal{S}$

è in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{C}$ (e quindi con $\mathcal{P}$). In particolare, abbiamo ottenuto che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$ hanno sempre lo stesso ordine che, se R è primitiva, è anche l'ordine di $\mathcal{S}$ considerata come un'algebra su $\mathcal{F}$.

Vediamo ora una proprietà che discende subito da quelle del n. 14 quando si facciano coincidere R ed S. Sempre a causa del Teorema 6, la matrice π è composta mediante le matrici π_i degli stessi ordini delle corrispondenti matrici scalari $\alpha_i I_{p_i}$ da cui è composta la matrice secondaria C'; perciò, suddividendo al solito R in corrispondenza a C', dalla (18.1), si ottengono le:

$$\pi_i R^i = R^i T \tag{18.2}$$

Per il Lemma 3, se C è una matrice principale di R, si ha:

$$R^i C \overline{R}^j_{-1} = 0; \tag{18.3}$$

allora, moltiplicando a sinistra per π_i la (18.3) ed adoperando la (18.2), si ottiene:

$$R^i A C \overline{R}^j_{-1} = 0. \tag{18.4}$$

Sia ora μ l'indice moltiplicazione di R; poichè μ è anche l'ordine dell'algebra proiettività $\mathcal{P}$ di R, possiamo trovare in $\mathcal{F}$, μ matrici A linearmente indipendenti che restano linearmente indipendenti dopo essere state moltiplicate a destra per la matrice non degenere C: perciò possiamo trovare in $\mathcal{F}\,\mu$ matrici linearmente indipendenti soddisfacenti le (18.4) qualunque siano i ed j. Ma il massimo numero di tali matrici si è già visto che è il carattere $h+1$ di R; si ha dunque sempre:

$$\mu \leq h + 1. \tag{18.5}$$

Per le Rgd. generali non siamo finora riusciti a migliorare questo risultato; a causa però del Lemma 4, possiamo enunciare il

Teor. 21; *il carattere di una Rgd. non supera mai il suo indice moltiplicazione; tali numeri coincidono per le Rgdq.*

Supponiamo ora che la matrice A appartenga all'algebra moltiplicazione della matrice di Weyl W di R; si abbia cioè:

$$A W = W A;$$

allora dall'equazione fondamentale (9.2), si ottiene subito:

$$R W A = C' R A = R A W. \tag{18.6}$$

Confrontando la (18 6) e gli ultimi due membri scritti nella (18.7) si vede che R ed RA sono due matrici Rgd. con la stessa matrice secondaria e la stessa matrice di WEYL; perciò il Teorema 20 ci assicura che se R è completa esiste in C una matrice quadrata non degenere soddisfacente la (18.1) e permutabile con C'. Dunque:

TEOR. 22: *Se R è una Rgd. completa, l'algebra moltiplicazione della sua matrice di* WEYL *appartiene all'algebra delle proiettività di R.*

Il teorema precedente si inverte parzialmente. Sia infatti R una Rgdq. allora dalla (18 6), moltiplicando a destra per A, ed usando la (18 1), si ottiene:

$$R\,W\,A = \pi\,C'\,R \tag{18.7}$$

D'altra parte moltiplicando a sinistra per π la (9 2) e ricordando la (18.1) si ottiene:

$$\pi\,C'\,R = \pi\,R\,W = R\,A\,W;$$

questa confrontata con la (18.7) ci dà:

$$R\,W\,A = R\,A\,W. \tag{18 8}$$

Avendo supposto che R sia una Rgdq., la (18.8) ci dice che A appartiene all'algebra moltiplicazione di W. Poichè già sappiamo, dal Teorema 22, che per le Rgd. complete (e quindi per le Rgdq.) l'algebra delle proiettività contiene l'algebra moltiplicazione di W, abbiamo così dimostrato che, se R è una Rgdq., la sua algebra proiettività coincide con l'algebra moltiplicazione della sua matrice di WEYL. Ma abbiamo visto che le algebre moltiplicazione e proiettività di una qualunque Rgd. sono isomorfe; si può dunque enunciare il

TEOR. 23: *Se R è una Rgdq. con la matrice di* WEYL *W l'algebra moltiplicazione di R è isomorfa all'algebra moltiplicazione di W.*

Se l'algebra moltiplicazione di W è un'algebra divisione (cioè se W è pura), è tale anche l'algebra proiettività di R (cioè le A sono non degeneri) e la sua algebra moltiplicazione; e viceversa. Poniamo la

DEF 16: una Rgd. si dice *catara* quando è prosomilica ad una Rgd. la cui matrice di WEYL è pura; se questa è impura la Rgd. si dice *acatara.*

Quanto si è detto sopra si può dunque enunciare come

TEOR. 24: *le Rgdq. sono catare allora e solo che la loro algebra moltiplicazione è un'algebra divisione.*

19. Def. 17: una Rgd. la diciamo *riducibile* se è prosomilica ad una matrice della forma:

$$\left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| \tag{19.1}$$

dove R_3 è una matrice di tipo proporzionale a quello di R; se, in particolare, R_2 è una matrice nulla diciamo che R è *quasi diagonalizzabile.* Le Rgd. non riducibili le diciamo *irriducibili.*

Se (m, n) è il tipo di R e (m_2, n_2) quello di R_3, dalla definizione segue che anche il tipo (m_1, n_1) di R_1 è proporzionale a quello di R e quindi nella definizione si, poteva parlare di R_1 anzichè di R_3. Inoltre in luogo della 19.1) si poteva usare la:

$$\left\| \begin{array}{c|c} R_3 & 0 \\ \hline R_2 & R_1 \end{array} \right\|; \tag{19.1'}$$

infatti, si può mostrare come per le matrici di Weyl che ogni Rgd. della forma (19.1) è (quasi equiforme e quindi) prosomilica ad una della forma (19.1').

Sussiste l'analogo del Lemma di Schur

Lemma 5: *se, date due Rgdq. irriducibili R ed S, R è formalmente prosomilica ad S le matrici π e T sono entrambe nulle oppure sono quadrate non degeneri sì che R ed S sono associate.*

Questo lemma, la cui ovvia dimostrazione omettiamo, ci permette di enunciare il

Teor. 25: *l'algebra moltiplicazione di una Rgdq. irriducibile è un'algebra divisione.*

Infatti, come si è già detto, l'algebra moltiplicazione di una Rgdq. è isomorfa all'algebra delle proiettività ed il Lemma 5, quando si supponga R coincidente con S, ci assicura che per Rgdq. irriducibili, le proiettività sono nulle o non degeneri.

Ricordando allora il Teorema 24 si ha il

Teor. 26: *le Rgdq. irriducibili sono catare.*

Invertiremo tra poco questo teorema; per ora ci limitiamo a notare che se l'algebra moltiplicazione di una Rgdq. deve non essere un'algebra divisione, la Rgdq. deve ammettere proiettività degeneri il che (come si può constatare riprendendo la dimostrazione del Lemma di Schur) implica che la nostra Rgdq. è composta mediante le matrici quadrate R_1 ed R_4; poichè dunque R_1 è di tipo proporzionale a quello di R, la Rgdq. sarà quasi diagonalizzabile. Quindi sempre per il Teorema 24, le matrici acatare sono quasi diagonalizzabili; poichè d'altra parte le matrici quasi diagonalizzabili sono un caso particolare delle riducibili, il Teorema 26 ci permette di enunciare il

TEOR. 27: *le Rgdq. sono catare allora e solo che non sono quasi diagonalizzabili.*

Dimostriamo il

TEOR. 28: *le Rgdq. riducibili sono quasi diagonalizzabili.*

A causa del Teorema 27, basterà dimostrare che le Rgdq. riducibili sono acatare. Per questo, partiamo dalla (17.2) dove ora S è della forma (19.1); posto $W = \Gamma\, C^{-1}$, dopo aver moltiplicato a sinistra per $\overline{T}_{-1}$, si ha:

$$S\, T\, \Gamma\, \overline{T}_{-1} = C''\, S\, T\, C\, \overline{T}_{-1} \tag{19.8}$$

che ponendo ancora:

$$\Gamma'' = T\, \Gamma\, \overline{T}_{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array} \right\|, \quad C_0 = T\, C\, \overline{T}_{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right\|, \quad C'' = \left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right\|$$

diventa:

$$\left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right\| \tag{19.9}$$

da cui, a causa della non degenerescenza di S e di R_3, si ha che C_0 e C_4 sono non degeneri. Possiamo dunque considerare, come nella dimostrazione del Teorema di POINCARÉ-WEYL, la matrice

$$G = \left\| \begin{array}{c|c} I & -C_2\, C_4^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array} \right\|$$

mediante l'uso della quale la (19.9) diventa:

$$\left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2' \\ \hline 0 & R_3' \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1' & 0 \\ \hline 0 & \Gamma_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2' \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} C_1' & 0 \\ \hline 0 & C_4 \end{array} \right\| \tag{19 10}$$

che dimostra appunto il nostro teorema.

Posto ora $W_1' = \Gamma_1'\, C_1'^{-1}$, $W_4 = \Gamma_4\, C_4^{-1}$, si ha:

$$R_1\, W_1' = D_1\, R_1 \qquad R_3\, W_4 = D_2\, R_3 \tag{19.11}$$

a causa delle quali anche R_1 ed R_3 sono Rgdq. Possiamo dunque invertire il Teorema 26 e concludere con il

TEOR. 29: *le nozioni di Rgdq. acatare, riducibili e quasi diagonalizzabili coincidono; inoltre le matrici R_1 ed R_3 della* (19 1) *sono esse stesse Rgdq.*

Dall'ultima asserzione di questo teorema, discende che anche R_1 ed R_3 possono o no essere catare (o irriducibili) e che, nel secondo caso, sono anch'esse quasi diagonalizzabili. Poichè poi si può dimostrare, come per le matrici di WEYL, che una Rgdq. è riducibile allora e solo che è associata ad una matrice della forma (19.1), si può concludere con il

TEOR. 30: *ad ogni Rgdq. è associata una forma canonica affatto analoga a quella delle matrici di* WEYL; *inoltre i numeri definiti per queste ultime, si possono definire anche per le Rgdq. ed anzi per ogni Rgdq. coincidono con quelli della sua matrice di* WEYL.

Valgono dunque, in particolare, le proprietà del n. 7.

20. DEF. 18: una Rgd. R la diciamo *impura* se è quasi-equiforme ad una matrice della forma (19 1)[16] dove R_1 ed R_3 siano Rgd. della stessa classe di R; in particolare, se R_2 è una matrice nulla diciamo che R è *decomponibile.* Le Rgd. non impure e non decomponibili le diciamo *pure* ed *indecomponibili.*

Qualora le Rgd. R_1 ed R_3 non siano pure, mediante ulteriori quasi equiformismi ci possiamo ridurre ad una matrice della forma

$$(20.1) \qquad \left\| \begin{array}{c|c|c} R_{11} & \cdots\cdots & R_{1t} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots\cdots & R_{tt} \end{array} \right\|$$

dove le R_{ii} sono Rgd. pure tutte della stessa classe di R. Questo premesso, mostriamo che, pur essendo le Rgd. impure particolari Rgd. riducibili (le due nozioni anzi coincidendo per le Rgd. monogeneri), non tutte le Rgd. riducibili sono impure. Si ha infatti il

TEOR. 31: *una Rgd. quasi equiforme ad una matrice della forma* (20.1) *può essere impura soltanto se per tutti i suoi generi p_i si ha:*

$$(20.2) \qquad p_i \geq t \qquad (i = 1, \ldots, \nu);$$

---

[16] Naturalmente anche in questa definizione in luogo della (19.1) avremmo potuto usare la (19.1').

in particolare, se la (20.1) *è di tipo* (m, n), *dovrà essere* $m \geq t\nu$. *Inoltre se qualcuno dei generi è primo tutti gli altri sono suoi multipli.*

Se C' è la matrice di R e D_k quella di R_{kk}, poichè ogni D_k deve essere omomorfa a C', si ha subito la (20.2); essendo poi m la somma dei generi segue subito anche la seconda affermazione. Per la terza, indicando con p_{ki} i generi di R_{kk}, a causa della (14.1), se p_i è primo, esso è eguale a ϱ od a λ_i; ma nel secondo caso sarebbe $p_i \leq p_{ki}$ e perciò deve essere $p_i = \varrho$ il che dimostra il teorema.

Dopo queste considerazioni studieremo soltanto Rgdq., e cominceremo dall'osservare che in questo caso nella Definizione 18 basta supporre che soltanto R_1 (od R_3) sia una Rgdq. della stessa classe di R; infatti, ragionando come nel Teorema 28, ne consegue che anche R_3 (od R_1) è una Rgdq. che si vede poi essere della stessa classe di R.

Sussiste anche ora un analogo del Lemma di SCHUR, per quanto in ipotesi un po' più restrittive; si ha cioè il

LEMMA 6: *se, date due Rgdq. R ed S pure, è (con i soliti simboli):*

$$\pi_i R^i = S^i T \tag{20.3}$$

dove π_i *hanno caratteristiche* h_t *proporzionali ai generi di R ed S* [17]; *la matrice* π *(composta mediante le* π_i*) e la matrice T sono entrambe nulle oppure sono quadrate non degeneri sì che R ed S sono isomorfe.*

Supponiamo che π_i e T non siano nulle e sia h' la caratteristica di T; esistono allora quattro matrici quadrate non degeneri g_i e Q_i in $\mathfrak{C}$, P ed H in $\mathfrak{F}$ tali che:

$$g_i \pi_i Q_i = \left\| \begin{array}{c|c} I_{h_t} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| = J_i \tag{20.4}$$

$$P T H = \left\| \begin{array}{c|c} I_{h'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| = J' . \tag{20.4'}$$

È chiaro come la (20.2) dia luogo alla

$$J_i Q_i^{-1} R^i H = g_i S^i P^{-1} J' \tag{20.5}$$

dove le matrici

$$R^{i'} = Q_i^{-1} R^i H \quad , \quad S^{i'} = g_i S^i P^{-1}$$

---

[17] L'esempio più semplice in cui sia verificata questa ipotesi è quello in cui R ed S sono equiformi.

sono (associate e quindi, trattandosi di matrici monogeneri) isomorfe ad R^i, S^i. Perciò detta Q la matrice composta mediante le Q_i e G quella composta mediante le g_i, le matrici $R' = Q^{-1} R H$, $S' = G S P^{-1}$ sono isomorfe ad R ed S. D'altra parte la $G \pi Q$ è composta mediante le matrici J_i e quindi, con uno scambio delle righe di R' ed S', si ottiene:

$$J R'' = S'' J' \tag{20.6}$$

dove si è chiamata J la matrice composta mediante le J_i a meno dello scambio delle linee atto a portare il minore non degenere di ordine $h = \sum_{i=1}^{\nu} h_i$ ai primi posti e si è posto:

$$R'' = \left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline R_3 & R_4 \end{array} \right\| \qquad S'' = \left\| \begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array} \right\| \tag{20.7}$$

con R_1 ed S_1 di tipo (h, h'). Ma dalla prima equazione del l'equiformismo per le Rgdq. si ricava che π e T hanno la stessa caratteristica ([18]); perciò R_1 ed S_1 sono quadrate e quindi il loro tipo è proporzionale a quello di R ed S. Sostituendo ora le (20.4), (20.4'), (20.7) nella (20.6) si ottiene che R_2 ed S_3 sono nulle; poichè, a causa delle ipotesi fatte sulle h_i, $R_1 = S_1$ è della stessa classe di R'' (e di S'') si avrebbe dunque che R'' ed S'' sono impure e ciò, essendo contrario alle ipotesi, dimostra il Lemma.

Dimostriamo ora il

TEOR. 32: *una Rgdq. è impura allora e solo che è quasi isomorfa ad una matrice della forma* (19 1) *dove R_1 (od R_3) è una Rgdq. della stessa classe di R.*

Che la condizione sia sufficiente è chiaro. Per mostrarne la necessità, consideriamo le equazioni che esprimono che una Rgdq. R è quasi equiforme ad una Rgdq. S della forma (19.1); le potremo scrivere:

$$\left\| \begin{array}{c} \pi_1 \\ \hline \pi_2 \end{array} \right\| R = \left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} T_1 \\ \hline T_2 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c} \pi_1 \\ \hline \pi_2 \end{array} \right\| C' = \left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \pi_1 \\ \hline \pi_2 \end{array} \right\|$$

da cui si ricava che R è equiforme ad R_3. Suddividendo perciò R ed R_3 in corrispondenza a C' ed a D_2 e ragionando come nel Lemma 6, si avrà:

$$(I \mid 0) R'' = R_3' (I \mid 0) \tag{20.8}$$

([18]) Naturalmente questo non implica che J e J' coincidano.

con R'' quasi isomorfa ad R ed R'_3 isomorfa ad R_3. Sostituendo infine la la prima delle (20.7) nelle (20.8), si dimostra il teorema.

21. Il teorema 28 ci assicura che le Rgdq. impure sono quasi diagonalizzabili; dimostriamo il

TEOR. 33: *le Rgdq. impure sono decomponibili.*

Possiamo senz'altro partire dalla (19.10) che, supponendo per semplicità che R sia digenere, scriveremo:

$$\left\| \begin{array}{c|c} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \\ \hline 0 & R_{31} \\ 0 & R_{32} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline 0 & W_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_1 I_{p'_1} & 0 & & \\ 0 & \alpha_2 I_{p'_2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \alpha_1 I_{p''_1} & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & \alpha_2 I_{p''_2} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \\ \hline 0 & R_{31} \\ 0 & R_{32} \end{array} \right\|$$

Da questa, a causa del Lemma 3, si ottiene:

$$(R_{11} \mid R_{21}) \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_4 \end{array} \right\| \overline{(0 \mid R_{32})}_{-1} = 0$$

$$(R_{12} \mid R_{22}) \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_4 \end{array} \right\| \overline{(0 \mid R_{31})}_{-1} = 0.$$

$$(\ 0 \mid R_{31}) \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_4 \end{array} \right\| \overline{(0 \mid R_{32})}_{-1} = 0$$

Le due terne di matrici R_{31}, R_{21}, $C_4 \overline{(R_{32})}_{-1}$ e R_{32}, R_{22}, $C_4 \overline{(R_{31})}_{-1}$ soddisfano le ipotesi del Lemma 4; esistono perciò due matrici θ_1 e θ_2 tali che:

$$R_2 = \left\| \begin{array}{c} R_{21} \\ \hline R_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \theta_1 & 0 \\ \hline 0 & \theta_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} R_{31} \\ \hline R_{32} \end{array} \right\| = \vartheta R_3$$

e quindi:

$$\pi R = \left\| \begin{array}{c|c} I_{n_1} & -\vartheta \\ \hline 0 & I_{n_2} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R_1 & 0 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right\| = R'.$$

Poichè inoltre si ha:

$$\vartheta D_2 = D_1 \vartheta$$

π è permutabile con la matrice secondaria di R ed il teorema è dimostrato.

Nel corso della precedente dimostrazione abbiamo anche visto che D_1 e D_2 sono le forme canoniche di W_1 e W_4 e perciò W_1 e W_4 sono matrici di WEYL della stessa classe e la matrice di WEYL di R è impura in senso stretto; ma viceversa, se questo accade, la Rgdq. R è acatara e quindi riducibile, W_1 e W_4 sono della stessa classe, D_1 e D_2 sono omomorfe. Si ha dunque il

TEOR. 34: *una Rgdq. è impura allora e solo che la sua matrice di* WEYL *è impura in senso stretto.*

Il Teorema 34 induce a porre la

DEF. 19: una Rgd. la diciamo *W-impura* quando la sua matrice di WEYL è impura in senso stretto.

Allora il Teorema 34 si può enunciare come il

TEOR. 34′: *una Rgdq. è impura allora e solo che è W-impura.*

In modo ovvio si dimostra poi il

TEOR. 35: *ogni Rgdq. R impura è quasi isomorfa ad una matrice R' composta mediante R_i a due a due distinte che sono Rgdq. pure ovvero composte mediante Rgdq. pure ed eguali R_{ii} tutte della stessa classe e non isomorfe a R_{kk} per $i \neq k$.*

che posta la

DEF. 20: due Rgd R ed S pure e riducibili le diciamo *disgiunte* quando nessuna delle componenti irriducibili di R è associata a qualche componente irriducibile di S.

può essere completato con il

TEOR. 36: *la Rgdq. R' di Teorema 35 è unica a meno di quasi isomorfismi e gli ordini delle R_{ii} dipendono soltanto da R se le sue componenti pure sono tutte disgiunte.*