ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JAURÈS CECCONI

Su di una equazione differenziale non lineare di secondo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 4, nº 3-4 (1950), p. 245-278

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_3-4_245_0>

SU DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE NON LINEARE DI SECONDO ORDINE

di JAURÈS CECCONI (Pisa)

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro espongo alcune ricerche sulle seguenti equazioni differenziali

$$\alpha) \qquad y'' + y' \,|\, y' \,| + q\, y' + y - p^2 y^3 = 0$$

$$\beta) \qquad y'' + y' \,|\, y' \,| + q\, y' + y - p^2 y^3 = r \operatorname{sen} \omega t$$

che a meno di un cambiamento delle variabili sono state introdotte da G. KRALL [6] (1) in una nota sulla dinamica ed aerodinamica dei fili.

Le variabili y e t sono supposte reali, le costanti p, r, ω sono supposte positive, quanto a q si suppone invece $q \geq 0$. L'apice indica derivazione rispetto a t.

Il lavoro consta di due parti. Nella prima di esse prendo in esame la equazione α), nella seconda la equazione β).

Nella prima parte faccio innanzitutto vedere che un integrale $y(t)$ della α) determinato dalle condizioni

$$(1) \qquad y(t_0) = \eta_0 \; , \; y'(t_0) = \eta_0'$$

non risulta in generale definito per tutti i valori di $t \geq t_0$.

Dopo di ciò assegno delle condizioni per η_0 ed η_0' adatte ad assicurare non solo che l'integrale $y(t)$ è definito per ogni $t \geq t_0$, ma anche che $y(t)$

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia in fine del lavoro.

ha la proprietà espressa dalla

$$\lim_{t \to +\infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0 . \tag{1'}$$

In seguito, considerato il piano immagine delle coppie η_0, η_0', determino una regione Z di questo piano tale che a tutti e soli i punti interni a Z corrisponde, mediante le (1), una soluzione di α) che si comporta nel modo (1'). Faccio anche vedere che ogni punto appartenente alla frontiera di Z, eccettuati due punti ai quali corrispondono soluzioni costanti di α), determina, mediante le (1), un integrale $y(t)$ di α), definito per ogni $t \geq t_0$ e per il quale si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = -\frac{1}{p}, \quad \lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$$

oppure

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{1}{p}, \quad \lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0 .$$

Faccio quindi vedere che ogni punto del piano (η_0, η_0') che sia esterno a Z determina, mediante le (1), un integrale non indefinitamente prolungabile di α), cioè a dire un integrale di α) che è definito solo per $t < T_0$ e per il quale dimostro che si ha

$$\lim_{t \to T_0} [y^2(t) + y'^2(t)] = +\infty .$$

Passo infine a precisare sia qualitativamente sia quantitativamente il comportamento asintotico degli integrali di α) che godono della proprietà (1').

Nella seconda parte, portando un primo contributo allo studio della più difficile equazione β), dimostro che se (η_0, η_0') è una coppia che determina, mediante le (1), una soluzione di α) soddisfacente la condizione (1'), allora se r è sufficientemente piccolo la stessa coppia determina, sempre mediante le (1), un integrale $y(t)$ di β) che è definito per ogni $t \geq t_0$, e per il quale si ha

$$\text{extr. sup.}_{t \geq t_0} [y^2(t) + y'^2(t)] < +\infty .$$

Dimostro infine che se la quantità

$$\text{extr. sup.}_{t \geq t_1} [|y| + |y'| + |y''|] ,$$

con $t_1 \geq t_0$ e per il resto arbitrario, è sufficientemente piccola, allora l'integrale $y(t)$ tende, in un modo che verrà precisato, verso una soluzione periodica della equazione β).

I. La equazione, α).

1. — Per il teorema generale di esistenza esiste in un opportuno intorno destro di $t = t_0$ uno ed un solo integrale della equazione α) che soddisfi le condizioni (1). Tale integrale non ha però in generale come campo di esistenza l'intervallo $(t_0, +\infty)$ come si vede considerando la equazione

$$y'' + y' \, | y' | + y - y^3 = 0 \tag{2}$$

caso particolare della equazione α).

Sia infatti $y = y(t)$ la soluzione di (2) che soddisfa le condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \; , \qquad y'(0) = \eta_0' > 0 \, . \tag{3}$$

In un opportuno intorno destro di $t = 0$ la $y(t)$ è funzione crescente di t e la (2) assume la forma

$$y'' + y'^2 + y - y^3 = 0$$

dalla quale si deduce

$$\frac{1}{2} \frac{d\,(y'^2)}{d\,y} + y'^2 + y - y^3 = 0$$

ed anche

$$y'^2 = y^3 - \frac{3}{2} y^2 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{4} + \left(\eta_0'^2 + \frac{1}{4}\right) e^{-2y} \, .$$

Considero la funzione

$$\Phi(y) = y'^2 e^{2y} = \left[y^3 - \frac{3}{2} y^2 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \right] e^{2y} + \left(\eta_0'^2 + \frac{1}{4} \right) .$$

Un facile calcolo mostra che la funzione $\Phi(y)$, definita per ogni y, è dotata di minimo assoluto, assunto per $y = 1$, e che questo minimo valore è

$$-\frac{1}{4} e^2 + \eta_0'^2 + \frac{1}{4} \, .$$

Basterà allora fissare η_0' in modo da avere

$$-\frac{1}{4} e^2 + \eta_0'^2 + \frac{1}{4} > 0$$

perchè $\Phi(y)$ e quindi y'^2 risulti > 0 per ogni valore di y.

Risulterà allora, in virtù della continuità di $y'(t)$, che anche $y'(t) > 0$ per ogni valore di t per il quale $y(t)$ è definita, per cui sarà

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} + \left(\eta_0'^2 + \frac{1}{4}\right)e^{-2y}}} = \int_0^t dt .$$

Ed allora, o la variabile $y = y(t)$ assume per $t \geq 0$ soltanto i valori di un intervallo finito $(0, \eta_0)$ ed in tal caso t rimane inferiore ad una quantità finita, oppure la variabile $y = y(t)$ prende ogni valore $y \geq 0$. Anche in questo caso in virtù della sommabilità in $(0, +\infty)$ della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{y^3 - 3/2\, y^2 + 1/2\, y - \frac{1}{4} + \left(\eta_0'^2 + \frac{1}{4}\right)e^{-2y}}}$$

si deduce che t si mantiene inferiore ad una quantità finita.

La soluzione $y(t)$ di (2) definita mediante le (3) risulta perciò definita solo per

$$t \leq \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 3/2\, y^2 + 1/2\, y - 1/4 + \left(\eta_2'^2 + \frac{1}{4}\right)e^{-2y}}}$$

e l'asserto è provato.

2. — In questo numero considero gli integrali della equazione α) che sono determinati dalle condizioni

$$y(t_0) = \eta_0 \quad , \quad y'(t_0) = 0 \tag{4}$$

ed assegno una limitazione per η_0 sufficiente perchè gli integrali della equazione α) che soddisfano le (4) siano definiti per ogni $t \geq t_0$.

Sia $y = y(t)$ l'integrale di α) determinato dalle (4). Moltiplico per $y'(t)$ ambo i membri di α) ed integro rispetto a t fra t_0 e t. Ottengo

$$y'^2 + y^2 - \frac{1}{2}p^2 y^4 + 2\int_t^t y'^2 [q + |y'|]\, d\tau = \eta_0^2 - \frac{1}{2}p^2 \eta_0^4 \tag{5}$$

dalla quale deduco che per ogni valore di t, per cui è definita la $y(t)$, deve aversi

$$y^2 - \frac{1}{2} p^2 y^4 \leq \eta_0^2 - \frac{1}{2} p^2 \eta_0^4 . \tag{5 bis}$$

Considero la funzione di y, definita per ogni y

$$y^2 - \frac{1}{2} p^2 y^4$$

essa è nulla per $y = 0$, positiva nell'intervallo $|y| < \frac{\sqrt{2}}{p}$ e dotata di massimo assoluto uguale ad $\frac{1}{2p^2}$ che assume per $|y| = \frac{1}{p}$.

Basterà perciò avere scelto

$$|\eta_0| < \frac{1}{p} \tag{6}$$

perchè in virtù della (5 bis) e della continuità di $y(t)$ si abbia

$$|y(t)| \leq |\eta_0| < \frac{1}{p}$$

per ogni t per cui $y(t)$ è definita.

E poichè risulterà

$$y^2(t) - \frac{1}{2} p^2 y^4(t) \geq 0$$

se ne deduce che è anche

$$|y'(t)| < \frac{1}{\sqrt{2}\, p}$$

per ogni t per cui $y(t)$ è definita.

Sia allora $\bar{t}$ l'estremo superiore dei valori di t per cui $y(t)$ è definita, suppongo per assurdo che $\bar{t}$ sia finito. Presi comunque t' e t'' nell'intervallo $(t_0, \bar{t})$ si ha

$$|y(t') - y(t'')| = |y'(\tau)| \cdot |t'' - t'| \leq \frac{|t'' - t'|}{p\sqrt{2}}$$

e per il teorema di CAUCHY ne viene che esiste finito il $\lim\limits_{t \to \bar{t}} y(t) = \bar{y}$.

E poichè dalla α) discende che anche $y''(t)$ è limitata in $(t_0, \bar{t})$ si prova con lo stesso argomento che esiste finito il $\lim_{t \to \bar{t}} y'(t) = \bar{y}'$.

È allora possibile prolungare l'integrale $y(t)$ a destra di $\bar{t}$, perciò l'estremo superiore dei valori di t per cui $y(t)$ è definita è $+\infty$.

Risulta così che l'integrale di α) determinato dalle condizioni (4) è definito per ogni valore di $t \geq t_0$, se è soddisfatta la condizione (6). Risulta inoltre che sono limitate in $(t_0, +\infty)$ le funzioni $y(t), y'(t)$ ed anche, in virtù della α), $y''(t)$.

3. — Passando a studiare il comportamento asintotico degli integrali di α) che verificano le condizioni (4) e (6) dimostro in questo numero che si ha, per ogni siffatto integrale,

$$\lim_{t \to +\infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0 .$$

Poichè si ha, per ogni $t \geq t_0$, $|y(t)| < \dfrac{1}{p}$ e quindi

$$y^2(t) - \frac{1}{2} p^2 y^4(t) \geq 0$$

risulta intanto dalla (5) che per ogni $t \geq t_0$ è

$$\int_{t_0}^{t} y'^2 [q + |y'|] \, d t < \eta_0^2 - \frac{1}{2} p^2 \eta_0^4$$

e che esiste finito l'integrale $\int_0^{+\infty} y'^2 [q + |y'|] \, d t$. Risulta allora in particolare

$$\int_0^{+\infty} y'^2(t) \, d t < +\infty . \tag{7}$$

Poichè $y'(t)$ ed $y''(t)$ sono limitate in $(t_0, +\infty)$ risulta anche che la funzione $y'^2(t)$ è Lipschitziana in $(t_0, +\infty)$.

Faccio ora vedere che da tutto ciò segue che $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$.

È intanto, in virtù della (7), $\varliminf_{t \to +\infty} y'^2(t) = 0$.

Se fosse poi $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}}\, y'^2(t) > 0$ esisterebbero un $\sigma > 0$ ed una successione di punti $\{t_n\}$ per i quali si avrebbe

$$\lim_{n \to \infty} t_n = +\infty \quad , \quad y'^2(t_n) > \sigma\,;\ n = 1, 2 \ldots .$$

Esisterebbe allora per ogni intero n un intorno almeno $\Delta(t_n)$, simmetrico rispetto a t_n, in cui sarebbe $y'^2(t_n) > \frac{\sigma}{2}$. Detto $\varrho(t_n)$; $n = 1, 2 \ldots$; l'estremo superiore dei raggi di tali intorni dovremmo avere allora a causa della (7)

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(t_n) = 0 \tag{8}$$

Sarebbe inoltre per ogni n

$$\left| \frac{y'^2(t_n \mp \varrho(t_n)) - y'^2(t_n)}{\mp \varrho(t_n)} \right| < H$$

ove con H si è indicata la costante di LIPSCHITZ relativa alla $y'^2(t)$, e quindi in virtù della continuità della $y'(t)$ e della legge di formazione dei $\varrho(t_n)$ si dedurrebbe con opportuna scelta del segno dinanzi a $\varrho(t_n)$,

$$\frac{\sigma}{2} \leq | y'^2(t_n \mp \varrho(t_n)) - y'^2(t_n) | < H \cdot \varrho(t_n),$$

la quale a causa della (8), è manifestamente assurda.

Si è intanto provato che $\lim\limits_{t \to +\infty} y'^2(t) = 0$, e quindi che $\lim\limits_{t \to +\infty} y'(t) = 0$.

Poichè dalla (5) in virtù di quanto si è detto sopra discende che esiste finito $\int_0^{+\infty} y'^2 [q + |y'|]\, dt$, si può intanto affermare, sempre in virtù della (5), che esiste finito il

$$\lim_{t \to +\infty} \left[y^2(t) - \frac{1}{2} p^2 y^4(t) \right] = l\,; \tag{9}$$

essendo $|y(t)| < \frac{1}{p}$, ne segue

$$y^2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2p^2(l + \varepsilon(t))}}{p^2}$$

con $\varepsilon(t) \to 0$ e quindi

$$\lim_{t \to +\infty} y^2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\, p^2\, l}}{p^2}\,.$$

Dalla continuità della $y(t)$ si deduce allora che esiste finito il $\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Osservo che questo limite non può essere diverso da zero. Perchè ove fosse $\lim_{t \to +\infty} y(t) > 0$ risulterebbe, sempre in virtù della $|y(t)| < \dfrac{1}{p}$

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t) - p^2\, y^3(t)] > 0$$

e quindi dalla α), in virtù della $\lim_{t \to \infty} y'(t) = 0$ sopra dimostrata, si dedurrebbe

$$\lim_{t \to +\infty} y''(t) < 0$$

la quale contrasta con la relazione $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$. Ed in modo analogo si esclude che sia $\lim_{t \to +\infty} y(t) < 0$.

Risulta così provato che per ogni integrale di α soddisfacente le condizioni (4), (6) si ha

$$\lim_{t \to +\infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0\,.$$

4. — Passo ora a studiare il comportamento di ogni altro integrale della equazione α). Allo scopo pongo $z = y'$ in modo che la α) si traduce nel sistema

$$\alpha') \qquad \begin{cases} y' = z \\ z' = -z\,|z| - q\,z - y + p^2\, y^3\,. \end{cases}$$

Sia $y = y(t)$ una soluzione di α), la coppia di funzioni $[y(t), z(t)]$, che costituisce una soluzione di α'), ha per immagine nel piano $y\,z$ una linea γ che sarà chiamata, secondo POINCARÈ, linea caratteristica di α').

Se τ è una costante reale arbitraria anche la funzione $y(t + \tau)$ costituisce una soluzione di α) e la coppia di funzioni $[y(t + \tau), z(t + \tau)]$ ha per immagine nel piano $y\,z$ la stessa linea caratteristica γ Cioè una linea caratteristica può pensarsi percorsa da infinite soluzioni $[y(t), z(t)]$ del sistema α').

Inoltre se $[y(t), z(t)]$ è una soluzione di α') che percorre γ, ogni altra soluzione di α') che percorra γ si ottiene da questa ponendo $t + \tau$ in luogo di t. Ne segue in particolare che su ogni linea caratteristica γ può considerarsi un verso positivo, quello secondo cui γ è percorsa, al crescere di t, da ogni soluzione di α').

Se la soluzione $y(t)$ di α) è costante la linea caratteristica corrispondente, che si riduce ad un punto, verrà chiamata punto singolare per il sistema α').

È questo il caso dei punti

$$O \equiv (0\,,0)\,,\; A \equiv \left(-\frac{1}{p}\,,\,0\right),\; A' \equiv \left(\frac{1}{p}\,,\,0\right) \tag{10}$$

ai quali corrispondono rispettivamente le soluzioni $y(t) \equiv 0\,, y(t) \equiv -\dfrac{1}{p}\,,$ $y(t) \equiv \dfrac{1}{p}\,.$

Per ogni punto $(y_0\,,z_0)$ del piano $y\,z$ passa una ed una sola linea caratteristica γ. Una linea caratteristica γ può ammettere un punto singolare come punto asintotico, nel senso che la linea γ penetra in ogni intorno di tale punto. In questo caso si dirà brevemente, senza che ciò dia luogo ad equivoci, che la linea caratteristica γ passa per il punto singolare $(y_0\,,z_0)$.

S'intende che se una linea caratteristica passa per un punto singolare $(y_0\,,z_0)$ e se $[y(t)\,,z(t)]$ è una qualunque soluzione di α') che percorre γ deve aversi

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_0 \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} z(t) = z_0$$

oppure

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = y_0 \quad , \quad \lim_{t\to-\infty} z(t) = z_0\,.$$

La equazione differenziale cartesiana delle linee caratteristiche è

$$\alpha'')\qquad \frac{d\,z}{d\,y} = \frac{-z\,|\,z\,| - q\,z - y + p^2\,y^3}{z'}$$

e questa ammette come punti singolari i punti (10).

In virtù di un teorema di O. Perron [8] i punti $A\,, A'$ sono punti singolari del tipo di sella, esistono perciò due sole linee integrali di α'') che passano per $A\;[A']$ ciascuna con una diversa direzione.

I coefficienti angolari di queste direzioni relativamente ad $A\;[A']$ si ottengono risolvendo la equazione

$$m = \lim_{\substack{y\to-\frac{1}{p}\\ \left[y\to\frac{1}{p}\right]}} \frac{-z\,|\,z\,| - q\,z - y + p^2 y^3}{z} = \lim_{\substack{y\to-\frac{1}{p}\\ \left[y\to\frac{1}{p}\right]}} \left[-q + \frac{-1+3\,p^2\,y^2}{\dfrac{d\,z}{d\,y}}\right] = \frac{2}{m} - q.$$

Sono perciò dati da $-q/2 \mp \sqrt{(-q/2)^2+2}$.

Sia $S\,[S']$ la linea integrale di α'') che passa per $A\,[A']$ e per la quale il coefficiente angolare della retta tangente in $A\,[A']$ è $-q/2-\sqrt{(-q/2)^2+2}$, sia $T\,[T']$ l'altra.

5. — In questo numero mi propongo di costruire, mediante le linee S ed S' una regione Z del piano $y\,z$ onde caratterizzare il comportamento di ogni integrale di α').

A questo scopo considero intanto la linea Γ di equazione

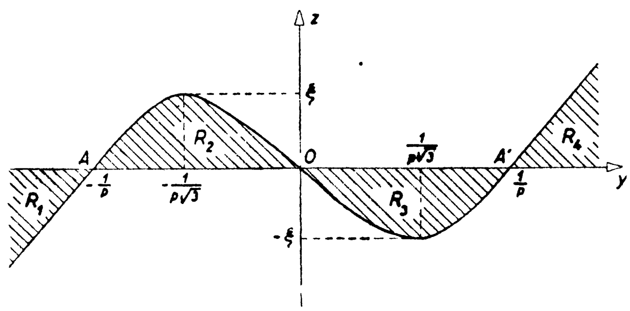
$$-z\,|\,z\,|-q\,z-y+p^2\,y^3=0\,.$$

Un breve esame di Γ mostra che essa è semplice rispetto all'asse y, O, ciò che è lo stesso, che l'equazione di Γ può mettersi nella forma $x=g\,(y)$.

Risulta inoltre su Γ

$$\frac{d\,z}{d\,y}=\frac{3\,p^2\,y^2-1}{q+2\,|\,z\,|}$$

dalla quale si deduce che Γ ha l'aspetto della seguente figura, se $q>0$



dove si è posto $\xi=-q/2+\sqrt{(-q/2)^2+\dfrac{2}{3\,p\sqrt{3}}}$. Se $q=0$ la linea Γ viene invece ad avere coefficiente angolare ∞ nei punti in cui essa incontra l'asse y. È subito visto che il coefficiente angolare della tangente ad una soluzione di α'') è positivo nella regione tratteggiata, nullo su Γ, negativo altrove.

Siano R_1, R_2, R_3, R_4 le parti della regione tratteggiata per le quali è rispettivamente

$$y < -\frac{1}{p}, \quad \frac{-1}{p} < y < 0, \quad 0 < y < \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} < y.$$

Il punto A $[A']$ divide la linea S $[S']$ in due parti. Sia S_1 $[S_2]$ la parte di S per la quale nell'intorno di A si ha $y < -\frac{1}{p}\left[y > -\frac{1}{p}\right]$. Sia S_2' $[S_1']$ la parte di S' per la quale nell'intorno di A' si ha

$$y < \frac{1}{p}\left[y > \frac{1}{p}\right].$$

Sono ora in grado di occuparmi del comportamento delle linee S ed S'. La curva S_1 appartiene, nell'intorno di A, alla regione non tratteggiata; S_1 ha perciò andamento decrescente nell'intorno di A onde seguiterà ad appartenere alla regione non tratteggiata e ad avere andamento decrescente in modo da separare il semipiano $z \geq 0$ in due regioni.

Analogamente si conclude per S_1'.

Venendo ad S_2 si osserva che essa nell'intorno di A appartiene alla regione non tratteggiata in modo da avere andamento decrescente. Essa seguita perciò ad appartenere alla regione non tratteggiata per lo meno fintanto che $y \leq 0$. Per gli $y > 0$ possono presentarsi due casi:

a) S_2 seguita ad appartenere alla regione non tratteggiata ed a decrescere.

b) S_2 decresce fintanto che non penetra nella regione R_3.

Nel caso *a*) S_2 separa il semipiano $z \leq 0$ in due regioni.

Nel caso *b*) S_2 avrà andamento crescente appartenendo ad R_3 fintanto che non incontrerà il contorno di R_3 in un punto al di sotto dell'asse z dopo di che avrà andamento decrescente ed apparterrà alla regione non tratteggiata in modo da separare il semipiano $z \leq 0$ in due regioni.

Che S_2 non possa incontrare il contorno della regione R_3 in un punto del segmento OA' si vede nel seguente modo.

Ove infatti S_2 incontrasse il segmento OA' in un punto $(\eta_0, 0)$ distinto dall'estremo A' la soluzione $y(t)$ di α) che soddisfa alle condizioni

$$y(0) = \eta_0, \qquad y'(0) = 0$$

verrebbe a trovarsi nelle condizioni (6) del numero 2 e perciò il punto $[y(t), z(t) \equiv y'(t)]$ verrebbe a tendere ad O al tendere di t a $+\infty$.

Mentre dalle considerazioni precedenti e dall'osservare che per i punti di S_2 nell'intorno di A si ha $z < 0$, risulta che il punto $[y(t), z(t)]$ percorre S_2 in modo da tendere ad A al tendere di t a $+\infty$.

Rimane da far vedere che S_2 non può passare per A'. A questo scopo considero la funzione

$$\varphi(t) = y^2(t) - \frac{1}{2} p^2 y^4(t) + z^2(t)$$

la cui derivata risulta negativa per ogni valore di t se $[y(t), z(t)]$ è una soluzione di α'). È infatti

$$\varphi'(t) = 2[y y' - p^2 y^3 y' + z z'] = 2[z y - p^2 z y^3 - z^2 |z| - q z^2 - y z + \\ + p^2 z y^3] = -2[z^2 |z| + q z^2] < 0 .$$

Ora se S_2 uscendo da A penetrasse in R_3 e poi passasse attraverso A', e se $[y(t), z(t)]$ fosse una soluzione di α') che percorre S_2 dovrebbe aversi

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t), z(t)] = [-1/p, 0], \quad \lim_{t \to -\infty} [y(t), z(t)] = [1/p, 0]$$

in modo che risulterebbe

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \frac{1}{2p^2}, \quad \lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = \frac{1}{2p^2}$$

contrariamente al fatto che la funzione $\varphi(t)$ è decrescente.

In modo analogo si ragiona per la linea S_2' concludendo che essa separa il semipiano $z \geq 0$.

Risulta allora determinata nel piano $y z$ una regione Z limitata dalle linee S_1 ed S_2' nel semipiano $z \geq 0$, dalle linee S_2 e S_1' nel semipiano $z \leq 0$.

Il ragionamento di sopra prova anche che le linee S_1, S_2, S_1', S_2' sono linee caratteristiche del sistema α').

6. — Dimostro in questo numero che se (η_0, ζ_0) è un punto interno alla regione Z allora comunque si fissi t_0 la soluzione di α') determinata dalle condizioni

$$y(t_0) = \eta_0, \quad z(t_0) = \zeta_0 \tag{10}$$

risulta definita per ogni valore di $t \geq t_0$ e tale che

$$\lim_{t \to +\infty} [y^2(t) + z^2(t)] = 0$$

Per quanto si è detto al numero 2 l'asserto è già dimostrato se $|\eta_0| < \dfrac{1}{p}$, $\zeta_0 = 0$, cioè se (η_0, ζ_0) è interno al segmento AA'.

Se (η_0, ζ_0) appartiene alla regione tratteggiata R_2 allora la linea caratteristica γ percorsa dalla soluzione determinata mediante le (10) ha andamento crescente fintanto che non incontra la curva Γ, contorno superiore di R_2, in un punto in cui è $y \geq \frac{-1}{p\sqrt{3}}$ dopo di che ha andamento decrescente fino ad incontrare il segmento OA' in un punto P distinto da A'.

Infatti γ non può incontrare S_2', nè può passare per A' perchè in quest'ultimo caso essa dovrebbe, per il citato teorema di O. PERRON, coincidere con S_2' contrariamente all'ipotesi che (η_0, ζ_0) sia interno a Z.

Sia Δt l'incremento finito che prende la variabile t mentre il punto $[y(t), z(t)]$ percorre γ da (η_0, ζ_0) fino a P; l'integrale determinato dalle (10) è perciò definito per $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ e per $t = t_0 + \Delta t$ risulta

$$|y(t)| < \frac{1}{p}, \quad z(t) \equiv y'(t) = 0,$$

tale integrale è perciò, in virtù di quanto si è detto nel numero 2, definito per ogni valore di $t \geq t_0$ ed ha il comportamento asserito.

In modo del tutto analogo si conclude se (η_0, ζ_0) appartiene a R_3.

Sia infine (η_0, ζ_0) interno a Z ed appartenga al semipiano $z \geq 0$ senza appartenere ad R_2. Sia ancora $[y(t), z(t)]$ la soluzione di α') determinata dalle (10) e sia γ la corrispondente linea caratteristica.

La caratteristica γ viene così ad appartenere alla regione non tratteggiata e perciò ha andamento decrescente fintanto che non penetra nella regione R_2 o nella regione R_3. Essa infatti non può incontrare nè S_1' nè S_2' nè passare per A o per A', perchè dovrebbe in tal caso coincidere con S_1 o S_2', contrariamente all'ipotesi che (η_0, ζ_0) sia interno a Z.

Alla stessa maniera si ragiona se (η_0, ζ_0) è interno a Z appartenendo al semipiano $z \leq 0$.

L'asserto è così completamente dimostrato.

Quanto si è detto prova che il punto $O \equiv (0,0)$ corrisponde ad una soluzione statica stabile di α'). Poichè gli altri punti singolari A ed A' corrispondono a soluzioni statiche non stabili di α') gli integrali considerati in questo numero saranno chiamati anche integrali stabili di α') [1].

7. — Prendo in esame il caso in cui il punto (η_0, ζ_0) appartiene alla frontiera di Z. Se il punto (η_0, ζ_0) coincide con il punto A è subito visto che l'integrale di α') determinato dalle (10) è la soluzione costante

$$y(t) \equiv -\frac{1}{p}, \quad y(t) \equiv z(t) \equiv 0,$$

ed in modo analogo si conclude se (η_0, ζ_0) coincide con A'.

Se il punto (η_0, ζ_0) appartiene alla frontiera di Z ed è distinto da A e A' allora apparterrà ad una delle caratteristiche S_1, S_2, S_1', S_2'. Se (η_0, ζ_0) appartiene ad S_1 da quanto si è detto nel numero 4 discende che la soluzione di α') determinata dalle (10) è definita per ogni $t \geq t_0$ e si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = -\frac{1}{p}, \quad \lim_{t \to +\infty} z(t) = 0.$$

In modo analogo si conclude nei rimanenti casi.

8. — Dimostro in questo numero che se il punto (η_0, ζ_0) è esterno a Z allora l'integrale di α') determinato dalle condizioni (10) è definito soltanto per i valori di t che sono minori di un opportuno T_0 e si ha inoltre

$$\lim_{t \to T_0} [y^2(t) + z^2(t)] = +\infty.$$

Sia, tanto per fissare le idee, U la regione del piano yz, esterna a Z, che ha origine nella linea S, U' quella che ha origine in S'.

Suppongo che (η_0, ζ_0) sia interno ad U'. Allora, o (η_0, ζ_0) appartiene alla regione R_4 oppure appartiene alla parte rimanente di U'. Se (η_0, ζ_0) appartiene ad R_4 la caratteristica γ immagine della soluzione di α') determinata dalle condizioni (10) ha andamento crescente ed appartiene indefinitamente ad R_4. Essa risulta percorsa dalla soluzione $[y(t), z(t)]$ in modo che y cresce al crescere di t.

Se invece (η_0, ζ_0) è interno ad U' senza appartenere ad R_4 allora γ ha andamento decrescente [salvo al più un arco crescente se γ penetra nella eventuale parte di R_2 che è esterna a Z] fintanto che non penetra in R_4; dopo di che ha andamento crescente e seguita ad appartenere indefinitamente ad R_4. Anche in questo caso la soluzione $[y(t), z(t)]$ di α') percorre γ in modo che, non appena γ penetra in R_4, la y cresce con il crescere di t. Osservo a questo punto che γ non può avere asintoti paralleli all'asse y. Si è visto infatti che γ ha andamento definitivamente crescente e che perciò la sua equazione per y sufficientemente grande assume la forma $z = g(y)$.

Ove fosse allora

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = k^2$$

si dedurrebbe dalla α''), cui $z = g(y)$ soddisfa,

$$\lim_{y \to +\infty} g'(y) = +\infty$$

la quale contrasta con la precedente.

Da tutto quanto si è detto finora discende che esiste un valore di t, sia t_1, tale che per l'integrale $[y(t), z(t)]$ di α') determinato dalle (10) si abbia, per ogni $t \geq t_1$

$$y'(t) \equiv \dot{z}(t) > 1 \tag{11}$$

Tornando ora alla equazione α) si ricava per la $y(t)$ la relazione

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(y'^2)}{dy} = -y'^2 - q\,y' - y + p^2 y^3$$

ed anche

$$\frac{d(y'^2)}{dy} = -2\,y'^2(1+q) + 2\,q\,(y'^2 - y') - 2\,(y - p^2 y^3)$$

dalla quale si deduce

$$y'^2 = e^{-2y(1+q)}\left[-2\int_{\eta_1}^{y}(y - p^2 y^3)\,e^{2y(1+q)}\,dy + \right.$$

$$\left. + 2\,q\int_{\eta_1}^{y}(y'^2 - y')\,e^{2y(1+q)}\,dy + \zeta_1^2\,e^{2\eta_1(1+q)}\right]$$

ove si è posto

$$\eta_1 = y(t_1), \quad \zeta_1 = y'(t_1).$$

Da quest'ultima si deduce

$$y'^2 = P(y) + [\zeta_1^2 - P(\eta_1)]\,e^{2(\eta_1 - y)(1+q)} + \Phi(y)$$

ove si è posto

$$P(y) = -2\left[\frac{y - p^2 y^3}{2(1+q)} - \frac{1 - 3\,p^2 y^2}{4\,(1+q)^2} - \frac{6\,p\,y}{8\,(1+q)^3} + \frac{6\,p}{16\,(1+q)^4}\right]$$

$$\Phi(y) = e^{-2y(1+q)}\int_{\eta_1}^{y} 2\,q\,(y'^2 - y')\,e^{2y(1+q)}\,dy$$

Si ottiene così per $t \geq t_1$

$$y' = \sqrt{P(y) + [\zeta_1^2 - P(\eta_1)]\,e^{2(\eta_1 - y)(1+q)} + \Phi(y)}$$

dalla quale si ha

$$(12) \qquad \int_{t_1}^{t} dt = \int_{\eta_1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{P(y) + [\zeta_1^2 - P(\eta_1)]\, e^{2(\eta_1 - y)(1+q)} + \Phi(y)}}$$

A questo punto due casi sono possibili:

a) sulla linea $[y(t), z(t)]$ la $y(t)$ si mantiene superiormente limitata se $t \geq t_1$,

b) sulla linea $[y(t), z(t)]$ la $y(t)$ non è superiormente limitata se $t \geq t_1$.

Nel caso *a*) è subito visto che la t si mantiene superiormente limitata; nel caso *b*) la t risulta ancora superiormente limitata.

Infatti si ha dalle (12)

$$t - t_1 \leq \lim_{y \to +\infty} \int_{\eta_1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{P(y) + [\zeta_1^2 - P(\eta_1)]\, e^{2(\eta_1 - y)(1+q)} + \Phi(y)}}$$

e la funzione integranda risulta sommabile in $(\eta_1, +\infty)$ perchè è continua in ogni intervallo finito a destra di η_1 e perchè, per $y \to \infty$, $P(y) \to +\infty$ di ordine 3 rispetto ad y, $[\zeta_1^2 - P(\eta_1)]\, e^{2(\eta_1 - y)(1+q)} \to 0$, e $\Phi(y) \geq 0$ se $y \geq \eta_1$ in virtù della (11).

L'asserto è così dimostrato se (η_0, ζ_0) è interno ad U'. In modo analogo si ragiona se (η_0, ζ_0) è interno ad U, in modo che l'asserto è completamente dimostrato.

9. — Passo ora a studiare la singolarità della equazione α'') nel punto $O \equiv (0,0)$ in modo da determinare qualitativamente il comportamento asintotico degli integrali stabiliti della equazione α).

Allo scopo osservo che in virtù di due teoremi di O. PERRON [8], il punto $O \equiv (0,0)$ è un nodo se

$$q^2 > 4\,, \quad q^2 = 4$$

è un fuoco se $q^2 < 4$.

Più precisamente nel caso $q^2 > 4$ tutte le caratteristiche corrispondenti ad integrali stabili di α) passano per il punto O e tutte in O hanno la stessa retta tangente, salvo una che ha nell'origine una diversa tangente.

Nel caso $q^2 = 4$ tutte le caratteristiche stabili passano per O con la stessa retta tangente.

Nel caso $q^2 < 4$ ogni caratteristica corrispondente ad una soluzione stabile di α) passa infinite volte attorno all'origine, a forma di spirale, ed ha l'origine come punto asintotico.

Ciò permette perciò di concludere che gli integrali $y(t)$ stabili di α) tendono a zero monotonamente, al tendere di t a $\to +\infty$, ed anche $y'(t)$ tende a zero monotonamente se siamo nel caso $q^2 \geq 4$, tendono a zero in modo oscillante se siamo nel caso $q^2 < 4$.

Si può anzi dire che se $y(t)$ è una soluzione stabile di α) e se $q^2 < 4$ allora fra due zeri della $y(t)$ è compreso uno ed un solo zero della $y'(t)$ e fra due zeri della $y'(t)$ è compreso uno ed un solo zero della $y(t)$.

10. — Venendo infine a studiare quantitativamente il comportamento asintotico degli integrali di α) nel caso $q^2 < 4$ sono in grado di dimostrare, adattando opportunamente un ragionamento di W. E. Milne [7], [9] che, considerato il numero ν per cui è

$$\frac{\nu^2}{4} = 1 - \frac{q^2}{4}$$

comunque si fissi $\tau > 0$ in ogni intervallo di ampiezza $\frac{2\pi}{\nu} + \tau$ cade almeno uno zero di $y(t)$.

In virtù della ipotesi $q^2 < 4$ esiste intanto una costante positiva d per cui si ha qualunque sia il numero reale r

$$r^2 + qr + 1 \geq d > 0$$

ed esiste anche una costante $H > 0$ per cui si ha, qualunque sia r

$$\left|\frac{r}{r^2 + qr + 1}\right| < H, \qquad \left|\frac{1}{r^2 + qr + 1}\right| < H.$$

Poichè per la $y(t)$ considerata si ha $\lim_{t \to +\infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0$ si potrà in base al τ sopra considerato determinare un $\bar{t}$, tale che per ogni $t \geq \bar{t}$ si abbia

$$\left|\frac{r\,|\,y'(t)\,| - p^2\, y^2(t)}{r^2 + qr + 1}\right| < \frac{\nu\tau}{2\pi + \nu\tau} \tag{13}$$

Sia allora per assurdo $y(t) \neq 0$ per i t appartenenti all'intervallo

$$\left(t_1\,,\, t_1 + \frac{2\pi}{\nu} + t\right) \qquad t_1 \geq \bar{t}\,.$$

La funzione

$$r(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

risulta continua e derivabile per ogni valore di t dell'intervallo sopra considerato.

In virtù della α) si ottiene

$$\frac{r'}{r^2 + q\,r + 1} + 1 + \frac{r \mid y' \mid - p^2 y^2}{r^2 + q\,r + 1} = 0$$

Integrando fra t_1 e t, dopo avere posto

$$\theta(t) = \int_{t_1}^{t} \frac{r \mid y' \mid - p^2 y^2}{r^2 + q\,r + 1}\, d\,t$$

si ottiene

$$\frac{2}{\nu} \text{ arc. tg } \frac{2}{\nu}(r + q/2) + t + \theta(t) + c = 0$$

e quindi

$$r(t) = -\,q/2 - \nu/2 \text{ tg}\left[\frac{\nu}{2}(t + \theta(t) + c)\right]$$

Ma poichè quando t cresce da t_1 a $t_1 + \dfrac{2\pi}{\nu} + \tau$ l'angolo $\dfrac{\nu}{2}\Big(t + \theta(t) + c\Big)$ aumenta, in virtù della (13), di un angolo maggiore di π, la $r(t)$ in un punto di $\left(t_1\,,\, t_1 + \dfrac{2\pi}{\nu} + \tau\right)$ diviene infinita. E così siamo giunti ad un assurdo. La proprietà enunciata è pertanto dimostrata.

LA EQUAZIONE β.

11. — Passo ora ad esporre alcune proprietà delle soluzioni della equazione β, nella quale d'ora in avanti si converrà che sia $q > 0$, che sono determinate dalle condizioni (1).

I ragionamenti fatti a proposito della equazione α) consentono intanto di dire che questi integrali non sono in generale definiti per tutti i valori di $t \geq t_0$.

Qui mi propongo di dimostrare che se la condizione (1) determina una soluzione stabile di α) allora, per r sufficientemente piccolo, la (1) determina un integrale di β) che è definito per ogni $t \geq t_0$ e per il quale è

$$\underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup.}} \left[\, | \, y(t) \, | + | \, y'(t) \, | + | \, y''(t) \, | \, \right] < + \infty .$$

Per stabilire l'esistenza di siffatte soluzioni farò uso di un teorema di CACCIOPPOLI e di HILDEBRANDT-GRAVES [2], [5] sulla inversione locale delle trasformazioni differenziali.

Sia Σ lo spazio lineare delle funzioni $y(t)$ definite e limitate per $t \geq t_0$, ivi dotate di derivate prime e seconde continue e limitate, reso normale e completo assumendo come norma di $y(t)$ la quantità

$$\| \, y(t) \, \| = \underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup.}} \left[\, | \, (y(t) \, | + | \, y'(t) \, | + | \, y''(t) \, | \, \right] \tag{14}$$

e sia Σ' lo spazio lineare delle terne $\zeta \equiv [z(t) \, ; \eta_0 \, , \eta_0']$ costituito dalla funzione $z(t)$ continua e limitata per $t \geq t_0$ e dai numeri reali η_0 ed η_0'. Lo spazio Σ' sia reso normale e completo assumendo come norma di ζ la quantità

$$\| \, \zeta \, \| = \underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup.}} \left[\, | \, z(t) \, | + | \, \eta_0 \, | + | \, \eta_0' \, | \, \right] . \tag{15}$$

Facendo corrispondere ad ogni elemento di Σ la funzione

$$z = z[y(t)] = y''(t) + y(t) \, | \, y'(t) \, | + q \, y'(t) + y(t) - p^2 \, y^3(t) \tag{16}$$

ed i numeri $y(t_0)$ ed $y'(t_0)$ si viene a definire una trasformazione funzionale

$$\zeta \equiv [z(y(t)) \, ; \quad y(t_0) \, , y'(t_0)] = T(y) \tag{17}$$

che muta elementi di Σ in elementi di Σ'.

Prendendo allora in considerazione la equazione α) tenendo presenti i risultati della 1ª parte posso dire che la trasformazione funzionale (17) concepita come una equazione nella incognita y ammette una soluzione $y(t)$ in corrispondenza del punto ζ

$$\zeta \equiv [0 \, ; \eta_0 \, , \eta_0'] \tag{18}$$

purchè la coppia $(\eta_0 \, , \eta_0')$ appartenga alla regione di stabilità di α). Il problema della esistenza di soluzioni $y(t)$ della equazione β), determinate dalla condizione (7) definite per ogni $t \geq t_0$, e tali che

$$\underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup.}} \left[\, | \, y(t) \, | + | \, y'(t) \, | + | \, y''(t) \, | \, \right]$$

sia finito costituisce, quando r è sufficientemente piccolo, un caso particolare del problema della invertibilità locale della trasformazione (17) negli intorni dei punti

$$y = y(t)\,, \qquad \zeta \equiv [0\,;\, \eta_0\,, \eta_0'] \tag{19}$$

di Σ e di Σ' rispettivamente.

In virtù del citato teorema di CACCIOPPOLI e HILDEBRANDT GRAVES tale invertibilità sarà provata non appena si sarà fatto vedere che la trasformazione (17) è differenziabile con continuità in un intorno J del punto $y(t)$, soluzione stabile di α), e che la trasformazione lineare definita dal differenziale della (17) è completamente invertibile.

12. — In questo numero faccio vedere che se $y = y(t)$ è una soluzione stabile di α la trasformazione (17) è differenziabile nel punto $y = y(t)$.

A questo scopo faccio intanto vedere che se $\eta(t)$ è un generico elemento di Σ esiste il

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{z(y + \varepsilon\,\eta) - z(y)}{\varepsilon} = \eta'' + \eta'\,[q + 2\,|y'|] + \eta\,[1 - 3\,p^2\,y^2]$$

e che la trasformazione in δy

$$\delta z = D[z\,;\, y\,, \delta y] = \delta y'' + \delta y'\,[q + 2\,|y'|] + \delta y\,[1 - 3\,p^2\,y^2] \tag{20}$$

è lineare in δy, ove con δy si è indicato un elemento di Σ.

Esiste perciò anche il

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\zeta(y + \varepsilon\,\eta) - \zeta(y)}{\varepsilon} = [D(z\,;\, y\,, \eta)\,; \quad \eta(t_0)\,, \quad \eta'(t_0)]$$

e risulta altresì lineare in δy la trasformazione

$$\delta\zeta = [D(z\,;\, y\,, \delta y)\,; \quad (\delta y)_0\,, \quad (\delta y')_0] \tag{21}$$

ove con $(\delta y)_0$ si è indicato il valore di δy per $t = t_0$, con $(\delta y')_0$ il valore della derivata di δy per $t = t_0$.

Osservo inoltre che posto

$$R(\zeta\,;\, y\,, \delta y) = \zeta(y + \delta y) - \zeta(y) - D(\zeta\,;\, y\,, \delta y)$$

$$R(z\,;\, y\,, \delta y) = z(y + \delta y) - z(y) - D(z\,;\, y\,, \delta y)$$

si ha

$$R(\zeta\,;\, y\,, \delta y) = [R(z\,;\, y\,, \delta y)\,; \quad 0\,, 0]\,. \tag{22}$$

La trasformazione (17) sarà differenziabile nel punto $y = y(t)$ se risulterà

$$\lim_{\|\delta y\| \to 0} \frac{\|R(\zeta; y, \delta y)\|}{\|\delta y\|} = 0. \tag{23}$$

Per verificare la (23) osservo che

$$R(z; y, \delta y) = (y' + \delta y')\,|y' + \delta y'| - y'\,|y'| - 2\,|y'|\,\delta y' - p^2(3\,y\,\delta y^2 + \delta y^3) =$$

$$= 2\,\delta y'\,[|y' + \theta\,\delta y'| - |y'|] - p^2\,\delta y\,[3\,y\,\delta y + \delta y^2]$$

ove con $\theta \equiv \theta(t)$ ho indicato una opportuna funzione di t definita per $t \geq t_0$ e tale che $0 \leq \theta(t) \leq 1$.

Passando ai valori assoluti ottengo per ogni $t \geq t_0$

$$|R(z; y, \delta y)| \leq 2\,|\theta|\,\delta y'^2 + p^2\,|\delta y|\,.\,|3\,y\,\delta y + \delta y^2|,$$

e passando alla norma ottengo

$$\|R(\zeta; y, \delta y\| = \underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup}}\,|R(z; y, \delta y)| \leq 2\,\|\delta y\|^2 +$$

$$+ p^2\,\|\delta y\|\,[3\,\|y\| \cdot \|\delta y\| + \|\delta y\|^2] \leq \|\delta y\|\,[2 +$$

$$+ p^2\,[3\,\|y\| + 1]]\,\|\delta y\| \leq \sigma\,\|\delta y\|$$

se $\|\delta y\|$ è minore del più piccolo fra i numeri 1 e $\dfrac{\sigma}{2 + p^2[\,\|y\| + 1]}$.

La trasformazione (17) risulta così differenziabile, il suo differenziale è costituito dalla trasformazione lineare (21).

13. — Dimostro ora che la trasformazione (17) è differenziabile con continuità in un intorno del punto $y = y(t)$, ove $y(t)$ è una soluzione stabile di α). A questo scopo faccio vedere che comunque si fissi un $\sigma > 0$ è possibile determinare un $\varrho > 0$ tale che

1) la relazione $\|D(\zeta; y_1, \delta y) - D(\zeta; y_2, \delta y)\| \leq \sigma\,\|\delta y\|$ vale per ogni δy e per ogni coppia di punti y_1, y_2 di Σ per cui è $\|y_1 - y\| < \varrho$, $\|y_2 - y\| < \varrho$;

2) la relazione $\|R(\zeta; \bar{y}, \delta y)\| \leq \sigma\,\|\delta y\|$ vale per qualunque $\bar{y}$ di Σ per cui è $\|\bar{y} - y\| < \varrho$ e per qualunque δy di Σ per cui è $\|\delta y\| < \varrho$.

Per verificare la 1) formo la differenza

$$D(z; y_1, \delta y) - D(z; y_2, \delta y) = 2\,|\delta y'|\,[\,|y_1'| - |y_2'|\,] - 3\,p^2\,\delta y\,[y_1^2 - y_2^2]$$

dalla quale passando ai valori assoluti si ottiene, per ogni $t \geq t_0$

$$| D(z; y_1, \delta y) - D(z; y_2, \delta y) | \leq 2 | \delta y' | [| y_2' - y' | + | y_1' - y' |] +$$

$$+ 3 p^2 [| y_1 - y | + | y_2 - y |] \cdot [| y_1 | + | y_2 |] \cdot | \delta y | .$$

Passando alle norme si ottiene

$$\| D(\zeta; y_1, \delta y) - D(\zeta; y_2, \delta y) \| = \underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup}} | D(z; y_1, \delta y) - D(z; y_2, \delta y) | \leq$$

$$\leq 2 \| \delta y \| [\| y_1 - y \| + \| y_2 - y \|] + 3 p^2 \| \delta y \| [\| y_1 - y \| +$$

$$+ \| y_2 - y \|] [\| y_1 - y \| + \| y_2 - y \| + 2 \| y \|] \leq [\| y_1 - y \| +$$

$$+ \| y_2 - y \|] \{ 2 + 3 p^2 [\| y_1 - y \| + \| y_2 - y \| + 2 \| y \|] \} \cdot \| \delta y \|$$

od anche

$$\| D(\zeta; y_1, \delta y) - D(\zeta; y_2 . \delta y) \| \leq \sigma \| \delta y \|$$

purchè si prendano $\| y_1 - y \|$ e $\| y_2 - y \|$ minori del più piccolo fra i numeri 1 e $\dfrac{\sigma}{2(2 + 6 p^2 + 6 p^2 \| y \|)}$.

Per verificare la 2) considero l'espressione

$$R(z; \bar{y}, \delta y) = R(z; \bar{y}, \delta y) - R(z; y, \delta y) + R(z; y, \delta y) =$$

$$= \{ 2 \delta y' [| \bar{y}' + \theta_1 \delta y' | - | \bar{y}' |] - p^2 \delta y [3 \bar{y} \delta y + \delta y^2] \} - \{ 2 \delta y' [| y' + \theta_2 \delta y' | -$$

$$- | y' |] - p^2 \delta y [3 y \delta y + \delta y^2] \} + R(z; y, \delta y)$$

ove con θ_1 e θ_2 ho indicato due opportune funzioni di t, definite per ogni $t \geq t_0$ e tali che $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$.

Passando ai valori assoluti si ottiene per ogni $t \geq t_0$

$$| R(z; \bar{y} . \delta y) | \leq 2 | \delta y' | \{ | \delta y' | [\theta_1 + \theta_2] \} + 3 p^2 | \delta y | . | \bar{y} - y | + | R(z; y, \delta y) | ,$$

e passando alle norme si ottiene

$$\| R(\zeta; \bar{y}, \delta y) \| = \underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup}} | R(z; \bar{y}, \delta y) | \leq 4 \| \delta y \|^2 +$$

$$+ 3 p^2 \| \delta y \| . \| \bar{y} - y \| + \| R(\zeta; y, \delta y \| .$$

Ma per il numero 12 in base al $\sigma > 0$ fissato può determinarsi un $\varrho_1 > 0$ tale che se $\| \delta y \| < \varrho_1$ si abbia $\| R(\zeta ; y, \delta y) \| \leq \frac{\sigma}{3} \| \delta y \|$; risulterà perciò

$$\| R(\zeta ; \bar{y}, \delta y) \| < \sigma \| \delta y \|$$

purchè si prenda $\| \delta y \|$ minore del più piccolo fra i numeri $\varrho_1, \frac{\sigma}{12}$; e si prenda $\| \bar{y} - y \| < \frac{\sigma}{9 p^2}$.

14. — Dimostro in questo numero che se $y = y(t)$ è una soluzione stabile di α) allora la trasformazione (21) è completamente invertibile nel senso che ad ogni elemento $\delta \zeta \equiv [\delta z ; \delta y_0, \delta y'_0]$ di Σ' corrisponde uno ed un solo elemento δy di Σ per il quale si ha

$$\delta y'' + \delta y' [q + 2 | y' |] + \delta y [1 - 3 p^2 y^2] = \delta z \tag{24}$$

$$(\delta y)_0 = \delta y_0, \quad (\delta y')_0 = \delta y'_0. \tag{25}$$

Basta cioè far vedere che la soluzione δy della equazione differenziale lineare (24) determinata dalle condizioni (25) è un elemento di Σ cioè una funzione limitata e dotata di derivate prime e seconde limitate in $(t_0, +\infty)$. A questo scopo scrive la equazione (24) nel seguente modo

$$\delta y'' + q \, \delta y' + \delta y = - 2 | y' | \delta y' + 3 p^2 y^2 \delta y + \delta z$$

e da questa deduco per δy e $\delta y'$ il seguente sistema di equazioni integrali di Volterra

$$\left\{ \begin{aligned} \delta y &= c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + \frac{e^{\mu_1 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_0}^{t} e^{-\mu_1 \tau} [\delta z - 2 | y' | \delta y' + 3 p^2 y^2 \delta y] \, d\tau - \\ &\quad - \frac{e^{\mu_2 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_0}^{t} e^{-\mu_2 \tau} [\delta z - 2 | y' | \delta y' + 3 p^2 y^2 \delta y] \, d\tau \\ \delta y' &= c_1 \mu_1 e^{\mu_1 t} + c_2 \mu_2 e^{\mu_2 t} + \frac{\mu_1 e^{\mu_1 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_0}^{t} e^{-\mu_1 \tau} [\delta z - 2 | y' | \delta y' + 3 p^2 y^2 \delta y] \, d\tau \\ &\quad - \frac{\mu_2 e^{\mu_2 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_0}^{t} e^{-\mu_2 \tau} [\delta z - 2 | y' | \delta y' + 3 p^2 y^2 \delta y] \, d\tau \end{aligned} \right. \tag{26}$$

dove con μ_1 e μ_2 ho indicato le soluzioni della equazione caratteristica $\varrho^2 + \varrho\,\mu + 1 = 0$ associata alla equazione (24), e dove ho posto

$$c_1 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_1 t_0} (\mu_2\, \delta\, y_0 - \delta\, y'_0) \quad , \quad c_2 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_2 t_0} (\delta\, y'_0 - \mu_1\, \delta\, y_0)$$

Osservo anche che i numeri μ_1 e μ_2, in virtù della ipotesi $q > 0$, sono numeri reali negativi o numeri complessi di parte reale negativa. Indico perciò in ogni caso con α_1 ed α_2 le parti reali negative di μ_1 e μ_2.

Considerato un numero $t_1 > t_0$, da determinarsi in seguito, scrivo le (26) nel seguente modo

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \delta y &= c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + \frac{e^{\mu_1 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_1 \tau} [\delta z - 2\,|y'|\,\delta y' + 3\,p^2 y^2\, \delta y]\, d\,t - \\ &- \frac{e^{\mu_2 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_2 t} [\delta z - 2|y'|\delta y' + 3\,p^2 y^2 \delta y]\, d\tau + e^{\mu_1 t} H_1(t_0, t_1) + e^{\mu_2 t} H_2(t_0, t_1) \\ \delta\, y' &= \mu_1\, c_1\, e^{\mu_1 t} + \mu_2\, c_2\, e^{\mu_2 t} + \frac{\mu_1\, e^{\mu_1 t}}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_1 \tau} [\delta\, z - 2\,|\,y'\,|\,\delta\, y' + \\ &+ 3\,p^2\,y^2\,\delta\,y]\,d\,\tau - \frac{\mu_2\, e^{\mu_2 t}}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_2 \tau} [\delta\, z - 2\,|\,y'\,|\,\delta\, y' + 3\,p^2\,y^2\,\delta\,y]\,d\tau + \\ &+ \mu_1\, e^{\mu_1 t}\, H_1(t_0, t_1) + \mu_2\, e^{\mu_2 t}\, H_2(t_0, t_1) \end{aligned}\right.$$

dove ho posto

$$H_1(t_0, t_1) = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\mu_1 \tau} [\delta\, z - 2\,|\,y'\,|\,\delta\, y' + 3\,p^2\,y^2\,\delta\,y]\,d\,\tau\,,$$

$$H_2(t_0, t_1) = \frac{-1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\mu_2 \tau} [\delta\, z - 2\,|\,y'\,|\,\delta\, y' + 3\,p^2\,y^2\,\delta\,y]\,d\,\tau\,.$$

Ora si ha, avendo posto $h = \operatorname*{extr.\,sup}_{t \geq t_0} |\,\delta\, z\,|$,

$$\left| e^{\mu_1 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_1 \tau}\, \delta\, z\, d\,\tau \right| \leq e^{\alpha_1 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\alpha_1 \tau}\, h\, d\,\tau \leq \frac{e^{\alpha_1 t}}{|\,\alpha_1\,|} [e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_1 t_1}] < \frac{2\,h}{|\,\alpha_1\,|}\,,$$

$$\left| e^{\mu_1 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_1 t}\, 2\, |y'|\, \delta y'\, d\tau \right| \leq e^{\alpha_1 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\alpha_1 t} [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, 2\, |y'|]\, [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|]\, d\tau \leq$$

$$\leq [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, 2\, |y'|] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|] \cdot \frac{2}{|\alpha_1|}$$

$$\left| e^{\mu_1 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_1 t}\, 3\, p^2 y^2\, |\delta y|\, d\tau \right| \leq [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, 3\, p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|]\, \frac{2}{|\alpha_1|}$$

$$\left| e^{\mu_2 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_2 \tau}\, \delta z\, d\tau \right| \leq \frac{2\, h}{|\alpha_2|}$$

$$\left| e^{\mu_2 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_2 \tau} \cdot 2\, |y'|\, \delta y'\, d\tau \right| \leq [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}} \cdot 2\, |y'|] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|]\, \frac{2}{|\alpha_2|}$$

$$\left| e^{\mu_2 t} \int_{t_1}^{t} e^{-\mu_2 \tau}\, 3\, p^2 y^2 \cdot \delta y\, d\tau \right| \leq [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, 3\, p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|]\, \frac{2}{|\alpha_2|}$$

$$|e^{\mu_1 t} \cdot H_1(t_0, t_1)| \leq |H_1(t_0, t_1)|, \quad |e^{\mu_2 t} \cdot H(t_0, t_1)| \leq |H(t_0, t_1)|$$

Dalla (27) si ottiene perciò per ogni $t \geq t_1$

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} &|\delta y| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|} \left[\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|}\right] \Big\{ [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, |2\, y'|] \cdot \\ &\quad \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|] + [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, 3\, p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|] \Big\} + \\ &\quad + \frac{2\, h}{|\mu_2 - \mu_1|} \left[\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|}\right] + |H_1(t_0, t_1)| + |H_2(t_0, t_1)| \\ &|\delta y'| \leq |c_1 \mu_1| + |c_2 \mu_2| + \frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|} \left[\left|\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right| + \right. \\ &\quad \left. + \left|\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right|\right] \Big\{ [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, |2\, y'|]\, [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|] + \\ &\quad + [\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\, 3\, p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|] \Big\} + \frac{2\, h}{|\mu_2 - \mu_1|} \left[\left|\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right| + \right. \\ &\quad \left. + \left|\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right|\right] + [1 + |\mu_1|] \cdot |H_1(t_0, t_1)| + [1 + |\mu_2|] \cdot |H_2(t_0, t_1)| \,. \end{aligned} \right.$$

Sia $\bar{t}$ un punto dell'intervallo (t_1, t). Sostituendo $\bar{t}$ in entrambi i membri della (28) ed osservando che

$$\max_{t_1 \leq \tau \leq \bar{t}} |\delta y| \leq \max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|, \quad \max_{t_1 \leq \tau \leq \bar{t}} |\delta y'| \leq \max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|$$

si ottiene, adattando un ragionamento di D. Caligo, [3],

$$\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|}\right]\Big\{[\operatorname{extr.sup}_{\tau \geq t_1} |2y'|] \cdot$$

$$\cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|] + [\operatorname{extr.sup}_{\tau \geq t_1} 3p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|]\Big\} +$$

$$+ \frac{2h}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|}\right] + |H_1(t_0, t_1)| + |H_2(t_0, t_1)|$$

$$\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'| \leq |c_1 \mu_1| + |c_2 \mu_2| + \frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{|\mu_1|}{|\alpha_1|} + \frac{|\mu_2|}{|\alpha_2|}\right]\Big\{[\operatorname{extr.sup}_{\tau \geq t_1} |2y'|] \cdot$$

$$[\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|] + [\operatorname{extr.sup}_{\tau \geq t_1} 3p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|]\Big\} +$$

$$+ \frac{2h}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\left|\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right| + \left|\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right|\right] + [1 + |\mu_1|]\,|H_1(t_0, t_1)| + [1 + |\mu_2|] \cdot |H_2(t_0, t_1)|.$$

Sommando membro a membro si ha

$$\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y| + \max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'| \leq |c_1|[1 + |\mu_1|] + |c_2|[1 + |\mu_2|] +$$

$$+ \frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1 + |\mu_1|}{|\alpha_1|} + \frac{1 + |\mu_2|}{|\alpha_2|}\right] \cdot \Big\{[\operatorname{extr.sup}_{\tau \geq t_1} |2y'|] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y'|] +$$

$$+ [\operatorname{extr.sup}_{\tau \geq t_1} 3p^2 y^2] \cdot [\max_{t_1 \leq \tau \leq t} |\delta y|]\Big\} + \frac{2h}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1 + |\mu_1|}{|\alpha_1|} +\right.$$

$$\left.+ \frac{1 + |\mu_2|}{|\alpha_2|}\right] + [1 + |\mu_1|]\,|H_1(t_0, t_1)| + [1 + |\mu_2|]\,|H_2(t_0, t_1)|.$$

Ricordo ora che $y(t)$ è una soluzione stabile di $\alpha)$, per la quale si ha cioè

$$\lim_{t \to +\infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0;$$

posso perciò scegliere t_1 in modo che sia

$$\frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1+|\mu_1|}{|\alpha_1|} + \frac{1+|\mu_2|}{|\alpha_2|}\right][\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\,|\,2\,y'\,|\,] < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1+|\mu_1|}{|\alpha_1|} + \frac{1+|\mu_2|}{|\alpha_2|}\right].\,[\underset{\tau \geq t_1}{\text{extr. sup}}\,3\,p^2\,y^2] < \frac{1}{2}.$$

ed ottengo

$$\max_{t_1 \leq \tau \leq t}|\,\delta\,y\,| + \max_{t_2 \leq \tau \leq t}|\,\delta\,y'\,| \leq 2\Big\{|\,c_1\,|\,[1+|\,\mu_1\,|\,] + |\,c_2\,|\,[1+|\,\mu_2\,|] +$$

$$+\frac{2\,h}{|\mu_2 - \mu_1|}\left[\frac{1+|\mu_1|}{|\alpha_1|} + \frac{1+|\mu_2|}{|\alpha_2|}\right] + [1+|\mu_1|\,]\,.$$

$$.\,|\,H_1\,(t_0\,,t_1)\,| + [1+|\,\mu_2\,|\,]\,.\,|\,H_2\,(t_0\,,t_1)\,|\Big\}.$$

Risultano quindi finite le quantità

$$\underset{t \geq t_1}{\text{extr. sup}}\,|\,\delta\,y\,|\,, \quad \underset{t \geq t_1}{\text{extr. sup}}\,|\,\delta\,y'\,|$$

e dalla (24) si deduce che anche $\delta\,y''$ è limitata in $(t_1\,, +\infty)$, in modo che $\delta\,y$ è un elemento di Σ.

La trasformazione lineare (21), definita in tutto Σ risulta così completamente invertibile fra Σ e Σ'.

15 La trasformazione funzionale (17) risulta perciò, in virtù del citato teorema di CACCIOPPOLI e HILDEBRANDT-GRAVES, invertibile nell'intorno dei punti (19). Rimane in particolare provato che se la condizione (1) determina una soluzione stabile di α) essa determina anche una soluzione di β) che è definita per ogni $t \geq t_0$ e per la quale è

$$\underset{t \geq t_0}{\text{extr. sup}}\,[\,|\,y\,| + |\,y'\,| + |\,y''\,|\,] < +\infty$$

purchè si sia scelto r sufficientemente piccolo.

16. — Dimostro ora, con un ragionamento simile a quello dei numeri 11 - 15, che se r è sufficientemente piccolo la equazione β) ammette almeno una soluzione periodica di periodo $\frac{2\,\pi}{\omega}$.

Sia $\overline{\Sigma}$ lo spazio lineare delle funzioni $y = y(t)$ periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, continue con le derivate prime e seconde, reso normale e completo assumendo come norma di $y(t)$ la quantità

$$\| y \| = \max_{0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}} [\, | y | + | y' | + | y'' | \,] .$$

Sia $\overline{\Sigma}'$ lo spazio lineare delle funzioni $z = z(t)$, periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, continue, reso normale e completo assumendo come norma di $z(t)$ la quantità

$$\| z \| = \max_{0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}} | z(t) | .$$

Sia $z = T(y)$ la trasformazione funzionale che ad ogni y di $\overline{\Sigma}$ fa corrispondere

$$z = y'' + y' \, | y' | + q \, y' + y - p^2 y^3 \equiv T(y) \tag{29}$$

Ad $y = 0$ la $z = T(y)$ fa corrispondere $z = 0$.

Per dimostrare che esiste un r_1 tale che se

$$r < r_1 , \quad \| z \| < r$$

la (29), concepita come una equazione in y, ammette una soluzione periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ basterà, in virtù del teorema di CACCIOPPOLI e HILDEBRANDT-GRAVES, provare che la trasformazione (29) è differenziabile con continuità nell'intorno del punto $y = 0$ e che la trasformazione lineare definita mediante il differenziale della (29) nel punto $y = 0$ è completamente invertibile fra $\overline{\Sigma}$ e $\overline{\Sigma}$. Ripetendo i ragionamenti dei numeri 12 e 13 si vede facilmente che la trasformazione lineare (19) ammette differenziale nel punto $y = 0$ e che la trasformazione

$$\delta z = \delta y'' + q \, \delta y' + \delta y \tag{30}$$

definita mediante il differenziale della (29) è lineare. Allo stesso modo si vede che la trasformazione (29) è differenziabile con continuità in un intorno del punto $y = 0$.

D'altra parte in virtù della ipotesi $q > 0$ la equazione differenziale

$$\delta y'' + q \, \delta y' + \delta y = 0$$

non ha soluzioni periodiche e quindi la equazione (30); fissato δz, ha una unica soluzione periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$. Ciò basta per affermare che la trasformazione (30) è completamente invertibile, e che quindi, in virtù del teorema di CACCIOPPOLI e HILDEBRANDT-GRÀVES, la trasformazione (29) è localmente invertibile nell'intorno dei punti $y = 0$, $z = 0$.

Ne discende, in particolare, l'esistenza di una costante positiva r_1, tale che se $r < r_1$ la equazione β) ammette almeno una soluzione periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

17. — In questo numero dimostro che esiste una costante positiva σ_0 tale che se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due soluzioni della equazione β) per le quali si ha

$$\operatorname*{extr.\,sup}_{t \geq t_1} [|y_1(t)| + |y_1'(t)| + |y_1''(t)|] < \sigma_0, \quad \operatorname*{extr.\,sup}_{t \geq t_1} [|y_2(t)| + |y_2'(t)| + |y_2''(t)|] < \sigma_0$$

essendo $t_1 \geq t_0$ e per il resto arbitrario, allora queste soluzioni convergono nel senso di Cartwright e Littlewood [4], si ha cioè

$$\lim_{t \to +\infty} \{[y_1(t) - y_2(t)]^2 + [y_1'(t) - y_2'(t)]^2\} = 0.$$

Pongo $\eta(t) = y_2(t) - y_1(t)$ ed ottengo dalla β)

$$\eta'' + q\,\eta' + \Delta\varphi + \Delta\psi = 0 \tag{31}$$

ove ho posto per brevità

$$\varphi(y') = y'\,|\,y'\,|, \quad \psi(y) = y - p^2 y^3$$

e di conseguenza

$$\Delta\varphi = \varphi(y_2') - \varphi(y_1'), \quad \Delta\psi = \psi(y_2) - \psi(y_1).$$

Moltiplicando ambo i membri della (31) per $2\,\eta'$ ed integrando, rispetto a t, fra t_0 e t ottengo

$$[\eta'^2]_{t_0}^t + 2\,q \int_{t_0}^t \eta'^2\,d\,t + 2 \int_{t_0}^t \eta'\,\Delta\varphi\,d\,t + 2 \int_{t_0}^t \eta'\,\Delta\psi\,d\,t = 0$$

ed anche

$$[\eta'^2]_{t_0}^t + 2\,q \int_{t_0}^t \eta'^2\,d\,t + 2 \int_{t_0}^t \eta'^2 \frac{\Delta\varphi}{\eta'}\,d\,t + 2 \int_{t_0}^t \eta\,\eta' \frac{\Delta\psi}{\eta}\,d\,t = 0 \tag{32}$$

ove s'intende che sia $\frac{\Delta\varphi}{\eta'} = \varphi'(y_1')$ se $\eta'(t) = 0$, e $\frac{\Delta\psi}{\eta} = \psi'(y_1)$ se $\eta(t) = 0$.

Osservo ora che la funzione $\frac{\Delta\varphi}{\eta'}$ è derivabile rispetto a t per ogni valore di t per cui è $\eta'(t) \neq 0$, e che per siffatti valori di t si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\varphi(y_1' + \eta') - \varphi(y_1')}{\eta'} = \frac{\varphi'(y_1' + \eta') - \varphi'(y_1')}{\eta'} y_1'' -$$

$$- \frac{\eta''}{\eta'^2}[\varphi(y_1' + \eta') - \varphi(y_1') - \eta'\varphi'(y_1' + \eta')] =$$

$$= 2\left[\frac{|y_1' + \eta'| - |y_1'|}{\eta'} \cdot y_1'' - \eta'' \frac{|y_1' + \theta\eta'| - |y_1' + \eta'|}{\eta'}\right]$$

dalla quale si ricava

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right)\right| \leq 2[\,|y_1''| + |\eta''|(1-\theta)] \leq 2[\,|y_1''| + |\eta''|\,].$$

Se per un valore di t è $\eta'(t) = 0$ si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right]_{t+\Delta t} - [\varphi'(y_1')]_t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\Delta\varphi - \eta'\varphi'(y_1')]_{t+\Delta t} + [\eta']_{t+\Delta t} \cdot \{[\varphi'(y_1')]_{t+\Delta t} - [\varphi'(y_1')]_t\}}{[\eta']_{t+\Delta t} \cdot \Delta t}$$

dalla quale si deduce, se $y_1'(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{\varepsilon[\eta']_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{[2|y_1'|]_{t+\Delta t} - 2[|y_1'|]_t}{\Delta t}\right\} = \varepsilon\eta'' + 2\varepsilon y_1''$$

ove ε indica $+1$ o -1 a seconda che è $y_1' \gtrless 0$.

Se si ha insieme $\eta'(t) = y_1'(t) = 0$ allora è

$$\frac{\left[\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right]_{t+\Delta t} - [\varphi'(y_1')]_t}{\Delta t} = \frac{\left[\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right]_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \frac{[\varphi'(y_1' + \theta\eta')]_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \frac{2[\,|y_1' + \theta\eta'|\,]_{t+\Delta t}}{\Delta t} \leq$$

$$\leq \frac{2[\,|y_1'|\,]_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{2[\,|\eta'|\,]_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

da cui si deduce

$$\left| D^+ \frac{\Delta\varphi}{\eta'} \right| \leq \max \lim_{\Delta t \to +0} \left| \frac{\left[\dfrac{\Delta\varphi}{\eta'}\right]_{t+\Delta t} - [\varphi'(y_1')]_t}{\Delta t} \right| \leq$$

$$\leq \max \lim_{\Delta t \to +0} \left\{ \frac{2\,[\,|\,y_1'\,|\,]_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{2\,[\,|\,\eta'\,|\,]_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right\} \leq 2\,[\,|\,y_1''\,| + |\,\eta''\,|\,]$$

ove con $D^+ \dfrac{\Delta\varphi}{\eta'}$ si è indicato il numero derivato superiore destro di $\dfrac{\Delta\varphi}{\eta'}$.

Tutto quanto abbiamo veduto prova che la funzione di t $\dfrac{\Delta\varphi}{\eta'}$ è assolutamente continua in (t_0, t) e che si ha ivi quasi ovunque

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{\Delta\varphi}{\eta'} \right| \leq 2\,[\,|\,y_1''\,| + |\,\eta''\,|\,] \tag{33}$$

Alla stessa maniera si prova che la funzione di t $\dfrac{\Delta\psi}{\eta}$ è assolutamente continua in (t_0, t) e che si ha ivi ovunque

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{\Delta\psi}{\eta} \right| \leq 6\,p^2\,[\,|\,y_1'\,| + |\,\eta'\,|\,]\cdot[\,|\,y_1\,| + |\,\eta\,|\,]. \tag{34}$$

Si ha inoltre

$$\int_{t_0}^{t} \eta\,\eta' \frac{\Delta\varphi}{\eta}\,dt = \left[\frac{1}{2}\,\eta^2 \frac{\Delta\psi}{\eta}\right]_{t_0}^{t} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \eta^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\psi}{\eta}\right) dt$$

$$\int_{t_0}^{t} \eta'^2\,dt = [\eta\,\eta']_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \eta\,\eta''\,dt = [\eta\,\eta']_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \eta\,[q\,\eta' + \Delta\varphi + \Delta\psi]\,dt =$$

$$= \left[\eta\,\eta' + \frac{1}{2}\,q\,\eta^2\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \eta\,\eta' \frac{\Delta\varphi}{\eta'}\,dt + \int_{t_0}^{t} \eta^2 \frac{\Delta\psi}{\eta}\,dt =$$

$$= \left[\eta\,\eta' + \frac{1}{2}\,q\,\eta^2 + \frac{1}{2}\,\eta^2 \frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\,\eta^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\varphi}{\eta'}\right) dt + \int_{t_0}^{t} \eta^2 \frac{\Delta\psi}{\eta}\,dt.$$

Tenendo conto della (32) si ottiene per ogni $t \geq t_0$

$$\left[\eta'^2 + \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{\eta} + 2 q \eta \eta' + q^2 \eta^2 + q \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{\eta'}\right]_{t_0}^{t} + 2 \int_{t_0}^{t} \eta'^2 \frac{\Delta \varphi}{\eta'} d t + \tag{35}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \eta^2 \left[2 q \frac{\Delta \psi}{\eta} - q \frac{d}{d t} \frac{\Delta \varphi}{\eta'} - \frac{d}{d t} \frac{\Delta \psi}{\eta}\right] d t = 0 .$$

Da quì si deduce ora in virtù delle (33) e (34), l'esistenza di un $\sigma_0 > 0$ tale che risulterà, per ogni $t \geq t_1$,

$$2 q \frac{\Delta \psi}{\eta} - q \frac{d}{d t} \frac{\Delta \varphi}{\eta'} - \frac{d}{d t} \frac{\Delta \psi}{\eta} \geq \varepsilon \tag{36}$$

purchè si abbia

$$\operatorname*{extr.\,sup.}_{t \geq t_1} [\,|\, y_1 \,| + |\, y_1' \,| + |\, y_1'' \,|\,] < \sigma_0 , \quad \operatorname*{extr.\,sup.}_{t \geq t_1} [\,|\, y_2 \,| + |\, y_2' \,| + |\, y_2'' \,|\,] < \sigma_0 .$$

Riprendiamo ora in esame la (35), in essa l'espressione in parentesi quadra è limitata e la quantità $\eta' \Delta \varphi$ è ≥ 0. Se ne deduce che è

$$\int_{t_1}^{t} \eta^2 \left[2 q \frac{\Delta \psi}{\eta} - q \frac{d}{d t} \frac{\Delta \varphi}{\eta'} - \frac{d}{d t} \frac{\Delta \psi}{\eta}\right] d t < H$$

con H indipendente da t; e perciò in virtù della (36)

$$\varepsilon \int_{t_1}^{t} \eta^2 \, d t < H .$$

Ma η e η' sono limitate in $(t_0, +\infty)$ ne viene quindi che η^2 è Lipschitziana e per quanto si è visto al numero 2

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = 0 .$$

Segue anche che

$$\lim_{t \to +\infty} \eta'(t) = 0 .$$

Non può essere $\max\lim_{t \to +\infty} \eta'(t) = -k^2 < 0$ perchè in tal caso risulterebbe definitivamente $\eta'(t) < -k^2 + \varepsilon < 0$; $\varepsilon > 0$; e perciò l'integrale

$$\int_{t_0}^{t} \eta'(t)\,d\,t = \eta(t) - \eta(t_0)$$

risulterebbe divergente contrariamente al fatto che $\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = 0$.

Rimane da fare vedere che non può essere $\max\lim_{t \to +\infty} \eta'(t) > 0$.

In questo caso dovrebbe esistere una successione di punti $\{t_n\}$ tali che $\lim_{n+\infty} t_n = +\infty$ per la quale si avrebbe

$$\eta'(t_n) > \sigma\,;\ \sigma > 0\,;\ n = 1, 2, \ldots$$

Esisterebbe perciò per ogni n un intorno $\Delta(t_n)$, simmetrico rispetto a t_n, in cui sarebbe $\eta'(t) \geq \sigma/2$.

Sia, per ogni n, $\varrho(t_n)$ l'estremo superiore dei raggi degli intorni $\Delta(t_n)$.

Per essere $|\,\eta''(t)\,| < K$, con un opportuno K, si avrebbe intanto con opportuna scelta del segno davanti a $\varrho(t_n)$

$$\left|\frac{\eta'[t_n \mp \varrho(t_n)] - \eta'(t_n)}{\varrho(t_n)}\right| = \frac{\sigma/2}{\varrho(t_n)} = |\,\eta''(\tau)\,| < H$$

dalla quale si dedurrebbe, per ogni n,

$$\varrho(t_n) > \frac{\sigma}{2\,H}\,.$$

D'altra parte avremmo per ogni n

$$\eta[t_n + \varrho(t_n)] - \eta[t_n - \varrho(t_n)] = \int_{t_n-\varrho(t_n)}^{t_n+\varrho(t_n)} \eta'(t)\,d\,t \geq 2\,\varrho(t_n)\cdot\sigma/2 = \sigma\cdot\varrho(t_n) > \sigma^2/2\,H$$

la quale ultima, poichè $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, contrasta con il fatto che

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = 0\,.$$

Quanto si è asserito all'inizio del numero 17 è così provato.

18. — Tutto quanto abbiamo visto a proposito della equazione β) ci consente di dire che se (η_0, ζ_0) è un punto appartenente alla zona di stabilità Z della equazione α) e se r è sufficientemente piccolo la soluzione di β) determinata delle condizioni (1) converge, nel senso del numero 17, verso una soluzione periodica della equazione β), verso la quale converge ogni altro integrale della equazione β) per il quale là quantità

$$\underset{t \geq t_1}{\text{extr. sup.}} [\mid y \mid + \mid y' \mid + \mid y'' \mid],$$

ove è $t_1 \geq t_0$ e per il resto arbitrario, risulti sufficientemente piccola.

[*Pervenuto alla Redazione il 1-10 1950*]

BIBLIOGRAFIA

1. L AMERIO — *Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di una equazione interessante l'elettrotecnica.* Ann di Mat. Pura ed Appl. Serie IV - Tomo XXX pp 75-90.
2. R CACCIOPPOLI — *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali.* Rend Accad. Lincei Serie VI Tomo 16 (1932).
3. D. CALIGO — *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni* Rend. Accad Italia Serie VII Vol. I (1940).
4. M. L. CARTWRIGHT-J L. LITTLEWOOD — *On non linear differential equations of the second order.* Ann. of. Math. 48, 472-494 (1947).
5. T. H. HILDEBRANDT - L. M. GRAVES — *Implicit functions and their differentials in general Analysis.* Transactions of Amer. Math Soc. Tomo 29 (1927).
6. G. KRALL — *Dinamica ed aerodinamica dei fili. III Problèmi non lineari delle vibrazioni visibili.* Rend. Accad. Lincei 1948 pp. 197 203.
7. W. E. MILNE — *Damped vibrations* University of Oregon Pubblication (1923)
8. O. PERRON — *Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singularen Punktes.* I Teil, Math. Zeitschrift, Band 15 (1922) pp 121-146. II Teil, Math Zeitschrift Band 16 (1923) pp. 273-295.
9. G. SANSONE — *Equazioni differenziali nel campo reale.* II. Ed. Zanichelli, Bologna

ALDO GHIZZETTI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 23 Gennaio 1951