

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUIDO ASCOLI

**Ricerche asintotiche sopra una classe di equazioni
differenziali non lineari**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 5,
n° 1-2 (1951), p. 1-28

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RICERCHE ASINTOTICHE SOPRA UNA CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

di GUIDO ASCOLI (Torino)

INTRODUZIONE

La presente Memoria è principalmente dedicata alla determinazione di formule asintotiche per $t \rightarrow \infty$ per gli integrali limitati delle equazioni differenziali del tipo

$$(A) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = f\left(x, \frac{1}{t}\right)$$

in cui f è simbolo di funzione olomorfa delle variabili x e $1/t = u$, nell'intorno di $x = 0$, $u = 0$, nulla per $x = 0$, ed anche per $u = 0$, onde vale in detto intorno uno sviluppo del tipo

$$f\left(x, \frac{1}{t}\right) = \sum_1^{\infty} a_{rs} \frac{x^r}{t^s}.$$

Queste equazioni appaiono così quelle di moti armonici perturbati da forze dipendenti dal posto e dal tempo, e il cui carattere saliente è di consentire la medesima posizione di equilibrio e di divenire infinitesime per $t \rightarrow \infty$.

Un'equazione che, pur non essendo del tipo (A), ne possiede molte caratteristiche, mi si è presentata nel 1936 nello studio di un particolare problema fisico ⁽¹⁾; il metodo allora escogitato per trovare la forma asintotica degli integrali si ritroverà qui convenientemente esteso, in modo da permettere di conseguire, sia pure con calcoli alquanto laboriosi, una seconda approssimazione, e presumibilmente anche approssimazioni ulteriori.

⁽¹⁾ G. ASCOLI. *Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine* (Rend. R. Istit. Lombardo di Sc. e Lettere, 69 (1936), p. 167-184 e 185-197) Cfr. anche: *Il problema analitico del magnetron* in « Questioni riguardanti il magnetron » (Rend. Semin. Mat. e Fis. di Milano, 10, (1936), p. 297 e G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, p. 11 (1941), p. 362-370.

Si presenta spontanea l'estensione del metodo al caso più generale

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + x = f\left(x, \frac{1}{t^{1/k}}\right)$$

con le stesse proprietà per la f , e con k intero e > 1 ; la complicazione del procedimento cresce però notevolmente con k , onde ho creduto opportuno limitarmi al caso $k = 2$ e ad una prima approssimazione. Sembra pure accessibile al metodo usato il caso di un qualunque esponente $1/k$ positivo ed anche casi più complessi; per esempio quello in cui lo sviluppo della f abbia carattere asintotico rispetto a t ⁽²⁾ (come avveniva, per esempio, nel suo ricordato lavoro del 1936). Ma di ciò non faremo parola nella presente Memoria.

Alla ricerca che forma, come si è detto, l'oggetto principale del presente scritto era necessario premettere la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni limitate della (A), che sfugge, mi sembra, ai criteri dati dal PERRON e dagli altri autori a me noti ⁽³⁾. Ciò mi ha dato l'occasione per dimostrare un teorema generale di stabilità relativo a sistemi canonici:

$$\frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{d y_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

nei quali sia

$$H(x_i, y_i, t) = U(x_i, y_i) + \psi(x_i, y_i, t)$$

con convenienti ipotesi sulla U e sulla ψ . In breve, esse sono tali da garantire l'esistenza della soluzione « statica » $x_i = 0$, $y_i = 0$, in ogni caso, e la sua stabilità nell'ipotesi $\psi = 0$; il termine ψ , per valori costanti delle x_i ed y_i , è supposto infinitesimo per $t \rightarrow +\infty$; un'opportuna limitazione

⁽²⁾ Con ciò intendiamo supporre che per un certo valore di n (od anche per tutti) valga una relazione della forma:

$$f(x, u) = \sum_1^n u^r \sum_1^\infty a_{rs} x^s + u^{n+1} \varphi(x, u)$$

ove $\varphi(x, u)$ è limitata nell'intorno del punto $(0, 0)$.

⁽³⁾ Cfr O PERRON, *Über Stabilität und asymptotischen Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen* (Math. Zeitschrift, 29, 1929), p. 128-160). A quanto è detto nel testo deve farsi una parziale eccezione per il criterio dato da H. WEIL (Amer. Journ., 68, (1946), p. 7-12) in un breve commento ad un lavoro di N. LEVINSON (p. 1-6 dello stesso volume) sui sistemi lineari, criterio che si applica alla (A) nel caso in cui la f abbia in u , per $u = 0$, uno zero del 2° ordine (cioè $a_{r1} = 0$).

per la derivata ψ'_i consente allora di provare che la stabilità continua a sussistere anche in presenza del termine complementare.

Non crediamo inutile osservare che questo risultato si può presentare come una larga estensione di un teorema ben noto di R. CACCIOPOLI ⁽⁴⁾ (cui han fatto seguito quelli molto più generali — ma in senso ben diverso — di M. FUKUHARA*, L. CESARI, N. LEVINSON) relativo all'equazione lineare

$$x'' + (\alpha^2 + \eta(t))x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

nell'ipotesi di una $\eta(t)$ a variazione limitata tra t_0 e $+\infty$ e tendente a zero per $t \rightarrow +\infty$. Posto infatti $x' = -\alpha y$, essa dà luogo ad un sistema canonico in cui è

$$H = \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{2\alpha}\eta(t)$$

e che, quando la $\eta(t)$ possega derivata continua, rientra nelle ipotesi del nostro teorema.

Per chiudere questa *Introduzione* vogliamo ancora notare che il metodo usato per lo studio della (A), per quanto forse suscettibile, nelle sue linee generali, di altre applicazioni, sembra troppo strettamente legato alle particolari proprietà dell'equazione — e precisamente alla natura «quasi sinoidale» dei suoi integrali limitati — per potersi estendere a casi analoghi in cui intervengano sistemi canonici in più di due variabili, od anche sistemi non canonici. Sarebbe quindi desiderabile di rintracciare i medesimi risultati per una nuova via che si presti più facilmente ad una tale estensione.

I

1. TEOREMA. — a) *Essendo S lo spazio delle variabili $(x) = x_1, x_2, \dots, x_n$; $(y) = y_1, y_2, \dots, y_n$, sia definita in un intorno I dell'origine di S una funzione $U(x, y)$, nulla nell'origine, positiva altrove, continua con le sue derivate prime.*

b) *Sia $\psi(x, y, t)$ definita per ogni (x, y) in I e per ogni $t > t_0$ e pure, in tale campo \mathcal{D} dello spazio S delle variabili x, y, t , continua con le sue derivate prime, e sia:*

$$\psi'_{x_i}(0, 0, t) = 0, \quad \psi'_{y_i}(0, 0, t) = 0.$$

(4) R. CACCIOPOLI, *Una questione di stabilità* (Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), 11, (1930), p. 251-254)

c) Sia inoltre, per ogni (x, y) in I ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, y, t) = 0.$$

d) Essendo M l'estremo superiore di U in I , esistano una funzione $\omega(\lambda)$ definita per $0 \leq \lambda < M$, nulla per $\lambda = 0$, continua e non decrescente, e una $\beta(t)$ non negativa, integrabile tra t_0 e $+\infty$, tali che è in \mathcal{J}

$$|\psi'_i(x, y, t)| < \omega(U(x, y))\beta(t)$$

In tali ipotesi, posto

$$H(x, y, t) = U(x, y) + \psi(x, y, t)$$

$x = 0, y = 0$ è soluzione stabile del sistema canonico

$$(B) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

OSSERVAZIONI. — I. Nel seguito, per comodità di linguaggio, la variabile t sarà interpretata come *tempo*. Inoltre, essendo $x = x(t), y = y(t)$ una soluzione del sistema, sarà detta *linea integrale* quella descritta dal punto $(x(t), y(t), t)$ dello spazio \mathcal{S} , *traiettoria* la sua proiezione sullo spazio S , cioè la linea descritta dal punto $(x(t), y(t))$ di S .

II. Nell'enunciato precedente la « stabilità » della soluzione nulla deve intendersi nel modo seguente: comunque sia preso in I un intorno sferico I' dell'origine, esiste un intorno concentrico I'' e un istante t_1 tali che ogni traiettoria che al tempo t_1 passa per un punto di I'' esiste per ogni $t > t_1$ ed è interna ad I' . Definizioni più restrittive saranno considerate al n° 2.

DIMOSTRAZIONE. — Per $a)$, il punto $(0, 0)$ è punto di minimo della U ; quindi vi si annullano le derivate parziali di U rispetto alle x_i e alle y_i . Tenuto conto di $b)$, risulta quindi che $x = 0, y = 0$ è soluzione del sistema (B). Rimane da provare la sua stabilità, nel senso indicato.

Sia I' un intorno sferico dell'origine di S , contenuto in I , ed m' il minimo (positivo) di U sul contorno di I' . Potrà trovarsi allora un $t_1 \geq t_0$ abbastanza grande perchè risulti

$$(1) \quad \omega(m') \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt < m',$$

e poi un altro intorno I'' , concentrico ad I' ed interno ad esso, tale che, detto M'' il massimo di U in I'' si abbia

$$(2) \quad M'' + \omega(M'') \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt < m' - \omega(m') \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt.$$

Il primo membro tende infatti a zero insieme al raggio di I'' .

Vogliamo ora provare che una traiettoria che al tempo t_1 passa per un punto (x_1, y_1) di I'' rimane sempre per $t > t_1$ nell'interno di I' . E difatti, nel caso opposto, essa deve raggiungere in qualche punto il contorno di I' ; e poichè su questo è $U \geq m'$, mentre in (x_1, y_1) è $U < m'$ (come risulta dalla (2)), dovrà esistere un primo istante \bar{t} in cui è $U = m'$. Sia (\bar{x}, \bar{y}) il corrispondente punto della traiettoria; si ha allora identicamente

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) - H(x_1, y_1, t_1) = \int_{t_1}^{\bar{t}} \frac{dH(x(t), y(t), t)}{dt} dt$$

che in virtù delle (B) si trasforma subito in

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) - H(x_1, y_1, t_1) = \int_{t_1}^{\bar{t}} H'_t(x(t), y(t), t) dt = \int_{t_1}^{\bar{t}} \psi'_t(x(t), y(t), t) dt$$

ossia:

$$(3) \quad U(\bar{x}, \bar{y}) = U(x_1, y_1) + \psi(x_1, y_1, t_1) - \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) + \int_{t_1}^{\bar{t}} \psi'_t(x(t), y(t), t) dt.$$

Ma in virtù delle ipotesi c) e d) si ha:

$$\psi(x_1, y_1, t_1) = - \int_{t_1}^{\infty} \psi'_t(x_1, y_1, t) dt$$

$$|\psi(x_1, y_1, t_1)| < \omega(U(x_1, y_1)) \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt \leq \omega(M'') \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt$$

ed analogamente:

$$|\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})| < \omega(U(\bar{x}, \bar{y})) \int_{\bar{t}}^{\infty} \beta(t) dt = \omega(m') \int_{\bar{t}}^{\infty} \beta(t) dt.$$

Inoltre, poichè tra gli istanti t_1 e \bar{t} è $U \leq m'$, si ha:

$$\left| \int_{t_1}^{\bar{t}} \psi'_t(x(t), y(t), t) dt \right| < \int_{t_1}^{\bar{t}} \omega(U(x(t), y(t)) \beta(t)) dt \leq \omega(m') \int_{t_1}^{\bar{t}} \beta(t) dt$$

onde, sostituendo nella (3), e tenendo conto che $U(\bar{x}, \bar{y}) = m'$, $U(x_1, y_1) \leq M''$,

$$m' < M'' + \omega(M'') \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt + \omega(m') \int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt,$$

che contraddice alla (2). Il teorema è così dimostrato. (5)

2. — Con le ipotesi del teorema precedente viene assicurata l'esistenza di soluzioni limitate del sistema (B), almeno per valori abbastanza grandi di t . Ma può avere interesse osservare che con qualche ulteriore ipotesi è possibile dare alla stabilità della soluzione statica $x = y = 0$ del sistema significati più precisi. E così:

α) Se ammettiamo che sia:

$$\omega(\lambda) \leq k\lambda,$$

con k costante, si può asserire che t_1 può essere scelto una volta per tutte, indipendentemente dalla scelta di I' . Basterà infatti scegliere t_1 in modo che risulti:

$$\int_{t_1}^{\infty} \beta(t) dt < \frac{1}{k}.$$

β) Ove sia, più precisamente,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} = 0$$

si può assumere $t_1 = t_0$. Basterà infatti prendere il raggio di I' abbastanza piccolo in modo che risulti:

$$\frac{\omega(m')}{m'} < \frac{1}{\int_{t_0}^{\infty} \beta(t) dt}$$

(5) È ben noto che dal risultato stabilito segue senz'altro la prolungabilità della linea integrale per ogni $t > t_1$.

γ) Alla stessa conclusione si arriva ammettendo che *ulteriori proprietà della H assicurino la dipendenza continua delle linee integrali dai valori iniziali in ogni intervallo finito $t_0 \text{---} t$* . Si determinino infatti l'istante t_1 e l'intorno I'' , in modo che ogni traiettoria che al tempo t_1 passa per un punto di I'' rimanga poi sempre in I' . Poichè la soluzione statica esiste in ogni intervallo $t_0 \text{---} T$ avente all'interno t_1 , per la supposta dipendenza continua dai valori iniziali esisterà un intorno I_0 dell'origine tale che ogni traiettoria che al tempo t_0 passa per un punto di I_0 esiste in tutto $t_0 \text{---} t_1$ ed è contenuta in I'' . Essa si continua allora, a norma del teorema dimostrato, in una traiettoria definita per $t > t_0$ e contenuta in I' (6).

3. — Conservando ora le sole ipotesi del n° 1, consideriamo una qualunque soluzione limitata $x = x(t), y = y(t)$ del sistema (B), definita per $t \geq t_1$. Si potrà scrivere per gli istanti t_1 e t l'equazione, analoga alla (3),

$$(4) \quad U(x(t), y(t)) = U(x_1, y_1) + \psi(x_1, y_1, t_1) - \psi(x(t), y(t), t) + \\ + \int_{t_1}^t \psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

e osservare che l'ultimo termine ha limite finito per $t \rightarrow \infty$, riuscendo

$$|\psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau)| < \omega(U(x(\tau), y(\tau))\beta(\tau))$$

ed essendo $U(x(t), y(t))$ limitata. Essa può quindi prendere la forma

$$(5) \quad U(x(t), y(t)) = U(x_1, y_1) + \psi(x_1, y_1, t_1) + \\ + \int_{t_1}^{\infty} \psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau - \psi(x(t), y(t), t) - \int_t^{\infty} \psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

Ma si ha :

$$|\psi(x(t), y(t), t)| = \left| \int_t^{\infty} \psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \right| < U(x(t), y(t)) \int_t^{\infty} \beta(\tau) d\tau = O\left(\int_t^{\infty} \beta(\tau) d\tau\right) \\ \left| \int_t^{\infty} \psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \right| < \int_t^{\infty} U(x(\tau), y(\tau)) \beta(\tau) d\tau = O\left(\int_t^{\infty} \beta(\tau) d\tau\right)$$

(6) Effettivamente, ciò che qui importa dimostrare è la stabilità della soluzione nulla in ogni intervallo finito $t_0 \text{---} t$; essa è difatti contenuta, come caso particolarissimo, nell'ipotesi ammessa.

onde segue che lungo una traiettoria limitata la $U(x, y)$ tende ad un limite finito $K \geq 0$, e si ha anzi:

$$(6) \quad U(x(t), y(t)) = K + O\left(\int_t^\infty \beta(\tau) d\tau\right)$$

Come subito si vede, lo stesso potrebbe dirsi per la $H(x, y, t)$.

4. — Mostriamo ora che se si ha:

$$\omega(\lambda) < k\lambda$$

(ipotesi α) del n° 2) una traiettoria che non diverga definitivamente nell'origine di S ha definitivamente (in tutto l'intervallo di definizione, se sussiste il teorema di unicità) da essa distanza positiva.

Intanto, nel caso opposto, al crescere di t , la U dovrebbe prendere sulla traiettoria anche valori piccoli a piacere. Ne segue, nella (6), $K = 0$.

La (5) diviene allora:

$$U(x(t), y(t)) = -\psi(x(t), y(t), t) - \int_t^\infty \psi'_i(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

da cui:

$$U(x(t), y(t)) < k U(x(t), y(t)) \int_t^\infty \beta(\tau) d\tau + k \int_t^\infty U(x(\tau), y(\tau)) \beta(\tau) d\tau$$

Sia $\mu(t)$ il massimo di $U(x(t), y(t))$ fra t e $+\infty$; avremo:

$$U(x(t), y(t)) < 2k\mu(t) \int_t^\infty \beta(\tau) d\tau$$

da cui, facendo variare t da T a $+\infty$ e prendendo i massimi dei due membri,

$$\mu(T) < 2k\mu(T) \int_T^\infty \beta(\tau) d\tau$$

Se $\mu(T) \neq 0$ segue:

$$\int_T^\infty \beta(\tau) d\tau > \frac{1}{2k}$$

ciò che, per T abbastanza grande, è assurdo. Da un certo punto in poi è dunque $\mu(t) = 0$, $U(x(t), y(t)) = 0$, $x = y = 0$, e la soluzione considerata è quella nulla. E ciò vale per ogni $t > t_1$, ove sussista il teorema di unicità.

Implicitamente, abbiamo così dimostrato che *se la U tende a zero lungo una linea integrale, definitivamente è $U = 0$ e la linea coincide con l'asse delle t .*

Si presenta qui spontaneo il confronto con il caso $\psi = 0$, nel quale le traiettorie giacciono sulle varietà $U = \text{cost.}$; nelle ipotesi poste esse tendono ad adagiarsi su tali varietà.

II

5. — Sia $f(x, u)$ una funzione analitica nei suoi argomenti, regolare nel punto $(0, 0)$, nulla per $x = 0$ ed anche per $u = 0$, e quindi sviluppabile in un certo bicilindro $|x| \leq R$, $|u| \leq u_0$, tutto interno al campo di regolarità, nella serie doppia

$$f(x, u) = \sum_{r,s}^{\infty} a_{rs} x^r u^s.$$

Considerando allora l'equazione differenziale

$$(A) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = f\left(x, \frac{1}{t}\right)$$

e posto $dx/dt = y$, si vede subito che essa può trasformarsi nel sistema

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - f\left(x, \frac{1}{t}\right)$$

ed anche nell'altro, di forma canonica,

$$(A') \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

ove si ponga:

$$H = U + \psi, \quad U = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \psi = -\int_0^x f\left(\xi, \frac{1}{t}\right) d\xi.$$

È facile vedere che assumendo come intorno I il cerchio $x^2 + y^2 \leq R^2$ del piano (x, y) e $t_0 = 1/u_0$ sono soddisfatte le condizioni del teorema di stabilità del n° 1. Ciò è immediato per le a), b), c); per la d) si osservi

che la f annullandosi per $x = 0$, la ψ vi ha uno zero che è almeno del 2° ordine, e così la ψ'_t ; onde scrivendo:

$$\psi'_t = \frac{x^2}{t^2} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f'_u \left(\xi, \frac{1}{t} \right) d\xi \right)$$

il secondo fattore del secondo membro è olomorfo in \mathcal{J} , e quindi limitato. È dunque

$$|\psi'_t| < \frac{C x^2}{t^2} \leq \frac{C(x^2 + y^2)}{t^2} = \frac{2 C U}{t^2}$$

e la d) è verificata ponendo:

$$\omega(\lambda) = 2 C \lambda, \quad \beta(t) = \frac{1}{t^2}$$

Ci troviamo anzi nel caso α) (e anche, per ovvie ragioni, nel caso γ)), del n° 2.

La soluzione nulla del sistema (A') è dunque stabile, e per ogni sua soluzione limitata si ha dalla (6) del n° 3

$$x^2 + y^2 = \gamma^2 + O(t^{-1})$$

dove (n° 4) $\gamma \geq 0$ è nullo solo per la soluzione nulla. Per la (A) è, in corrispondenza, per ogni soluzione limitata con la sua derivata, e non nulla,

$$(1) \quad x'^2 + x^2 = \gamma^2 + O(t^{-1}) \quad (\gamma > 0)$$

Può domandarsi se una soluzione limitata di (A) ha sempre derivata limitata. La risposta è affermativa; e vale anzi la (1). Trascrivendo infatti per il nostro caso la (4) del n° 3 (che ci sarà anche utile in seguito) si ha:

$$(2) \quad x'^2 + x^2 = x_1'^2 + x_1^2 - 2 \int_0^{x_1} f \left(\xi, \frac{1}{t_1} \right) d\xi + 2 \int_0^x f \left(\xi, \frac{1}{t} \right) d\xi + \\ + 2 \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{\tau^2} \int_0^x f'_u \left(\xi, \frac{1}{\tau} \right) d\xi$$

e basta allora osservare che nella ipotesi posta il penultimo termine tende a zero per $t \rightarrow \infty$, e l'ultimo ad un limite finito, per riconoscere che il ragionamento che conduce alla (1) continua a sussistere.

6. — Se $x(t)$ è una soluzione della (A), essa è anche soluzione dell'equazione lineare

$$z'' + \left(1 - \frac{1}{x(t)} f\left(x(t), \frac{1}{t}\right)\right) z = 0.$$

Se $x(t)$ è limitata, per $t \rightarrow \infty$ il coefficiente di z tende ad 1; ne segue, per noti teoremi di STURM, che $x(t)$ ha infiniti zeri (semplici), infiniti estremi e infiniti flessi che, almeno per t abbastanza grande, hanno luogo solo negli zeri. Inoltre: la differenza tra due zeri consecutivi tende a π .

Dalla (1) si segue poi: negli zeri di $x(t)$ ove questa è crescente, la derivata tende a γ , negli altri a $-\gamma$; i massimi di $x(t)$ tendono a γ , i minimi a $-\gamma$. E i rispettivi residui sono $O(1/t)$.

Tale andamento potrebbe dirsi, come altra volta ebbi a proporre (7), quasi sinoidale.

7. — Per trovare un'espressione asintotica di $x(t)$ per $t \rightarrow \infty$, cercheremo di ottenere una tale espressione nell'intervallo $t_{2n} \leq t < t_{2n+2}$ tra due zeri consecutivi con derivata positiva. Poniamo per questo

$$\varepsilon = \frac{1}{t_{2n}}, \quad p = x'_{2n} = x'(t_{2n}), \quad t = t_{2n} + \tau = \frac{1 + \varepsilon \tau}{\varepsilon}, \quad x(t) = X(\tau)$$

e conserviamo gli apici per indicare derivazioni rispetto a τ . La (A) potrà allora scriversi

$$(3) \quad X'' + X = f\left(X, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau}\right)$$

con le condizioni iniziali

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = p.$$

Senza occuparci per il momento del legame tra ε e p , consideriamo la (3) come un'equazione differenziale analitica in τ , che può supporre variabile tra 0 e un numero fisso T , maggiore di 2π , e nel parametro ε , che può supporre piccolo a piacere. Per $\varepsilon = 0$ essa si riduce a

$$X'' + X = 0$$

(7) Cfr. G. ASCOLI, *Sulla forma asintotica degli integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ in un caso notevole di stabilità*. (« *Revista* » de la Univ. Nac. de Tucumàn, 2, (1941) p. 131-138).

ed ammette quindi, con le condizioni iniziali

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = \gamma$$

la soluzione

$$X = \gamma \sin \tau,$$

regolare per ogni τ . Da teoremi noti risulta allora che la (3), per ε sufficientemente piccolo e p abbastanza vicino a γ (cioè per n abbastanza grande) ammette un integrale regolare in τ , per $|\tau| < T$, in ε e in p . In particolare, per τ variabile tra 0 e T , intervallo che, per n abbastanza grande, comprende sempre il punto $t_{2n+2} - t_{2n}$.

In tale campo, dunque, la $X(t)$ ammetterà uno sviluppo per le potenze di ε :

$$(4) \quad X(\tau) = A(\tau, p) + \varepsilon B(\tau, p) + \varepsilon^2 C(\tau, p) + \dots$$

equiconvergente in ε , τ e p , derivabile termine a termine quante volte si vuole, a coefficienti regolari in τ e p , e quindi limitati.

Il calcolo effettivo di A, B, C, \dots non offre alcuna difficoltà teorica. Basterà, per esempio, sviluppare il primo e il secondo membro della (3) per le potenze di ε ed identificare i coefficienti omologhi. Il secondo membro dà:

$$\begin{aligned} f\left(X, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau}\right) &= f(A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C + \dots, \varepsilon - \varepsilon^2 \tau + \varepsilon^3 \tau - \dots) = \\ &= f(A, 0) + \varepsilon [f'_x(A, 0) B + f'_u(A, 0)] + \frac{\varepsilon^2}{2} [f''_{xx}(A, 0) B^2 + \\ &+ 2 f''_{xu}(A, 0) B + f''_{uu}(A, 0) + f'_x(A, 0) \cdot 2 C - 2 \tau f'_u(A, 0)] + \dots \end{aligned}$$

ove è però da osservare che da $f(X, 0) = 0$ segue

$$f'_x(A, 0) = 0, f''_{xx}(A, 0) = 0, \dots$$

Lo sviluppo si semplifica quindi in:

$$f\left(X, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau}\right) = \varepsilon f'_u(A, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} [2 B f''_{xu}(A, 0) + f''_{uu}(A, 0) - 2 \tau f'_u(A, 0)] + \dots$$

e il confronto dà per A, B e C , cui basterà limitarci, le equazioni

$$\begin{aligned} A'' + A &= 0; & B'' + B &= f'_u(A, 0); \\ C'' + C &= B f''_{xu}(A, 0) + \frac{1}{2} f''_{uu}(A, 0) - \tau f'_u(A, 0). \end{aligned}$$

Quanto alle condizioni iniziali, esse si deducono da

$$A(0, p) + \varepsilon B(0, p) + \varepsilon^2 C(0, p) + \dots = 0$$

$$A'(0, p) + \varepsilon B'(0, p) + \varepsilon^2 C'(0, p) + \dots = p$$

e risultano quindi;

$$A(0, p) = 0, B(0, p) = 0, C(0, p) = 0, \dots$$

$$A'(0, p) = p, B'(0, p) = 0, C'(0, p) = 0, \dots$$

L'integrazione è allora immediata, e dà:

$$(5) \quad A = p \sin \tau, B = \int_0^\tau f'_u(p \sin \sigma, 0) \sin(\tau - \sigma) d\sigma$$

$$C = \int_0^\tau [B(\sigma, p) f''_{xu}(p \sin \sigma, 0) + \frac{1}{2} f''_{uu}(p \sin \sigma, 0) - \sigma f'_u(p \sin \sigma, 0)] \sin(\tau - \sigma) d\sigma$$

8. — Poichè la X si riduce per $\varepsilon = 0$ a $p \sin \tau$, che ha uno zero semplice per $\tau = 2\pi$, per ε prossimo a zero essa avrà uno zero $= 2\pi + \delta$, ove δ è funzione olomorfa di ε (e di p), nulla per $\varepsilon = 0$. La sostituzione dà:

$$p \sin \delta + \varepsilon B(2\pi + \delta, p) + \varepsilon^2 C(2\pi + \delta, p) + \dots = 0$$

ossia

$$p \delta + \varepsilon B(2\pi, p) + \delta \varepsilon B'(2\pi, p) + \varepsilon^2 C(2\pi, p) + \dots$$

dove i termini tralasciati sono almeno del 3° ordine in ε . Si ha così, in prima approssimazione,

$$(6) \quad \delta = -\varepsilon \frac{B(2\pi, p)}{p} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \varphi(p) + O(\varepsilon^2)$$

$$\varphi(p) = \frac{1}{p} \int_0^{2\pi} f'_u(p \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma$$

è questa formula ci sarà per il momento sufficiente.

Se ora ricordiamo (n° 6) che è $p = \gamma + O(\varepsilon)$ e osserviamo che $\varphi(p)$ è olomorfa per $p = \gamma$ ⁽⁸⁾, vediamo che può scriversi

$$(7) \quad X = \gamma \sin \tau + O(\varepsilon), \delta = \varepsilon \varphi(\gamma) + O(\varepsilon^2)$$

9. — Siamo ora in grado di ricavare una semplice relazione asintotica cui soddisfano i t_{2n} . La seconda delle (7) può infatti scriversi:

$$t_{2n+2} = t_{2n} + 2\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{t_{2n}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right)$$

e da essa si trae subito:

$$\log t_{2n+2} = \log t_{2n} + \frac{2\pi}{t_{2n}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right).$$

Eliminando tra queste il termine in $1/t_{2n}$ si ottiene:

$$t_{2n+2} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n+2} = t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} + 2\pi + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right)$$

che può scriversi:

$$\left[t_{2n+2} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n+2} - (2n+2)\pi \right] - \left[t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} - 2n\pi \right] = O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right).$$

Ma da $t_{2n+2} - t_{2n} \rightarrow 2\pi$ segue che t_{2n} è asintotico a $2n\pi$; quindi la serie $\sum 1/t_{2n}^2$ è convergente, e il suo resto è $O(1/n)$ o $O(1/t_{2n})$. Ne risulta che esiste finito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} - 2n\pi \right) = \mu$$

e si ha precisamente:

$$(8) \quad t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} - 2n\pi = \mu + O\left(\frac{1}{t_{2n}}\right)$$

10. — Sia ora $t = t_{2n} + \tau$ un valore qualunque tra t_{2n} e t_{2n+2} ; potremo scrivere:

$$\tau = t - t_{2n} = t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} - \mu - 2n\pi + O\left(\frac{1}{t_{2n}}\right).$$

⁽⁸⁾ Osservazioni di questo genere saranno nel seguito sottintese. Si potrà anzi riscontrare, caso per caso, che la regolarità di tutte le funzioni di γ che compariscono nelle formule del testo sussiste anche per $\gamma = 0$.

Ma $\log t = \log t_{2n} + O(\tau/t_{2n}) = \log t_{2n} + O(1/t_{2n})$ e $t \asymp t_{2n}$, quindi:

$$\tau = t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t - \mu - 2n\pi + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

e sostituendo nella prima delle (7):

$$(9) \quad \boxed{x(t) = \gamma \sin\left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t - \mu\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)}$$

formula da cui è scomparsa ogni traccia di n , e che dà l'espressione asintotica cercata. In essa compariscono due costanti γ e μ ; e si ha poi:

$$\frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma.$$

Può essere utile avere la forma della $\varphi(\gamma)$ espressa per mezzo dei coefficienti dello sviluppo della f in serie doppia. Risulta subito:

$$f'_u(x, 0) = \sum_1^{\infty} a_{r1} x^r, \quad \varphi(\gamma) = \sum_1^{\infty} a_{r1} \gamma^{r-1} \int_0^{2\pi} \sin^{r+1} \sigma d\sigma$$

e quindi, essendo l'integrale nullo per r pari,

$$(10) \quad \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}} \binom{2\nu}{\nu} a_{2\nu-11} \gamma^{2\nu-2} = \frac{1}{2} a_{11} + \frac{3}{8} a_{31} \gamma^2 + \frac{5}{16} a_{51} \gamma^4 + \dots$$

Come si vede, nella forma asintotica (9) interviene solo la parte dello sviluppo che è lineare in u (o $1/t$), ed anzi solo i coefficienti delle potenze dispari di x .

ESEMPLI. — L'equazione

$$x'' = \frac{x^3 t^2 + x t^3}{x^3 - t^3}$$

può scriversi:

$$x'' + x = \frac{x^3 t^2 + x^4}{x^3 - t^3},$$

onde essa rientra nel tipo (B). Sviluppando il secondo membro per le potenze di $1/t$, si vede subito che il coefficiente di $1/t$ è $-x^3$; gli a_{r1} sono

dunque tutti nulli, salvo $a_{31} = -1$. Quindi la forma asintotica degli integrali limitati sarà:

$$x = \gamma \sin \left(t + \frac{3}{8} \gamma^2 \log t - \mu \right) + O \left(\frac{1}{t} \right).$$

Per l'equazione

$$x'' + x = \frac{\sin x}{x+t}$$

risulta $f'_u(x, 0) = \sin x$ e

$$\frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \sin(\gamma \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma = \frac{J_1(\gamma)}{\gamma},$$

dove J_1 indica, come di consueto, la funzione di BESSEL di indice 1. Ne segue

$$x = \gamma \sin \left(t - \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} \log t - \mu \right) + O \left(\frac{1}{t} \right).$$

OSSERVAZIONE. — Se si applica la formula (9) all'equazione lineare

$$(a) \quad x'' + \left(1 + \frac{k}{t} \right) x = 0,$$

si ottiene subito la formula

$$x = \gamma \sin \left(t + \frac{k}{2} \log t - \mu \right) + O \left(\frac{1}{t} \right)$$

che coincide con la (9) quando si assuma

$$k = -\frac{\varphi(\gamma)}{\pi}.$$

Si ha quindi il fatto notevole che, le ∞^2 soluzioni limitate della più generale equazione (A) si distribuiscono in ∞^1 sistemi ∞^1 , ciascuno dei quali, in prima approssimazione, soddisfa ad una equazione lineare del semplicissimo tipo (a).

11. — A complemento della ricerca precedente mostriamo come possano ottenersi formule asintotiche per altri elementi relativi ad una qualunque soluzione limitata della (A).

Anzitutto, derivando termine a termine lo sviluppo (4), ove sia posto per A il suo valore e $p = \gamma + O(1/t)$ si ottiene subito:

$$X'(\tau) = p \cos \tau + O\left(\frac{1}{t}\right) = \gamma \cos \tau + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

ossia:

$$x'(t) = \gamma \cos \left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t - \mu \right) + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

che coincide con l'espressione che si avrebbe derivando formalmente la (9).

Per ottenere poi un'espressione asintotica per gli zeri t_n di $x(t)$ cominciamo coll'osservare che una formula analoga alla (8) vale per gli zeri t_{2n+1} con derivata negativa. Nel modo più breve ciò si ottiene ripetendo per essi il ragionamento stesso che ha condotto alla (8), per la qual cosa si dovrà mutare γ in $-\gamma$. Poichè $\varphi(\gamma)$ è funzione pari (ciò risulta, per esempio, dalla (10)) si otterrà:

$$t_{2n+1} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n+1} - (2n+1)\pi = \mu' + O\left(\frac{1}{t_{2n+1}}\right)$$

dove μ' è una nuova costante il cui valore si determina subito osservando che $t_{2n+1} - t_{2n}$ tende a π . Risulta $\mu' = \mu$ e quindi la formula, valida per tutti gli zeri,

$$t_n = n\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_n + \mu + O\left(\frac{1}{t_n}\right).$$

Ne segue:

$$\log t_n = \log n\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi^2} \frac{\log t_n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

e poi:

$$\log t_n = \log n\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi^2} \frac{\log n\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui finalmente

$$(11) \quad t_n = n\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log n\pi + \frac{\varphi^2(\gamma)}{4\pi^3} \frac{\log n\pi}{n} + \mu + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si può anche ottenere facilmente una formula asintotica per gli estremanti di $x(t)$, come zeri di $x'(t)$. Così, si otterrà l'ascissa t'_{2n} del massimo che segue t_{2n} cercando quello zero di

$$X'(\tau) = p \cos \tau + \varepsilon B'(\tau, p) + \dots$$

che per $\varepsilon = 0$ si riduce a $\pi/2$. Si avrà senz'altro :

$$\tau = \frac{\pi}{2} + O(\varepsilon)$$

e l'analogha formula varrà per i minimi t'_{2n+1} . Il procedimento consente anzi di trovare una migliore valutazione della differenza $t'_n - t_n$; risulta infatti :

$$(12) \quad t'_{2n} = t_{2n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\overline{\varphi}(\gamma)}{t_{2n}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right)$$

ove è :

$$\overline{\varphi}(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma$$

ma la formola risulta di poco valore sinchè non si sia ottenuta per t_{2n} la corrispondente approssimazione.

III

12. — Conservando le notazioni della precedente sezione, passeremo ora alla ricerca di una valutazione asintotica più precisa per l'integrale $x(t)$ della (A). Occorre per questo anzitutto approfondire la dipendenza di $p = x'_{2n}$ da $\varepsilon = 1/t_{2n}$, determinando la parte principale dell'infinitesimo $x'_{2n} - \gamma$. Ciò si ottiene assai rapidamente nel modo seguente.

Poniamo nella (2) del n° 6 t_{2n} e t_{2n+2} al posto di t_0 e t . Si ottiene subito:

$$x'_{2n+2} - x'_{2n} = 2 \int_{t_{2n}}^{t_{2n+2}} \frac{dt}{t^2} \int_0^{x(t)} f'_u\left(\xi, \frac{1}{t}\right) d\xi$$

che con la posizione $t = (1 + \varepsilon \tau)/\varepsilon$ si trasforma in

$$(13) \quad x'_{2n+2} - x'_{2n} = 2 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi+\delta} \frac{d\tau}{(1 + \varepsilon \tau)^2} \int_0^{X(\tau)} f'_u\left(\xi, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau}\right) d\xi$$

Si vede di qui che il primo membro è rispetto ad ε almeno del 2° ordine; e che se si pone poi, nel coefficiente di ε^2 , $\varepsilon = 0$, la parte trascurata

è $O(\varepsilon^3)$. Si ha cioè:

$$x'_{2n+2} - x'_{2n} = 2 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{\gamma \sin \tau} f'_u(\xi, 0) d\xi + O(\varepsilon^3)$$

che scriveremo:

$$x'_{2n+2} - x'_{2n} = \frac{2 \varphi_1(\gamma)}{t_{2n}^2} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right)$$

avendo posto:

$$\varphi_1(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{\gamma \sin \tau} f'_u(\xi, 0) d\xi.$$

Si sostituiscano ora, al posto di n , successivamente, $n+1, n+2, \dots$ e si sommi; risultando facilmente dalle formule della parte II che la somma degli ultimi termini è $O(t_{2n}^{-2})$ si ottiene:

$$\gamma^2 - x'_{2n} = 2 \varphi_1(\gamma) \sum_n^{\infty} \frac{1}{t_{2n}^2} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right).$$

Ora si dimostra facilmente la formula:

$$\sum_n^{\infty} \frac{1}{t_{2n}^2} = \frac{1}{2\pi t_{2n}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right);$$

si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_{2n}} - \frac{1}{t_{2n+2}} &= \frac{t_{2n+2} - t_{2n}}{t_{2n} t_{2n+2}} = \frac{2\pi + O(1/t_{2n})}{t_{2n} t_{2n+2}} = \frac{2\pi}{t_{2n} t_{2n+2}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{t_{2n}^2} - \frac{2\pi(t_{2n+2} - t_{2n})}{t_{2n}^2 t_{2n+2}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right) = \frac{2\pi}{t_{2n}^2} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right) \end{aligned}$$

e basta mutare n in $n+1, n+2, \dots$ e sommare per ottenere il risultato richiesto. Si ha dunque:

$$\gamma^2 - x'_{2n} = \frac{\varphi_1(\gamma)}{\pi t_{2n}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right),$$

da cui, in modo ben noto,

$$(14) \quad p = x'_{2n} = \gamma - \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma t_{2n}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right) = \gamma - \varepsilon \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} + O(\varepsilon^2).$$

13. — La valutazione ottenuta ci permette di spingere il calcolo di $X(\tau)$ e di δ in funzione delle sole τ e ε sino ai termini in ε^2 . Si ha infatti dalla (4):

$$(15) \quad X(\tau) = \gamma \sin \tau - \varepsilon \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} \sin \tau + \varepsilon B(\tau, \gamma) - \varepsilon^2 \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} B_\gamma(\tau, \gamma) + \\ + \varepsilon^2 C(\tau, \gamma) + O(\varepsilon^3), \quad \left(B_\gamma = \frac{\partial B}{\partial \gamma} \right)$$

e quindi per δ l'equazione

$$\gamma \sin \delta - \varepsilon \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} \sin \delta + \varepsilon B(2\pi + \delta, \gamma) - \varepsilon^2 \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} B_\gamma(2\pi + \delta, \gamma) \\ + \varepsilon^2 C(2\pi + \delta, \gamma) + O(\varepsilon^3) = 0$$

la quale, tenendo conto della seconda delle (7), si può scrivere:

$$\gamma \delta = \varepsilon^2 \frac{\varphi(\gamma) \varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} - \varepsilon B(2\pi, \gamma) - \varepsilon^2 \varphi(\gamma) B'(2\pi, \gamma) \\ + \varepsilon^2 \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} B_\gamma(2\pi, \gamma) - \varepsilon^2 C(2\pi, \gamma) + O(\varepsilon^3).$$

Ne segue per δ la formula

$$(16) \quad \delta = \varepsilon \varphi(\gamma) + \varepsilon^2 \varphi_2(\gamma) + O(\varepsilon^3)$$

con

$$\varphi_2(\gamma) = \frac{\varphi(\gamma) \varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma^2} + \frac{\varphi_1(\gamma) B_\gamma(2\pi, \gamma)}{2\pi\gamma^2} - \frac{C(2\pi, \gamma)}{\gamma}$$

essendosi ommesso il termine in $B'(2\pi, \gamma)$, identicamente nullo⁽⁹⁾.

Alla (16), scritta nella forma

$$(17) \quad t_{2n+2} = t_{2n} + 2\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{t_{2n}} + \frac{\varphi_2(\gamma)}{t_{2n}^2} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right)$$

possiamo ora applicare un procedimento simile a quello usato nel n° 9. Da

⁽⁹⁾ Si ha infatti:

$$B'(2\pi, \gamma) = \int_0^{2\pi} f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) \cos(2\pi - \sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) d\sin \sigma = 0$$

questa ricaviamo infatti :

$$\log t_{2n+2} = \log t_{2n} + \frac{2\pi}{t_{2n}} + \frac{\varphi(\gamma) - 2\pi^2}{t_{2n}^2} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right)$$

e tra questa e la (16) eliminiamo il termine in $1/t_{2n}$; poi, tra l'equazione risultante e l'altra

$$\frac{1}{t_{2n+2}} = \frac{1}{t_{2n}} - \frac{2\pi}{t_{2n}^2} + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right)$$

il termine in $1/t_{2n}^2$. Con un facile calcolo, l'equazione finale si pone sotto la forma :

$$t_{2n+2} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n+2} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t_{2n+2}} - (2n+2)\pi = t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t_{2n}} - 2n\pi + O\left(\frac{1}{t_{2n}^3}\right)$$

ove è

$$\varphi_3(\gamma) = \frac{\varphi_2(\gamma)}{2\pi} + \frac{1}{2} \varphi(\gamma) - \frac{\varphi^2(\gamma)}{4\pi^2}$$

Di qui, come al n° 9, si ricava

$$(18) \quad t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t_{2n} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t_{2n}} - 2n\pi = \mu + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right).$$

dove il valore μ viene indicato dalla analoga relazione (8).

14. — Prima di andare oltre, è necessario ci fermiamo un istante a studiare la struttura della funzione $B(\tau, \gamma)$. Si ha :

$$B(\tau + 2\pi, \gamma) = \left(\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+\tau} \right) f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) \sin(\tau - \sigma) d\sigma$$

che, sostituendo nel secondo integrale $\sigma + 2\pi$ a σ , si può scrivere :

$$B(\tau + 2\pi, \gamma) = \sin \tau \int_0^{2\pi} f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) d\sin \sigma - \cos \tau \int_0^{2\pi} f''_u(\gamma \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma + \int_0^\tau f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) \sin(\tau - \sigma) d\sigma.$$

Il primo integrale è evidentemente nullo, mentre il secondo vale $\gamma \varphi(\gamma)$ il terzo $B(\tau, \gamma)$; è dunque:

$$B(\tau + 2\pi, \gamma) = B(\tau, \gamma) - \gamma \varphi(\gamma) \cos \tau$$

da cui segue che la funzione

$$(19) \quad B_1(\tau, \gamma) = B(\tau, \gamma) + \frac{\gamma \varphi(\gamma)}{2\pi} \tau \cos \tau$$

ammette, in τ , il periodo 2π .

15. — Sia ora, come al n° 10, t un valore qualunque compreso tra t_{2n} e t_{2n+2} e $t = t_{2n} + \tau$. La (18) si può scrivere:

$$t - \tau - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log(t - \tau) + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t - \tau} - 2n\pi = \mu + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

da cui, sviluppando,

$$t - \tau - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t + \frac{\varphi(\gamma)\tau}{2\pi t} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t} - 2n\pi = \mu + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ossia:

$$\tau - \frac{\varphi(\gamma)\tau}{2\pi t} = \left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t - \mu\right) + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t} - 2n\pi + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

che scriveremo:

$$(20) \quad \bar{\tau} = \bar{t} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t} - 2n\pi + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

avendo posto:

$$(21) \quad \bar{\tau} = \tau - \frac{\varphi(\gamma)\tau}{2\pi t}, \quad \bar{t} = t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \log t - \mu,$$

D'altra parte, la (15), quando ci si fermi ai termini di primo ordine in $1/t$, può scriversi:

$$x(t) = \gamma \sin \tau + \frac{1}{t} \left(B(\tau, \gamma) - \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} \sin \tau \right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ossia, tenuto conto della (19),

$$(22) \quad x(t) = \gamma \left(\sin \tau - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi t} \tau \cos \tau \right) + \frac{1}{t} B_2(\tau, \gamma) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

essendo

$$B_2(\tau, \gamma) = B_1(\tau, \gamma) - \frac{\varphi_1(\gamma)}{2\pi\gamma} \sin \tau$$

periodica in τ , con periodo 2π .

Ma dalla prima delle (21) si ha:

$$\sin \bar{\tau} = \sin \tau - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi t} \tau \cos \tau + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad B_2(\tau, \gamma) = B_2(\bar{\tau}, \gamma) + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

e quindi, sostituendo nella (22),

$$x(t) = \gamma \sin \bar{\tau} + \frac{1}{2} B_2(\bar{\tau}, \gamma) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Di qui, per la (20), tenuto conto della periodicità della B_2 ,

$$x(t) = \gamma \sin\left(\bar{t} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t}\right) + \frac{1}{t} B_2\left(\bar{t} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t}, \gamma\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

che può semplificarsi in

$$(23) \quad \boxed{x(t) = \gamma \sin \bar{t} + \frac{1}{t} (\gamma \varphi_3(\gamma) \cos \bar{t} + B_2(\bar{t}, \gamma)) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

e questa, con il significato (21) di \bar{t} , è la formula di seconda approssimazione che volevamo ottenere. Essa completa infatti la parte principale $\gamma \sin \bar{t}$ della (9) con un termine, di struttura alquanto complessa, che è $O(1/t)$.

16. — Non crediamo utile fermarci a trasformare le espressioni delle funzioni $\varphi_3(\gamma)$, $B_2(\bar{t}, \gamma)$ che compariscono nella (23), nè a dar loro forma esplicita nel caso in cui si usi per la f lo sviluppo in serie doppia; ci basti osservare, per questo caso, che, deducendosi tali espressioni da quelle di $f'_u(x, 0)$, $f''_{xu}(x, 0)$, $f''_{uu}(x, 0)$, in esse compariranno solo i coefficienti a_{r1} , a_{r2} dello sviluppo; la parte residua della f potrà quindi esser senz'altro trascurata.

È notevole il caso in cui gli a_{r1} siano tutti nulli, ossia la $f(x, u)$ sia, come funzione di u , infinitesima almeno del 2° ordine per $u = 0$. Si potrebbe in tale ipotesi riprendere da capo la ricerca tenendo conto anche che nell'applicazione del teorema di stabilità si può allora assumere $\beta(t) = t^{-3}$ (e talvolta anche t^{-n} con $n > 3$); la trattazione risulta ad ogni modo estre-

mamente semplificata. Ma si giunge egualmente allo scopo con le nostre formole osservando che si ha in quel caso :

$$B(\tau, \gamma) = 0, \quad \varphi(\gamma) = 0, \quad \varphi_1(\gamma) = 0, \quad B_2(t, \gamma) = 0, \quad \bar{t} = t - \mu$$

mentre è poi :

$$C(\tau, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\tau f''_{uu}(\gamma \sin \sigma, 0) \sin(\tau - \sigma) d\sigma,$$

$$\varphi_2(\gamma) = -\frac{1}{2\gamma} \int_0^{2\pi} f''_{uu}(\gamma \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma$$

$$\varphi_3(\gamma) = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} f''_{uu}(\gamma \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma$$

e quindi :

$$x(t) = \gamma \sin(t - \mu) + \frac{\gamma \varphi_3(\gamma)}{t} \cos(t - \mu) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Per finire, accenniamo al modo di ottenere, nel caso generale, una valutazione degli zeri t_n in seconda approssimazione: si potrà, per questo, operare sulla (18) con il metodo dato al n° 11; oppure sostituire nella (18) stessa, nei termini in $\log t_{2n}$ e in $1/t_{2n}$ i valori (11) ottenuti con la prima approssimazione, e trasformare, in modo ovvio, i risultati. Si ottengono così nuovi termini in $1/n$ e in $\log n \pi/n^2$ e un residuo $O(n^{-2})$.

IV

17. — Come già fu annunziato nell'*Introduzione*, estenderemo qui i metodi precedenti, nella forma più sommaria, e limitandoci alla prima approssimazione, alle equazioni del tipo

$$(C) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = f\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

con le medesime ipotesi del n° 5 per la funzione f ⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ Si avverta che i simboli usati in questa sezione non hanno necessariamente lo stesso significato stabilito per essi nelle due precedenti.

Si riscontra anche qui che ponendo $x' = y$ la (C) si trasforma in un sistema canonico (C') la cui funzione caratteristica H è data da

$$H = U + \psi, \quad U = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \psi = - \int_0^x f\left(\xi, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) d\xi,$$

e che per esso risultano verificate le condizioni del teorema di stabilità del n° 1, e anche quelle α) e γ) del n° 2, assumendo, per un conveniente valore positivo di C ,

$$\omega(\lambda) = C\lambda, \quad \beta(t) = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Esisteranno quindi soluzioni limitate e non nulle di (C), per ciascuna delle quali si avrà

$$(1) \quad x'^2 + x^2 = \gamma^2 + O(t^{-1/2})$$

con $\gamma \geq 0$.

Osservando poi che una tale soluzione $x(t)$ soddisfa all'equazione lineare

$$z'' + \left(1 - \frac{1}{x} f\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) z = 0$$

cui sono applicabili i noti teoremi di STURM, si dedurrà che, per t abbastanza grande, l'andamento di $x(t)$ è « quasi sinoidale ». Vi saranno dunque, in particolare, infiniti zeri t_n , per i quali è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t_n) = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'(t_{2n}) = \gamma, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'(t_{2n+1}) = -\gamma.$$

Per ottenere la forma asintotica delle soluzioni si porrà ora:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{t_{2n}}}, \quad p = x'_{2n} = x'(t_{2n}), \quad t = t_{2n} + \tau = \frac{1 + \varepsilon^2 \tau}{\varepsilon^2}, \quad x(t) = X(\tau),$$

intendendo τ variabile tra 0 e un certo $T > 2\pi$. L'equazione si scriverà allora

$$X'' + X = f\left(X, \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2 \tau)^{1/2}}\right)$$

con le condizioni iniziali $X(0) = 0$, $X'(0) = p$.

Per $|\varepsilon|$ e $|p - \gamma|$ abbastanza piccoli, e $|\tau| < T$ la soluzione si potrà sviluppare per le potenze di ε nella forma:

$$(2) \quad X = A(\tau, p) + \varepsilon B(\tau, p) + \varepsilon^2 C(\tau, p) + \dots$$

dove un facile calcolo dà per A, B, C le condizioni:

$$A'' + A = 0 \quad \text{con} \quad A(0, p) = 0, \quad A'(0, p) = p;$$

$$B'' + B = f'_u(A, 0) \quad \text{con} \quad B(0, p) = 0, \quad B'(0, p) = 0;$$

$$C'' + C = B f''_{xu}(A, 0) + \frac{1}{2} f''_{uu}(A, 0) \quad \text{con} \quad C(0, p) = 0, \quad C'(0, p) = 0$$

Di qui si ricavano successivamente A, B, C ; in particolare:

$$A = p \sin \tau, \quad B = \int_0^\tau f'_u(p \sin \sigma, 0) \sin(\tau - \sigma) d\sigma$$

Per $|\varepsilon|$ sufficientemente piccolo, la X possiede uno zero prossimo a 2π , olomorfo in ε e in p ; indicandolo con $2\pi + \delta$ si avrà l'equazione:

$$p \sin \delta + \varepsilon B(2\pi + \delta, p) + \varepsilon^2 C(2\pi + \delta, p) + \dots = 0$$

cioè:

$$p \delta + \varepsilon B(2\pi, p) + \varepsilon \delta B'(2\pi, p) + \varepsilon^2 C(2\pi, p) + \dots = 0$$

ove i termini tralasciati sono almeno del 3° ordine in ε . Se ne deduce prima:

$$\delta = -\varepsilon \frac{B(2\pi, p)}{p} + O(\varepsilon^2),$$

e poi

$$\delta = -\varepsilon \frac{B(2\pi, p)}{p} + \varepsilon^2 \left(\frac{B(2\pi, p) B'(2\pi, p)}{p^2} - \frac{C(2\pi, p)}{p} \right) + O(\varepsilon^3),$$

che scriveremo in forma abbreviata:

$$(3) \quad \delta = \varepsilon \varphi(p) + \varepsilon^2 \varphi_1(p) + O(\varepsilon^3).$$

Tale maggior precisione è qui necessaria, come risulterà tra poco.

Tenuto conto che è

$$p = \gamma + O(\varepsilon)$$

(si confronti per questo la (1)), potremmo sostituire γ a p nella prima valutazione, non così nella seconda. Occorre perciò sin d'ora determinare la parte principale di $\gamma - p$, come si è fatto nella parte III al n° 12 per ottenere la seconda approssimazione. Serve a tale scopo la relazione

$$x'_{2n+2} - x'_{2n} = \int_{t_{2n}}^{t_{2n+2}} \frac{dt}{t^{3/2}} \int_0^{x(t)} f'_u \left(\xi, \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$$

che traduce la (4) del n° 2, ove vi si pongano t_{2n} e t_{2n+2} al posto di t_1 e t .

Essa può scriversi:

$$x'_{2n+2} - x'_{2n} = \varepsilon^3 \int_0^{2\pi + \delta} \frac{d\tau}{(1 + \varepsilon^2 \tau)^{3/2}} \int_0^{X(\tau)} f'_u \left(\xi, \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2 \tau)^{1/2}} \right) d\xi$$

donde segue:

$$x'_{2n+2} - x'_{2n} = \frac{1}{t_{2n}^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{\gamma \sin \tau} f'_u(\xi, 0) d\xi + O\left(\frac{1}{t_{2n}^2}\right)$$

Di qui, con metodo e notazione evidenti

$$\gamma^2 - x'_{2n} = \varphi_2(\gamma) \sum_n \frac{1}{t_{2m}^{3/2}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}}\right)$$

Ora da

$$t_{2n+2} - t_{2n} = 2\pi + \delta = 2\pi + O(t_{2n}^{-1/2})$$

si deduce facilmente che è

$$\sum_n \frac{1}{t_{2m}^{3/2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{t_{2n}}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t_{2n}}}\right)$$

onde sostituendo si ha:

$$\gamma^2 - x'_{2n} = \frac{\varphi_2(\gamma)}{\pi \sqrt{t_{2n}}} + O\left(\frac{1}{t_{2n}}\right), \quad p = x'_{2n} = \gamma - \frac{\varepsilon \varphi_2(\gamma)}{2\pi \gamma} + O(\varepsilon^2)$$

Basta ora portare questo valore di p nell'espressione di δ e sviluppare per ottenere una formula del tipo:

$$\delta = \varepsilon \varphi(\gamma) + \varepsilon^2 \varphi_3(\gamma) + O(\varepsilon^3)$$

che scriveremo:

$$t_{2n+2} = t_{2n} + 2\pi + \frac{\varphi(\gamma)}{\sqrt{t_{2n}}} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{t_{2n}} + O(t_{2n}^{-3/2})$$

Ora da questa si deduce:

$$\sqrt{t_{2n+2}} = \sqrt{t_{2n}} + \frac{\pi}{\sqrt{t_{2n}}} + \frac{\varphi(\gamma)}{2 t_{2n}} + O(t_n^{-3/2})$$

$$\log t_{2n+2} = \log t_{2n} + \frac{2\pi}{t_{2n}} + O(t_n^{-3/2}).$$

Eliminando tra queste tre equazioni i termini in $t_{2n}^{-1/2}$ e in t_{2n}^{-1} l'equazione risultante può scriversi:

$$\begin{aligned} & [t_{2n+2} - (2n+2)\pi - \frac{\varphi(\gamma)}{\pi} \sqrt{t_{2n+2}} - \varphi_4(\gamma) \log t_{2n+2}] - \\ & - [t_{2n} - 2n\pi - \frac{\varphi(\gamma)}{\pi} \sqrt{t_{2n}} - \varphi_4(\gamma) \log t_{2n}] = O(t_{2n}^{-3/2}) \end{aligned}$$

con

$$\varphi_4(\gamma) = \frac{\varphi_2(\gamma)}{2\pi} - \frac{\varphi^2(\gamma)}{4\pi^2}$$

Di qui, essendo $\sum t_{2n}^{-3/2}$ convergente e il resto $O(t_{2n}^{-1/2})$, segue:

$$t_{2n} - \frac{\varphi(\gamma)}{\pi} \sqrt{t_{2n}} - \varphi_4(\gamma) \log t_{2n} - 2n\pi = \mu + O(t_{2n}^{-1/2})$$

dove μ è una costante.

Ma prendendo un arbitrario $t = t_{2n} + \tau$, compreso tra t_{2n} e t_{2n+2} si ha subito:

$$t_{2n} = t - \tau, \sqrt{t_{2n}} = \sqrt{t} + O(t^{-1/2}), \log t_{2n} = \log t + O(t^{-1}),$$

quindi dalla (4) si ricava:

$$\tau = \left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{\pi} \sqrt{t} - \varphi_4(\gamma) \log t - \mu \right) - 2n\pi + O(t^{-1/2}).$$

D'altra parte, dalla (2) si ha:

$$x(t) = X(\tau) = p \sin \tau + O(t^{-1/2}) = \gamma \sin \tau + O(t^{-1/2})$$

onde sostituendo risulta

$$(5) \quad \boxed{x(t) = \gamma \sin \left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{\pi} \sqrt{t} - \varphi_4(\gamma) \log t - \mu \right) + O(t^{-1/2}),}$$

che è la formula asintotica cui volevamo giungere.

Torino, gennaio 1951.