

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VITTORIO CHECCUCCI

Sui fondamenti del calcolo con matrici infinite

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 4,
n° 3-4 (1950), p. 205-222

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_3-4_205_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI FONDAMENTI DEL CALCOLO CON MATRICI INFINITE

di VITTORIO CHECCUCCI (Pisa)

Il successo, anche nelle matematiche applicate, degli algoritmi, e più generalmente della nozione di funzione di matrici finite suggerisce l'opportunità di esaminare se, ed in quali casi, un analogo simbolismo di calcolo resti valevole per le matrici infinite.

Per queste si incontrano alcune difficoltà che per le matrici finite non si presentano affatto. Quelle che si riferiscono alla convergenza ed alla associatività del prodotto sono già state superate da vario tempo ma, sembraci, non ancora con quella generalità che consenta di fare uso, con sufficiente sicurezza, delle regole di calcolo ammissibili per le matrici finite.

Scopo di queste brevi pagine è di raggiungere, nei limiti consentiti dagli enti che vogliono sottoporsi a calcolo, questa sicurezza, mostrando in pari tempo l'utilità di adoperare il simbolismo ormai già familiare per le matrici finite.

Ricordiamo che⁽¹⁾ la convergenza e la proprietà associativa del prodotto sono senz'altro verificate da quelle matrici infinite:

$$A = \| a_{rs} \| \quad r, s = 1, 2, \dots, n, \dots$$

(a_{rs} numeri complessi) per le quali esiste un numero positivo M_A indipendente da n tale che, presi due n -complessi orizzontali qualunque

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

(1) Cfr. principalmente i lavori seguenti:

a) HELLINGER e TOEPLITZ: *Enzykl. der math. Wiss.* II₃ vol 9 (1927)

b) WINTNER A.: *Spectraltheorie der unendlichen Matrizen* Leipzig (1929)

c) JULIA G.: *Introduction mathématique aux théories quantiques*. II Partie, Paris (1938)

nei quali il lettore troverà una estesa bibliografia sull'argomento.

soddisfacenti alle condizioni ⁽²⁾:

$$x \bar{x}_{-1} = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n \leq 1$$

$$y \bar{y}_{-1} = y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \dots + y_n \bar{y}_n \leq 1$$

(\bar{x}_r ed \bar{y}_r numeri complessi coniugati ad x_r, y_r), risulti

$$\left| \sum_{r,s}^{1,\dots,n} a_{rs} x_r y_s \right| \leq M_A.$$

Le matrici A cosiffatte si dicono *limitate*: esse corrispondono agli operatori lineari definiti in tutto lo spazio hilbertiano, cioè sono tali che se:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

è il complesso orizzontale infinito delle coordinate di un punto qualsiasi dello spazio hilbertiano, il complesso verticale infinito $A x_{-1}$ esiste e dà le coordinate di un altro punto dello spazio hilbertiano.

In questa Nota consideriamo matrici più generali di quelle ora dette, che diciamo *hilbertiane di tipo* (p, q) , alle quali mostriamo che può estendersi senza limitazioni il simbolismo e quindi l'algoritmo solito del calcolo di matrici finite. I numeri p, q delle nostre matrici sono due numeri reali entrambi non minori di 1 (che possono anche diventare infiniti); per $p = q = 2$ si ricade nel caso delle matrici limitate, di cui sopra.

Le righe e le colonne delle matrici hilbertiane suddette sono complessi infiniti $x = (x_1 x_2 \dots x_n \dots)$ per i quali converge la serie $\sum_n |x_n|^r$ con $r \geq 1$ opportuno o per i quali è limitato l'estremo superiore di $|x_n|$.

Nel § 1 esponiamo le proprietà fondamentali, in complesso già note ⁽³⁾, degli spazi aventi per elementi i complessi infiniti ora detti. Nel § 2 si trovano le proprietà delle matrici hilbertiane di tipo (p, q) , tra cui la generalizzazione del teorema fondamentale di HELLINGER e TOEPLITZ. Nel § 3 risolviamo, per il caso più notevole, i problemi dell'inversione di una matrice infinita e della risoluzione di sistemi lineari infiniti, sui quali ci proponiamo di ritornare prossimamente.

⁽²⁾ Con x_{-1} e y_{-1} si indicano gli n -complessi verticali di x ed y .

⁽³⁾ Cfr. a) RIESZ. F. *Les systèmes linéaires à une infinité d'inconnues*. Paris (1913).

b) BANACH S. *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa (1932).

§ 1. — Spazi hilbertiani di classe p

1. Diciamo \mathcal{S}_p ($p \geq 1$) o *spazio hilbertiano di classe p* lo spazio dei complessi infiniti $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, (x_n numero complesso) per i quali la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ è convergente, ed \mathcal{S}_{∞} lo spazio dei complessi infiniti x per i quali *extr. sup.* $|x_n|$ ($n = 1, 2, \dots$) è limitato; i numeri x_n si dicono le coordinate del punto x . Se $p < q$, \mathcal{S}_p è contenuto in \mathcal{S}_q , in particolare ogni \mathcal{S}_p è contenuto in \mathcal{S}_{∞} ; inoltre ogni \mathcal{S}_p contiene l'insieme numerabile E di punti x aventi solo un numero finito di coordinate non nulle e queste sono razionali complesse (cioè hanno razionali la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario).

Dalla disuguaglianza di MINKOWSKI:

$$(1.1) \quad \left| \left[\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} - \left[\sum_{n=1}^m |y_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right| \leq \left[\sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{n=1}^m |y_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

se $p \geq 1$, oppure dalla

$$(1.1') \quad \left| \text{extr. sup. } |x_n| - \text{extr. sup. } |y_n| \right| \leq \text{extr. sup. } |x_n + y_n| \leq \\ \leq \text{extr. sup. } |x_n| + \text{extr. sup. } |y_n|$$

se $p = \infty$, segue che:

a) lo spazio \mathcal{S}_p è *lineare*, cioè una combinazione lineare a coefficienti complessi di un numero finito di punti di \mathcal{S}_p , è ancora un punto di \mathcal{S}_p ;

b) lo spazio \mathcal{S}_p è *metrico*, cioè se definiamo distanza tra due punti x ed y di \mathcal{S}_p il numero:

$$(2.1) \quad (x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

se $p \geq 1$, oppure il numero:

$$(2.1') \quad (x, y) = \text{extr. sup. } |x_n - y_n|$$

se $p = \infty$, valgono le:

$$(x, x) = 0 \quad (x, y) > 0 \quad \text{quando } x \neq y$$

$$(3.1) \quad (x, y) = (y, x)$$

$$(x, y) \leq (x, z) + (z, y);$$

c) lo spazio \mathcal{E}_p è *completo*, cioè se diciamo convergente ad un punto $x^{(0)}$ di \mathcal{E}_p ma successione $\{x^{(n)}\}$ di punti di \mathcal{E}_p , quando

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(n)}, x^{(0)}) = 0$$

vale il criterio di CAUCHY: condizione necessaria e sufficiente perchè $\{x^{(n)}\}$ converga ad un punto $x^{(0)}$ è che:

$$(5.1) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} (x^{(m)}, x^{(n)}) = 0;$$

d) lo spazio \mathcal{E}_p è *separabile*, cioè contiene un insieme numerabile (precisamente, qualunque sia p , l'insieme E di cui sopra), ed ogni punto x di \mathcal{E}_p è limite di una successione di punti, tutti di questo insieme (o, come si usa dire, \mathcal{E}_p , contiene un insieme numerabile ed ovunque denso in \mathcal{E}_p).

2. Se x è un punto di \mathcal{E}_p , diciamo *norma- p* di x o semplicemente *norma* di x il numero

$$(6.1) \quad N_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

se $p \geq 1$, oppure il numero

$$(6.1)' \quad N_{\infty}(x) = \text{extr. sup. } |x_n|$$

se $p = \infty$; se $p > 1$ (finito), $N_p(x)$ è la distanza di x dall'origine $O = (0, 0, \dots)$ elevata a p , altrimenti è questa distanza stessa.

Insieme alla disuguaglianza di MINKOWSKI, che per due punti x e y di \mathcal{E}_p si scrive:

$$(7.1) \quad |N_p(x)^{\frac{1}{p}} - N_p(y)^{\frac{1}{p}}| \leq N_p(x+y)^{\frac{1}{p}} \leq N_p(x)^{\frac{1}{p}} + N_p(y)^{\frac{1}{p}}$$

se $p \geq 1$, oppure alla:

$$(7.1)' \quad |N_{\infty}(x) - N_{\infty}(y)| \leq N_{\infty}(x+y) \leq N_{\infty}(x) + N_{\infty}(y)$$

se $p = \infty$, gioca un ruolo fondamentale nella geometria dell' \mathcal{E}_p la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER:

$$\left| \sum_{n=1}^m u_n x_n \right| \leq \left[\sum_{n=1}^m |u_n|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

se $p > 1$, oppure la :

$$\left| \sum_{n=1}^m u_n x_n \right| \leq \text{extr. sup } |u_n| \cdot \sum_{n=1}^m |x_n|$$

se $p = 1$; esse esprimono, facendo tendere m ad infinito, che se x è un qualunque punto di \mathcal{S}_p ed u un qualunque punto di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ (in particolare di \mathcal{S}_1 e di \mathcal{S}_∞), il prodotto $u x_{-1}$ è convergente (assolutamente) e si ha :

$$(8.1) \quad |u x_{-1}| \leq N_{\frac{p}{p-1}}(u)^{\frac{p-1}{p}} N_p(x)^{\frac{1}{p}}$$

se $p > 1$, oppure

$$(8.1)' \quad |u x_{-1}| \leq N_\infty(u) \cdot N_1(x)$$

se $p = 1$. Gli spazi \mathcal{S}_p ed $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ (in particolare \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_∞) si diranno tra loro *duali* o *coniugati*; una tale relazione è involutoria; in particolare \mathcal{S}_2 coincide col suo spazio duale.

Con le posizioni (6.1), (6.1)' la (4.1) si scrive

$$(9.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(x^{(n)} - x^{(0)}) = 0.$$

Vale inoltre il seguente teorema: se $x^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$, si ha anche :

$$(10.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$(11.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(x^{(n)}) = N_p(x^{(0)})$$

e, viceversa: se esistono i primi membri delle (10.1) ed (11.1), il punto $x^{(n)}$ determinato dalle (10, 1) appartiene ad \mathcal{S}_p ed è il punto limite della successione $\{x^{(n)}\}$.

Si verifica subito che in \mathcal{S}_p non vale il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS: non è detto che se $\{x^{(n)}\}$ è una successione di punti di \mathcal{S}_p limitata, (tale cioè che esiste un numero M in modo che per ogni n :

$$(12.1) \quad N_p(x^{(n)})^{\frac{1}{p}} \leq M \text{ (4)},$$

(4) Se $p = \infty$ l'esponente al primo membro è uno.

si passa da essa estrarre una successione $\{x^{(n)}\}$ convergente (ad un punto $x^{(0)}$); basta infatti osservare che, se $\{e^{(n)}\}$ è la successione delle colonne della matrice identica infinita I , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_i^{(n)} = 0$$

sicchè $\{e^{(n)}\}$ potrebbe al più tendere all'origine O , ciò che è escluso, a norma della (9.1), perchè $N_p(e^{(n)} - 0) = 1$ qualunque sia n .

Vale però il teorema: *se $\{x^{(n)}\}$ è una successione limitata (quindi vale la (12.1)), e convergono i primi membri delle (10.1), il punto $x^{(0)}$ determinato dalle (10.1) appartiene ad \mathcal{S}_p ed inoltre:*

$$(13.1) \quad N_p(x^{(0)})^p \leq M^{(4)}.$$

Diciamo che $\{x^{(n)}\}$ converge debolmente ad $x^{(0)}$, se, insieme alle (10.1) valgono le (12.1). L'importanza di questa definizione sta nel fatto che rispetto alla convergenza debole vale il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS; se $\{x^{(n)}\}$ è una successione limitata, da essa si può estrarre una successione $\{x^{(n_i)}\}$ che converge debolmente (ad un punto $x^{(0)}$)⁽⁵⁾.

3. Per la convergenza debole vale un criterio (necessario e sufficiente) assai importante per le considerazioni che seguono: *condizione necessaria e sufficiente perchè una successione $\{x^{(n)}\}$ di punti di \mathcal{S}_p converga debolmente (ad un punto $x^{(0)}$) è che per qualsiasi punto u dello spazio duale $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ esista*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u x_{-1}^{(n)} \quad (6)$$

Poniamo $x = (\xi_m | \xi'_m)$ dove $\xi_m = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\xi'_m = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$ si diranno rispettivamente *ridotta-m-ma* e *resto m-mo* di x . Intenderemo per *ridotta m-ma* e *resto m-mo* di x anche i punti $(\xi_m | 0)$ e $(0 | \xi'_m)$, con i quali si scrive $x = (\xi_m | 0) + (0 | \xi'_m)$.

Dimostriamo in primo luogo la necessità della condizione, anzi dimostriamo che: *se $\{x^{(n)}\}$ è una successione di punti \mathcal{S}_p che converge debolmente ad $x^{(0)}$ ed $\{u^{(n)}\}$ è una successione di punti dello spazio duale che converge ad $u^{(0)}$ (ma non debolmente), esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} x_{-1}^{(n)}$ e si ha:*

$$(14.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} x_{-1}^{(n)} = u_{-1}^{(0)}.$$

(5) Per le definizioni e teoremi di questo numero, cf. F. RIESZ op. cit. in (3) a) pagg. 55-59.

(6) Per questo criterio cfr. tra l'altro, G. JULIA; op. cit. in (4) c) pag. 23 per $p = 2$.

Infatti, se $N_p(x^{(n)})^{\frac{1}{p}} \leq M$, ponendo $u^{(0)} = (\eta_m^{(0)} | \eta_m^{(0)})$, si ha :

$$| u^{(n)} x_{-1}^{(n)} - u^{(0)} x_{-1}^{(0)} | \leq | (u^{(n)} - u^{(0)}) x_{-1}^{(n)} | + | u^{(0)} (x^{(n)} - x^{(0)})_{-1} |$$

ossia, per la (8.1) e la (12.1) :

$$\begin{aligned} | u^{(n)} x_{-1}^{(n)} - u^{(0)} x_{-1}^{(0)} | &\leq M \cdot N_{\frac{p}{p-1}} (u^{(n)} - u^{(0)})^{\frac{p-1}{p}} + | \eta_m^{(0)} (\xi_m^{(n)} - \xi_m^{(0)})_{-1} | + \\ &+ | \eta_m^{(0)} \xi_{m-1}^{(n)} | + | \eta_m^{(0)} \xi_{m-1}^{(0)} | \leq M \cdot N_{\frac{p}{p-1}} (u^{(n)} - u^{(0)})^{\frac{p-1}{p}} + \\ &+ | \eta_m^{(0)} (\xi_m^{(n)} - \xi_m^{(0)})_{-1} | + 2 M N_{\frac{p}{p-1}} (\eta_m^{(0)})^{\frac{p-1}{p}} . \end{aligned}$$

Determiniamo n_1 in modo che per $n > n_1$ il primo termine dell'ultimo membro sia minore di $\frac{\varepsilon}{3}$ e fissiamo m in modo che anche l'ultimo termine sia minore di $\frac{\varepsilon}{3}$; si può allora trovare un $\bar{n} > n_1$ tale che per $n > \bar{n}$ anche il secondo termine sia minore di $\frac{\varepsilon}{3}$; in definitiva si ottiene, per $n > \bar{n}$:

$$| u^{(n)} x_{-1}^{(n)} - u^{(0)} x_{-1}^{(0)} | < \varepsilon$$

con ε prefissato arbitrario.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente, osservando in primo luogo che se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} u x_{-1}^{(n)}$ per qualsiasi u di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$, esistono in particolare i limiti :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(i)} x_{-1}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

dove $e^{(i)}$ è la riga i -ma di I , e sono perciò soddisfatte le (10.1).

Resta da dimostrare che $\{x^{(n)}\}$ è una successione limitata. Supponiamo allora che in $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ non esista nessuna sfera tale che per i punti u interni

ad essa sia limitato $|u x_{-1}^{(n)}|$, cioè non esistano un punto u^* , e due numeri positivi r ed M tali che sia $|u x_{-1}^{(n)}| < M$ ($n = 1, 2, \dots$) quando

$$N_{\frac{p}{p-1}} (u - u^*)^{\frac{p-1}{p}} < r.$$

Se $\{M_n\}$ e $\{\varrho_n\}$ sono due successioni di numeri positivi non nulli, la prima divergente e la seconda convergente a zero, detta S una sfera (qualunque) di centro u^* e raggio r , esisterà un indice n_1 ed un punto $u^{(1)}$ interno ad S tali che:

$$|u^{(1)} x_{-1}^{(n_1)}| > 2M_1.$$

Si può allora considerare una sfera S_1 di centro $u^{(1)}$ e raggio r_1 , minore del più piccolo tra i due numeri ϱ_1 ed $r - N \frac{p}{p-1} (u^{(1)} - u^*)^{\frac{p-1}{p}}$, tale che per i punti u interni ad essa sia:

$$(15.1) \quad |u x_{-1}^{(n_1)}| > M_1;$$

altrimenti esisterebbe una successione $\{v^{(n)}\}$ convergente ad $u^{(1)}$, per la quale fosse $|v^{(n)} x_{-1}^{(n_1)}| \leq M_1$; sarebbe quindi $|u^{(1)} x_{-1}^{(n_1)}| = |\lim_{n \rightarrow \infty} v^{(n)} x_{-1}^{(n_1)}| \leq M_1$ (per la necessità della condizione da dimostrare) e ciò in contrasto con la (15.1). La sfera S_1 risulta così interna alla sfera S . Operando in S_1 come in S , si possono considerare un indice n_2 ed una sfera S_2 di centro e raggio $r_2 < \varrho_2$, tutta contenuta in S_1 , tale che per i punti u interni ad essa si abbia:

$$|u x_{-1}^{(n_2)}| > M_2.$$

Proseguendo indefinitamente si ottiene una successione $\{S_n\}$ di sfere, ognuna contenuta nella precedente, i cui raggi r_n convergono a zero, ed i cui centri formano una successione $\{u^{(n)}\}$ che soddisfa il criterio di CAUCHY, come si verifica subito, osservando che si ha:

$$N \frac{p}{p-1} (u^{(n+k)} - u^{(n)})^{\frac{p-1}{p}} < r_n.$$

il limite $u^{(0)}$ della $\{u^{(n)}\}$ appartiene a tutte le sfere, suddette e pertanto sarà $|u^{(0)} x_{-1}^{(n_k)}| > M_k$ ($k \parallel 1, 2, \dots$); ma M_k diverge e quindi non esiste $\lim u^{(0)} x_{-1}^{(n)}$: cioè in $u^{(0)}$ non sarebbe soddisfatta la condizione posta.

Siano dunque u^* , r ed M tali che sia:

$$|u x_{-1}^{(n)}| < M$$

quando

$$(16.1) \quad N \frac{p}{p-1} (u - u^*)^{\frac{p-1}{p}} \leq r$$

Ponendo $u = u^* + r v$, per ogni v tale che:

$$(17.1) \quad N_{\frac{p}{p-1}}(v)^{\frac{p-1}{p}} \leq 1,$$

u soddisfa alla (16.1); quindi:

$$(18.1) \quad |v x_{-1}^{(n)}| = \left| \frac{1}{r} (u - u^*) x_{-1}^{(n)} \right| \leq \frac{1}{r} [|u x_{-1}^{(n)}| + |u^* x_{-1}^{(n)}|] \leq \frac{2M}{r}$$

Se x è un punto di \mathcal{E}_p ($p \geq 1$ finito), il complesso \tilde{x} per il quale

$$(19.1) \quad \tilde{x}_k = 0, \text{ se } x_k = 0; \quad \tilde{x}_k = \frac{|x_k|^p}{x_k}, \text{ se } x_k \neq 0,$$

è un punto di $\mathcal{E}_{\frac{p}{p-1}}$: lo diremo il punto *duale* o *coniugato* di x . Per $p > 1$ il coniugato del coniugato di x è il punto x stesso, e si ha:

$$(20.1) \quad \tilde{\tilde{x}}_{-1} = N_p(x) = N_{\frac{p}{p-1}}(\tilde{x})^{(7)};$$

se $p = 1$, \tilde{x} è un punto tale che $N_\infty(\tilde{x}) = 1$ e si ha $\tilde{\tilde{x}}_{-1} = N_1(x)$.

Se poniamo:

$$w^{(n)} = \frac{\tilde{x}^{(n)}}{N_p(x^{(n)})^{\frac{1}{p}}}, \text{ se } p > 1; \text{ oppure } w^{(n)} = \tilde{x}^{(n)}, \text{ se } p = 1,$$

si ha immediatamente:

$$N_{\frac{p}{p-1}}(w^{(n)}) = 1,$$

e quindi per le (17.1), (18.1)

$$w^{(n)} x_{-1}^{(n)} = \frac{\tilde{x}^{(n)} x_{-1}^{(n)}}{N_p(x^{(n)})^{\frac{1}{p}}} = N_p(x^{(n)})^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2M}{r}:$$

la successione $\{x^{(n)}\}$ è dunque limitata, ed il criterio è così dimostrato.

(7) Se $p = 2$, \tilde{x} è il punto di \mathcal{E}_2 le cui coordinate sono le complesse coniugate di quelle di x .

Se $p = \infty$, il ragionamento precedente vale sino alle (17,1), (18,1) con l'ovvia sostituzione di $\frac{p-1}{p}$ con uno; dopo di che basta prendere $v = e^{(i)}$, essendo $e^{(i)}$ la riga i -ma della matrice identica I , per avere:

$$|e^{(i)} x_{-1}^{(n)}| = |x_i^{(n)}| \leq \frac{2M}{r},$$

ciò che, per definizione, significa che $N_\infty(x^{(n)}) \leq \frac{2M}{r}$.

§ 2. — Prodotto di matrici e proprietà associative del prodotto. Matrici hilbertiane

4. — Se U ed X sono due matrici, la prima ad infinite colonne, la seconda ad infinite righe ed u è una qualunque riga di U , x_{-1} una qualunque colonna di X , l'esistenza del prodotto UX significa la convergenza delle serie semplici $u x_{-1}$. Orbene gli spazi hilbertiani di classe p qualunque costituiscono l'ambiente più opportuno ove scegliere le righe di U o le colonne di X , se vogliamo liberarci dalla necessità di stabilire di volta in volta la convergenza del procedimento seguito; infatti per un teorema del LANDAU: *condizione necessaria e sufficiente perchè $u x_{-1}$ converga per ogni x di \mathcal{E}_p è che u appartenga ad $\mathcal{E}_{\frac{p}{p-1}}$* , dopo di che $u x_{-1}$ converge assolutamente (8). Sorge quindi spontanea e, sotto certi aspetti essenziale, l'opportu-

(8) La sufficienza è conseguenza della (8,1); la necessità segue per assurdo, supponendo che $N_{\frac{p}{p-1}}(u)$ diverga e costruendo un punto x di \mathcal{E}_p , per il quale $u x_{-1}$ non converge. Se $p > 1$ finito (cfr. F. Riesz. op. cit. in (3) a) pag. 47), basta porre $s_0 = 0$, $s_n = \sum_{r=1}^n |u_r|^{\frac{p}{p-1}}$ e determinare $\{n_i\}$ in modo che $s_{n_i} - s_{n_{i-1}} \geq 2^{\frac{i}{p-2}}$. Il punto x di \mathcal{E}_p di cui sopra è definito da

$$x_k = \frac{\tilde{u}_k}{s_{n_i} - s_{n_{i-1}}} \quad \text{se } n_{i-1} < k \leq n_i \quad (\text{cfr. n}^\circ 3).$$

Se $p = \infty$, basta prendere $x = \tilde{u}$; se infine $p = 1$, sia $\{n_i\}$ tale che $|u_{n_i}| > 2^i$. Il punto x tale che

$$x_k = 0 \quad \text{se } k \neq n_i; \quad x_{n_i} = \frac{1}{u_{n_i}}$$

appartiene ad \mathcal{E}_1 ed $u x_{-1}$ diverge.

nità di imporre alle matrici U ed X del prodotto UX la condizione che le righe del primo fattore e le colonne del secondo fattore siano punti di spazi duali. Noi supporremo nel seguito sempre soddisfatta questa ipotesi, che diremo: *condizione di LANDAU per il prodotto di due matrici*.

Date tre matrici U, A, X per le quali esistono, nel senso ora detto, i prodotti UA ed AX , interessa stabilire sotto quali condizioni esistono i prodotti $(UA)X$ ed $U(AX)$ e vale la proprietà associativa:

$$(1.2) \quad (UA)X = U(AX).$$

Ciò è quanto dire, con le posizioni $u = (\eta_m | \eta'_m) \quad x = (\xi_n | \xi'_n)$ (cfr. n° 3), che:

$$(2.2) \quad (uA)x_{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{m \rightarrow \infty} (\eta_m | 0) A] (\xi_n | 0)_{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} [(\eta_m | 0) \lim_{n \rightarrow \infty} A (\xi_n | 0)_{-1}] = u(AX_{-1})$$

Per prodotti che soddisfano alla condizione di LANDAU, accade che, se u appartiene ad \mathcal{S}_p , uA deve appartenere ad $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$, e se u appartiene ad $\mathcal{S}_{\frac{q}{q-1}}$, Ax_{-1} deve appartenere ad \mathcal{S}_q ; esistono perciò tanto $(uA)x_{-1}$ che $u(AX_{-1})$, ma non è detto che questi prodotti siano uguali.

In condizioni più generali delle nostre vale un criterio necessario e sufficiente perchè valga la (2.2), che qui riportiamo, sebbene nel seguito non avremo a farvi riferimento: *se esistono i prodotti uA ed AX_{-1} , condizione necessaria e sufficiente perchè valga la (2.2) è che: a) esista $u(AX_{-1})$; b) fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario ed m_0 intero ad arbitrio, si possano determinare un $m > m_0$ ed un n tali che per $v > n$, si abbia:*

$$(3.2) \quad |[(0 | \eta'_m) A] (\xi_v | 0)_{-1}| < \varepsilon^{(9)}$$

Senza riferirci a questo criterio osserviamo anzi tutto che, se è soddisfatta la condizione di LANDAU ed u (oppure x) ha solo un numero finito di coordinate non nulle, vale la (2.2): cioè

$$(4.2) \quad [(\eta_n | 0) A] x_{-1} = (\eta_n | 0) (Ax_{-1})^{(10)}$$

infatti il secondo membro è la somma di un numero finito di serie assolutamente convergenti.

(9) BROMWICH T. J. P.A.: The inversion of a repeated infinite integral [Proc. London Math. Soc. (II) 1. (1904) pag 183].

(10) A norma della condizione precedente, la (4.2) vale nell'ipotesi più generale che esistano Ax_{-1} ed $u(Ax_{-1})$; basta infatti prendere in b) l' m in modo che sia $\eta'_m = 0$.

Dopo di che si dimostra subito che: se u è tale che in $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}} \{(\eta_n|0)A\}$ converge debolmente (ad uA), vale la (2.2) per ogni x di \mathcal{S}_p tale che Ax_{-1} sia un punto di \mathcal{S}_q . Infatti, per il n° 3, se x appartiene ad \mathcal{S}_p , si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(\eta_n|0)A]x_{-1} = (uA)x_{-1};$$

d'altra parte, se Ax_{-1} è un punto di \mathcal{S}_q , si ha, per definizione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n|0)(Ax_{-1}) = u(Ax_{-1});$$

tenendo presente la (4.2), dal confronto dei primi membri risulta senz'altro verificata la (2.2).

5. - Da quanto precede scaturisce l'interesse, ai fini del calcolo di matrici, di considerare quelle matrici A tali che per ogni x di \mathcal{S}_p , Ax_{-1} è un punto di \mathcal{S}_q , o tali che per ogni punto u di $\mathcal{S}_{q'}$, uA è un punto di $\mathcal{S}_{p'}$. Diciamo, nel primo caso, che A trasforma dalla sinistra l' \mathcal{S}_p in punti di \mathcal{S}_q , nel secondo caso, che A trasforma dalla destra l' $\mathcal{S}_{q'}$ in punti di $\mathcal{S}_{p'}$.

Valgono le seguenti proprietà:

a) Se A trasforma dalla sinistra l' \mathcal{S}_p in punti di \mathcal{S}_q , essa trasforma dalla destra l' $\mathcal{S}_{\frac{q}{q-1}}$ in punti di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$.

Osserviamo infatti che le colonne di A sono i punti di \mathcal{S}_q , trasformati dalla sinistra mediante A delle colonne $e^{(i)}$ della matrice identica I , e le righe di A sono, per il teorema di LANDAU, punti dell' $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$. Allora per ogni x di \mathcal{S}_p esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(\eta_n|0)A]x_{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n|0)(Ax_{-1}) = u(Ax_{-1}),$$

quindi, a norma del n° 3, la successione $\{(\eta_n|0)A\}$ converge debolmente in $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ al punto $v = uA$, come si voleva dimostrare.

Una matrice che gode questa proprietà sarà detta, nel seguito, *hilbertiana di tipo (p, q)* . Per il fatto che, qualunque sia u di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$, $\{(\eta_n|0)A\}$ converge debolmente, e che Ax_{-1} è un punto di \mathcal{S}_q per ogni x di \mathcal{S}_p , segue dal n° precedente:

b) Se A è *hilbertiana di tipo (p, q)* ed U, X sono due matrici tali che le righe di U sono punti di $\mathcal{S}_{\frac{q}{q-1}}$ e le colonne di X sono punti di \mathcal{S}_p , vale la proprietà associativa del prodotto UAX .

c) Una matrice A *hilbertiana di tipo (p, q)* , trasforma successioni debolmente convergenti in successioni debolmente convergenti.

Se infatti x è il limite debole di $\{x^{(n)}\}$ in \mathcal{S}_p , per la condizione necessaria del n. 3, esiste per ogni u di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u A) x_{-1}^{(n)} = (u A) x_{-1};$$

applicando ad ambo i membri la proprietà associativa del prodotto, esiste anche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u (A x_{-1}^{(n)}) = u (A x_{-1})$$

onde, per la condizione sufficiente dello stesso n. 3, $\{A x_{-1}^{(n)}\}$ converge debolmente ad $A x_{-1}$.

d) *Teorema di HELLINGER e TOEPLITZ generalizzato: se A è hilbertiana di tipo (p, q) , esistono due numeri finiti M_1 ed M_2 , tali che per ogni x di \mathcal{S}_p ed ogni u di $\mathcal{S}_{\frac{q}{q-1}}$, si abbia:*

$$(5.2) \quad N_q (A x_{-1})^{\frac{1}{q}} \leq M_1 \cdot N_p (x)^{\frac{1}{p}}$$

$$(6.2) \quad N_{\frac{p}{p-1}} (u A)^p \leq M_2 \cdot N_{\frac{q}{q-1}} (u)^q.$$

Se infatti la (5.2) non valesse, si potrebbe costruire una successione $\{x^{(n)}\}$ di punto di \mathcal{S}_p , per la quale fosse:

$$N_p (x^{(n)}) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_q (A x_{-1}^{(n)}) = \infty;$$

per il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS si estrarrebbe da $\{x^{(n)}\}$ una successione $\{x^{(n_i)}\}$ convergente debolmente ad un punto x di \mathcal{S}_p , e si avrebbe ancora $\lim_{i \rightarrow \infty} \{A x_{-1}^{(n_i)}\} = \infty$, il che è assurdo per la c). In modo analogo si dimostra la (6.2).

e) Se A è hilbertiana di tipo (p, q) segue dalla (8.1) e dalla (5.2), (ovvero dalla (8.1) e dalla (6.2)), che:

$$(7.2) \quad |u A x_{-1}| \leq N_{\frac{q}{q-1}} (u)^{\frac{q-1}{q}} \cdot N_q (A x_{-1})^{\frac{1}{q}} \leq M_1 \cdot N_{\frac{q}{q-1}} (u)^{\frac{q-1}{q}} \cdot N_p (x)^{\frac{1}{p}}.$$

Viceversa, da questa si ritorna sia alla (5.2) che alla (6.2): basta, con le posizioni del n. 3, porre in essa:

$$u_{-1} = \tilde{A}x_{-1} \quad \text{oppure} \quad x = u\tilde{A}$$

e tener presente la (20.1).

Se p (oppure q) è uguale ad 1, ovvero è ∞ , le formule precedenti vanno, come al solito, modificate, ponendovi uguali ad 1 i corrispondenti esponenti a cui compaiono le norme: con ciò le considerazioni precedenti valgono sino alla (7.2); si ritorna da questa alla (5.2) oppure alla (6.2), nel caso ad es. che Ax_{-1} appartenga ad \mathcal{S}_∞ , sostituendo nella (7.2), che in tal caso diventa:

$$|uAx_{-1}| \leq M \cdot N_1(u) \cdot N_p(x)^{\frac{1}{p}}$$

le righe $e^{(i)}$ della matrice identica I , al posto di u ; essendo $N_1(e^{(i)}) = 1$, segue senz'altro che:

$$N_\infty(Ax_{-1}) \leq M \cdot N_p(x)^{\frac{1}{p}}.$$

È opportuno osservare che se A è hilbertiana di tipo (p, q) , lo è anche di tipo (p, q') e (p', q) con $p' < p$ e $q' > q$; quindi la (5.2) e (6.2) come pure la (7.2) sono relative al tipo (p, q) fissato per A .

Segue da e) che gli estremi inferiori dei numeri M_1 e M_2 che compaiono nelle (5.2) e (6.2) coincidono in un unico numero che indicheremo con $M_A^{(p,q)}$ e che chiameremo il *limite superiore* di tipo (p, q) della matrice A

6. — È facile verificare:

a) Se A e B sono due matrici hilbertiane dello stesso tipo (p, q) , la loro somma $A+B$ è ancora hilbertiana di tipo (p, q) e si ha:

$$(8.2) \quad M_{A+B}^{(p,q)} \leq M_A^{(p,q)} + M_B^{(p,q)}.$$

Infatti $(A+B)x_{-1} = Ax + Bx_{-1}$ è un punto di \mathcal{S}_q , per ogni x di \mathcal{S}_p ; inoltre

$$N_q((A+B)x_{-1})^{\frac{1}{q}} \leq N_q(Ax_{-1})^{\frac{1}{q}} + N_q(Bx_{-1})^{\frac{1}{q}} \leq (M_A^{(p,q)} + M_B^{(p,q)}) \cdot N_p(x)^{\frac{1}{p}}.$$

b) Se A è hilbertiana (p, q) e B è hilbertiana di tipo (q', r) con $q' \leq q$, il prodotto BA esiste ed è una matrice hilbertiana di tipo (p, r) , per la quale:

$$(9.2) \quad M_{BA}^{(p,r)} \leq M_A^{(q',r)} \cdot M_B^{(p,q)}.$$

Infatti $B(Ax_{-1}) = (BA)x_{-1}$ è un punto di \mathcal{S}_r per ogni x di \mathcal{S}_p ; inoltre

$$N_r((BA)x_{-1})^{\frac{1}{r}} \leq M_B \cdot N_q(Ax_{-1})^{\frac{1}{q}} \leq M_B \cdot M_A N_p(x)^{\frac{1}{p}}.$$

§ 3. Il problema dell'inversione.

7. Sia

$$(1.3) \quad Ax_{-1} = y_{-1}$$

un sistema lineare di infinite equazioni nelle infinite incognite x_i ; se le righe di A sono punti di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ per le condizioni di LANDAU (n. 4) noi cercheremo le soluzioni di (1.3), se esistono, che sono punti di \mathcal{S}_p .

Se A ammette una inversa a destra B la quale sia hilbertiana di tipo (r, p) , si verifica subito che sono soluzioni di (1.3) i punti $x_{-1} = By_{-1}$ di \mathcal{S}_p , con y punto qualunque di \mathcal{S}_r : infatti per la *b*) del n. 5:

$$A(By_{-1}) = (AB)y_{-1} = y_{-1}.$$

Se poi le colonne di A sono linearmente indipendenti in \mathcal{S}_p , cioè non esiste nessun punto r diverso dall'origine per il quale sia $Ax_{-1} = 0$, questa soluzione è unica in \mathcal{S}_p .

Vale il seguente teorema: *se le righe di A appartengono ad $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ ⁽¹¹⁾, e le colonne di A sono linearmente indipendenti, condizione necessaria e sufficiente perchè A ammette una inversa a destra B la quale sia hilbertiana di tipo (r, p) , è che esistano un $r (\geq 1)$ un $p' \leq p, (p' \geq 1)$ ed un $M > 0$, tali che valga la:*

$$(2.3) \quad N_{\frac{r}{r-1}}(\mu_n | 0)^{\frac{r-1}{r}} \leq M N_{\frac{p'}{p'-1}}[(\mu_n | 0) A]^{\frac{p'-1}{p'}}.$$

quali che siano n e V^n -complesso μ_n .

La condizione è necessaria: infatti se $AB = I$ e B è hilbertiana di tipo (r, p) , esiste per la (6.2) un M tale che:

$$(3.3) \quad N_{\frac{r}{r-1}}(uB)^{\frac{r-1}{r}} \leq M N_{\frac{p}{p-1}}(u)^{\frac{p-1}{p}},$$

⁽¹¹⁾ Se $\frac{p}{p-1}$ è l'infinito, supporremo anche che per ogni i , $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ik} = 0$ (cfr. (48)).

qualunque sia il punto u di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$. Basta prendere $u = (\mu_n | 0) A$, ed osservare che, a norma della (4.2),

$$[(\mu_n | 0) A] B = (\mu_n | 0) (A B) = (\mu_n | 0)$$

per ottenere la (2.3) dalla (3.3).

Se viceversa è verificata la (2.3), detto y un punto qualunque di \mathcal{S}_r , si ha dalla (8.1):

$$(4.3) \quad |(\mu_n | 0) y_{-1}| \leq N_{\frac{r}{r-1}} (\mu_n | 0)^{\frac{p-1}{r}} \cdot N_r (y)^{\frac{1}{p}} \leq M \cdot N_r (y)^{\frac{1}{r}} \cdot N_{\frac{p'}{p'-1}} ((\mu_n | 0) A)^{\frac{p'-1}{p'}}$$

D'altra parte vale il seguente criterio di risolubilità, dovuto ad F. RIESZ: *se le righe di A sono punti di $\mathcal{S}_{\frac{p}{p-1}}$ ($p > 1$), condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (1.3) ammetta almeno una soluzione x appartenente ad \mathcal{S}_p e per la quale*

$$(5.3) \quad N_p (x)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

è che valga la:

$$(6.3) \quad |(\mu_n | 0) y_{-1}| \leq M N_{\frac{p}{p-1}} ((\mu_n | 0) A)^{\frac{p-1}{p}}$$

quali che siano n e ν_n -complesso μ_n .

Inoltre se questa (6.3) è soddisfatta, esiste ed è unica la soluzione di norma minima. ⁽¹²⁾

⁽¹²⁾ Per questo criterio, vedi F. RIESZ op. cit. (3) a pag. 61. Per comodità del lettore, ne riportiamo i punti salienti della dimostrazione: La necessità segue dalla (1.3)

moltiplicando a sinistra per $(\mu_n | 0)$ ed osservando che, se $N_p (x)^{\frac{1}{p}} \leq M$, si ha:

$$|(\mu_n | 0) y_{-1}| = |[(\mu_n | 0) A] \cdot x_{-1}| \leq N_p (x)^{\frac{1}{p}} \cdot N_{\frac{p}{p-1}} ((\mu_n | 0) A)^{\frac{p-1}{p}} \leq M \cdot N_{\frac{p}{p-1}} ((\mu_n | 0) A)^{\frac{p-1}{p}}$$

Se viceversa vale la (6.3), si considera, per un dato n , il massimo di $|(\mu_n | 0) y_{-1}|^p$ al variare di μ_n sotto la condizione

$$(1) \quad N_{\frac{p}{p-1}} ((\mu_n | 0) A)^{\frac{p-1}{p}} = 1.$$

Detta $(\xi_n | 0)$ la ridotta n -ma di y ed $A_{(n)}$ la matrice formata dalle prime n righe di A , tale massimo viene raggiunto quando μ_n soddisfa l'equazione:

I risultati restano invariati nei casi limite $p = 1$ ovvero p infinito, salvo le solite modifiche per gli esponenti cui compaiono le norme. Solo che per $p = 1$ è necessario limitarsi alle matrici A per le quali le righe sono punti di \mathcal{S}_∞ le cui coordinate a_{ik} tendono a zero per k tendente ad infinito ⁽¹³⁾.

Per la (4.3) l'equazione (1.3) ammette dunque per ogni y di \mathcal{S}_r una soluzione x di $\mathcal{S}_{p'}$ avente norma minima e tale che:

$$(7.3) \quad N_{p'}(x)^{\frac{1}{p'}} \leq M N_r(y)^{\frac{1}{r}}.$$

Siccome le colonne di A sono linearmente indipendenti, la (1.3) non ammette in \mathcal{S}_p altre soluzioni: se pertanto y' e y'' sono due punti di \mathcal{S}_r ed x', x'' le corrispondenti soluzioni di (1.3), per la soluzione $x' - x''$ di (1.3) corrispondente ad $y' - y''$, dovrà aversi a norma delle (7.3):

$$(8.3) \quad N_{p'}(x' - x'')^{\frac{1}{p'}} \leq M N_r(y' - y'')^{\frac{1}{r}}.$$

La matrice B le cui colonne sono le soluzioni di (1.3) corrispondenti alle colonne $e^{(i)}$ della matrice identica I , è tale che

$$A B = I,$$

dunque è inversa a destra della A ; dimostriamo che è hilbertiana di tipo (r, p) .

Infatti le colonne di B sono punti di $\mathcal{S}_{p'}$, come particolari soluzioni della (1.3); se y è un punto qualunque di \mathcal{S}_r ed $y^{(n)} = (\xi_n | 0)$ è la sua ridotta n -ma, allora $x_{-1}^{(n)} = B y_{-1}^{(n)}$ è un punto di $\mathcal{S}_{p'}$, e si ha, per la (4.2):

$$A x_{-1}^{(n)} = (A B) y_{-1}^{(n)} = y_{-1}^{(n)}.$$

$$A_{(n)} \cdot (\mu_n | 0) y_{-1} \cdot [\widetilde{(\mu_n | 0) A}]_{-1} = \xi_{n-1}$$

dove $[\widetilde{(\mu_n | 0) A}]$ è il coniugato di $(\mu_n | 0) A$, secondo la posizione (19.1).

Quindi $x^{(n)} = (\mu_n | 0) y_{-1} [\widetilde{(\mu_n | 0) A}]$ soddisfa le prime n equazioni della (1.3); si dimostra facilmente che $N_p(x^{(n)})^{\frac{1}{p}} \leq M$ e che $x^{(n)}$ è la soluzione (unica) delle prime n equazioni di (1.3) avente norma p minima. Dopo di che si prova che $\{x^{(n)}\}$ converge ad un punto x^* di \mathcal{S}_p che soddisfa la (1.3) e che fra tutte le soluzioni è quella (unica) di norma minima.

⁽¹³⁾ RIESZ. F. Op. cit. (3) a) pag. 73.

Se x è la soluzione di (1.3) corrispondente ad y , sarà anche, a norma della (8.3):

$$N_{p'}(x - x^{(n)})^{\frac{1}{p'}} = N_{p'}(x - B y_{-1}^{(n)})^{\frac{1}{p'}} \leq M N_r(y - y^{(n)})^{\frac{1}{r}}.$$

Passando al limite per n tendente ad infinito, risulta $B y_{-1} = x_{-1}$ con x punto di $\mathcal{S}_{p'}$, quindi di \mathcal{S}_p ; il teorema è così dimostrato.

Se $p = 2$, le soluzioni di norma minima della (1.3) si comportano linearmente rispetto ai termini noti: cioè se x' e x'' sono le soluzioni di norma minima corrispondenti ad y' ed y'' , $\alpha x' + \beta x''$ è la soluzione di norma minima corrispondente ad $\alpha y' + \beta y''$. Per $p = 2$ risulta allora assicurata l'esistenza dell'inversa a destra anche se le colonne di A non sono linearmente indipendenti. (14).

Se A è hilbertiana di tipo (p, q) ed ammette una inversa a destra B di tipo (r, p) ed una inversa a sinistra C di tipo (q, s) , si ha

$$(C A) B = C (A B)$$

e quindi $C = B$. A ammette dunque un'unica inversa A^{-1} che è di tipo (q, p) . Dal teorema precedente segue facilmente che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice A , hilbertiana di tipo (p, q) , ammetta un'unica inversa A^{-1} (hilbertiana di tipo (q, p)) è che esistano due numeri m ed m' tali che per ogni x di \mathcal{S}_p ed ogni u di $\mathcal{S}_{\frac{q}{q-1}}$ si abbia:

$$(9.3) \quad N_{\frac{p}{p-1}}(u A)^{\frac{p-1}{p}} \geq m \cdot N_{\frac{q}{q-1}}(u)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$(10.3) \quad N_q(A x_{-1})^{\frac{1}{q}} \geq m' \cdot N_p(x)^{\frac{1}{p}}.$$

(14) JULIA G. Op cit (1) o pag. 131.