Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Maria Giovanna Platone

Sugli stati di tensione piana in un corpo cilindrico elastico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 1-2 (1951), p. 57-70
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_57_0>

SUGLI STATI DI TENSIONE PIANA IN UN CORPO CILINDRICO ELASTICO (*)

di MARIA GIOVANNA PLATONE (Roma)

§ 1

In questa nota mi propongo di risolvere un particolare problema di calcolo di tensione piana in un cilindro elastico.

Tale stato di tensione si intende caratterizzato dall'essere

(1) $$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0\,,$$

(2) $$t_{xx}\,,\quad t_{yy}\,,\quad t_{xy} \qquad \textit{indipendenti da } z\,,$$

ove t_{xx}, t_{xy}, t_{yy}, t_{xz}, t_{yz}, t_{zz} rappresentano le sei componenti degli sforzi. Precisamente, considerato un cilindro retto elastico le cui sezioni con i piani $z = cost.$ $(0 \leq z \leq h)$ siano cerchi C, mi propongo di determinare in tutto il cilindro l'espressione degli sforzi, *una volta che sia assegnata in ogni punto della frontiera FC di C la componente normale dello sforzo che agisce sull'elemento di frontiera nel punto considerato :*

(3) $$t_{nn} = T(s)\ (^1)\,.$$

Mi servo per la risoluzione di tale problema dei risultati recentemente ottenuti da A. GHIZZETTI [2], risultati che possono così riassumersi: tutte le soluzioni dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo alle quali corrisponde uno stato per cui sono soddisfatte le (1), (2) sono completamente determinate dalla conoscenza di una funzione armonica e di tre costanti arbitrarie [3].

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[1] Con n si indica la normale interna ad FC e con s l'arco su questa.

[2] Vedi A. GHIZZETTI, *Sugli stati di tensione piana in un corpo elastico,* Annali di Matematica, 1949.

[3] Un tale stato di tensione può aversi soltanto se le forze di massa sono del tipo

$$X = -\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)\,, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y)\,, \qquad Z = 0\,;$$

vedi A. GHIZZETTI, op. cit. in [2].

Propriamente, col solito significato di E, σ, le espressioni delle componenti degli spostamenti e degli sforzi sono date rispettivamente da:

$$(4)\quad \begin{cases} u = \alpha z^2 - \alpha x^2 + \dfrac{2\beta}{\sigma} x y - \dfrac{\alpha}{\sigma} y^2 + \dfrac{1-\sigma}{\sigma} \gamma x + 2 \dfrac{1+\sigma}{\sigma} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \varphi(x, y) \\ v = \beta z^2 - \dfrac{\beta}{\sigma} x^2 + \dfrac{2\alpha}{\sigma} x y - \beta y^2 + \dfrac{1-\sigma}{\sigma} \gamma y - 2 \dfrac{1+\sigma}{\sigma} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \psi(x, y) \\ w = -2 z (\alpha x + \beta y + \gamma) \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} t_{xx} = \dfrac{E}{\sigma} (2 \beta y + \gamma) + 2 \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \dfrac{E}{1+\sigma} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ t_{yy} = \dfrac{E}{\sigma} (2 \alpha x + \gamma) - 2 \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \dfrac{E}{1+\sigma} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ t_{xy} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \dfrac{E}{1+\sigma} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

ove α, β, γ sono tre costanti arbitrarie; $\varphi(x, y) + i \psi(x, y)$ un'arbitraria funzione analitica di $x + i y$ e $\Phi(x, y)$ una qualsivoglia funzione tale che

$$(6)\qquad \Delta_2 \Phi = F(x, y),$$

ove $F(x, y)$ è la funzione menzionata nella nota (3).

Da quanto sopra ed in virtù della nota formula

$$t_{nn} = t_{xx} \cos^2(x n) + 2 t_{xy} \cos(x n) \cos(y n) + t_{yy} \cos^2(y n),$$

si ha per t_{nn} la seguente espressione

$$\begin{aligned} t_{nn} = {} & \frac{E}{\sigma} [2 \beta y \cos^2(x n) + 2 \alpha x \cos^2(y n) + \gamma] + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} [\cos^2(x n) - \cos^2(y n)] + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) \cos(x n) \cos(y n) - \\ & - \frac{E}{1+\sigma} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} [\cos^2(x n) - \cos^2(y n)] + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(x n) \cos(y n)\right] \end{aligned}$$

che, ove si introducano le direzioni ν, ν' rispettivamente di coseni direttori

$$(7)\qquad \cos^2(x n) - \cos^2(y n), \qquad 2 \cos(x n) \cos(y n),$$

$$(8)\qquad -2 \cos(x n) \cos(y n), \qquad \cos^2(x n) - \cos^2(y n),$$

si scrive

$$t_{nn} = \frac{E}{\sigma}\left[2\,\alpha\,x\cos^2(y\,n) + 2\,\beta\,y\cos^2(x\,n) + \gamma\right] +$$

$$+ \frac{d}{d\,\nu}\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y} + \frac{d}{d\,\nu'}\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x} - \frac{E}{1+\sigma}\frac{d\varphi}{d\,\nu}.$$

Pertanto dare $t_{nn} = T(s)$ significa dare sulla frontiera

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\nu} = \frac{1+\sigma}{E}\left[\frac{E}{\sigma}\left[2\,\alpha\,x\cos^2(y\,n) + 2\,\beta\,y\cos^2(x\,n) + \gamma\right] + \right.$$

(9)

$$\left. + \frac{d}{d\,\nu}\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y} + \frac{d}{d\,\nu'}\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x} - T(s)\right] = f(s)$$

ed il problema quindi è ricondotto a quello di costruire una funzione armonica in C conoscendo su $F\,C$ la derivata obliqua secondo la direzione di coseni direttori (7).

Assumendo il centro del cerchio come origine del riferimento cartesiano si ha:

$$\cos(x\,\nu) = \cos 2\,\vartheta\,, \qquad \cos(y\,\nu) = \operatorname{sen} 2\,\vartheta\,,$$

$$\cos(x\,\nu') = -\operatorname{sen} 2\,\vartheta\,, \qquad \cos(y\,\nu') = \cos 2\,\vartheta\,,$$

e passando in coordinate polari (di polo O ed asse coincidente con l'asse x) si ottengono per la $\frac{d\varphi}{d\,\nu}$, $\frac{d\varphi}{d\nu'}$ rispettivamente le seguenti espressioni

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\vartheta}\,,$$

$$\operatorname{sen}\vartheta\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\vartheta}\,.$$

Si può pertanto dare al problema tale forma analitica: determinare una funzione $\varphi(\varrho\,,\vartheta)$ armonica nel cerchio C e tale che su $F\,C$ risulti

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\vartheta} = f(\vartheta)\,,$$

ove $f(\vartheta)$ è una funzione assegnata in $(0\,,2\,\pi)$, continua e tale da aversi $f(0) = f(2\,\pi)$, la cui espressione in coordinate cartesiane è data dalla (9). Mi riservo di precisare in seguito le condizioni di compatibilità del problema, alle quali deve soddisfare la $f(\vartheta)$ (vedi le (8) di § 2). Si vedrà al § 3 che è possibile determinare le tre costanti arbitrarie α, β, γ in modo che risultino verificate le predette condizioni di compatibilità per la $f(\vartheta)$. Ne seguirà ovviamente che gli sforzi $T = T(\vartheta)$ su FC si possono assegnare ad arbitrio.

§ 2

Prendiamo dunque in esame il problema seguente:
riferito il piano a coordinate polari ϱ, ϑ e considerato il cerchio definito da $\varrho \leq r$, si vuol costruire una funzione $\varphi(\varrho, \vartheta)$ armonica in C, della quale sono assegnati su FC i valori della derivata secondo la direzione ν avente per coseni direttori i numeri $\cos 2\vartheta$, $\operatorname{sen} 2\vartheta$. Più precisamente la $\varphi(\varrho, \vartheta)$ deve essere continua assieme alle sue derivate parziali del primo e del secondo ordine per $\varrho < r$ e verificare le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} = 0 \qquad (\text{per } \varrho < r), \tag{1}$$

$$\lim_{\varrho\to r}\left(\cos\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) = f(\vartheta) \qquad (\text{per } 0 \leq \vartheta \leq 2\pi), \tag{2}$$

ove $f(\vartheta)$ è una funzione assegnata in $(0, 2\pi)$ continua e tale da aversi $f(0) = f(2\pi)$. Per ogni fissato $\varrho < r$ introduciamo le coordinate di Fourier

$$C_k(\varrho) = \int_0^{2\pi} \varphi(\varrho, \vartheta)\, e^{ik\vartheta}\, d\vartheta \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

Dalla (1) segue allora, con procedimento ben noto, che ogni $C_k(\varrho)$ deve verificare l'equazione differenziale

$$C_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho}C_k'(\varrho) + \frac{k^2}{\varrho^2}C_k(\varrho) = 0,$$

onde, tenuto anche conto che $C_k(\varrho)$ deve essere finito per $\varrho = 0$, si deduce

$$C_k(\varrho) = A_k\,\varrho^{|k|}, \tag{4}$$

ove le A_k sono costanti arbitrarie.

Ammesso poi che la *funzione* $\cos\vartheta \dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ *sia, come funzione di* ϑ, *sommabile in* $(0, 2\pi)$ *uniformemente rispetto a* ϱ *variabile in un intorno sinistro di* r, *dalla* (2) *segue*

$$\lim_{\varrho\to r} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) e^{ik\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, e^{ik\vartheta}\, d\vartheta\,,$$

donde con facile calcolo, tenuto conto di (3):

$$\lim_{\varrho\to r}\left[C'_{k+1}(\varrho) + C'_{k-1}(\varrho) - \frac{k+1}{\varrho}\, C_{k+1}(\varrho) + \frac{k-1}{\varrho}\, C_{k-1}(\varrho)\right] = 2 f_k\,, \tag{5}$$

avendo posto

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, e^{ik\vartheta}\, d\vartheta\,. \tag{6}$$

In virtù della (4), la (5) diventa

$$[\,|k+1| - (k+1)]\, A_{k+1}\, r^{|k+1|-1} + [\,|k-1| + (k-1)]\, A_{k-1}\, r^{|k-1|-1} = 2 f_k\,,$$

vale a dire:

$$-(k+1)\, A_{k+1}\, r^{-k-2} = f_k \qquad (\text{per } k < -1)\,, \tag{7_1}$$

$$f_{-1} = 0 \qquad (\text{per } k = -1)\,, \tag{7_2}$$

$$f_0 = 0 \qquad (\text{per } k = 0)\,, \tag{7_3}$$

$$f_1 = 0 \qquad (\text{per } k = 1)\,, \tag{7_4}$$

$$(k-1)\, A_{k-1}\, r^{k-2} = f_k \qquad (\text{per } k > 1)\,. \tag{7_5}$$

Le (7_2), (7_3), (7_4) *esprimono tre condizioni di compatibilità del problema,* che per la (6) equivalgono alle

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta = 0\,. \tag{8}$$

Le (7_1), (7_5) determinano tutti i coefficienti A_k ad eccezione di A_0 che rimane arbitrario ($= c$); pertanto si vede facilmente che risulta

$$A_{-k} = \frac{r^{-k+1} f_{-k-1}}{k}\,, \qquad A_k = \frac{r^{-k+1} f_{k+1}}{k}\,, \qquad (k = 1, 2 \ldots)\,,$$

onde si deduce che

$$C_{-k}(\varrho) = \frac{r^{-k+1} f_{-k-1}}{k} \varrho^k, \qquad C_k(\varrho) = \frac{r^{-k+1} f_{k+1}}{k} \varrho^k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

La serie di FOURIER della $\varphi(\varrho, \vartheta)$ si scrive dunque

$$C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^{-k+1} f_{-k-1}}{k} \varrho^k e^{ik\vartheta} + \frac{r^{-k+1} f_{k+1}}{k} \varrho^k e^{-ik\vartheta} \right\},$$

vale a dire per la (6)

$$(9) \qquad C_0 + \frac{r}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos[(k+1)\tau - k\theta]\, d\tau.$$

Poichè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k f(\tau) \cos[(k+1)\tau - k\vartheta]$ (data la continuità della $f(\tau)$ e quindi la limitatezza di $|f(\tau)|$) converge uniformemente per $0 \leq \varrho \leq r_1 < r$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, la (9) può scriversi

$$C_0 + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos[(k+1)\tau - k\vartheta]\, d\tau.$$

Ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos[(k+1)\tau - k\vartheta] = \cos\tau\, \mathcal{R}e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{\varrho}{r} e^{i(\tau-\vartheta)}\right]^k -$$

$$- \operatorname{sen}\tau\, \mathcal{I}m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{\varrho}{r} e^{i(\tau-\vartheta)}\right]^k = \cos\tau\, \mathcal{R}e \left[-\log\left(1 - \frac{\varrho}{r} e^{i(\tau-\vartheta)}\right)\right] -$$

$$- \operatorname{sen}\tau\, \mathcal{I}m \left[-\log\left(1 - \frac{\varrho}{r} e^{i(\tau-\vartheta)}\right)\right] = \cos\tau \log \sqrt{1 - 2\frac{\varrho}{r}\cos(\tau-\vartheta) + \frac{\varrho^2}{r^2}} -$$

$$- \operatorname{sen}\tau \operatorname{arctg} \frac{\frac{\varrho}{r}\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{1 - \frac{\varrho}{r}\cos(\tau-\vartheta)},$$

onde possiamo asserire che affinchè il nostro problema abbia soluzione è necessario che siano verificate le (8) e se ciò accade la soluzione non può essere che quella fornita all'interno del cerchio dalla formula

$$(10) \qquad \varphi(\varrho, \vartheta) = C + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varrho, \vartheta, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

ove si è posto

$$G(\varrho, \vartheta, \tau) = -\cos\tau \log \sqrt{1 - 2\frac{\varrho}{r}\cos(\tau-\vartheta) + \frac{\varrho^2}{r^2}} - \tag{11}$$

$$- \operatorname{sen}\tau \operatorname{arctg} \frac{\frac{\varrho}{r}\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{1-\frac{\varrho}{r}\cos(\tau-\vartheta)}.$$

Rimane da verificare che la $\varphi(\varrho, \vartheta)$ fornita da (10) verifica le condizioni imposte. Senza difficoltà si vede che la $\varphi(\varrho, \vartheta)$ è all'interno di C, continua assieme alle sue derivate parziali prime e seconde e che queste ultime verificano la $\Delta_2 \varphi = 0$.

L'essenziale è la verifica della (2).

Dalle (10), (11) segue con facile calcolo che per $\varrho < r$ si ha

$$u(\varrho, \vartheta) = \cos\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \tag{12}$$

$$= \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\cos 2(\tau-\vartheta) - \varrho\cos(\tau-\vartheta)}{r^2 - 2r\varrho\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2} f(\tau)\, d\tau,$$

formula che può scriversi nel modo seguente

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{r}{2\varrho^2} - \frac{\cos(\tau-\vartheta)}{\varrho} + \frac{r}{2\varrho^2}\frac{r^2-\varrho^2}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\right] f(\tau) d\tau,$$

vale a dire, tenendo conto delle (8),

$$u(\varrho, \vartheta) = \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\varrho^2}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2} f(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

L'integrale qui scritto non è altro che l'integrale di POISSON relativo alla $f(\vartheta)$, cosicchè, per note proprietà, si deduce senz'altro che $\lim_{\varrho \to r} u(\varrho, \vartheta) = f(\vartheta)$ uniformemente rispetto a ϑ.

Ne segue che $u(\varrho, \vartheta)$ è continua in tutto C e quindi è anche verificata la condizione da noi posta dell'uniforme sommabilità di $u(\varrho, \vartheta)$ come funzione di ϑ, rispetto a ϱ.

Calcoliamo, poichè ci sarà utile nel seguito, l'espressione $\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$. Dalle (10), (11) segue con facile calcolo

$$\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-r\operatorname{sen}2(\tau-\vartheta)+\varrho\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2} f(\tau)\,d\tau\,, \tag{14}$$

formula che può scriversi nel modo seguente

$$\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}(\tau-\vartheta) - \frac{r^2\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\right] f(\tau)\,d\tau,$$

vale a dire, tenendo conto della seconda e della terza delle (8),

$$\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -\frac{r^3}{\pi\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2} f(\tau)\,d\tau\,.$$

Le (12), (14) possono inoltre scriversi

$$\begin{aligned}\cos\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} &= \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\cos 2(\tau-\vartheta)-\varrho\cos(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2} f(\tau)\,d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k(\tau-\vartheta)\,d\tau,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} &= \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-r\operatorname{sen}2(\tau-\vartheta)+\varrho\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2} f(\tau)\,d\tau = - \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2}\int_5^{2\pi} f(\tau)\operatorname{sen}k(\tau-\vartheta)\,d\tau,\end{aligned} \tag{16}$$

tenendo presente che si ha

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\varrho^2}{r^2-2\,\varrho\,r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\,f(\tau)\,d\,\tau=\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k\int_0^{2\pi}f(\tau)\cos k\,(\tau-\vartheta)\,d\,\tau\,,
\end{aligned}
$$

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{r\,\varrho}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(\tau-\vartheta)}{r^2-2\,\varrho\,r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\,f(\tau)\,d\,\tau=-\\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k\int_0^{2\pi}f(\tau)\operatorname{sen}k\,(\tau-\vartheta)\,d\,\tau\,.
\end{aligned}
$$

Si osservi che la (17) dà la funzione armonica in C che assume su FC i valori $f(\vartheta)$ e che la (18) dà una funzione coniugata della precedente.

§ 3

Individuata in C la funzione armonica $\varphi(\varrho\,,\vartheta)$ a meno di una costante additiva, procediamo al calcolo delle tre costanti $\alpha\,,\beta\,,\gamma$.

Mi pongo nel caso che siano nulle le forze di massa e che quindi si possa porre (vedi la (6) di § 1)

$$
(1)\qquad F(x\,,y)=\Phi(x\,,y)=0\,.
$$

In tali ipotesi, per la (9) di § 1, si ha:

$$
(2)\quad f(\vartheta)=\frac{1+\sigma}{2\,\sigma}\Big[\alpha\,r(\cos\vartheta-\cos 3\,\vartheta)+\beta\,r(\operatorname{sen}\vartheta+\operatorname{sen}3\,\vartheta)+2\,\gamma\Big]-\frac{1+\sigma}{E}\,T(\vartheta),
$$

applicando le tre condizioni di compatibilità (8) di § 2 si ottiene

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sigma}{E}\,\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}T(\vartheta)\cos\vartheta\,d\,\vartheta\,,\quad \beta=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sigma}{E}\,\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}T(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\,d\,\vartheta\,,\\
&\gamma=\frac{1}{2\,\pi}\,\frac{\sigma}{E}\int_0^{2\pi}T(\vartheta)\,d\,\vartheta\,.
\end{aligned}
$$

Per quanto si è detto al § 1, risultano quindi determinati gli sforzi in tutto il cilindro; conviene calcolarli esprimendone le componenti in coordinate polari ϱ, ϑ.

In virtù delle note formule

$$t_{\varrho\varrho} = t_{xx} \cos^2\vartheta + t_{yy} \operatorname{sen}^2\vartheta + 2\, t_{xy} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta$$

$$t_{\vartheta\vartheta} = t_{xx} \operatorname{sen}^2\vartheta + t_{yy} \cos^2\vartheta - 2\, t_{xy} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta$$

$$t_{\varrho\vartheta} = -(t_{xx} - t_{yy}) \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + t_{xy} (\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)$$

si ricavano dalle (4) di § 1, sempre nelle ipotesi (1), le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} t_{\varrho\varrho} &= \frac{E}{2\sigma}\Big[\alpha\,\varrho\,(\cos\vartheta - \cos 3\vartheta) + \beta\,\varrho\,(\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen} 3\vartheta) + 2\gamma\Big] - \\ &\qquad - \frac{E}{1+\sigma}\left(\cos\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right), \\ t_{\vartheta\vartheta} &= \frac{E}{2\sigma}\Big[\alpha\,\varrho\,(3\cos\vartheta + \cos 3\vartheta) + \beta\,\varrho\,(3\operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen} 3\vartheta) + 2\gamma\Big] + \\ &\qquad + \frac{E}{1+\sigma}\left(\cos\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right), \\ t_{\varrho\vartheta} &= \frac{E}{2\sigma}\Big[\alpha\,\varrho\,(\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen} 3\vartheta) - \beta\,\varrho\,(\cos\vartheta - \cos 3\vartheta)\Big] + \\ &\qquad + \frac{E}{1+\sigma}\left(\operatorname{sen}\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

D'altronde per le (15), (16) di § 2, ove a $f(\vartheta)$ si sostituisca la sua espressione (2), si ha:

$$\cos\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1+\sigma}{2\sigma}\Big[\alpha\,r\,(\cos\tau - \cos 3\tau) + \right.$$

$$\left. + \beta\,r\,(\operatorname{sen}\tau + \operatorname{sen} 3\tau) + 2\gamma\Big] - \frac{1+\sigma}{E}\,T(\tau)\right\}\cos k(\tau - \vartheta)\,d\tau,$$

$$\operatorname{sen}\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1+\sigma}{2\sigma}\Big[\alpha\,r\,(\cos\tau - \cos 3\tau) + \right.$$

$$\left. + \beta\,r\,(\operatorname{sen}\tau + \operatorname{sen} 3\tau) + 2\gamma\Big] - \frac{1+\sigma}{E}\,T(\tau)\right\}\operatorname{sen} k(\tau - \vartheta)\,d\tau,$$

e quindi

$$\cos\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{1+\sigma}{2\sigma} (-\alpha\varrho\cos 3\vartheta + \beta\varrho\operatorname{sen} 3\vartheta) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{1+\sigma}{E} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos k(\tau - \vartheta)\, d\tau,$$

$$\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = - \frac{1+\sigma}{2\sigma} (\alpha\varrho\operatorname{sen} 3\vartheta + \beta\varrho\cos 3\vartheta) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{1+\sigma}{E} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \operatorname{sen} k(\tau - \vartheta)\, d\tau .$$

Tenendo conto delle formule ora trovate, le (4) diventano

$$t_{\varrho\varrho} = \frac{E}{2\sigma} (\alpha\varrho\cos\vartheta + \beta\varrho\operatorname{sen}\vartheta + 2\gamma) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos k(\tau - \vartheta)\, d\tau,$$

$$t_{\vartheta\vartheta} = \frac{E}{2\sigma} (3\alpha\varrho\cos\vartheta + 3\beta\varrho\operatorname{sen}\vartheta + 2\gamma) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos k(\tau - \vartheta)\, d\tau,$$

$$t_{\varrho\vartheta} = \frac{E}{2\sigma} (\alpha\varrho\operatorname{sen}\vartheta - \beta\varrho\cos\vartheta) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \operatorname{sen} k(\tau - \vartheta)\, d\tau,$$

e sostituendo ad α, β, γ i loro valori dati dalle (3)

$$t_{\varrho\varrho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi} \frac{\varrho}{r} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos(\tau - \vartheta)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos k(\tau - \vartheta)\, d\tau,$$

$$t_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau)\, d\tau + \frac{3}{\pi} \frac{\varrho}{r} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos(\tau - \vartheta)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2} \int_0^{2\pi} T(\tau) \cos k(\tau - \vartheta)\, d\tau,$$

$$t_{\varrho\vartheta} = -\frac{1}{\pi}\frac{\varrho}{r}\int_0^{2\pi} T(\tau)\,\mathrm{sen}\,(\tau-\vartheta)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-2}\int_0^{2\pi} T(\tau)\,\mathrm{sen}\,k(\tau-\vartheta)\,d\tau.$$

Sommando infine le serie che figurano a secondo membro (vedi le (15), (16) di § 2) risulta

$$t_{\varrho\varrho} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\left\{\frac{1}{2}+\frac{\varrho}{r}\cos(\tau-\vartheta)+r\,\frac{r\cos 2(\tau-\vartheta)-\varrho\cos(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\right\}d\tau,$$

$$t_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\left\{\frac{1}{2}+\frac{3\varrho}{r}\cos(\tau-\vartheta)-r\,\frac{r\cos 2(\tau-\vartheta)-\varrho\cos(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\right\}d\tau,$$

$$t_{\varrho\vartheta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\left\{-\frac{\varrho}{r}\,\mathrm{sen}\,(\tau-\vartheta)-r\,\frac{-r\,\mathrm{sen}\,2(\tau-\vartheta)+\varrho\,\mathrm{sen}\,(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\right\}d\tau,$$

ossia

$$t_{\varrho\varrho} = \frac{r^2-\varrho^2}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{r\,[1+2\cos 2(\tau-\vartheta)]-2\varrho\cos(\tau-\vartheta)}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\,T(\tau)\,d\tau,$$

$$t_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}[r+4\varrho\cos(\tau-\vartheta)]\,T(\tau)\,d\tau - t_{\varrho\varrho}, \tag{6}$$

$$t_{\varrho\vartheta} = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,(\tau-\vartheta)\,\frac{2r\cos(\tau-\vartheta)(r^2+\varrho^2)-2r^2\varrho-\varrho^3}{r^2-2\varrho r\cos(\tau-\vartheta)+\varrho^2}\,T(\tau)\,d\tau.$$

Se in queste formule si pone $\varrho = 0$ si ottengono ovviamente delle funzioni di ϑ, in quanto nel centro delle coordinate polari non è determinata la faccetta rispetto alla quale si intende calcolare lo sforzo. Tale indeterminazione scompare non appena si considerino le componenti degli sforzi in coordinate cartesiane; si trova infatti con facile calcolo

$$[t_{xx}]_{00} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1+2\cos 2\tau]\,T(\tau)\,d\tau$$

$$[t_{yy}]_{00} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [1 - 2\cos 2\tau]\, T(\tau)\, d\tau,$$

$$[t_{xy}]_{00} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\tau\, T(\tau)\, d\tau\,.$$

Introducendo la funzione armonica

$$U(\varrho\,,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 - 2\varrho r\cos(\tau - \vartheta) + \varrho^2}\, T(\tau)\, d\tau$$

soluzione del problema di DIRICLET con i valori $T(\vartheta)$ al contorno e la funzione, coniugata della precedente

$$V(\varrho\,\vartheta) = -\frac{r\varrho}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(\tau - \vartheta)}{r^2 - 2\varrho r\cos(\tau - \vartheta) + \varrho^2}\, T(\tau)\, d\tau$$

[confronta con le (17), (18) di § 2], le (6) possono scriversi in forma più espressiva

$$t_{\varrho\varrho} = \frac{r^2}{\varrho^2}\, U(\varrho\,,\vartheta) - \frac{r^2 - \varrho^2}{r\varrho}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\cos(\tau - \vartheta)\, d\tau - \frac{r^2 - \varrho^2}{\varrho^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\, d\tau$$

$$t_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r^2}{\varrho^2}\, U(\varrho\,,\vartheta) + \frac{r^2 + 3\varrho^2}{r\varrho}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\cos(\tau - \vartheta)\, d\tau - \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\, d\tau$$

$$t_{\varrho\vartheta} = -\frac{r^2}{\varrho^2}\, V(\varrho\,,\vartheta) - \frac{r^2 + \varrho^2}{r\varrho}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(\tau)\operatorname{sen}(\tau - \vartheta)\, d\tau\,.$$

In quanto agli spostamenti mi limito a calcolarne la componente rispetto all'asse z e si ha [vedi le (4) di § 1 e le (3) di § 3]

$$w = -z\,\frac{\sigma}{E}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [1 + 4\cos(\tau - \vartheta)]\, T(\tau)\, d\tau\,.$$

Ricordando inoltre che uno stato di deformazione piana è caratterizzato dall'essere

$$w = 0, \quad u, v \quad \textit{indipendenti da } z$$

possiamo affermare che in un cilindro elastico circolare retto, nell'ipotesi (1), ad uno stato di tensione piana corrisponde uno stato di deformazione piana solo se la componente normale $T(\vartheta)$ dello sforzo che agisce sull'elemento di frontiera nel punto considerato soddisfa alle seguenti condizioni

$$\int_0^{2\pi} T(\vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} T(\vartheta) \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} T(\vartheta) \, d\vartheta = 0 .$$