

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FERNANDO BERTOLINI

**Sopra una classe di funzioni armoniche in uno strato cilindrico**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 4, n° 1-2 (1950), p. 101-129*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1950\\_3\\_4\\_1-2\\_101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_1-2_101_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SOPRA UNA CLASSE DI FUNZIONI ARMONICHE IN UNO STRATO CILINDRICO

di FERNANDO BERTOLINI (Roma)

Il presente lavoro si divide in tre parti; nella prima si stabiliscono alcune proprietà integrali delle funzioni armoniche in uno strato cilindrico (di una certa classe) ricavandone una espressione generale che permette di dare delle formole risolutive per i problemi al contorno; nella seconda si stabiliscono alcuni lemmi che vengono sfruttati nella terza per la dimostrazione di una formola di decomposizione alla POINCARÉ, e per verificare l'armonicità, nell'interno dello strato cilindrico, delle funzioni fornite dalle predette formole risolutive: un ulteriore esame della questione sarebbe necessario per verificare che tali funzioni soddisfano le condizioni al contorno.

## I

1. — Nello spazio ordinario sia istituito un sistema di coordinate cilindriche  $(\varrho, \vartheta, z)$ ; chiamerò *strato cilindrico* di raggi  $r$  ed  $R$  ( $0 \leq r < R \leq +\infty$ ), avente come asse l'asse  $z$ , il campo  $T_{r,R}$  dello spazio definito dalla limitazione  $r < \varrho < R$ ; con  $S_{r,R}$  indicherò il campo definito dalla stessa limitazione nel piano cartesiano  $(\varrho, z)$ , con  $I_{r,R}$  l'intervallo aperto  $(r, R)$ .

Di ogni funzione  $u(\varrho, \vartheta, z)$  armonica in  $T_{r,R}$ , considero le trasformate

$$v_h(\varrho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta \quad [h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots],$$

le quali risultano (per ogni  $\varrho \in I_{r,R}$ ) funzioni continue, derivabili due volte rispetto a  $\varrho$  ed a  $z$ , con derivate continue, ed inoltre godono delle proprietà

$$\frac{\partial^s}{\partial \varrho^s} v_h(\varrho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} \frac{\partial^s}{\partial \varrho^s} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta$$

$$(1) \dots \frac{\partial^s}{\partial z^s} v_h(\varrho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} \frac{\partial^s}{\partial z^s} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta \quad [s = 0, 1, 2]$$

$$(ih)^s v_h(\varrho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} \frac{\partial^s}{\partial \vartheta^s} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta.$$

d'immediata dimostrazione.

Inversamente, com'è ben noto,

$$(2) \dots u(\varrho, \vartheta, z) = \sum_{-\infty h}^{+\infty} e^{ih\vartheta} v_h(\varrho, z).$$

convergenza la serie uniformemente rispetto a  $\vartheta$ , una volta fissati  $\varrho < I_{r,R}$  e  $z$ .

Introdotta l'operatore differenziale  $E_h \equiv \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{h^2}{\varrho^2}$ , le funzioni  $v_h(\varrho, z)$  sono integrali della

$$(3_h) \dots E_h[v] = 0, \quad [h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots]$$

definite nella striscia  $S_{r,R}$ ; infatti, poichè in coordinate cilindriche è

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},$$

in base alle (1) abbiamo, per ogni  $\varrho < I_{r,R}$ ,

$$E_h[v_h(\varrho, z)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} \Delta_2 u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta = 0.$$

Ciò premesso, ogni problema al contorno relativo alla equazione  $\Delta_2 u = 0$  nello strato cilindrico  $T_{r,R}$ , si trasforma, per ogni intero  $h$ , in altrettanti problemi al contorno relativi alla equazione  $E_h[v] = 0$  nella striscia  $S_{r,R}$ .

Siano assegnati: 1) un aggregato  $U$  di funzioni armoniche in  $T_{r,R}$ ; 2) due funzioni  $f_1(\vartheta, z)$  ed  $f_2(\vartheta, z)$ , di norma sommabile rispetto a  $\vartheta$  nell'intervallo  $(-\pi, +\pi)$ , per ogni fissato  $z$ ; 3) due funzionali lineari  $L_1$  ed  $L_2$

eliminanti  $\varrho$ , definiti per le funzioni di  $U$  e le loro trasformate, tali inoltre che

$$(4) \dots L_s [v_h(\varrho, z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} L_s [u(\varrho, \vartheta, z)] d\vartheta \quad [s = 1, 2; h = 0, \pm 1, \dots]$$

riuscendo  $L_s [u(\varrho, \vartheta, z)]$  di norma sommabile rispetto a  $\vartheta$  nell'intervallo  $(-\pi, +\pi)$ , per ogni fissato  $z$ .

Il problema si enuncia: *Costruire una funzione di  $U$  verificante le equazioni*

$$(5) \dots L_s [u(\varrho, \vartheta, z)] = f_s(\varrho, z) \quad [s = 1, 2].$$

Se  $u(\varrho, \vartheta, z)$  è una soluzione del problema, posto

$$(6) \dots \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} f_s(\vartheta, z) d\vartheta = g_{sh}(z) \quad [s = 1, 2; h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots],$$

avremo per le sue trasformate le condizioni

$$(7) \dots L_s [v_h(\varrho, z)] = g_{sh}(z),$$

la funzione  $u(\varrho, \vartheta, z)$  ha quindi lo sviluppo (2), dove  $v_h(\varrho, z)$  è un integrale della (3<sub>h</sub>) definito nella striscia  $S_{r,R}$  e verificante le (7).

Nei due numeri che seguono studieremo la equazione (3<sub>h</sub>) al fine di risolvere questo problema.

2. — Chiamo  $\{v_h\}$  la classe degli integrali della (3<sub>h</sub>) definiti nella striscia  $S_{r,R}$ , ivi continue con le derivate  $\frac{\partial}{\partial \varrho} v_h, \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} v_h, \frac{\partial}{\partial z} v_h, \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_h$ , che godono delle proprietà seguenti:

a)  $v_h(\varrho, z)$  e  $\frac{\partial}{\partial z} v_h(\varrho, z)$  sono infinitesime al diverger di  $|z|$ , uniformemente al variar di  $\varrho$  in ogni intervallo contenuto in  $I_{r,R}$ ;

b) per ogni numero reale  $\alpha \neq 0$ , gli integrali principali di CAUCHY

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(\varrho, z) dz, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} \frac{\partial}{\partial z} v_h(\varrho, z) dz, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} v_h(\varrho, z) dz$$

convergono per  $\varrho < I_{r,R}$ . il primo d'essi uniformemente in ogni intervallo contenuto in  $I_{r,R}$ .

Detto  $E_h^*$  l'operatore differenziale  $\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-h^2}{\varrho^2}$ , aggiunto di  $E_h$ , e detto  $v_h^*(\varrho, z)$  un particolare integrale della  $E_h^* = 0$  definito in  $S_{r,R}$ , avremo:

$$\begin{aligned} v_h^* E_h[v_h] - v_h E_h^*[v_h^*] &\equiv \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ v_h^* \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h - v_h \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h^* \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ v_h^* \frac{\partial}{\partial z} v_h - v_h \frac{\partial}{\partial z} v_h^* \right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ \frac{v_h v_h^*}{\varrho} \right\} = 0 \end{aligned}$$

identicamente in  $S_{r,R}$ .

Preso il dominio rettangolare  $D$  contenuto in  $S_{r,R}$ , di punti estremi  $(r', -z')$  ed  $(R', +z')$  [dove  $r < r' < R' < R$ ,  $z' > 0$ ], avremo

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D [v_h^* E_h(v_h) - v_h E_h^*(v_h^*)] d\varrho dz = \\ &= \int_{r'}^{R'} \left[ v_h^*(\varrho, z') \frac{\partial}{\partial z} v_h(\varrho, z') - v_h(\varrho, z') \frac{\partial}{\partial z} v_h^*(\varrho, z') \right] d\varrho - \\ &- \int_{r'}^{R'} \left[ v_h^*(\varrho, -z') \frac{\partial}{\partial z} v_h(\varrho, -z') - v_h(\varrho, -z') \frac{\partial}{\partial z} v_h^*(\varrho, -z') \right] d\varrho + \\ &+ \frac{1}{R'} \int_{-z'}^{+z'} v_h(R', z) v_h^*(R', z) dz - \frac{1}{r'} \int_{-z'}^{+z'} v_h(r', z) v_h^*(r', z) dz + \\ &+ \int_{-z'}^{+z'} \left[ v_h^*(R', z) \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(R', z) - v_h(R', z) \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h^*(R', z) \right] dz - \\ &- \int_{-z'}^{+z'} \left[ v_h^*(r', z) \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(r', z) - v_h(r', z) \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h^*(r', z) \right] dz, \end{aligned}$$

utilizzando le formule di riduzione del GREEN.

Si prenda ora  $v_h^*(\varrho, z) = e^{-iaz} \varrho I_h(\alpha \varrho)$  <sup>(1)</sup>, e si avrà, passando al limite per  $|z|$  divergente:

---

<sup>(1)</sup>  $I_h(\alpha \varrho) = [I_h(t)]_{t=\alpha \varrho}$ ,  $I_h(t)$  essendo la funzione modificata di BESSEL di prima specie ed ordine  $h$ ; vedi parte seconda.

$$(8) \dots \text{cost.} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ v_h^*(\varrho, z) \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(\varrho, z) - v_h(\varrho, z) \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h^*(\varrho, z) \right] dz + \\ + \frac{1}{\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} v_h(\varrho, z) v_h^*(\varrho, z) dz,$$

od anche esplicitamente

$$(9) \dots \varrho I_h(\alpha \varrho) \frac{d}{d\varrho} w_h(\alpha, \varrho) - w_h(\alpha, \varrho) \frac{d}{d\varrho} [\varrho I_h(\alpha \varrho)] + w_h(\alpha, \varrho) I_h(\alpha \varrho) = -b(\alpha),$$

dove  $b_h(\alpha)$  è funzione della sola  $\alpha$ , e si è posto

$$w_h(\alpha, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} v_h(\varrho, z) dz.$$

Il passaggio a limite è lecito in base alla ipotesi (a), in virtù della quale, pure, si annullano gli integrali rispetto a  $\varrho$ ; inoltre, per la (b), è

$$\frac{d}{d\varrho} w_h(\alpha, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(\varrho, z) dz.$$

Ponendo

$$y(\varrho) = \frac{w_h(\alpha, \varrho)}{\varrho I_h(\alpha \varrho)}, \text{ ed } f(\varrho) = -\frac{b_h(\alpha)}{\varrho^2 I_h^2(\alpha \varrho)},$$

la (9) si scrive

$$y'(\varrho) + \frac{1}{\varrho} y(\varrho) = f(\varrho),$$

il cui integral generale è

$$y = \frac{1}{\varrho} \left[ a_h(\alpha) + \int \frac{f(t) dt}{t} \right],$$

donde, col cambiamento di variabili  $t = \frac{u}{\alpha}$ , e sostituendo ad  $y$  ed  $f$  le loro espressioni

$$(10) \dots w_h(\alpha, \varrho) = a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) \int_{\alpha \varrho}^{\infty} \frac{du}{u I_h^2(u)} = \\ = a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) \cdot K_h(\alpha \varrho) \text{ (}^2\text{)}.$$

(<sup>2</sup>)  $K_h(\alpha \varrho) = [K_h(t)]_{t=\alpha \varrho}$ ,  $K_h(t)$  essendo la funzione modificata di BESSEL di seconda specie ed ordine  $h$ ; vedi parte seconda.

Se la proprietà (b) sussiste anche per  $\alpha=0$ , allora ponendo  $v_h^*(\varrho, z) = \varrho^{h+1}$  anzichè  $= e^{-i\alpha z} \varrho I_h(\alpha \varrho)$ , nel ragionamento che precede, otterremo in luogo della (10) la

$$(11) \dots \begin{aligned} w_h(0, \varrho) &= a_h^* \varrho^h + b_h^* \varrho^{-h} & [h \neq 0] \\ w_0(0, \varrho) &= a_0^* + b_0^* \log \varrho & [h = 0]. \end{aligned}$$

Concludendo, ogni funzione di  $\{v_h(\varrho, z)\}$  verifica le equazioni integrali

$$(12) \dots \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} v_h(\varrho, z) dz &= a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) K_h(\alpha \varrho) & [\alpha \neq 0] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_h(\varrho, z) dz &= a_h^* \varrho^h + b_h^* \varrho^{-h} & [h \neq 0] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\varrho, z) dz &= a_0^* + b_0^* \log \varrho, \end{aligned}$$

dove  $a_h^*, b_h^*$  son costanti,  $a_h(\alpha)$  e  $b_h(\alpha)$  funzioni della sola  $\alpha$ ; le ultime due (12) sussistono solo se la (b) è valida anche per  $\alpha=0$ .

3. — Riprendiamo ora in esame il problema al contorno relativo alla (3<sub>h</sub>) con le condizioni (7) nella striscia  $S_{r,R}$ .

Sia assegnato un subaggregato  $V_h$  di  $\{v_h(\varrho, z)\}$ ; siano  $L_1$  ed  $L_2$  due funzionali lineari eliminanti  $\varrho$ , definiti per le funzioni di  $V_h$ , nonchè per  $\varrho^h, \log \varrho, I_h(\alpha \varrho), K_h(\alpha \varrho)$ , tali che le funzioni  $e^{-i\alpha z} L_s[v_h]$  siano ad integrale principale convergente nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ , riuscendo

$$L_s \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha z} v_h(\varrho, z) dz \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} L_s[v_h] dz,$$

per ogni  $\alpha$  reale non nullo<sup>(3)</sup>; sian date infine due funzioni  $g_{1h}(z)$  e  $g_{2h}(z)$ , di cui convergano gli integrali  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} g_{sh}(z) dz$  per ogni  $\alpha$  reale non nullo<sup>(3)</sup>.

(<sup>3</sup>) Eventualmente anche per  $\alpha=0$ , se per le funzioni di  $V_h$  la proprietà (b) è valida anche per  $\alpha=0$ .

Il problema proposto si enuncia: *Costruire una funzione di  $V_h$  verificante le equazioni*

$$(7) \dots \quad L_s [v_h(\varrho, z)] = g_{sh}(z) \quad [s = 1, 2].$$

Se questo problema ha soluzione, posto

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} g_{sh}(z) dz = \gamma_{sh}(\alpha), \text{ eventualmente } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{sh}(z) dz = \gamma_{sh}^*,$$

$$p_{sh}(\alpha) = L_s [I_h(\alpha \varrho)] \text{ per } \alpha \neq 0, \text{ eventualmente } p_{sh}^* = L_s [\varrho^h] \text{ per } \alpha = 0,$$

$$q_{sh}(\alpha) = L_s [K_h(\alpha \varrho)] \text{ per } \alpha \neq 0, \text{ eventualmente } q_{sh}^* = L_s [\varrho^{-h}] \text{ per } \alpha = 0, h \neq 0,$$

$q_{s0}^* = L_s [\log \varrho]$ , con referenza alle (12) avremo le seguenti equazioni lineari nelle incognite  $a_h(\alpha)$ ,  $b_h(\alpha)$ ,  $a_h^*$ ,  $b_h^*$ ,

$$p_{sh}(\alpha) a_h(\alpha) + q_{sh}(\alpha) b_h(\alpha) = \gamma_{sh}(\alpha) \quad [s = 1, 2; \alpha \neq 0],$$

(13)...

$$p_{sh}^* a_h^* + q_{sh}^* b_h^* = \gamma_{sh}^* \quad [s = 1, 2; \alpha = 0].$$

Se, per ogni  $\alpha \neq 0$ , le (13) son compatibili, riuscirà noto il secondo membro della (12<sub>1</sub>), e sotto ulteriori ben note condizioni per  $v_h(\varrho, z)$  avremo che la soluzione cercata non può aver che l'espressione

$$(14) \dots \quad v_h(\varrho, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} [a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) K_h(\alpha \varrho)] d\alpha.$$

4. — Torniamo ora al problema al contorno per l'equazione  $\Delta_2 u = 0$  nel campo  $T_{r,R}$  posto al n. 1, pag. 2.

Sia  $V_h$  il subaggregato di  $\{v_h(\varrho, z)\}$  delle funzioni rappresentabili (per ciascun fissato  $\varrho < I_{r,R}$ ) con un integrale bilatero di FOURIER; siano  $L_1$  ed  $L_2$  due funzionali lineari soddisfacenti alle condizioni poste ad essi nei nn. 1 e 3; siano  $f_1(\vartheta, z)$  ed  $f_2(\vartheta, z)$  due funzioni soddisfacenti le ipotesi poste ad

esse nel n. 1, le cui trasformate  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i h \vartheta} f_s(\vartheta, z) d\vartheta$ , che chiamerò  $g_{sh}(z)$ ,

soddisfino le ipotesi poste per le funzioni di questo nome al n. 3.



Si ha il teorema di unicità:

Detto  $U$  l'aggregato delle funzioni armoniche in  $T_{r,R}$ , le cui trasformate  $v_h(\varrho, z)$  appartengono a  $V_h [h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots]$ , se esiste una funzione di  $U$  che verifichi le (7), essa è data dalla

$$(15) \dots \quad u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty h}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + az)} [a_h(\alpha) I_h(\alpha\varrho) + b_h(\alpha) K_h(\alpha\varrho)] d\alpha,$$

dove  $a_h(\alpha)$  e  $b_h(\alpha)$  sono soluzioni del sistema (13<sub>1</sub>); se il sistema (13<sub>1</sub>) ha una unica soluzione, il problema posto non ne ha più d'una.

5. — Prima di applicare quanto sin qui osservato ai tre classici problemi di DIRICHLET, di NEUMANN e misto, ricaviamo dalle (12) due semplici proprietà delle funzioni di  $U$  per cui è valida la (12<sub>3</sub>).

Dalla (12<sub>3</sub>), derivando sotto il segno rispetto a  $\varrho$  troviamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \varrho} v_0(\varrho, z) dz = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta dz = \frac{b_0^*}{\varrho},$$

cioè

$$(16) \dots \quad \int_{C(\varrho)} \frac{d u}{d n} d\sigma = (\sqrt{2\pi})^3 b_0^*$$

dove  $C(\varrho)$  è una superficie cilindrica coordinata di raggio  $\varrho < I_{r,R}$ , di cui  $d\sigma$  è l'elemento d'area, e  $d/dn$  rappresenta la derivazione normale esterna.

Quindi il flusso uscente attraverso la superficie  $C(\varrho)$  non dipende da  $\varrho$ . Esso può esprimersi mediante i valori assunti da  $u(\varrho, \vartheta, z)$  per  $\varrho = r'$ ,  $\varrho = R'$  ( $r < r' < R' < R$ ), poichè dalla (12<sub>3</sub>) incrementando ad ambo i membri tra  $r'$  ed  $R'$  ottengo

$$(16') \dots \quad (\sqrt{2\pi})^3 b_0^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{u(R', \vartheta, z) - u(r', \vartheta, z)}{\log R' - \log r'} d\vartheta dz;$$

per  $a_0^*$  si ottiene invece

$$(17) \dots \quad (\sqrt{2\pi})^3 a_0^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{u(r', \vartheta, z) \log R' - u(R', \vartheta, z) \log r'}{\log R' - \log r'} d\vartheta dz.$$

Perchè il flusso sia nullo occorre e basta che sia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} u(R', \vartheta, z) d\vartheta dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} u(r', \vartheta, z) d\vartheta dz,$$

cioè che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta dz$$

non dipenda da  $\varrho$ .

Osservo ancora che, ove la funzione  $u(\varrho, \vartheta, z)$  sia armonica per  $\varrho < R$ , convergendo l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\varrho, z) dz$  uniformemente al variar di  $\varrho$  in un intorno dello zero, allora

$$(18) \dots \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta dz \equiv \text{cost.} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, \vartheta, z) dz.$$

5. — Consideriamo ora il problema di DIRICHLET.

Sia  $V_h^{(D)}$  la classe delle funzioni di  $V$  per cui l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z} v_h(\varrho, z) dz$  converge uniformemente al variar di  $\varrho$  in un intorno sinistro di  $R$  ed in un intorno destro di  $r$ ; sia  $U^{(D)}$  la classe delle funzioni di  $U$  continue in  $T_{r,R} + \mathcal{F} T_{r,R}$  <sup>(4)</sup>, le cui trasformate  $v_h(\varrho, z)$  appartengano a  $V_h^{(D)}$ .

Date due funzioni  $f(\vartheta, z)$  ed  $F(\vartheta, z)$ , periodiche risp. a  $\vartheta$  di periodo  $2\pi$ , costruire una funzione di  $U^{(D)}$  verificante le

$$(20) \dots \lim_{\varrho \rightarrow r} u(\varrho, \vartheta, z) = f(\vartheta, z), \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, \vartheta, z) = F(\vartheta, z).$$

Supporremo sempre che  $f(\vartheta, z)$  ed  $F(\vartheta, z)$  siano, in quanto funzioni di  $\vartheta$  sviluppabili in serie di FOURIER, e che le loro coordinate di FOURIER siano, in quanto funzioni di  $z$ , rappresentabili con un integrale bilatero di FOURIER.

Pongo

$$\begin{aligned} f_h(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} f(\vartheta, z) d\vartheta, & \varphi_h(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z} f_h(z) dz. \\ F_h(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} F(\vartheta, z) d\vartheta, & \Phi_h(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z} F_h(z) dz. \end{aligned}$$

(4) Se  $R = +\infty$ , ciò vuol dire che  $u(\varrho, \vartheta, z)$  è convergente per  $\varrho \rightarrow +\infty$ , uniformem risp. a  $\vartheta$

Ciò premesso, il sistema (13<sub>1</sub>) si scrive

$$(21) \dots \begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow r} [a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) K_h(\alpha \varrho)] &= \varphi_h(\alpha) \\ \lim_{\varrho \rightarrow R} [a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) K_h(\alpha \varrho)] &= \Phi_h(\alpha) \end{aligned} \quad [\alpha \neq 0].$$

Se  $r > 0$ ,  $R < +\infty$ , questo sistema è certo compatibile, perchè il suo determinante è diverso da zero per ogni  $\alpha \neq 0$  <sup>(5)</sup>, mentre per  $\alpha \rightarrow 0$  converge ad un limite non nullo (cfr. le (2), (3) di pag. 15); le  $a_h(\alpha)$  e le  $b_h(\alpha)$  restano quindi univocamente determinate, avendosi

$$(22) \dots \begin{aligned} a_h(\alpha) &= \frac{\Phi_h(\alpha) K_h(\alpha r) - \varphi_h(\alpha) K_h(\alpha R)}{I_h(\alpha r) K_h(\alpha r) - I_h(\alpha r) K_h(\alpha R)} \\ b_h(\alpha) &= \frac{I_h(\alpha R) \varphi_h(\alpha) - I_h(\alpha r) \Phi_h(\alpha)}{I_h(\alpha R) K_h(\alpha r) - I_h(\alpha r) K_h(\alpha R)}; \end{aligned}$$

per l'unica soluzione del problema (se esiste), mettendo in vista i dati, ho l'espressione

$$(23) \dots \begin{aligned} u(\varrho, \vartheta, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i[h\vartheta - \tau + \alpha z - \zeta]} \frac{f(\tau, \zeta) [I_h(\alpha R) K_h(\alpha \varrho) - I_h(\alpha R) K_h(\alpha r) - I_h(\alpha \varrho) K_h(\alpha R)] + F(\tau, \zeta) [K_h(\alpha r) I_h(\alpha \varrho) - K_h(\alpha \varrho) I_h(\alpha r)]}{- I_h(\alpha r) K_h(\alpha R)} d\tau. \end{aligned}$$

Se  $R = +\infty$ , condizione necessaria perchè il problema abbia soluzioni è che  $\Phi_h(\alpha) = 0$  per ogni  $\alpha \neq 0$  e per ogni  $h$  (come si vede dalla (21<sub>2</sub>) pensando che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_h(t) = +\infty$ , e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} K_h(t) = 0$ ) il che implica  $F(\vartheta, z) \equiv 0$ ; per le  $a_h(\alpha)$ ,  $b_h(\alpha)$  otteniamo allora

$$(22') \dots \quad a_h(\alpha) = 0, \quad b_h(\alpha) = \frac{\varphi_h(\alpha)}{K_h(\alpha r)},$$

mentre la unica soluzione del problema ha l'espressione

$$(23') \dots \quad u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i[h\vartheta - \tau + \alpha z - \zeta]} f(\tau, \zeta) \frac{K_h(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha r)} d\tau.$$

(5) Infatti, per  $\alpha > 0$ , si ha  $I_h(\alpha r) < I_h(\alpha R)$ ,  $K_h(\alpha r) > K_h(\alpha R)$ ; per  $\alpha < 0$  valgono le stesse disuguaglianze o le opposte secondochè  $h$  sia pari ovvero dispari.

Il sistema (13<sub>2</sub>) invece (se è lecito considerarlo), si scrive

$$(24) \dots \lim_{\varrho \rightarrow 0} [a_0^* + b^* \log \varrho] = \varphi_0(0)$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow R} [a_0^* + b_0^* \log \varrho] = \Phi_0(0),$$

e perciò se  $R = +\infty$ , dev'esser  $b_0^* = 0$ ,  $a_0^* = \Phi_0(0) = 0 = \varphi_0(0)$ ; cioè, il

flusso di  $u(\varrho, \vartheta, z)$  è nullo, e 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta dz = 0.$$

Analogamente, se  $r = 0$ , si trova la condizione necessaria  $\varphi_h(\alpha) \equiv 0$  per  $h \neq 0$ , il che significa che  $f(\vartheta, z)$  è indipendente da  $\vartheta$ ; inoltre, per  $a_h(\alpha)$  e  $b_h(\alpha)$

$$(22'') \dots b_h(\alpha) = 0, \quad a_h(\alpha) = \frac{\Phi_h(\alpha)}{I_h(\alpha R)},$$

e per la unica soluzione del problema, mettendo in vista i dati,

$$(23'') \dots u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{[h(\vartheta - \tau) + \alpha z - \zeta]} F(\tau, \zeta) \frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R)} d\tau.$$

Si noti che la (21<sub>1</sub>), per  $h = 0$ , in questo caso dà  $a_0(\alpha) = \varphi_0(\alpha)$ , donde, confrontando con la (22'') si ottiene l'ulteriore condizione necessaria  $\varphi_0(\alpha) = \Phi_0(\alpha)/I_0(\alpha R)$ , cioè

$$f(\vartheta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\alpha(z - \zeta)} \frac{F(\tau, \zeta)}{I_0(\alpha R)} d\tau;$$

infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i\alpha z} u(\varrho, \vartheta, z) d\vartheta dz = 2\pi I_0(\alpha \varrho) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} u(0, \vartheta, z) dz,$$

formola in cui rientra come caso particolare la (18).

Concludo notando che anche ora, se è lecito far uso delle (13<sub>2</sub>), dal confronto di queste con le (24) si trae che il flusso di  $u(\varrho, \vartheta, z)$  è nullo.

7. — Passiamo ora al problema di NEUMANN.

Sia  $V_h^{(N)}$  la classe delle funzioni di  $V_h^{(N)}$  per cui l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} \frac{\partial}{\partial \varrho} r_h(\varrho, z) dz$$

converge uniformemente in un intorno destro di  $r$  ed in un intorno sinistro di  $R$ ; sia  $U^{(N)}$  la classe delle funzioni di  $U^{(N)}$  continue su  $T_{r,R} + \mathcal{F} T_{r,R}$  con  $\frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z)$  <sup>(6)</sup>, le cui trasformate  $v_h(\varrho, z)$  appartengono a  $V_h^{(N)}$ .

Date le funzioni  $g(\vartheta, z)$  e  $G(\vartheta, z)$ , periodiche risp. a  $\vartheta$  di periodo  $2\pi$ , costruire una funzione di  $U^{(N)}$  verificante le

$$(25) \dots \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} \frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z) = -G(\vartheta, z), \quad \lim_{\varrho \rightarrow r} \frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z) = g(\vartheta, z).$$

Supporremo sempre che  $g(\vartheta, z)$  e  $G(\vartheta, z)$  siano, in quanto funzioni di  $\vartheta$ , sviluppabili in serie di FOURIER, e che le loro coordinate di FOURIER siano, in quanto funzioni di  $z$ , rappresentabili con un integrale bilatero di FOURIER.

Pongo

$$\begin{aligned} g_h(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} g(\vartheta, z) d\vartheta, & \gamma_h(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} g_h(z) dz. \\ G_h(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ih\vartheta} G(\vartheta, z) d\vartheta, & \Gamma_h(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} G_h(z) dz. \end{aligned}$$

Ciò premesso, il sistema (13<sub>1</sub>) si scrive

$$(26) \dots \quad \begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow r} [a_h(\alpha) \alpha I'_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) \alpha K'_h(\alpha \varrho)] &= \gamma_h(\alpha), \\ \lim_{\varrho \rightarrow R} [a_h(\alpha) \alpha I'_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) \alpha K'_h(\alpha \varrho)] &= \Gamma_h(\alpha). \end{aligned}$$

Se  $r > 0$  ed  $R < +\infty$ , il determinante del sistema è diverso da zero per  $\alpha \neq 0$ , come si vede analogam. al n. precedente; di qui

$$(27) \dots \quad \begin{aligned} a_h(\alpha) &= \frac{\Gamma_h(\alpha) K'_h(\alpha r) + \gamma_h(\alpha) K'_h(\alpha R)}{\alpha [I'_h(\alpha r) K'_h(\alpha R) - I'_h(\alpha R) K'_h(\alpha r)]} \\ b_h(\alpha) &= -\frac{I'_h(\alpha R) \gamma_h(\alpha) + I'_h(\alpha r) \Gamma_h(\alpha)}{\alpha [I'_h(\alpha r) K'_h(\alpha R) - I'_h(\alpha R) K'_h(\alpha r)]}, \end{aligned}$$

<sup>(6)</sup> Se  $R = +\infty$ , intenderemo che  $u(\varrho, \vartheta, z)$  ed  $\frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z)$  convergono per  $\varrho \rightarrow \infty$ , uniformem. risp. a  $\vartheta$ .

ed infine la formola risolutiva

$$(28) \dots u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{(4\pi^2)} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i[h(\vartheta-\tau)+\alpha(z-\zeta)]} \left[ \frac{G(\tau, \zeta) [I_h(\alpha r) K_h(\alpha \varrho) - I_h(\alpha \varrho) K_h(\alpha r)]}{\alpha [I_h(\alpha R) K_h(\alpha r) - I_h(\alpha r) K_h(\alpha R)]} + \frac{g(\tau, \zeta) [I_h(\alpha R) K_h(\alpha \varrho) - I_h(\alpha \varrho) K_h(\alpha R)]}{\alpha [I_h(\alpha R) K_h(\alpha r) - I_h(\alpha r) K_h(\alpha R)]} d\tau \right].$$

Se  $R = +\infty$ , con una discussione simile a quella svolta nel n. precedente, si vede che deve essere  $G(\vartheta, z) \equiv 0$ , mentre la formola risolutiva diviene

$$(28') \dots u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i[h(\vartheta-\tau)+\alpha(z-\zeta)]} g(\tau, \zeta) \frac{K_h(\alpha \varrho)}{\alpha K_h(\alpha r)} d\tau.$$

Se invece  $r = 0$ , si vede che dev'essere  $g(\vartheta, z) \equiv A(z) \cos \vartheta + B(z) \sin \vartheta$ , dove  $A(z)$  e  $B(z)$  sono completamente determinate dalle condizioni

$$\gamma_1(\alpha) = \alpha \Gamma_1(\alpha) / 2 I_1(\alpha R), \quad \gamma_{-1}(\alpha) = \alpha \Gamma_{-1}(\alpha) / 2 I_{-1}(\alpha R);$$

la formola risolutiva è

$$(28'') \dots u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i[h(\vartheta-\tau)+\alpha(z-\zeta)]} G(\tau, \zeta) \frac{I_h(\alpha \varrho)}{\alpha I_h(\alpha R)} d\tau;$$

anche in questo caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta, z) d\vartheta dz = 0.$$

Osservo ancora che, se è lecito far uso delle (13<sub>2</sub>), allora in virtù delle (16) perchè il problema abbia soluzione è ancora necessario che

$$(16'') \dots \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} [\lim_{\varrho \rightarrow r} \varrho g(\tau, z) + \lim_{\varrho \rightarrow R} \varrho G(\tau, z)] d\tau dz = 0.$$

8. — Del problema misto mi limito alla impostazione ed alla formola risolutiva. Sia  $V_h^{(M)}$  la classe delle funzioni di  $V_h$  per cui l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(\varrho, z) dz$$

converge uniformemente in un intorno destro di  $r$ , e l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iaz} \frac{\partial}{\partial \varrho} v_h(\varrho, z) dz$$

converga uniformemente in un intorno sinistro di  $R$ ; sia  $U^{(M)}$  la classe delle funzioni di  $U$  continue su  $T_{r,R} + \mathcal{F} T_{r,R}$ , con la derivata  $\frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z)$  continua per  $r \leq \varrho < R$ , le cui trasformate appartengano a  $V_h^{(M)}$ .

Date le funzioni  $g(\vartheta, z)$  e  $F(\vartheta, z)$  soddisfacenti rispettivamente le ipotesi dei nn. 7 e 6, costruire una funzione di  $U^{(M)}$  verificante le condizioni

$$(29) \dots \quad \lim_{\varrho \rightarrow r} \frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z) = g(\vartheta, z), \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, \vartheta, z) = F(\vartheta, z).$$

La formola risolutiva è la seguente

$$(30) \dots \quad u(\varrho, \vartheta, z) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i[h(\vartheta-\varepsilon)+\alpha(z-\zeta)]} \left[ \frac{g(\tau, \zeta) [I_h(\alpha R) K_h(\alpha \varrho) - K_h(\alpha R) I_h(\alpha \varrho)]}{\alpha [I_h(\alpha R) K_h'(\alpha r) - I_h'(\alpha R) K_h(\alpha R)]} + \right. \\ \left. + \frac{F(\tau, \zeta) [I_h(\alpha \varrho) K_h'(\alpha r) - I_h'(\alpha R) K_h(\alpha \varrho)]}{\alpha [I_h(\alpha R) K_h'(\alpha r) - I_h'(\alpha R) K_h(\alpha R)]} d\tau \right].$$

Una formola simile alla precedente, scambiati  $r$  ed  $R$ , si ottiene invece scambiando nelle (29) le condizioni su  $u(\varrho, \vartheta, z)$  e su  $\frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z)$ .

## II

9. — Le formole risolutive che abbiamo incontrato sono tutte del tipo

$$\sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[h\vartheta+\alpha z]} w_h(\alpha, \varrho) d\alpha:$$

esse godono di proprietà paragonabili a quelle delle serie doppie, o degli integrali doppi di FOURIER<sup>(7)</sup>; le chiamerò *serie integrali* di FOURIER.

(7) V. il mio lavoro « *Un criterio di convergenza per integrali impropri - Applicazioni* » parte II. In corso di Stampa nei Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei.

Nelle formole risolutive compaiono le funzioni di BESSEL modificate  $I_h(\alpha \varrho)$  ed  $K_h(\alpha \varrho)$ : i rapporti  $I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$  ed  $K_h(\alpha \varrho)/K_h(\alpha r)$  svolgono in esse un ufficio paragonabile a quello svolto da  $(\varrho/R)^h$ ,  $(r/\varrho)^h$  nelle formole risolutive degli stessi problemi per la corona circolare di raggi  $r$  ed  $R$ ; volendo stabilire per le funzioni armoniche nello strato cilindrico  $T_{r,R}$  teoremi analoghi a quelli sulle funzioni armoniche in una corona circolare, mi sarà utile dimostrare alcune proprietà delle funzioni  $I_h(\alpha \varrho)$  ed  $K_h(\alpha \varrho)$ .

Notoriamente (8), per  $t$  reale ed  $h$  intero,

$$I_h(t) = I_{-h}(t), \quad K_h(t) = K_{-h}(t),$$

(1)...

$$I_h(-t) = (-1)^h I_h(t), \quad K_h(-t) = (-1)^h K_h(t);$$

nell'intervallo  $(0, +\infty)$  semiaperto a sinistra,  $I_h(t)$  è crescente e positiva,  $K_h(t)$  decrescente e positiva; per  $h \neq 0$ ,  $I_h(t)$  ha nell'origine uno zero d'ordine  $|h|$  risp. a  $t$ ,  $|K_h(t)|$  un infinito d'ordine  $|h|$  rispetto ad  $1/t$ ; per  $h = 0$ , mentre  $I_0(0) = 1$ ,  $|K_0(t)|$  invece è infinita, per  $t \rightarrow 0$ , come  $|\log t|$ .

Espressioni di cui mi varrò sono le seguenti:

$$(2) \quad I_h(t) = \sum_0^{\infty} \frac{(t/2)^{h+2m}}{m!(m+h)!}, \quad K_h(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t \operatorname{ch} x} e^{hx} dx,$$

$$K_h(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{h-1} \frac{(-1)^m (h-m-1)!}{m! (t/2)^{h-2m}} +$$

(3)...

$$+ (-1)^h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2m+h}}{m!(m+h)!} \left\{ \log \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \psi(m+1) - \frac{1}{2} \psi(m+h+1) \right\},$$

valide per  $t > 0$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$ ; le serie scritte convergono uniformemente ed assolutamente in ogni intervallo finito, purchè per la (3) si escluda l'origine.

10. — Sussiste il lemma:

I. Se  $R > 0$ , le funzioni  $I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$ ,  $\alpha^2 I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$ ,  $\alpha I_h'(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$ ,  $I_h'(\alpha \varrho)/I_h'(\alpha R)$ ,  $\alpha I_h''(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$ ,  $\alpha^2 I_h''(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$ ,  $I_h(\alpha \varrho)/\alpha I_h'(\alpha R)$  sono sommabili rispetto ad  $\alpha$  nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  [l'ultima di esse solo se  $h \neq 0$ ];  $I_0(\alpha \varrho)/\alpha I_0'(\alpha R)$  è sommabile rispetto ad  $\alpha$

(8) v. N. W. MC LACHLAN, « *Bessel functions for Engineers* » (Oxford, 1934).



in ogni intervallo, finito o no, escludente l'origine; ciò avviene in modo uniforme al variar di  $\varrho$  tra lo zero ed un numero positivo arbitrario  $R' < R$ ; inoltre le serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R)} d\alpha, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_h(\alpha \varrho)}{\alpha I_h(\alpha \varrho)} d\alpha$$

convergono totalmente al variare di  $\varrho$  tra lo zero ed  $R'$ .

Dimostro l'enunciato per la funzione  $I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$ , la dimostrazione per le altre essendo affatto simile.

A questo fine è sufficiente provare la sommabilità di  $I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)$  nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , per  $h = 0, 1, 2, \dots$ , e la convergenza (totale per  $0 \leq \varrho \leq R'$ ) della serie  $\sum_{h=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R)} d\alpha$ , in virtù delle (1).

Posto  $I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R) = (\varrho/R)^{h/2} \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho)$ , poichè la serie  $\sum_{h=0}^{\infty} (\varrho/R)^{h/2}$  converge totalmente al variare di  $\varrho$  nell'intervallo  $(0, R')$ , avremo provato il nostro assunto se proveremo che  $\mathcal{J}_h(\alpha, \varrho)$  è sommabile rispetto ad  $\alpha$  nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , e che gli integrali  $\int_0^{+\infty} \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) d\alpha$  sono equilimitati per  $h = 0, 1, 2, \dots$ , e per  $0 \leq \varrho \leq R'$ . Poichè è

$$(4) \dots \quad \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \{(\alpha/2)^{2m} \varrho^{2m+h/2} / m!(m+h)!\}}{\sum_{m=0}^{\infty} \{(\alpha/2)^{2m} R^{2m+h/2} / m!(m+h)!\}},$$

questa funzione è sempre compresa tra lo zero e l'uno.

Dalla relazione  $(m+1)(m+h+1)(R'/R)^{2m+h/2} < R^2/4$ , verificata per ciascun  $h$ , quando  $m$  è abbastanza grande (ad es., quando  $m \geq M_h$ ), si passa alla relazione, equivalente qualunque sia  $\alpha > 0$ ,

$$\alpha^{2m+2} [4(m+1)(m+h+1)R'^{2m+h/2} - R^{2m+h/2+2}] < 0;$$

la serie di potenze in  $\alpha$

$$(5) \dots \quad \sum_{m=0}^{\infty} \{(\alpha/2)^{2m+2} [4(m+1)(m+h+1)R'^{2m+h/2} - R^{2m+h/2+2}] / (m+1)!(m+h+1)!\}$$

ha tutti i coefficienti, a partire dall' $M_h$ -esimo in poi, negativi, risultando così negativa la sua somma, quando  $\alpha$  è abbastanza grande ( $\alpha > A_h$ , diciamo): la (5) è la differenza tra le due serie di potenze in  $\alpha$  (convergenti ovunque)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ \alpha^2 (\alpha/2)^{2m} R'^{2m+h/2} / m! (m+h)! \}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \{ (\alpha/2)^{-m} R'^{2m+h/2} / m! (m+h)! \};$$

si conchiude che, per  $\alpha > A_h$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \{ \alpha^2 (\alpha/2)^{2m} \varrho^{2m+h/2} / m! (m+h)! \} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \{ \alpha^2 (\alpha/2)^{2m} R'^{2m+h/2} / m! (m+h)! \} < \\ < \sum_{m=1}^{\infty} \{ (\alpha/2)^{2m} R'^{2m+h/2} / m! (m+h)! \} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \{ (\alpha/2)^{2m} R'^{2m+h/2} / m! (m+h)! \}, \end{aligned}$$

cioè  $\mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) < \alpha^{-2}$ . Perciò

$$0 \leq \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) \leq \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq \alpha \leq A_h \\ \alpha^{-2} & \text{per } \alpha > A_h \end{cases} \text{ per } 0 \leq \varrho \leq R',$$

risultando così

$$\int_0^{\infty} \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) d\alpha \leq A_h + A_h^{-1}, \quad \text{per } 0 \leq \varrho \leq R'.$$

Dimostro ora che esiste un numero naturale  $H$  tale che, se  $h \geq H$  e  $0 \leq \varrho \leq R'$ , allora

$$0 \leq \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) \leq \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \alpha^{-2} & \text{per } \alpha \geq 1 \end{cases} :$$

di qui, riuscendo  $\int_0^{\infty} \mathcal{J}_h(\alpha, \varrho) d\alpha$  non superiore a 2 per  $h = H, H+1, H+2, \dots$ , non superiore ad  $A_h + A_h^{-1}$  per  $h = 0, 1, \dots, H-1$ , la tesi sarà completamente provata.

Considero l'espressione  $(m+1)(m+h+1)(R'/R)^{2m+h/2}$ . Il fattore  $(m+1)(R'/R)^m$  è infinitesimo al diverger di  $m$ , e quindi (per  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) limitato superiormente da un numero  $K > 0$ .

Il fattore  $(m+h+1)(R'/R)^{m+h/2}$  è, per  $h$  abbastanza grande (ad es., per  $h > H'$ ), decrescente rispetto ad  $m$ : infatti la sua derivata rispetto ad  $m$  vale

$$- (R'/R)^{m+h/2} \left[ m \cdot \log \frac{R}{R'} + (h+1) \frac{R}{R'} - 1 \right],$$

ed è negativa per qualunque valore ( $\geq 0$ ) di  $m$ , sol che sia

$$h > \frac{1 + \log R' - \log R}{\log R - \log R'}.$$

Se  $h \geq H'$ , il massimo (per  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) di  $(m + h + 1)(R'/R)^{m+h/2}$  è  $(h + 1)(R'/R)^{h/2}$ ; ma esiste un numero intero  $H''$  tale che, per  $h \geq H''$ ,  $(h + 1)(R'/R)^{h/2} < R^2/4K$ . Dunque, preso  $H \geq \begin{cases} H' \\ H'' \end{cases}$ , se  $h \geq H$ , allora  $(m + h + 1)(m + 1)(R'/R)^{2m+h/2} < R^2/4$  qualunque sia  $m (\geq 0)$ .

Questa relazione equivale, qualunque sia  $\alpha > 0$ , alla seguente

$$\alpha^2 (\alpha/2)^{2m} R'^{2m+h/2} / m! (m + h)! < (\alpha/2)^{2m+2} R^{2m+h/2+2} / (m + 1)! (m + h + 1)!,$$

che a sua volta implica la

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^2 \{(\alpha/2)^{2m} \rho^{2m+h/2} / m! (m + h)!\} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^2 \{(\alpha/2)^{2m} R'^{2m+h/2} / m! (m + h)!\} < \\ < \sum_{m=1}^{\infty} \{(\alpha/2)^{2m} R^{2m+h/2} / m! (m + h)!\} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \{(\alpha/2)^{2m} R^{2m+h/2} / m! (m + h)!\}, \end{aligned}$$

qualunque sia il numero non negativo  $\rho \leq R'$ , qualunque sia  $\alpha > 0$ .

L'ultima relazione trovata prova che  $\mathcal{E}_h(\alpha, \rho) < \alpha^{-2}$  per  $h \geq H$ ,  $0 \leq \rho \leq R'$ ,  $\alpha > 0$ : il lemma è dimostrato.

11. — Prima di esporre l'analogo lemma relativo alle funzioni di BESSEL di seconda specie, esaminiamo il seguente:

II. *La funzione delle due variabili  $h$  ed  $\alpha$   $I_h(\alpha \rho) / I_h(\alpha R)$  è a variazione limitata secondo VITALI nell'insieme  $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$ ,  $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , uniformemente rispetto a  $\rho$  nell'intervallo  $(0, R')$ , per ogni  $R' < R$ ; lo stesso va detto delle funzioni  $I'_h(\alpha \rho) / I'_h(\alpha R)$  e  $I_h(\alpha \rho) / \alpha I'_h(\alpha R)$ , eccettuando però per quest'ultima il valore  $h = 0$ .*

*Le funzioni  $\alpha I'_h(\alpha \rho) / I'_h(\alpha R)$ ,  $\alpha^2 I''_h(\alpha \rho) / I'_h(\alpha R)$ ,  $\alpha I_h(\alpha \rho) / I_h(\alpha R)$ ,  $\alpha^2 I_h(\alpha \rho) / I_h(\alpha R)$  sono a variazione limitata, rispetto alla variabile  $\alpha$ , in tutto l'asse reale, uniformemente al variar di  $\rho$  in ogni intervallo  $(0, R')$ , con  $R' < R$ .*

Eseguiamo la dimostrazione per la funzione  $I_h(\alpha \rho) / I_h(\alpha R)$ , per le altre potendosi effettuare con criteri simili.

In forza delle (1), basta dimostrare il teorema limitatamente all'insieme  $0 \leq \alpha$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$

In questo insieme, la funzione è decrescente rispetto ad  $\alpha$ . Infatti

$$\frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R)} = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^h \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha \varrho / 2)^{2m} / m! (m+h)!}{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha R / 2)^{2m} / m! (m+h)!},$$

ed il secondo fattore (che vale uno per  $\alpha = 0$ ) ha una derivata risp. ad  $\alpha$  che ha il segno di

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_j^{\infty} \frac{(j-i) [\varrho^{2j} R^{2i} - \varrho^{2i} R^{2j}] \alpha^{2(i+j)-1}}{2^{2(i+j)-1} i! j! (i+h)! (j+h)!} \leq 0.$$

La variazione rispetto ad  $\alpha$  nell'intervallo  $(0, +\infty)$  di  $I_h(\alpha \varrho) / I_h(\alpha R)$  non supera uno, quale che sia  $\varrho$  nell'intervallo  $(0, R)$ .

Esaminiamone la variazione rispetto ad  $h$ .

$$\frac{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha \varrho / 2)^{2m} / m! (m+h)!}{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha R / 2)^{2m} / m! (m+h)!}$$

è crescente rispetto ad  $h$ , da un valore non negativo ad uno non superiore ad uno, per  $0 \leq \varrho \leq R$ .

Infatti la diseguaglianza

$$\sum_{m,n}^{0,\infty} (\alpha / 2)^{2m+2n} \left[ \frac{\varrho^{2m} R^{2n}}{m! n! (m+h)! (n+h+1)!} - \frac{R^{2n} \varrho^{2m}}{m! n! (m+h+1)! (n+h)!} \right] \leq 0$$

implica la

$$\frac{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha \varrho / 2)^{2m} / m! (m+h)!}{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha R / 2)^{2m} / m! (m+h)!} \leq \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha \varrho / 2)^{2m} / m! (m+h+1)!}{\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha R / 2)^{2m} / m! (m+h+1)!},$$

ed è a sua volta implicata dalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_m^{\infty} \frac{(\alpha / 2)^{2m+2n} (m-n) [\varrho^{2m} R^{2n} - \varrho^{2n} R^{2m}]}{m! n! (m+h+1)! (n+h+1)!} \leq 0,$$

la quale è una immediata conseguenza delle  $m \geq n$ ,  $\varrho \leq R$ .

Poichè anche  $(\varrho/R)^h$  ha una variazione, rispetto ad  $h$ , che non supera 1, possiamo concludere che la variazione, rispetto ad  $h$ , di  $I_h(\alpha\varrho)/I_h(\alpha R)$  non supera 2, per  $0 \leq \varrho \leq R$ .

Veniamo alla variazione rettangolare. Poichè la nostra funzione è assolutamente continua risp. ad  $\alpha$  in ogni intervallo finito, essa vale

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{d\alpha} \frac{I_h(\alpha\varrho)}{I_h(\alpha R)} - \frac{d}{d\alpha} \frac{I_{h-1}(\alpha\varrho)}{I_{h-1}(\alpha R)} \right| d\alpha &\leq \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{d\alpha} \frac{I_h(\alpha\varrho)}{I_h(\alpha R)} \right| d\alpha + \\ &+ \sum_{h=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| \frac{d}{d\alpha} \frac{I_h(\alpha\varrho)}{I_h(\alpha R)} \right| d\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} (\varrho/R)^h + \sum_{h=1}^{\infty} (\varrho/R)^h = \frac{R+\varrho}{R-\varrho}. \end{aligned}$$

Il lemma è dimostrato.

12. — Per le funzioni di BESSEL di seconda specie sussistono due lemmi analoghi a quelli ora dimostrati.

II'. *La funzione delle due variabili  $h$  ed  $\alpha$   $K_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$  è a variazione limitata secondo VITALI nell'insieme  $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$ ,  $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , uniformemente rispetto a  $\varrho$  nell'intervallo  $(r', +\infty)$ , per ogni  $r' > r$ ; lo stesso va detto delle funzioni  $K'_h(\alpha\varrho)/K'_h(\alpha r)$  e  $K_h(\alpha\varrho)/\alpha K'_h(\alpha r)$ , eccettuando però per quest'ultima il valore  $h = 0$ .*

*Le funzioni  $\alpha K'_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$ ,  $\alpha^2 K''_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$ ,  $\alpha K_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$ ,  $\alpha^2 K_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$  sono a variazione limitata, rispetto alla variabile  $\alpha$ , in tutto l'asse reale, uniformemente al variar di  $\varrho$  in ogni intervallo  $(r', +\infty)$ , con  $r' > r$ .*

Eseguo la dimostrazione per la funzione  $K_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$ , per le altre potendosi effettuare con criteri simili.

In forza delle (1), basta dimostrare il teorema limitatamente all'insieme  $\alpha \geq 0$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$ .

Comincio col provare che in quest'insieme  $K_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r)$  è decrescente risp. ad  $\alpha$ .

Per una nota identità,  $t^h K_h(t)$  è decrescente risp. a  $t$  in  $(0, +\infty)$ , poichè<sup>(9)</sup> ha come derivata  $-t^h K_{h-1}(t)$ , negativa per  $t > 0$ ; quindi  $\varrho^h K_h(\alpha\varrho) < r^h K_h(\alpha r)$ ,  $K_h(\alpha\varrho)/K_h(\alpha r) < (r/\varrho)^h$ ; con un passaggio al limite, e valendosi delle (3) si vede che (per  $h > 0$ )

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{K_h(\alpha\varrho)}{K_h(\alpha r)} = (r/\varrho)^h.$$

<sup>(9)</sup> v. Mc LACHLAN, op. cit.

Ora, se dimostro che la funzione di  $t \frac{t K'_h(t)}{K_h(t)}$  è decrescente per  $t > 0$ , ne segue che  ${}_{\rho} K'_h(\alpha \rho) K_h(\alpha r) - r K'_h(\alpha r) K_h(\alpha \rho)$  è negativa (per  $\alpha > 0$  e  $\rho > r$ ) e quindi  $\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{K_h(\alpha \rho)}{K_h(\alpha r)} \right)$  è negativa: avrò così provato l'assunto.

La relazione  $\frac{d}{dt} \left( \frac{t K'_h(t)}{K_h(t)} \right) < 0$  equivale a  $\frac{d}{dt} [t K'_0(t) \cdot K_h(t) - t K'_h(t)]$ .

$K'_h(t) < 0$  che, sfruttando l'equazione di BESSEL  $t \frac{d}{dt} [t K'_h(t)] = (h^2 + t^2) K_h(t)$ , si muta nella  $(h^2 + t^2) K_h^2(t) < t^2 K'_h(t) K'_h(t)$ ; questa, attraverso le identità  $t K'_h(t) = h K_h(t) - t K_{h+1}(t)$  e  $t K'_h(t) = -h K_h(t) - t K_{h-1}(t)$ , equivale ad ognuna delle due seguenti:  $t [K_{h+1}^2(t) - K_h^2(t)] > 2 h K_{h+1}(t) K_h(t)$ ,  $t [K_h^2(t) - K_{h-1}^2(t)] < 2 h K_h(t) K_{h-1}(t)$ . Sottraendo ora membro a membro ho l'equivalente  $t [K_{h+1}(t) - 2 K_h^2(t) + K_{h-1}^2(t)] > 2 h K_h(t) [K_{h+1}(t) - K_{h-1}(t)]$ , donde, per l'identità  $K_{h+1}(t) - K_{h-1}(t) = \frac{2h}{t} K_h(t)$ , finalmente ottengo  $K_h^2(t) < K_{h-1}(t) K_{h+1}(t)$ : dimostro quest'ultima, servendomi della seconda (2).

$$\begin{aligned} 4 K_h^2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(chx+chy)} e^{h(x+y)} d x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t ch \frac{u}{2} ch \frac{v}{2}} e^{hu} d u = \\ &= \int_0^{\infty} d v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t ch \frac{u}{2} ch \frac{v}{2}} e^{hu} d u, \end{aligned}$$

mentre invece

$$\begin{aligned} 4 K_{h-1}(t) K_{h+1}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(chx+chy)} e^{h(x+y)} e^{(x-y)} d x = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t ch \frac{u}{2} ch \frac{v}{2}} e^{hu} e^v d v = \int_0^{\infty} d v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t ch \frac{u}{2} ch \frac{v}{2}} e^{hu} ch v d u, \end{aligned}$$

ed il nostro assunto è dimostrato, essendo positive le funzioni integrande, e  $ch v > 1$ . S'è operato il cambiamento di variabili  $x - y = v$ ,  $x + y = u$ .

Per provare che  $K_h(\alpha \rho) / K_h(\alpha r)$  è a variazione limitata rispetto ad  $h$ , dimostro (analogamente a quanto s'è fatto nel lemma II) che la funzione (limitata superiormente dall'unità)  $\frac{\rho^h K_h(\alpha \rho)}{r^h K_h(\alpha r)}$  è crescente rispetto ad  $h$  (positivo o nullo).

La relazione  $\frac{K_h(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha r)} < \frac{\varrho K_{h+1}(\alpha \varrho)}{r K_{h+1}(\alpha r)}$  equivale alla  $\frac{\alpha r K_{h+1}(\alpha r)}{K_h(\alpha r)} < \frac{\alpha \varrho K_{h+1}(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha \varrho)}$ , cioè (per l'arbitrarietà di  $\alpha > 0$ , e di  $\varrho > r$ ) alla decrescenza della funzione di  $t \frac{t K_{h+1}(t)}{K_h(t)}$ : ma la derivata di questa ha il segno di  $K_{h+1}(t) K_h(t) + t K'_{h+1}(t) K_h(t) - t K'_h(t) K_{h+1}(t)$ , che, per due identità già citate, vale  $t[K_{h+1}^2(t) - K_{h-1}(t) K_h(t)] - 2h K_h(t) K_{h+1}(t) > t[K_{h+1}^2(t) - K_h^2(t)] - 2h K_h(t) K_{h+1}(t)$ , che è positivo in base ad una relazione dimostrata a pag. 21.

In modo esattamente eguale a quanto fatto nel lemma II, si prova che la variazione rettangolare di  $K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$  non supera  $(\varrho + r) / (\varrho - r)$ .

### 13. — E veniamo ora al lemma

I'. Se  $r > 0$ , le funzioni  $K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$ ,  $\alpha^2 K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$ ,  $\alpha K'_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$ ,  $K'_h(\alpha \varrho) / K'_h(\alpha r)$ ,  $\alpha K'_h(\alpha \varrho) / K'_h(\alpha r)$ ,  $\alpha^2 K''_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$ ,  $K_h(\alpha \varrho) / \alpha K'_h(\alpha r)$  sono sommabili rispetto ad  $\alpha$  nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ , [l'ultima di esse solo se  $h \neq 0$ ];  $K_0(\alpha \varrho) / \alpha K'_0(\alpha r)$  è sommabile rispetto ad  $\alpha$  in ogni intervallo, finito o no, escludente l'origine; ciò ha luogo in modo uniforme al variar di  $\varrho$  tra un numero arbitrario  $r'$  e  $+\infty$ ; inoltre le serie

$$\sum_h^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_h(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha r)} d\alpha, \quad \sum_h^{(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_h(\alpha \varrho)}{\alpha K'_h(\alpha r)} d\alpha$$

convergono totalmente al variar di  $\varrho$  tra  $r'$  e  $+\infty$ .

Anche ora mi limito a dimostrar l'enunciato per la funzione  $K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$ , per valori positivi di  $\alpha$  e di  $h$ . Precisamente, intendo dimostrare che nell'intervallo  $(0, +\infty)$  è  $0 < K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r) \leq I_h(\alpha r) / I_h(\alpha \varrho)$ , e questo prova la mia tesi.

Poichè  $\varrho$  ed  $\alpha$  (sotto le condizioni  $\varrho \geq r'$ ,  $\alpha > 0$ ) sono arbitrari, la relazione  $K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r) < I_h(\alpha r) / I_h(\alpha \varrho)$  equivale alla proposizione:  $I_h(t) \cdot K_h(t)$  è decrescente nell'intervallo  $(0, +\infty)$ .

È stato visto al n. precedente che la funzione  $\frac{t K'_h(t)}{K_h(t)}$  è decrescente (e negativa) nell'intervallo  $(0, +\infty)$ ; in modo analogo, partendo dalla decrescenza di  $\frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha r)}$  rispetto ad  $\alpha$ , si prova che  $\frac{t I'_h(t)}{I_h(t)}$  è crescente (e positiva) nello stesso intervallo. Si conchiude che la funzione  $\frac{t^2 K'_h(t) I'_h(t)}{K_h(t) I_h(t)}$  è negativa e decrescente nell'intervallo  $(0, +\infty)$ .

La relazione  $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{t^2 K'_h(t) I'_h(t)}{K_h(t) I_h(t)} \right\} \leq 0$  <sup>(40)</sup> equivale alla seguente :

$$\frac{d}{dt} [t^2 K'_h(t) \cdot I'_h(t)] I_h(t) \cdot K_h(t) \leq \frac{d}{dt} [I_h(t) \cdot K_h(t)] t^2 I'_h(t) \cdot K'_h(t);$$

ma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [t^2 K'_h(t) \cdot I'_h(t)] &= t K'_h(t) \frac{d}{dt} [t I_h(t)] + t I'_h(t) \frac{d}{dt} [t K'_h(t)] = \\ &= (n^2 + t^2) [I_h(t) \cdot K'_h(t) + I'_h(t) \cdot K_h(t)] = (n^2 + t^2) \frac{d}{dt} [I_h(t) \cdot K_h(t)] \end{aligned}$$

(la seconda eguaglianza, per la equazione di BESSEL). Possiamo dire dunque che

$$(n^2 + t^2) \frac{d}{dt} [I_h(t) \cdot K_h(t)] I_h(t) \cdot K_h(t) \leq \frac{d}{dt} [I_h(t) \cdot K_h(t)] t^2 I'_h(t) \cdot K'_h(t);$$

e poichè, per  $t > 0$ ,  $I'_h(t) > 0$ ,  $K'_h(t) < 0$ , deve necessariamente aversi  $\frac{d}{dt} [I_h(t) \cdot K_h(t)] \leq 0$ , come si voleva dimostrare.

Si osservi un'ultima cosa. Dalla  $K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r) \leq I_h(\alpha r) / I_h(\alpha \varrho)$  (l'eguaglianza vigendo se e solo se  $\alpha = 0$ ) segue la equilimitatezza degli inte-

grali  $\frac{\varrho^{h/2}}{r^{h/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_h(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha r)} d\alpha$ , al variar di  $\varrho$  nell'intervallo  $(r', +\infty)$ . Poichè

$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \sum_h^{\infty} (r/\varrho)^{h/2} = 0$  segue che anche  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \sum_h^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_h(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha r)} d\alpha = 0$ . Ma anche

$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_0(\alpha \varrho)}{K_0(\alpha r)} d\alpha = 0$ , quindi  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \sum_{\infty-}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_h(\varrho \alpha)}{K_h(\alpha r)} d\alpha = 0$ .

### III

14. — Intendo ora dimostrare il teorema :

I. Sia  $\Gamma$  l'insieme delle funzioni dell'aggregato  $U$ , considerato nel teorema di unicità del n. 4, tali che, per due valori  $r' < R'$  contenuti nell'intervallo aperto  $(r, R)$ , le trasformate loro  $w_h(\alpha, r')$ ,  $w_h(\alpha, R')$  sono funzioni equilimitate di  $\alpha$ , e così pure  $\alpha^2 w_h(\alpha, r')$ ,  $\alpha^2 w_h(\alpha, R')$ .

<sup>(40)</sup> In questa e nelle disequaglianze che seguono, il segno  $=$  non è mai valido per valori di  $t$  che riempiano un intervallo.



Ogni funzione di  $\Gamma$  è scomponibile nella somma di due funzioni armoniche, la prima nel cilindro  $\varrho < R'$ , la seconda nel campo  $\varrho > r$  dello spazio, infinitesima per  $\varrho$  divergente; se la data funzione di  $\Gamma$  è

$$(1) \quad u(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + a\tau)} [a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) \cdot K_h(\alpha \varrho)] d\alpha,$$

le due funzioni di cui si tratta sono

$$u_1(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + az)} a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) d\alpha,$$

(2)...

$$u_2(\varrho, \vartheta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + az)} b_h(\alpha) \cdot K_h(\alpha \varrho) d\alpha.$$

Le funzioni  $e^{i(h\vartheta + az)} a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho)$  son sommabili rispetto ad  $\alpha$  dell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ , uniformemente al variar di  $\vartheta$  e  $z$ , ed al variar di  $\varrho$  tra lo zero e  $R'' < R'$ ; le funzioni  $e^{i(h\vartheta + az)} b_h(\alpha) \cdot K_h(\alpha \varrho)$  son del pari sommabili uniformemente al variar di  $\vartheta$  e  $z$ , ed al variar di  $\varrho$  tra  $r'' > r'$  ed  $+\infty$ , le serie (2) convergono totalmente al variar di  $\vartheta$  e  $z$ , ed al variar di  $\varrho$  tra lo zero ed  $R''$ , ovvero tra  $r''$  e  $+\infty$  rispettivamente.

Per dimostrar tutto ciò, si ponga:

$$f_h(\alpha, \vartheta, z) = e^{i(h\vartheta + az)} w_h(\alpha, r') = e^{i(h\vartheta + az)} [a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha r') + b_h(\alpha) \cdot K_h(\alpha r')]$$

(3)...

$$F_h(\alpha, \vartheta, z) = e^{i(h\vartheta + az)} w_h(\alpha, R') = e^{i(h\vartheta + az)} [a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha R') + b_h(\alpha) \cdot K_h(\alpha R')]$$

dove  $f_h(\alpha, \vartheta, z)$  ed  $F_h(\alpha, \vartheta, z)$  sono equilimitate.

Sia  $N$  tale che  $|f_h(\alpha, \vartheta, z)| < N$ ,  $|F_h(\alpha, \vartheta, z)| < N$ .

Dalle (3) ricavo

$$e^{i(\alpha + h\vartheta)} a_h(\alpha) = \frac{f_h(\alpha, \vartheta, z) \cdot K_h(\alpha R') - F_h(\alpha, \vartheta, z) \cdot K_h(\alpha r')}{I_h(\alpha r') \cdot K_h(\alpha R') - I_h(\alpha R') \cdot K_h(\alpha r')}$$

(4)...

$$e^{i(\alpha + h\vartheta)} b_h(\alpha) = \frac{I_h(\alpha r') \cdot F_h(\alpha, \vartheta, z) - I_h(\alpha R') \cdot f_h(\alpha, \vartheta, z)}{I_h(\alpha r') \cdot K_h(\alpha R') - I_h(\alpha R') \cdot K_h(\alpha r')};$$

per esser le  $F_h(\alpha, \vartheta, z)$  e le  $f_h(\alpha, \vartheta, z)$  equilimitate, risulta che  $b_h(\alpha)$  ha per  $\alpha \rightarrow 0$ , uno zero d'ordine almeno eguale ad  $|h|$  rispetto ad  $\alpha$ , mentre  $a_h(\alpha)$  vi ha un infinito d'ordine  $|h|$  rispetto ad  $\frac{1}{\alpha}$  se  $h \neq 0$ , un infinito dello stesso ordine di  $|\log \alpha|$  al più, se  $h = 0$ .

Dalla prima delle (4) ricavo:

$$(5) \dots e^{i(\alpha z + h\vartheta)} a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) = \frac{F_h(\alpha, \vartheta, z) - f_h(\alpha, \vartheta, z) \cdot \frac{K_h(\alpha R')}{K_h(\alpha r')}}{1 - \frac{I_h(\alpha r')}{I_h(\alpha R')} \cdot \frac{K_h(\alpha R')}{K_h(\alpha r')}} \cdot \frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R')}$$

il cui primo membro risulta perciò, in modulo, minore di

$$\frac{2N}{1 - (r'/R')^{|h|}} \frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R')} \leq (\text{per } h \neq 0) \leq \frac{2N}{1 - (r'/R')} \frac{I_h(\alpha \varrho)}{I_h(\alpha R')} :$$

ricordando il lemma I della parte II, si conchiude che il primo membro della (5) è, per  $h \neq 0$ , sommabile in modo uniforme al variar comunque di  $\vartheta$  e di  $z$ , ed al variar di  $\varrho$  tra zero ed  $R'' < R'$ ; che inoltre la serie  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) d\alpha$  converge totalmente al variar di  $\vartheta, z, \varrho$ , al modo detto.

Inoltre, in modulo  $e^{i\alpha z} a_0(\alpha) \cdot I_0(\alpha \varrho)$  è infinito come  $|\log \alpha|$  per  $\alpha \rightarrow 0$ , onde se  $(-A, +A)$  è un intorno finito dell'origine, la sua sommabilità in tale intorno (uniforme al modo detto) è assicurata; detto poi  $H$  il massimo, certo minor d'uno, di  $\frac{I_0(\alpha r')}{I_0(\alpha R')} \frac{K_0(\alpha R')}{K_0(\alpha r')}$  per  $|\alpha| \geq A$ , avremo che  $|e^{i\alpha z} a_0(\alpha) \cdot I_0(\alpha \varrho)| < \frac{2N}{1-H} \cdot \frac{I_0(\alpha \varrho)}{I_0(\alpha R')}$  e ciò dimostra che la serie a secondo membro della (2) converge al modo detto. Dimostro ora che la funzione  $u_1(\varrho, \vartheta, z)$  è armonica per  $\varrho < R'$ : a questo fine basterà (teor. di WEIERSTRASS) dimostrare l'armonicità di ogni termine della serie.

La funzione  $e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) \alpha I'_h(\alpha \varrho)$  è uniformemente sommabile al variar di  $\varrho$  tra 0 e  $R'' < R'$ : per provarlo, basta ripetere il ragionamento che precede, ponendo in luogo di  $I_h(\alpha \varrho)$ ,  $\alpha I'_h(\alpha \varrho)$ , e tenendo poi conto, anziché della sommabilità di  $I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R')$ , di quella di  $\alpha \cdot I'_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R')$ , notando infine che per  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $e^{i\alpha z} a_0(\alpha) \alpha I'_0(\alpha \varrho)$  è infinitesimo.

Dunque  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) d\alpha$  è derivabile sotto il segno rispetto a  $\varrho$ , per  $\varrho < R'$ ; analogamente si vede che è derivabile sotto il segno rispetto a  $\varrho$  due volte. La derivabilità sotto il segno rispetto a  $z$ , due volte,

si prova in modo simile, valendosi della supposta equilimitatezza di  $\alpha^2 w_h(\alpha R)$  ed  $\alpha^2 w_h(\alpha r')$ .

La derivabilità rispetto a  $\vartheta$  è banale.

Conchiudendo, in forza di quanto sin qui osservato,

$$(6) \dots A_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) d\alpha \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) B[I_h] d\alpha \equiv 0,$$

avendo con  $B$  indicato l'operatore  $\frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \left( \frac{h^2}{\varrho^2} + \alpha^2 \right)$ , di BESSEL.

Con ciò la armonicità di  $u_1(\varrho, \vartheta, z)$  è provata. Analogamente si prova l'armonicità di  $u_2(\varrho, \vartheta, z)$ , per  $\varrho > r'$ .

Infine

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow \infty} |u_2(\varrho, \vartheta, z)| &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} b_h(\alpha) K_h(\alpha \varrho) d\alpha \right| = \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_h(\alpha, \vartheta, z) \cdot I_h(\alpha r') / (I_h(\alpha R') - f_h(\alpha, \vartheta, z)) \cdot \frac{K_h(\alpha \varrho)}{K_h(\alpha r')}}{\frac{I_h(\alpha r')}{I_h(\alpha R')} \cdot \frac{K_h(\alpha R')}{K_h(\alpha r')} - 1} d\alpha \right| \leq \\ &\leq \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha z} K_0(\alpha \varrho) b_0(\alpha) d\alpha \right| + \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(\alpha \varrho)}{K(\alpha r')} d\alpha \cdot \frac{2N}{1 - r'/R'} = 0. \end{aligned}$$

15. — Intendo ora dimostrare il teorema

II. Sia  $\Gamma_*$  l'insieme delle funzioni dell'aggregato  $U$ , considerato nel teorema di unicità del n. 4, tali che, per due valori  $r'$  ed  $R'$  contenuti nell'intervallo aperto  $(r, R)$ , risultino a variazione limitata secondo VITALI rispetto al gruppo di variabili  $(\vartheta, z)$  nell'insieme  $+\infty \geq z \geq -\infty$ ,  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$ , infinitesime per  $|z| \rightarrow \infty$ , risultando limitate le trasformate loro  $w_0(\alpha, r')$ ,  $w_0(\alpha, R')$ .

Ogni funzione di  $\Gamma_*$  è decomponibile nella somma di due funzioni armoniche, la prima nel cilindro  $\varrho < R'$ , la seconda nel campo  $\varrho > r'$  dello spazio, infinitesima per  $\varrho$  divergente; se la data funzione è data dalla (1), le due funzioni di cui si tratta sono date risp. dalle due (2).

Gli integrali e le serie a secondo membro delle (2) convergono uniformemente risp. a  $\vartheta$  variabile comunque, risp. a  $z$  in ogni intervallo finito, risp. a  $\varrho$  in ogni intervallo  $(0, R'')$  [con  $R'' < R'$ ] ovvero in ogni intervallo  $(r'', +\infty)$  [ $r'' > r'$ ], secondochè si tratti della (2<sub>1</sub>) e della (2<sub>2</sub>).

Per dimostrarlo, osservo che le funzioni  $F_h(\alpha, \vartheta, z), f_h(\alpha, \vartheta, z)$  verificano le ipotesi richieste nei teoremi II' e III' del mio lavoro « Un criterio di convergenza per integrali impropri » parte I, alla funzione ivi chiamata  $f(x, y; P)$  <sup>(11)</sup>; ma le funzioni

$$\frac{I_h(\alpha \varrho) / I_h(\alpha R)}{1 - \frac{I_h(\alpha r')}{I_h(\alpha R')} \frac{K_h(\alpha R')}{K_h(\alpha r')}} , \frac{I_h(\alpha \varrho) \cdot K_h(\alpha R) / I_h(\alpha R') \cdot K_h(\alpha r')}{1 - \frac{I_h(\alpha r')}{I_h(\alpha R')} \frac{K_h(\alpha R')}{K_h(\alpha r')}}$$

soddisfano le ipotesi ivi ammesse per la  $\tau(x, y; \varrho)$  [purchè  $h \neq 0$ ], ponendo  $Q \equiv \varrho$ ; dallo stesso teorema segue, per  $h \neq 0$ , la convergenza dell'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) d\alpha$ , e della serie  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\vartheta + \alpha z)} a_h(\alpha) \cdot I_h(\alpha \varrho) d\alpha$ , <sup>(12)</sup>

uniforme al modo già detto; la convergenza di  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} a_0(\alpha) \cdot I_0(\alpha \varrho) d\alpha$  si prova come nel n. precedente.

Dimostriamo ora l'armonicità di ciascun termine della serie, e, a ciò, come nel n. precedente, basterà provare la derivabilità sotto il segno dell'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(az+h\vartheta)} a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) d\alpha$  due volte rispetto a  $\varrho$  ed a  $z$ .

Ma la funzione  $e^{i(az+h\vartheta)} a_h(\alpha) \alpha I_h'(\alpha \varrho)$  si ottiene dalla  $e^{i(az+h\vartheta)} a_h(\alpha) I_h(\alpha R')$  moltiplicandola per la funzione  $\alpha I_h'(\alpha \varrho) / I_h(\alpha R')$ : ed in forza del lemma II

della parte I, possiamo asserire che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(az+h\vartheta)} a_h(\alpha) \alpha I_h'(\alpha \varrho) d\alpha$  converge uniformemente rispetto a  $\varrho$  nell'intervallo  $(0, R'')$ ; allo stesso modo si prova che sussiste la derivabilità sotto il segno due volte, rispetto a  $\varrho$  ed a  $z$ .

Analogamente si dimostra l'armonicità di  $u_2(\varrho, \vartheta, z)$ .

Per provare infine che  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} u_2(\varrho, \vartheta, z) = 0$ , basta ormai ricordare che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_h(t) = 0.$$

16. Conchiudo il lavoro osservando che in base a questi due ultimi problemi si è già abbastanza innanzi nella dimostrazione dei teoremi di esistenza per i tre classici problemi al contorno, di cui abbiamo veduto ai nn. 6, 7, 8 i teoremi di unicità.

<sup>(11)</sup> Ciò è stato dimostrato ivi, teor. VII e X, parte II;

<sup>(12)</sup> Cfr. la <sup>(5)</sup>

Riprendendo le notazioni ivi usate, abbiamo:

III. *Date due funzioni*  $f(\vartheta, z)$ ,  $F(\vartheta, z)$  *continue, periodiche in*  $\vartheta$  *di periodo*  $2\pi$  *con le derivate prime e seconde, tali che le loro trasformate*  $f_h(z)$  *e*  $F_h(z)$  *siano rappresentabili mediante integrali di FOURIER, riuscendo equilimitate le funzioni*  $\varphi_h(\alpha)$ ,  $\Phi_h(\alpha)$ ,  $\alpha^2 \varphi_h(\alpha)$ ,  $\alpha^2 \Phi_h(\alpha)$ ;

ovvero

III'. *Date due funzioni*  $f(\vartheta, z)$ ,  $F(\vartheta, z)$  *continue, a variazione limitata secondo VITALI nell'insieme*  $-\infty \leq z \leq +\infty$ ,  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$ , *infinitesime all'infinito, periodiche rispetto a*  $\vartheta$  *di periodo*  $2\pi$ , *di cui siano limitate le trasformate*  $\varphi_0(\alpha)$  *e*  $\Phi_0(\alpha)$ ;

in queste ipotesi

la (23) del n. 5 *definisce una funzione armonica nello strato*  $T_{r,R}$ , *somma di due funzioni, l'una armonica nel cilindro*  $\varrho < R$ , *l'altra nel campo*  $\varrho > r$ , *infinitesima per*  $\varrho$  *divergente.*

Poichè la (23) citata, per  $\varrho = r$  e per  $\varrho = R$ , converge rispettivamente verso  $f(\vartheta, z)$  e verso  $F(\vartheta, z)$ , per dimostrare il teorema di esistenza nelle ipotesi restrittive suesposte non rimane che da dimostrare la continuità di  $u(\varrho, \vartheta, z)$  nello insieme  $r \leq \varrho \leq R$  dello spazio; a questo fine basterebbe, nelle ipotesi III', aver provato che la variazione di  $I_h(\alpha \varrho) / I_h(\alpha R)$  e di  $K_h(\alpha \varrho) / K_h(\alpha r)$  è limitata uniformemente per  $r \leq \varrho \leq R$ .

IV. *Date due funzioni*  $g(\vartheta, z)$ ,  $G(\vartheta, z)$  *continue, periodiche risp. a*  $\vartheta$  *di periodo*  $2\pi$ , *con le derivate prime, tali inoltre che le trasformate*  $g_h(z)$ ,  $G_h(z)$  *siano rappresentabili mediante integrali di FOURIER, essendo equilimitate le funzioni*  $\gamma_h(\alpha)$ ,  $\Gamma_h(\alpha)$ ,  $\alpha \gamma_h(\alpha)$ ,  $\alpha \Gamma_h(\alpha)$ , *ed infinitesima come*  $\alpha^2$ , *per*  $\alpha \rightarrow 0$ , *l'espressione*  $\Gamma_0(\alpha) R + \gamma_0(\alpha) r$ ;

ovvero

IV'. *Date due funzioni*  $g(\vartheta, z)$  *e*  $G(\vartheta, z)$  *continue, a variazione limitata secondo VITALI nell'insieme*  $-\infty \leq z \leq +\infty$ ,  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$ , *infinitesime all'infinito, periodiche rispetto a*  $\vartheta$  *di periodo*  $2\pi$ , *tali che l'espressione*  $\Gamma_0(\alpha) R + \gamma_0(\alpha) r$  *sia, per*  $\alpha \rightarrow 0$ , *infinitesima come*  $\alpha^2$ ;

in queste ipotesi

la (28) del n. 7 *definisce una funzione armonica nello strato*  $T_{r,R}$ , *somma di due funzioni, l'una armonica nel cilindro*  $\varrho < R$ , *l'altra nel campo*  $\varrho > r$ , *infinitesima per*  $\varrho$  *divergente.*

Poichè la (28) citata derivata sotto i segni, per  $\varrho = R$  e per  $\varrho = r$ , converge rispettivamente verso  $-G(\vartheta, z)$  e verso  $+g(\vartheta, z)$ , per dimostrare, nelle ipotesi suesposte, il teorema di esistenza basterà dimostrare la continuità di  $\frac{\partial}{\partial \varrho} u(\varrho, \vartheta, z)$  per  $r \leq \varrho \leq R$ ; a questo fine non rimarrebbe che provare che la variazione di  $I'_h(\alpha \varrho) / I'_h(\alpha R)$  e di  $K'_h(\alpha \varrho) / K'_h(\alpha r)$  è limitata uniformemente per  $r \leq \varrho \leq R$ .

V e V'. Confrontando le ipotesi ammesse su  $g(\vartheta, z)$  e su  $F(\vartheta, z)$  rispettivamente ai teoremi IV (IV') e III (III'), si ottiene un risultato analogo per la espressione (30) del n. 8.

L'enunciato III e III' discende immediatamente dai teoremi I e II, rispettivamente; quelli dei teoremi IV', IV, V, V', si possono dimostrare in modo analogo. Si osservi che le ipotesi dei teoremi III, IV, V, son certo soddisfatte se le funzioni  $f(\vartheta, z)$ ,  $F(\vartheta, z)$ ,  $g(\vartheta, z)$ ,  $G(\vartheta, z)$  sono sommabili nell'insieme  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$ ,  $-\infty \leq z \leq +\infty$ , con le derivate prime e seconde, e se si verifica assieme la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} [G(\vartheta, z) \cdot R + g(\vartheta, z) \cdot r] d\vartheta dz = 0.$$

[Pervenuto alla Redazione il 7-11-1949]