Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Silvio Cinquini

Sopra il problema dell'approssimazione delle funzioni quasi-periodiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 245-267

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_245_0>

SOPRA IL PROBLEMA DELL'APPROSSIMAZIONE DELLE FUNZIONI QUASI-PERIODICHE

di SILVIO CINQUINI (a Pavia).

In una Nota (¹) di qualche anno fa abbiamo stabilito due risultati relativi al problema dell'approssimazione, mediante polinomi di BOCHNER-FÉJER, delle funzioni quasi-periodiche secondo STEPANOFF; il secondo dei risultati contenuti in tale nostra Nota fornisce un'estensione del ben noto teorema di BOCHNER: *Per ogni successione di Bochner* $\sigma_{B_p}(x)$, $(p = 1, 2, \ldots)$ *relativa a una funzione* $f(x)$ *quasi-periodica* $- S$ è

$$\lim_{p \to +\infty} \quad \limsup_{-\infty < \alpha < +\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} | f(x) - \sigma_{B_p}(x) | \, d x = 0 .$$

Allo stesso problema è dedicato il § I della presente Memoria, nel quale diamo ulteriori proprietà dei polinomi in questione, sempre nell'ipotesi che la funzione da approssimare sia quasi-periodica secondo STEPANOFF; tali proprietà vengono stabilite sotto forma molto ampia (nella quale finora non sono state rilevate nemmeno le analoghe proprietà per il caso particolare delle funzioni periodiche), ma abbiamo cura di rilevare qualche caso particolare che si presenta maggiormente espressivo.

A un ordine di idee un po' diverso appartiene il § II, nel quale si considerano funzioni quasi-periodiche secondo BOHR. Ricordato che il problema dell'approssimazione delle funzioni della classe ora citata è risolto in modo definitivo da un brillante teorema di BOCHNER, il quale afferma che per ogni funzione $F(x)$ quasi-periodica (secondo BOHR) esiste almeno una successione di polinomi di BOCHNER-FÉJER, la quale converge in modo uniforme in tutto $(-\infty, +\infty)$ verso $F(x)$, noi enunciamo alcune proprietà delle derivate dei polinomi di BOCHNER-FÉJER relativi a $F(x)$, quando si supponga,

---

(¹) S. CINQUINI. *Sopra i polinomi di Bochner-Féjer e le funzioni quasi-periodiche secondo Stepanoff*. (Rend. Istituto Lombardo di Scienze e lettere, Vol LXXVIII (1944-45), pp. 391-400).

in più, che $F(x)$ sia assolutamente continua su ogni intervallo finito. Queste proprietà sono basate sul fatto, da noi posto in luce (n. 8), che la derivata del polinomio di BOCHNER-FÉJER relativo a $F(x)$ coincide con il polinomio di BOCHNER-FÉJER relativo a $F'(x)$.

Infine sorge il problema se alle derivate delle funzioni che stiamo considerando si possa estendere il teorema di BOCHNER riportato nelle nostre primissime righe (nonchè quelle sue generalizzazioni che noi abbiamo dato): ciò in generale non è vero, come mostrano le considerazioni che concludono la nostra ricerca e dalle quali si ottiene (n. 12) una condizione necessaria e sufficiente, affinchè $F'(x)$ sia quasi periodica secondo STEPANOFF; d'altra parte, se è verificata questa ultima ipotesi, la validità di tali estensioni è ovvia.

§ I.

1. GENERALITÀ. α) Per comodità del lettore ricordiamo la seguente definizione di STEPANOFF (²):

Una funzione $f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$, *la quale su ogni intervallo finito sia quasi-continua* (secondo TONELLI) *e integrabile* (nel senso di LEBESGUE) *insieme con* $|f(x)|^{\mu}$, *ove* μ *è un numero reale* ≥ 1, *si chiama quasi-periodica* $-S^{\mu}$, *se, in corrispondenza a ogni* $\varepsilon > 0$, *si può determinare un* $l > 0$ *in modo che in ogni intervallo dell'asse* x *avente ampiezza* l *è contenuto almeno un numero* τ, *per il quale risulta*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} |f(x+\tau) - f(x)|^{\mu}\, dx \leq \varepsilon .$$

qualunque sia il numero reale α.

In particolare, per $\mu = 1$, si usa scrivere S in luogo di S^1.

β) Rinviando per le altre generalità al luogo citato per ultimo in (²), ci limitiamo a richiamare quanto segue.

(²) W. STEPANOFF *Über einige Verallgemeinerungen der fast periodischen Funktionen* (Math. Ann., Bd 95 (1926), pp. 473-498), §§ 2; 3.

N. WIENER. *On the representation of functions by trigonometrical integrals* (Math. Zeitschrift, Bd 24 (1926), pp. 576-616).

A. S. BESICOVITCH. H. BOHR. *Almost periodicity and general trigonometrical series* (Acta Math. Bd 57 (1931), pp. 203 292), Cap. III.

A. S. BESICOVITCH *Almost periodic functions.* (Cambridge, Univ. press, 1932), Cap II.

S. CINQUINI. *Funzioni quasi periodiche.* (Quaderni matematici della Scuola normale superiore di Pisa, n. 4; Litografia Tacchi, Pisa, 1949), Cap. II.

Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ è una base [3] dell'insieme $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$ degli esponenti di FOURIER della funzione $f(x)$ supposta quasi-periodica - S^μ, $(\mu \geq 1)$, l'espressione

$$(1) \qquad \sigma_{B_p}(x) =$$

$$= \sum_{\nu_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{\nu_p=-n_p}^{n_p} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\nu_p|}{n_p}\right) A\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!} + \ldots + \nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right) e^{i\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!} + \ldots + \nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right)x},$$

ove $n_1, \ldots, n_p ; N_1, \ldots, N_p$ sono numeri interi positivi e si intende che sia $A\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!} + \ldots + \nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right) = 0$ quando $\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!} + \ldots + \nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}$ non è un esponente di FOURIER di $f(x)$, si chiama *polinomio di Bochner-Féjer di ordine p relativo a $f(x)$*.

Tenendo presente che è

$$(2) \qquad A\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!} + \ldots + \nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!} + \ldots + \nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right)t} dt,$$

si perviene all'espressione definitiva di $\sigma_{B_p}(x)$, la quale, come è noto, è

$$(1') \qquad \sigma_{B_p}(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\, \Pi_{n_1}\left(\frac{\alpha_1}{N_1!} t\right) \ldots \Pi_{n_p}\left(\frac{\alpha_p}{N_p!} t\right) dt,$$

ove

$$(3) \qquad \Pi_\nu(z) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|k|}{\nu}\right) e^{-ikz} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\operatorname{sen} \nu \frac{z}{2}}{\operatorname{sen} \frac{z}{2}}\right)^2$$

è il nucleo di FÉJER; inoltre vale l'uguaglianza

$$(4) \qquad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Pi_{n_1}\left(\frac{\alpha_1}{N_1!} t\right) \ldots \Pi_{n_p}\left(\frac{\alpha_p}{N_p!} t\right) dt = 1 .$$

---

[3] Vedi, per esempio, S. CINQUINI luogo cit. in [2], Cap. I, n. 25, pag. 55.

γ) Si chiama *successione di Bochner* ogni successione di polinomi di BOCHNER-FÉJER $\sigma_{B_p}(x)$, $(p=1,2,\ldots)$ tale che, per $p \to +\infty$, sia anche

$$N_1 \to +\infty, N_2 \to +\infty, \ldots; \quad \frac{n_1}{N_1!} \to +\infty, \quad \frac{n_2}{N_2!} \to +\infty, \ldots \text{ (4)}.$$

2. TEOREMA A. *Siano $\Phi(u)$, $\Omega(u)$, $h(u)$ tre funzioni definite per $u \geq 0$ con $\Phi(0) = h(0) = 0$, continue e non negative e supponiamo che $\Phi(u)$ sia convessa secondo* JENSEN, *che sia*

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\Omega(u)}{u} = +\infty, \tag{5}$$

e che $h(u)$ sia crescente; sia $k(u)$ la funzione inversa di $h(u)$, e poniamo

$$H(u) = \int_0^u h(v)\,dv, \qquad K(u) = \int_0^u k(v)\,dv. \tag{6}$$

Sia $f(x)$ una funzione quasi-periodica - S, sia $g(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ una funzione quasi continua e integrabile (5) *su ogni intervallo finito insieme con $H[\Phi(2|f(x)|)]$, $K[\Omega(|g(x)|)]$ e si supponga che sia finito il*

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \left\{ \int_\alpha^{\alpha+1} H[\Phi(2|f(x)|)]\,dx + \int_\alpha^{\alpha+1} K[\Omega(|g(x)|)]\,dx \right\} \tag{7}$$

e che inoltre la funzione $\Phi(2|f(x)|)$ sia uniformemente integrabile (6).

Allora se $\sigma_{B_p}(x)$, $(p=1,2,\ldots)$ è una successione di Bochner relativa a $f(x)$, risulta

$$\lim_{p\to+\infty} \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_\alpha^{\alpha+1} |g(x)|\,\Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|)\,dx = 0. \tag{8}$$

a) Per stabilire il teorema enunciato cominciamo a rilevare che ciascuno dei prodotti

$$|g(x)|\,\Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|), \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

è integrabile su ogni intervallo finito.

---

(4) In particolare si può prendere $N_1 = N_2 = \ldots = N_p = p$; $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = (p!)^2$.

(5) Nella presente Memoria l'integrabilità va intesa nel senso di LEBESGUE.

(6) Per questo concetto vedi, per esempio, S. CINQUINI, luogo cit. in (2), Cap. II, n. 4, *a*), pag. 73.

Infatti, tenuto presente che $\Phi(u)$ risulta non decrescente, in virtù della convessità secondo JENSEN abbiamo

$$(10) \qquad \Phi(|f(x)-\sigma_{B_p}(x)|) \leq \Phi\left(\frac{2|f(x)|+2|\sigma_{B_p}(x)|}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{\Phi(2|f(x)|)+\Phi(2|\sigma_{B_p}(x)|)\right\};$$

da cui

$$(11) \quad |g(x)|\,\Phi(|f(x)-\sigma_{B_p}(x)|) \leq \frac{1}{2}\left\{\Phi(2|f(x)|)|g(x)|+\Phi(2|\sigma_{B_p}(x)|)|g(x)|\right\}.$$

D'altra parte, siccome in virtù della (5) possiamo determinare un numero $u_0 > 0$ in modo che, per ogni $u \geq u_0$, sia $u \leq \Omega(u)$, risulta

$$(12) \qquad \Phi(2|f(x)|)|g(x)| \leq u_0\,\Phi(2|f(x)|)+\Omega(|g(x)|)\,\Phi(2|f(x)|);$$

rileviamo che ciascuna delle funzioni che figura al secondo membro della (12) è integrabile su ogni intervallo finito:

1^0) per $\Phi(2|f(x)|)$ ciò è contenuto nell'ipotesi che tale funzione sia uniformemente integrabile;

2^0) per $\Omega(|g(x)|)\,\Phi(2|f(x)|)$ basta tener presente che per la disuguaglianza di YOUNG (7) è

$$(13) \qquad \Phi(2|f(x)|)\,\Omega(|g(x)|) \leq H[\Phi(2|f(x)|)]+K[\Omega(|g(x)|)],$$

ove le funzioni che figurano al secondo membro sono integrabili per ipotesi.

Pertanto la funzione che figura al primo membro della (12) risulta integrabile su ogni intervallo finito, e dalla (11) si conclude immediatamente che anche ciascuno dei prodotti (9) gode di tale proprietà.

b) Le ipotesi fatte sulla funzione $\Omega(u)$ permettono, in base a un nostro risultato(8), di determinare un numero $u_1 > 0$ e una funzione $\Omega_*(u)$, $(0 \leq u < +\infty)$

(7) Vedi, per esempio, HARDY LITTLEWOOD-POLYA. *Inequalities* (Cambridge, Univ. Press., 1934) n. 156, pag. 111.

(8) Vedi S. CINQUINI. *L'estremo assoluto degli integrali doppi dipendenti dalle derivate di ordine superiore* (Annali R. Scuola normale superiore di Pisa, Vol. X (1941), pp. 215-248), n 4 e osservazione.

continua, non negativa, crescente e convessa secondo JENSEN con

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\Omega_*(u)}{u} = +\infty, \tag{14}$$

in modo che sia

$$\Omega_*(u) \leq \Omega(u) + 1, \qquad \text{per } 0 \leq u < u_1;$$

$$\Omega_*(u) \leq \Omega(u), \qquad \text{per } u_1 \leq u.$$

Quindi, indicato con Ω_1 il massimo di $\Omega(u)$ in $(0, u_1)$, siccome $K(u)$ risulta crescente, abbiamo

$$K[\Omega_*(|g(x)|)] \leq K[\Omega(|g(x)|)] + K[\Omega_1 + 1]:$$

pertanto dalle ipotesi fatte si deduce che $K[\Omega_*(|g(x)|)]$ è integrabile su ogni intervallo finito e che è finito il

$$\limsup_{-\infty<a<+\infty} \int_a^{a+1} K[\Omega_*(|g(x)|)]\, dx.$$

Allora, in modo analogo alla deduzione tratta dalla (13), si conclude che il prodotto $\Phi(2|f(x)|)\,\Omega_*(|g(x)|)$ risulta integrabile su ogni intervallo finito. Inoltre, posto

$$A = \limsup_{-\infty<a<+\infty} \left\{ \int_a^{a+1} H[\Phi(2|f(x)|)]\, dx + \int_a^{a+1} K[\Omega_*(|g(x)|)]\, dx \right\}, \tag{15}$$

possiamo affermare che il numero A è finito

c) Sia $u = \omega_*(v)$, $(0 \leq v < +\infty)$ la funzione inversa di $v = \Omega_*(u)$; $\omega_*(v)$ risulta continua, non negativa, crescente e dalla (14) segue

$$\lim_{v \to +\infty} \frac{\omega_*(v)}{v} = 0.$$

Pertanto, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un $\eta > 0$ in modo che, per ogni numero positivo w con $w < \eta$, sia

$$w\, \omega_*\left(\frac{A}{w}\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Per ogni numero reale α poniamo

$$\Delta_p(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|)\, dx, \tag{17}$$

e ricordiamo che in virtù di un nostro precedente risultato (9) è

$$\lim_{p \to +\infty} \limsup_{-\infty < \alpha < +\infty} \Delta_p(\alpha) = 0 ;$$

quindi possiamo determinare un numero $p' \geq 0$ in modo che per ogni intero $p > p'$ e per qualunque α reale sia

$$\Delta_p(\alpha) < \eta :$$

allora in virtù della (16) per ogni intero $p > p'$ e per qualunque α reale con

$$\Delta_p(\alpha) \neq 0 \tag{18}$$

risulta

$$\Delta_p(\alpha)\, \omega_* \left(\frac{A}{\Delta_p(\alpha)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{19}$$

d) Supposto $p > p'$, per ogni α reale per cui ha luogo la (18), in virtù della disuguaglianza di JENSEN si ottiene (10)

$$\Omega_* \left(\frac{\int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|)\, |g(x)|\, dx}{\int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|)\, dx} \right) \leq$$

$$\leq \frac{\int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|)\, \Omega_*(|g(x)|)\, dx}{\int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|)\, dx},$$

---

(9) Vedi S. CINQUINI luogo cit. in (1), n 4, pag. 398.

(10) È superfluo far presente che, se fosse $\Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|) = 0$ in un pseudointervallo $E_{\alpha,p}$ di punti di $(\alpha, \alpha+1)$ avente misura positiva, per applicare la disugua glianza di JENSEN basterebbe sostituire, a ciascuno degli integrali estesi all'intervallo $(\alpha, \alpha+1)$, il corrispondente integrale esteso al complementare di $E_{\alpha,p}$ rispetto a $\alpha, \alpha+1)$.

e da questa disuguaglianza, siccome $\omega_*(v)$ è crescente, segue immediatamente tenendo presente la (17)

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(|f(x)-\sigma_{B_p}(x)|)\,|g(x)|\,dx \leq \tag{20}$$

$$\leq \Delta_p(\alpha)\,\omega_*\left(\frac{1}{\Delta_p(\alpha)}\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(|f(x)-\sigma_{B_p}(x)|)\,\Omega_*(|g(x)|)\,dx\right).$$

Osserviamo che dalla disuguaglianza

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(|f(x)-\sigma_{B_p}(x)|)\,\Omega_*(|g(x)|)\,dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(2\,|f(x)|)\,\Omega_*(|g(x)|)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(2\,|\sigma_{B_p}(x)|)\,\Omega_*(|g(x)|)\,dx$$

che si trae in modo ovvio dalla (10), segue, usufruendo ancora della disuguaglianza di YOUNG,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(|f(x)-\sigma_{B_p}(x)|)\,\Omega_*(|g(x)|)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\Phi(2\,|f(x)|)]\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\Phi(2\,|\sigma_{B_p}(x)|)]\,dx + \int_{\alpha}^{\alpha+1} K[\Omega_*(|g(x)|)]\,dx\,.$$

Siccome $H[\Phi(2u)]$ è una funzione di u non negativa, non decrescente e convessa secondo JENSEN, per ogni intero positivo p e per ogni α reale è [11]

---

[11] Ciò è caso particolare del seguente teorema, che, essenzialmente, figura già in S. CINQUINI luogo cit. in [2], Cap. II, n. 27, pag. 131.

TEOREMA III. *Sia $f(x)$ una funzione quasi-periodica - S, sia $\Psi(u)$, $(0 \leq u < +\infty)$ una funzione non negativa, non decrescente e convessa secondo Jensen, e si supponga che la funzione $\Psi(|f(x)|)$ sia integrabile su ogni intervallo finito e che sia finito il* $\limsup\limits_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \Psi(|f(x)|)\,dx$.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\Phi(2 \mid \sigma_{B_p}(x) \mid)]\, dx \leq \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\Phi(2 \mid f(x) \mid)]\, dx .$$

Pertanto, tenuta presente la (15), risulta per ogni intero $p > p'$ e per qualunque α reale

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(\mid f(x) - \sigma_{B_p}(x) \mid)\, \Omega_*(\mid g(x) \mid)\, dx \leq A .$$

Allora dalla (20), in virtù della (19), abbiamo per ogni intero positivo $p > p'$ e per qualunque α reale per cui è verificata la (18)

$$(21) \qquad \int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(\mid f(x) - \sigma_{B_p}(x) \mid) \mid g(x) \mid dx \leq \Delta_p(\alpha)\, \omega_*\left(\frac{A}{\Delta_p(\alpha)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'altra parte, se α è un numero reale per cui non è verificata la disuguaglianza (18), dalla (17) segue in quasi tutto $(\alpha, \alpha + 1)$

$$\Phi(\mid f(x) - \sigma_{B_p}(x) \mid) = 0 ,$$

e pertanto risulta

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(\mid f(x) - \sigma_{B_p}(x) \mid) \mid g(x) \mid dx = 0 .$$

Quindi dalla (21) e da questa ultima si conclude che per ogni $p > p'$ è

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(\mid f(x) - \sigma_{B_p}(x) \mid) \mid g(x) \mid dx \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

e il teorema enunciato è così completamente stabilito.

Allora per ogni polinomio di Bochner-Féjer $\sigma_{B_p}(x)$, $(p = 1, 2, \ldots)$ *relativo a* $f(x)$ *vale la disuguaglianza*

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \Psi(\mid \sigma_{B_p}(x) \mid)\, dx \leq \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \Psi(\mid f(x) \mid)\, dx .$$

Soggiungiamo che il teorema III è valido anche quando si sostituisca all'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia quasi-periodica - S la seguente (più ampia): $f(x), (-\infty < x < +\infty)$ sia quasi continua e integrabile su ogni intervallo finito e sviluppabile in serie di FOURIER (generalizzata). (Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [1], n. 1, β), pag. 393).

OSSERVAZIONE. Se è $\Phi(u) \equiv u^m$, con $m \geq 1$, le due ipotesi che $\Phi(2\,|\,f(x)\,|\,)$ sia uniformemente integrabile e che $f(x)$ sia quasi-periodica - S sono equivalenti all'unica ipotesi che $f(x)$ sia quasi-periodica - S^m (12). Inoltre, in questo caso, nell'enunciato del presente n. alla funzione $H[\Phi(2\,|\,f(x)\,|\,)]$ va sostituita ovunque $H[\,|\,f(x)\,|^m]$.

Infatti, ricordando che per $m \geq 1$ è

$$\{\,|\,D_1\,|+|\,D_2\,|\,\}^m \leq 2^{m-1}\{\,|\,D_1\,|^m+|\,D_2\,|^m\,\}, \tag{22}$$

si può sostituire alla (10) la disuguaglianza

$$|\,f(x)-\sigma_{B_p}(x)\,|^m \leq 2^{m-1}\{\,|\,f(x)\,|^m+|\,\sigma_{B_p}(x)\,|^m\,\},$$

semplificando convenientemente alcuni particolari del seguito della dimostrazione.

3. UN NOTEVOLE CASO PARTICOLARE DEL TEOREMA A. Tra i casi particolari del teorema generale del n. 2 rileviamo il seguente. Se è $\Phi(u)=u^m$, con $m \geq 1$, $H(u)=u^\mu$, con $\mu > 1$, basta prendere $\Omega(u)=u$, $K(u)=u^\nu$ con $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}=1$, e il teorema A assume la seguente forma più semplice e più espressiva:

Siano μ, ν due numeri positivi con $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}=1$, e si supponga che $f(x)$ sia una funzione quasi-periodica - $S^{m\mu}$ e che $g(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ sia una funzione quasi continua e integrabile su ogni intervallo finito insieme con $|\,g(x)\,|^\nu$ e tale che sia finito il $\limsup\limits_{-\infty<a<+\infty} \displaystyle\int_a^{a+1} |\,g(x)\,|^\nu\,dx$.

Allora per ogni successione di Bochner $\sigma_{B_p}(x)$, $(p=1,2,\ldots)$ relativa a $f(x)$ risulta

$$\lim_{p\to+\infty}\ \limsup_{-\infty<a<+\infty} \int_a^{a+1} |\,g(x)\,|\ \ |\,f(x)-\sigma_{B_p}(x)\,|^m\,dx = 0\,. \tag{23}$$

La dimostrazione del presente caso particolare assume una forma semplicissima, perchè basta applicare all'integrale $\displaystyle\int_a^{a+1} |\,g(x)\,|\ \ |\,f(x)-\sigma_{B_p}(x)\,|^m\,dx$

(12) Ciò è ben noto; vedi, per esempio, S. CINQUINI, luogo cit. in (2), n. 5, c) pag. 76 e n. 4, b), pag. 73.

la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER e usufruire di un risultato di BESICOVITCH-BOHR ([13]) che è contenuto come caso particolare in quanto abbiamo stabilito nel nostro lavoro cit. in ([1]).

OSSERVAZIONE. La funzione $g(x)$ soddisfa sicuramente alle ipotesi del presente n.^{0}, se è quasi-periodica - S^ν.

4. UN COMPLEMENTO AL TEOREMA A. *Ferme restando tutte le ipotesi del teorema A, supponiamo che anche $g(x)$ sia una funzione quasi-periodica* - S ([14]). *Allora se $\tau_{B_q}(x)$, $(q = 1, 2, \dots)$ è il polinomio di Bochner-Féjer di ordine q relativo a $g(x)$, risulta per qualunque intero positivo q*

$$(24) \qquad \lim_{p \to +\infty} \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_\alpha^{\alpha+1} |\tau_{B_q}(x)| \, \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|) \, dx = 0 .$$

Per stabilire la proposizione ora enunciata basta riprendere la dimostrazione del n. 2 a partire dal capoverso *d*) sostituendo $|\tau_{B_q}(x)|$ al posto di $|g(x)|$. In luogo della (20) abbiamo

$$\int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|) \, |\tau_{B_q}(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \Delta_p(\alpha)\, \omega_*\left(\frac{1}{\Delta_p(\alpha)} \int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|) \, \Omega_*(|\tau_{B_q}(x)|) \, dx\right).$$

Procedendo come al luogo citato si ottiene

$$\int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(|f(x) - \sigma_{B_p}(x)|) \Omega_*(|\tau_{B_q}(x)|) \, dx \leq \frac{1}{2} \int_\alpha^{\alpha+1} H[\Phi(2|f(x)|)] \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\alpha^{\alpha+1} H[\Phi(2|\sigma_{B_p}(x)|)] \, dx + \int_\alpha^{\alpha+1} K[\Omega_*(|\tau_{B_q}(x)|)] \, dx,$$

([13]) Vedi BESICOVITCH BOHR luogo cit. in ([2]), Cap IV, § 13, Teorema II, pp. 262-3; oppure A. S BESICOVITCH opera cit. in ([2]), Cap. II, § 8, pp. 106-7.

([14]) Il teorema del presente n.^{o} è valido anche quando la $g(x)$, in luogo di essere quasi periodica - S, soddisfa alle condizioni indicate nelle ultime righe di ([11]).

e quindi, siccome $K[\Omega_*(u)]$ è una funzione di u non negativa, crescente e convessa secondo JENSEN, usufruendo del nostro teorema III [15] e tenendo presente la (15) risulta per ogni intero $p > p'$, per qualunque intero q e per ogni numero reale α

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(\,|\,f(x) - \sigma_{B_p}(x)\,|\,)\,\Omega_*(\,|\,\tau_{B_q}(x)\,|\,)\,dx \leq A\,.$$

Infine la (24) si ottiene in modo identico al n. 2.

OSSERVAZIONE I. Se alle ipotesi del presente n⁰. relative alla funzione $K[\Omega(\,|\,g(x)\,|)]$ sostituiamo le seguenti: n è un numero > 1 tale che la funzione $K[\Omega(\,|\,g(x)\,|^n)]$ è integrabile su ogni intervallo finito e che è finito il

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} K[\Omega(\,|\,g(x)\,|^n)]\,dx\,,$$

allora per qualunque intero positivo q è

$$\lim_{p\to+\infty}\ \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} |\,\tau_{B_q}(x)\,|^n\ \Phi(\,|\,f(x) - \sigma_{B_p}(x)\,|\,)\,dx = 0\,.$$

OSSERVAZIONE II. L'osservazione che figura alla fine del n. 2 è valida anche per il teorema del presente n.⁰, nonchè per la sua estensione indicata nell'osservazione I.

OSSERVAZIONE III. Anche per la proposizione del presente n.⁰, nonchè per la sua estensione che forma oggetto dell'osservazione I, si può rilevare un caso particolare analogo a quello del n. 3.

5. TEOREMA B. *Siano $\Omega(u)$, $H(u)$, $K(u)$ le funzioni considerate al n. 2. Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$ due funzioni quasi-periodiche - S^m con $m \geq 1$, e si supponga che le funzioni $H[\Omega(\,|\,f_1(x)\,|^m)]$, $K[\Omega(\,|\,f_2(x)\,|^m)]$ siano integrabili su ogni intervallo finito e che sia finito il*

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\Omega(\,|\,f_1(x)\,|^m)]\,dx + \int_{\alpha}^{\alpha+1} K[\Omega(\,|\,f_2(x)\,|^m)]\,dx \right\}.$$

[15] Vedi [11].

Allora, se $\sigma^{[1]}_{B_p}(x), (p = 1, 2, \ldots)$; $\sigma^{[2]}_{B_q}(x), (q = 1, 2, \ldots)$ *sono due successioni di Bochner, la prima relativa a* $f_1(x)$, *la seconda relativa a* $f_2(x)$, *risulta*

$$(25) \qquad \lim_{p, q \to +\infty} \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} | f_1(x) f_2(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x) \sigma^{[2]}_{B_q}(x) |^m dx = 0 .$$

Infatti, determinato $u_0 > 0$ in modo che. per ogni $u \geq u_0$, sia $u \leq \Omega(u)$, siccome $H(u)$ e $K(u)$ sono funzioni crescenti, abbiamo per ogni x reale

$$H[\,| f_1(x) |^m] \leq H[\Omega(\,| f_1(x) |^m)] + H(u_0),$$

$$K[\,| f_2(x) |^m] \leq K[\Omega(\,| f_2(x) |^m)] + K(u_0),$$

e quindi $H[\,| f_1(x) |^m]$, $K[\,| f_2(x) |^m]$ risultano integrabili su ogni intervallo finito e sono finiti entrambi i

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\,| f_1(x) |^m]\, dx , \qquad \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} K[\,| f_2(x) |^m]\, dx .$$

D'altra parte, essendo in virtù della (22) per ogni x reale e per qualunque coppia di numeri interi positivi p, q

$$(26) \qquad | f_1(x) f_2(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x) \sigma^{[2]}_{B_q}(x) |^m \leq 2^{m-1} \{ \,| f_2(x) |^m \,| f_1(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x) |^m +$$
$$+ \,| \sigma^{[1]}_{B_p}(x) |^m \,| f_2(x) - \sigma^{[2]}_{B_q}(x) |^m \},$$

abbiamo per ogni α reale [16]

$$(27) \qquad \int_{\alpha}^{\alpha+1} | f_1(x) f_2(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x) \sigma^{[2]}_{B_q}(x) |^m dx \leq$$

$$\leq 2^{m-1} \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+1} | f_2(x) |^m \,| f_1(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x) |^m dx + \int_{\alpha}^{\alpha+1} | \sigma^{[1]}_{B_p}(x) |^m \,| f_2(x) - \sigma^{[2]}_{B_q}(x) |^m dx \right\} .$$

---

[16] In virtù della (26) l'integrabil tà su ogni intervallo finito della funzione $| f_1(x) f_2(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x) \sigma^{[2]}_{B_q}(x) |^m$ è contenuta implicitamente in quanto segue, perchè la possibilità di applicare i risultati dei nn. 2 e 4 implica che esistano finiti ambedue gli integrali che figurano al secondo membro della (27).

Teniamo presente sia le ipotesi fatte, sia quanto abbiamo rilevato all'inizio della dimostrazione: allora per l'osservazione del n. 2 è

$$\lim_{p\to+\infty}\ \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+1} |f_2(x)|^m\ |f_1(x)-\sigma_{B_p}^{[1]}(x)|^m\,dx=0,$$

e in virtù delle osservazioni I e II del n. 4 risulta ([17]) per qualunque intero positivo p

$$\lim_{q\to+\infty}\ \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+1} |\sigma_{B_p}^{[1]}(x)|^m\ |f_2(x)-\sigma_{B_q}^{[2]}(x)|^m\,dx=0.$$

Pertanto dalla (27) segue immediatamente la (25).

OSSERVAZIONE. Nel caso particolare in cui sia $H(u)\equiv u^\mu$ con $\mu>1$, basta prendere $\Omega(u)\equiv u$, $K(u)\equiv u^\nu$ con $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}=1$, e il teorema del presente n^0. assume la seguente forma semplicissima:

Sia $m\geq 1$; *se* $f_1(x)$ *è quasi periodica* - $S^{m\mu}$ *e se* $f_2(x)$ *è quasi-periodica* - $S^{m\nu}$ *ove* μ *e* ν *sono due numeri positivi con* $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}=1$, *ha luogo la* (25).

Infatti in questo caso particolare basta tener presente la proposizione del n. 3 e l'osservazione III del n. 4.

6. TEOREMA C. *Siano* $H(u)$, $K(u)$ *le funzioni considerate al n. 2, e siano* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *due funzioni, la prima quasi-periodica* - S^m, *la seconda quasi-periodica* - S^n, *ove* $m\geq 1$, $n\geq 1$, *e si supponga che le funzioni* $H[|f_1(x)|^m]$, $K[|f_2(x)|^n]$ *siano integrabili su ogni intervallo finito e anche uniformemente integrabili. Allora risulta*

$$\lim_{p,q\to+\infty}\ \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+1} |f_1(x)-\sigma_{B_p}^{[1]}(x)|^m\ |f_2(x)-\sigma_{B_q}^{[2]}(x)|^n\,dx=0, \tag{28}$$

([17]) Per usufruire dei risultati del n. 4 si prende $g(x)\equiv f_1(x)$, $f(x)\equiv f_2(x)$, $n=m$, e si tiene conto dell'integrabilità su ogni intervallo finito delle funzioni $H[\Omega(|f_1(x)|^m)]$, $K[|f_2(x)|^m]$ e del fatto che è finito il

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty}\left\{\int_{\alpha}^{\alpha+1} H[\Omega(|f_1(x)|^m)]\,dx+\int_{\alpha}^{\alpha+1} K[|f_2(x)|^m]\,dx\right\}.$$

ove $\sigma^{[1]}_{B_p}(x)$, $(p = 1, 2, \ldots)$, $\sigma^{[2]}_{B_q}(x)$, $(q = 1, 2, \ldots)$ *sono due successioni di Bochner relative rispettivamente a* $f_1(x)$ *e a* $f_2(x)$.

Infatti, usufruendo in modo opportuno della disuguaglianza di YOUNG, risulta per ogni α reale e per ogni coppia di numeri interi positivi p, q ([18])

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} |f_1(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x)|^m \, |f_2(x) - \sigma^{[2]}_{B_q}(x)|^n \, dx \leq$$

$$\leq 4 \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+1} H\left[\frac{1}{2} \, |f_1(x) - \sigma^{[1]}_{B_p}(x)|^m\right] dx + \int_{\alpha}^{\alpha+1} K\left[\frac{1}{2} \, |f_2(x) - \sigma^{[2]}_{B_q}(x)|^n\right] dx \right\},$$

e pertanto la (28) è conseguenza immediata di un nostro precedente risultato ([19]).

OSSERVAZIONE. Se $H(u) \equiv u^\mu$ con $\mu > 1$, in analogia a quanto abbiamo visto nell'osservazione del n. 5 il teorema del presente n.° si enuncia nei seguenti termini:

Sia $m \geq 1$, $n \geq 1$; *se* $f_1(x)$ *è quasi-periodica* - $S^{m\mu}$ *e se* $f_2(x)$ *è quasi-periodica* - $S^{n\nu}$, *ove* μ *e* ν *sono due numeri positivi con* $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\nu} = 1$, *ha luogo la* (28).

§ II.

7. GENERALITÀ. α) Nel presente paragrafo consideriamo funzioni quasi-periodiche secondo BOHR e, in vista del problema dell'approssimazione delle loro derivate del primo ordine, supponiamo che esse siano assolutamente continue su ogni intervallo finito. Per la definizione di BOHR rinviamo all'opera di J. FAVARD ([20]), soggiungendo che per funzione quasi-periodica intenderemo sempre una funzione quasi-periodica secondo BOHR.

Infine ricordiamo che i richiami fatti, a proposito delle funzioni quasi-periodiche - S, nei capoversi β) e γ) del n. 1 sono validi *a fortiori* per le funzioni quasi periodiche secondo BOHR.

([18]) Vale una considerazione analoga a quella fatta in ([16]).

([19]) S. CINQUINI, luogo cit. in ([1]), n. 4, pag. 398

([20]) J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*. (Paris, Gauthier Villars, 1933), oppure S. CINQUINI luogo cit. in ([2]), Cap. I.

Vedi anche: H. BOHR, *Zur Theorie des fast periodischen Funktionen* I (Acta Mathematica T. 45 (1925), pp. 29-127).

β) Facciamo presente che se la funzione quasi-periodica $f(x)$ è assolutamente continua su ogni intervallo finito, il valor medio della sua derivata del primo ordine esiste finito ed è nullo.

Infatti, siccome dall'ipotesi che $f(x)$ è quasi-periodica segue che essa è limitata in $(-\infty, +\infty)$, si ottiene

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}[f(T) - f(0)] = 0\,, \tag{29}$$

e analogamente

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f'(x)\,dx = 0\,. \tag{30}$$

Inoltre, integrando per parti prendendo $f(x)$ come fattore finito, abbiamo per ogni numero reale $\lambda \neq 0$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left\{\left[-f(x)\frac{e^{-i\lambda x}}{i\lambda}\right]_0^T + \frac{1}{i\lambda}\int_0^T f'(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right\},$$

e quindi, siccome per ogni x reale è $|e^{-i\lambda x}| = 1$, ne segue

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = i\lambda \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\,, \tag{31}$$

e in modo analogo si ottiene

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f'(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = i\lambda \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\,; \tag{32}$$

e tenendo presenti le (29) e (30), possiamo dire che le (31) e (32) sono verificate per ogni valore reale di λ.

Siccome $f(x)$ è quasi-periodica, i secondi membri delle (31) e (32) sono finiti per ogni valore di λ e inoltre sono diversi da zero al più per un'infinità numerabile di valori di λ; pertanto di tali proprietà godono anche i primi membri.

Possiamo quindi concludere [21] *che, sotto l'ipotesi che $f(x)$ sia quasi-periodica e inoltre assolutamente continua su ogni intervallo finito, la sua derivata $f'(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier (generalizzata) e la successione degli esponenti di Fourier di $f'(x)$ coincide con quella relativa a $f(x)$ (a prescindere, al più, da $\lambda = 0$ che, in ogni caso, non è esponente di Fourier di $f'(x)$).*

8. LEMMA. *Se la funzione quasi-periodica $f(x)$ è assolutamente continua su ogni intervallo finito, allora la derivata del polinomio di Bochner-Féjer di ordine p relativo a $f(x)$ è uguale al polinomio di Bochner-Féjer di ordine p relativo a $f'(x)$.*

Infatti, derivando ambo i membri dell'espressione (1) del polinomio di BOCHNER-FÉJER relativo a $f(x)$, si ottiene

$$(33)\qquad \sigma'_{B_p}(x) = \sum_{\nu_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{\nu_p=-n_p}^{n_p} \left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\cdots\left(1-\frac{|\nu_p|}{n_p}\right)\times$$

$$\times\, i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)A\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)e^{i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)x}.$$

Supposto

$$(34)\qquad \nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\neq 0,$$

sostituendo a $A\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)$ la sua espressione (2), ripetendo un noto procedimento [22] e infine integrando per parti prendendo $f(x+u)$ come fattore finito, abbiamo

$$i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)A\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)e^{i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)x}=$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)f(x+u)\,e^{-i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)u}du=$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\left\{\left[-f(x+u)\,e^{-i\left(\nu_1\frac{\alpha_1}{N_1!}+\dots+\nu_p\frac{\alpha_p}{N_p!}\right)u}\right]_{u=-T}^{u=T}+\right.$$

---

(21) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in (1), n. 1, β), pag 393

(22) Vedi, per esempio, S CINQUINI, luogo cit. in (2), Cap. I, n. 28 b), pag 61 e segg.

$$+\int_{-T}^{T} f'(x+u)\, e^{-i\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!}+\ldots+\nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right)u}\, du \Bigg\} =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\,T}\int_{-T}^{T} f'(x+u)\, e^{-i\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!}+\ldots+\nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right)u}\, du\,,$$

ove abbiamo tenuto presente che, per ogni u reale, è

$$\left| e^{-i\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!}+\ldots+\nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right)u} \right| = 1$$

e che $f(x)$, quale funzione quasi periodica, è limitata in $(-\infty + \infty)$.

Allora tenendo presente che, siccome la successione $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ è linearmente indipendente, se non ha luogo la (34) deve essere necessariamente

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_p = 0\,,$$

la (33) diviene

$$\sigma'_{B_p}(x) = \sum_{\nu_1=-n_1}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_p=-n_p}^{n_p} \left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\ldots\left(1-\frac{|\nu_p|}{n_p}\right) \times$$

$$\times \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\,T}\int_{-T}^{T} f'(x+u)\, e^{-i\left(\nu_1 \frac{\alpha_1}{N_1!}+\ldots+\nu_p \frac{\alpha_p}{N_p!}\right)u}\, du -$$

$$- \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\,T}\int_{-T}^{T} f'(x+u)\, du\,,$$

e infine, usufruendo della (3) e tenendo presente che, siccome $f(x)$ è limitata in $(-\infty, +\infty)$, risulta

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\,T}\int_{-T}^{T} f'(x+u)\, du = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\,T}\,[f(x+T) - f(x-T)] = 0\,,$$

si ottiene

$$(35) \qquad \sigma'_{B_p}(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\,T}\int_{-T}^{T} f'(x+u)\, \Pi_{n_1}\!\left(\frac{\alpha_1}{N_1!}\,u\right)\ldots\, \Pi_{n_p}\!\left(\frac{\alpha_p}{N_p!}\,u\right) du\,.$$

Pertanto, per il n. 7, β), il nostro asserto è così provato.

9. TEOREMA I′. *Sia $f(x)$ una funzione quasi-periodica, la quale è assolutamente continua su ogni intervallo finito, sia $\Phi(u)$, $(0 \leq u < +\infty)$ una funzione non negativa e convessa secondo Jensen, e si supponga che $\Phi(|f'(x)|)$ sia integrabile su ogni intervallo finito e anche uniformemente integrabile.*

Allora se $\sigma_{B_p}(x), (p = 1, 2, \ldots)$ è il polinomio di Bochner-Féjer di ordine p relativo a $f(x)$, gli integrali

$$\int \Phi(\,|\,\sigma'_{B_p}(x)\,|\,)\,dx\,, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

sono equiassolutamente continui in modo uniforme [23].

In virtù della (35) la dimostrazione del teorema enunciato non differisce da quella di un altro nostro teorema [24].

10. TEOREMA III′. *Sia $f(x)$ una funzione quasi-periodica, la quale è assolutamente continua su ogni intervallo finito, sia $\Phi(u), (0 \leq u < +\infty)$ una funzione non negativa, non decrescente e convessa secondo Jensen, e si supponga che $\Phi(\,|\,f'(x)\,|\,)$ sia integrabile su ogni intervallo finito e che sia finito il* $\limsup\limits_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(\,|\,f'(x)\,|\,)\,dx$.

Allora per ogni intero positivo p vale la disuguaglianza

$$\limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(\,|\,\sigma'_{B_p}(x)\,|\,)\,dx \leq \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_\alpha^{\alpha+1} \Phi(\,|\,f'(x)\,|\,)\,dx\,,$$

ove $\sigma_{B_p}(x)$ è il polinomio di Bochner-Féjer di ordine p relativo a $f(x)$.

In virtù della (35) anche la dimostrazione del presente teorema si riduce a quella di altra nostra proposizione [25].

11. ESEMPI. A prescindere dal noto teorema di BOCHNER, il quale afferma che, se $f(x)$ è una funzione quasi-periodica avente derivata del primo ordine $f'(x)$ uniformemente continua in $(-\infty, +\infty)$, anche $f'(x)$ risulta quasi-periodica, si presenta, d'altra parte, la ricerca delle proprietà di $f'(x)$,

---

[23] Per questa definizione vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [1], nota [7] a piè di pag. 394.

[24] S. CINQUINI, luogo cit. in [1], n. 2, pag. 394.

[25] Vedi [11].

se si suppone che la funzione quasi-periodica $f(x)$ sia assolutamente continua su ogni intervallo finito. Si hanno due casi:

1°) È evidente, innanzi tutto, che ci sono funzioni quasi-periodiche, assolutamente continue su ogni intervallo finito, la cui derivata del primo ordine è quasi-periodica $-S$.

Infatti se $g(x)$ è quasi-periodica $-S$, e $G(x)$ è una primitiva di $g(x)$, ogni funzione $G_1(x) = G(x+v) - G(x)$, ove $v \neq 0$ è un numero reale qualunque, è quasi-periodica [26] e la sua derivata $G_1'(x) = g(x+v) - g(x)$ è, evidentemente, quasi-periodica $-S$.

2°) D'altra parte esistono funzioni quasi-periodiche, assolutamente continue su ogni intervallo finito, la cui derivata del primo ordine non è quasi-periodica $-S$: ciò risulta dal seguente esempio.

Cominciamo a definire, per ogni intero positivo n, una funzione $f_n(x)$ come segue: considerata la successione di intervalli

$$I_{n,r} \equiv \left[2^n + 2^{n+1}r - \frac{1}{n},\ 2^n + 2^{n+1}r + \frac{1}{n}\right], \qquad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

e suddiviso ogni $I_{n,r}, (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ in n parti uguali (ognuna delle quali risulta di ampiezza $\left.\frac{2}{n^2}\right)$, in ogni $I_{n,r}$ definiamo $f_n(x)$, tracciando una poligonale costituita dai lati di n triangoli isosceli (situati nel semipiano $y \geq 0$), ognuno dei quali ha come base una delle parti in cui abbiamo suddiviso $I_{n,r}$ e altezza $\frac{1}{n}$, e assumendo per ogni x di $I_{n,r}$ come valore di $f_n(x)$ la corrispondente ordinata della poligonale; poi per ogni x non appartenente ad alcuno degli intervalli $I_{n,r}, (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ assumiamo $f_n(x) = 0$.

Evidentemente la funzione $f_n(x)$ risulta continua e periodica di periodo 2^{n+1}; inoltre è

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{36}$$

e per quasi tutti gli x di $I_{n,r}, (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$|f_n'(x)| = n. \tag{37}$$

Ciò premesso, consideriamo la successione $f_n(x), (n = 1, 2, \ldots)$, e rileviamo che, siccome due qualunque intervalli $I_{n,r}, (r=0,\pm1,\pm2,\ldots; n=1,2,\ldots)$

---

[26] Vedi, per esempio, S. CINQUINI luogo cit. in [2], Cap. II, n. 15, pag. 99.

non hanno mai alcun punto a comune, per ogni x reale al più una sola delle funzioni $f_n(x)$, $(n=1, 2, \ldots)$ è diversa da zero.

Pertanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente in $(-\infty, +\infty)$ e quindi, posto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{38}$$

la funzione $F(x)$ risulta quasi-periodica ([27]).

Inoltre in qualunque intervallo finito (x', x''), $F(x)$ è assolutamente continua. Infatti siccome al più un numero finito di intervalli

$$I_{n,r}, \qquad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$$

ha punti a comune con (x', x''), se n_0 è il massimo dei primi indici degli intervalli $I_{n,r}$ contenuti (completamente o parzialmente) in (x', x''), in virtù della (37) risulta in quasi tutto (x', x'')

$$|\, F'(x)\, | \leq n_0;$$

e l'assoluta continuità di $F(x)$ in (x', x'') è così provata.

Ma la sua derivata $F'(x)$ non è quasi-periodica – S, perchè non risulta uniformemente integrabile ([28]). Infatti se E è un pseudointervallo tutto costituito di punti appartenenti a un unico intervallo $I_{n,r}$, $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, in virtù della (37) risulta

$$\int_E |\, F'(x)\, |\, dx = n \,.\, m(E), \tag{39}$$

ove n può assumere tutti i valori interi positivi. Quindi, preso ε ad arbitrio con $0 < \varepsilon < 2$, non è possibile determinare un $\delta > 0$ in modo che il primo membro della (39) risulti $< \varepsilon$, ogniqualvolta E è un pseudointervallo avente misura $< \delta$ e tutto contenuto in un intervallo di ampiezza unitaria.

Dunque la funzione $F(x)$ definita dalla (38) è quasi-periodica, è assolutamente continua su ogni intervallo finito, ma la sua derivata del primo ordine non è quasi-periodica – S ([29]).

([27]) Vedi, per esempio, S. Cinquini, luogo cit. in ([2]), Cap. I, n. 8, *b*), pag. 22.

([28]) Vedi, per esempio, S. Cinquini, luogo cit. in ([2]), Cap. II, n. 4, *b*), pag. 73.

([29]) Soggiungiamo che per la funzione $F(x)$ definita dalla (38) è

$$\limsup_{-\infty < \alpha < +\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} |\, F'(x)\, |\, dx = 2\,.$$

12. OSSERVAZIONE. Sorge ora la domanda se per la derivata del primo ordine di una funzione quasi-periodica $f(x)$, la quale sia assolutamente continua su ogni intervallo finito, sussista l'analogo di quel teorema di BOCHNER per le funzioni quasi-periodiche – S, che abbiamo riportato all'inizio della presente Memoria.

È superfluo far presente che, se $f'(x)$ risulta quasi-periodica – S, considerata una successione di BOCHNER $\sigma_{B_p}(x)$, $(p = 1, 2, \ldots)$, la quale approssimi $f(x)$ in modo uniforme in tutto $(-\infty, +\infty)$, non solo vale l'uguaglianza

$$\lim_{p \to +\infty} \limsup_{-\infty<\alpha<+\infty} \int_\alpha^{\alpha+1} |f'(x) - \sigma'_{B_p}(x)| \, dx = 0, \tag{40}$$

ma sussistono proprietà analoghe al nostro teorema II della Nota citata in (1) e ai nostri teoremi A, B, C del § I della presente Memoria.

Invece se $f'(x)$ *non* risulta quasi periodica – S, *non* può valere la (40), perchè dalla (40) segue che $f'(x)$ è quasi-periodica – S. Infatti, se è verificata la (40), preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, possiamo determinare un $p' > 0$ in modo che, per ogni intero $p > p'$ e per qualunque α reale, si abbia

$$\int_\alpha^{\alpha+1} |f'(x) - \sigma'_{B_p}(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{41}$$

D'altra parte, fissato $p > p'$, siccome $\sigma'_{B_p}(x)$ è quasi-periodica [30], esiste un $l > 0$ in modo che in ogni intervallo di ampiezza l è contenuto almeno un τ tale che, per tutti gli x reali, è

$$|\sigma'_{B_p}(x+\tau) - \sigma'_{B_p}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pertanto, tenendo conto della (41), ne segue per qualunque α reale

$$\int_\alpha^{\alpha+1} |f'(x+\tau) - f'(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \int_\alpha^{\alpha+1} |f'(x+\tau) - \sigma'_{B_p}(x+\tau)| \, dx + \int_\alpha^{\alpha+1} |\sigma'_{B_p}(x+\tau) - \sigma'_{B_p}(x)| \, dx +$$

(30) Ciò è evidente per il risultato del n. 8.

$$+\int_{a}^{a+1} | f'(x) - \sigma'_{B_p}(x) | \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon ,$$

vale a dire $f'(x)$ è quasi-periodica $- S$.

Possiamo dunque concludere che *la* (40) *fornisce una condizione necessaria e sufficiente, affinchè la derivata di una funzione* $f(x)$ *quasi-periodica e inoltre assolutamente continua su ogni intervallo finito, risulti quasi-periodica* $- S$.