ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI AMERIO

Studio asintotico del moto di un punto su una linea chiusa, per azione di forze indipendenti dal tempo

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 3, no 1-4 (1950), p. 19-57

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_19_0>

STUDIO ASINTOTICO DEL MOTO DI UN PUNTO SU UNA LINEA CHIUSA, PER AZIONE DI FORZE INDIPENDENTI DAL TEMPO

LUIGI AMERIO (Milano)

In un recente lavoro [1] ho studiato il comportamento asintotico, per $t \to +\infty$, degli integrali dell'equazione

$$y'' + A\,y' + B \operatorname{sen} y = C \tag{1}$$

(con A, B, $C < B$ costanti positive), nell'incognita $y(t)$.

La (1) si è presentata al Bottani [2] nello studio teorico dell'*avviamento dei motori sincroni* ed è anche l'equazione del moto di un punto che descriva una circonferenza, in un piano verticale e in un mezzo che opponga resistenza viscosa, sotto l'azione della gravità e di una forza tangenziale costante. La stessa equazione è stata oggetto di una ricerca del Tricomi [3], allo scopo di determinarne una soluzione che sia somma di una funzione lineare e di una funzione periodica del tempo t.

Gli integrali della (1) si suddividono in tre gruppi, che ho chiamati rispettivamente: *integrali stabili*, *integrali instabili* [4], *integrali divergenti*. I

---

(1) L. AMERIO, *Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di un'equazione interessante l'elettrotecnica*, Ann. di Mat. 1949, Vol. dedicato a F. SEVERI.

(2) E. BOTTANI, *La matematica vista da un ingegnere*, Rend. del Sem. Mat. e Fis. di Milano, Vol. IX, 1935, pp. 181-183.

(3) F. TRICOMI, *Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in Elettrotecnica*, Ann. della R. Norm. Sup. di Pisa, Serie II, Vol. II, 1933, pp. 1-20.

(4) Gli integrali instabili risultano effettivamente tali nel senso che a questa parola si dà in Meccanica, perchè a condizioni iniziali che differiscano di pochissimo da quelle che caratterizzano un integrale instabile viene a corrispondere un integrale stabile o un integrale divergente. Lo stesso non avviene invece per gli integrali stabili (o divergenti) perchè, alterando di quantità abbastanza piccole le condizioni iniziali relative a uno di tali integrali, alle nuove condizioni corrisponde ancora un integrale stabile (o divergente). La stabilità considerata è, naturalmente, *stabilità futura* (cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna, Vol. II, pp. 1-2) perchè si riferisce ai valori del tempo successivi all'istante iniziale.

primi tendono al valore α $\left(\text{con } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \text{sen}\,\alpha = \frac{Q}{B}\right)$ corrispondente alla posizione di equilibrio statico stabile del punto sulla circonferenza; i secondi tendono al valore $\beta = \pi - \alpha$, corrispondente alla posizione di equilibrio statico instabile; gli ultimi (che possono anche mancare) tendono a $+\infty$, come la soluzione di Tricomi.

Le condizioni iniziali che caratterizzano i vari tipi di integrali sono inoltre perfettamente individuate una volta noti gli integrali instabili.

Poichè questi sono *due*, caratterizzati da ben precise condizioni, si ricava che la conoscenza dei due soli integrali instabili permette di dedurre il comportamento asintotico qualitativo di *tutti* gli integrali della (1).

Scopo della presente Memoria è di estendere i risultati ottenuti per la (1), studiando l'equazione, assai più generale,

$$y'' = f(y, y'), \tag{2}$$

con $f(y, y')$ *funzione continua per* $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$ *insieme alle sue derivate* $f_y(y, y')$ *ed* $f_{y'}(y, y')$, *periodica come funzione di* y, *decrescente come funzione di* y' *e tale che risulti, per ogni* y,

$$\lim_{y' \to +\infty} f(y, y') < 0, \quad \lim_{y' \to -\infty} f(y, y') > 0. \tag{3}$$

La (2) è l'equazione del moto di un punto Q su una linea Γ *chiusa* qualunque (in cui y designi l'ascissa curvilinea) sotto l'azione di una forza funzione del posto e della velocità.

Se poniamo poi

$$f(y, 0) = F(y) \tag{4}$$

$$f(y, 0) - f(y, y') = R(y, y'), \tag{5}$$

la (2) si scrive nella forma

$$y'' + R(y, y') = F(y) \tag{6}$$

e, in tal modo, la forza che agisce sul mobile appare come la differenza tra una *forza motrice* $F(y)$, funzione del posto, e una *resistenza passiva* $R(y, y')$, funzione del posto e della velocità, nulla per $y' = 0$ e crescente con y'. Le (3) si scrivono anche, per le (4) e (5),

$$\lim_{y' \to +\infty} R(y, y') > F(y), \quad \lim_{y' \to -\infty} R(y, y') < F(y) \tag{7}$$

e sono largamente verificate se, come avviene in molte applicazioni, $R(y, y')$ diventa infinita con y'.

Poichè risulta, per la (5), $R(y, 0) \equiv 0$, le posizioni di equilibrio statico su Γ corrispondono alle radici dell'equazione

$$F(y) = 0. \tag{8}$$

Noi supporremo tali radici (se ve ne sono) tutte *semplici*. Allora *se, in una radice* $\bar{y}$, *risulta* $F'(\bar{y}) < 0$, $\bar{y}$ *è, su* Γ, *una posizione di equilibrio statico stabile; se risulta* $F'(\bar{y}) > 0$, $\bar{y}$ *rappresenta una posizione di equilibrio statico instabile.*

Chiameremo *stabile* un integrale $y(t)$ della (2) se, per $t \to +\infty$, il punto $Q(y(t))$ tende, su Γ, a una posizione di equilibrio statico stabile; *instabile* se Q tende a una posizione di equilibrio statico instabile; infine diremo *divergente* un integrale se $y(t)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$ (a seconda che $F(y)$ abbia, in un periodo, valor medio μ positivo o negativo).

Come risulterà dal seguito, sono queste *le sole* eventualità che si possono presentare. Inoltre gli integrali instabili sono in numero *finito* e la loro conoscenza permette, anche per la (6), di individuare le condizioni iniziali che caratterizzano gli integrali stabili e gli integrali divergenti.

Questi ultimi hanno poi, per $t \to +\infty$, un comportamento che può assai ben precisarsi. Si dimostra infatti, sotto una larghissima condizione, che *un integrale divergente è somma di una funzione lineare di* t, *di una funzione periodica e di una funzione infinitesima per* $t \to +\infty$. Il termine infinitesimo manca in corrispondenza della soluzione di Tricomi (che esiste anche per la (2)).

Inoltre, *il termine lineare e il termine periodico sono sostanzialmente i medesimi per tutti gli integrali poichè si passa dai termini relativi a un integrale a quelli relativi a un altro integrale con uno spostamento dell'origine dei tempi.*

1. — *Supporremo* in quel che segue (senza pregiudizio della generalità) *che* $f(y, y')$ *abbia, come funzione periodica di* y, *periodo* 2π.

Osserviamo poi che, per le condizioni precedentemente indicate, esiste ed è unico l'integrale $y(t)$ della (2) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0,$$

comunque siano scelti t_0, y_0 e y'_0.

Mostriamo che *l'integrale* $y(t)$ *è prolungabile in tutto l'intervallo* $t_0 \vdash\!\!\!- +\infty$.

Si ha infatti, per le (4) e (5) (osservando che è $y' R(y, y') \geq 0$ per tutti i valori di y e y'),

$$y' f(y, y') = y' F(y) - y' R(y, y') \leq y' F(y) \leq |y'| K,$$

dove K è il massimo della funzione $|F(y)|$.

La tesi segue allora dall'osservazione che tutti gli integrali dell'equazione

$$z'' = K$$

sono prolungabili nell'intervallo $t_0 \vdash + \infty$ (5).

Consideriamo ora l'intervallo $-\infty \dashv t_0$ e osserviamo che, posto $\tau = -t$, $\tau_0 = -t_0$, la (2) si trasforma nell'equazione

$$\frac{d^2 y}{d \tau^2} = f\left(y, -\frac{d y}{d \tau}\right) = g\left(y, \frac{d y}{d \tau}\right),$$

con $g(y, u)$ funzione *crescente* della variabile u.

Se allora $\omega(\eta)$, con $\eta \geq 0$, è il massimo di $| g(y, u) |$ (cioè anche di $| f(y, u) |$) per $0 \leq y \leq 2\pi$, $-\eta \leq u \leq \eta$, si dimostra (6) che, *se risulta, per un valore* $\mathrm{a} > 0$,

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{d \eta}{\omega(\eta)} = +\infty, \tag{9}$$

l'integrale $\mathrm{y}(\mathrm{t})$ *è prolungabile anche nell'intervallo* $-\infty \dashv \mathrm{t}_0$, *cioè esiste su tutto l'asse* t.

Importa però rilevare che, *se non vale la* (9), *l'integrale* $\mathrm{y}(\mathrm{t})$ *può non essere prolungabile in tutto l'intervallo* $-\infty \dashv t_0$.

Consideriamo infatti, ad esempio, l'equazione

$$y'' = f(y').$$

Prendiamo y' in modo che sia $f(y'_0) < 0$ e integriamo tra i limiti y'_0 e y', t_0 e t.

Si ha

$$\int_{y'_0}^{y'} \frac{d y'}{f(y')} = t - t_0 .$$

Se ora facciamo decrescere t a partire dal valore t_0, il secondo membro è negativo: perchè lo sia anche il primo deve risultare $y' > y'_0$ e quindi

(5) L. Amerio, *Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva,* Rend R. Acc. d'Italia. Serie VII, Vol. III, 1942, p. 421.

(6) L. Amerio, loc. cit. in (5), p 419.

$f(y') < f(y'_0)$ (essendo $f(y')$ funzione decrescente). Se allora risulta

$$\int_{y'_0}^{+\infty} \frac{d\,y'}{f(y')} = -\,l,$$

finito, è necessariamente

$$t - t_0 > -\,l\,,$$

cioè l'integrale $y(t)$ non è prolungabile per $t \leq t_0 - l$.

Osserviamo infine che *nella* (6) *si può supporre* (e lo faremo sempre in seguito) *non negativo il valor medio* μ *di* F(y) *nell'intervallo* $0 \vdash\!\dashv 2\pi$:

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(y)\,d\,y \geq 0\,. \tag{10}$$

Ammettiamo infatti che sia

$$\int_0^{2\pi} F(y)\,d\,y < 0 \tag{11}$$

e operiamo la trasformazione $y = -\,z$. Si trova allora

$$y' = -\,z', \quad y'' = -\,z'',$$

sicchè l'equazione (2) si scrive

$$z'' = -\,f(-\,z\,, -\,z') = h\,(z\,, z').$$

In questa $h\,(z\,, z')$ è funzione decrescente di z' e risulta, per le (3),

$$\lim_{z' \to +\infty} h\,(z\,, z') < 0\,, \quad \lim_{z' \to -\infty} h\,(z\,, z') > 0\,.$$

Si ha poi, per la (11),

$$\int_0^{2\pi} h\,(z\,, 0)\,d\,z = \int_0^{2\pi} F(-\,z)\,d\,z = \int_0^{-2\pi} F(y)\,d\,y > 0\,.$$

2. — Se poniamo $y' = p$, la (6) *equivale* al sistema di due equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = F(y) - R\,(y\,, p) \end{cases} \tag{12}$$

nelle incognite $\{y\,(t)\,, p\,(t)\}$.

Questo può avere come *soluzione costante* $\{a, b\}$ soltanto la soluzione $\{\bar{y}, 0\}$, essendo $\bar{y}$ una radice dell'equazione (8).

Le soluzioni costanti corrispondono perciò alle posizioni di equilibrio statico del mobile sulla linea Γ. Esse vengono a mancare se $\mathrm{F}(\mathrm{y})$ *non si annulla mai.*

Le altre soluzioni $\{y(t), p(t)\}$ definiscono nel piano (y, p) delle linee regolari L (dotate cioè di tangente variabile con continuità), dette, secondo la consuetudine, le *caratteristiche* del sistema (12). Che tali linee siano regolari segue immediatamente dall'osservazione che se, per un valore $\bar{t}$, risulta $y'(\bar{t}) = p'(\bar{t}) = 0$, è anche, per la prima delle (12), $p(\bar{t}) = 0$ e quindi $R(y(\bar{t}), p(\bar{t})) = 0$. Dalla seconda delle (12) segue allora $F(y(\bar{t})) = 0$, cioè $y(\bar{t})$ è una radice della (8). Per il teorema di unicità si ha allora, per ogni t, $y(t) = y(\bar{t})$, contro l'ipotesi che $\{y(t), p(t)\}$ definisca una caratteristica.

Si noti inoltre che, in virtù di quanto si è detto nel § 1 e di un teorema di Bendixson (7), *se la caratteristica* L *ha una parte* L', *corrispondente ai valori* $\mathrm{t} \leq \mathrm{t}'$, *la quale si mantiene in un dominio limitato del piano* (y, p), *l'integrale* $\{\mathrm{y}(\mathrm{t}), \mathrm{p}(\mathrm{t})\}$ *è definito in tutto l'intervallo* $-\infty \,\overline{}\, +\infty$.

Osserviamo ora che le *caratteristiche* del sistema (12) corrispondono a *tutte e sole* le soluzioni, nel piano (y, p), dell'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dp}{dy} = \frac{F(y) - R(y, p)}{p} = \frac{f(y, p)}{p} . \tag{13}$$

Questa ha come *punti singolari* (nel senso di Poincaré) i punti $(\bar{y}, 0)$, dove $\bar{y}$ è una radice della (8).

Si noti che, per la prima delle (12) e per la (13), un arco di caratteristica situato nel semipiano $p > 0$ è percorso, al crescere di t, da sinistra a destra, un arco situato nel semipiano $p < 0$ è percorso da destra a sinistra. Inoltre una caratteristica che incontri l'asse y (in un punto non singolare) incontra tale asse ad angolo retto.

Infine, nessuna caratteristica passa per un punto singolare in corrispondenza di un valore t', finito, di t perchè in tal caso coinciderebbe con la soluzione costante $\{\bar{y}, 0\}$.

3. — Per quel che seguirà conviene dimostrare alcuni lemmi.

LEMMA I. — *Si abbia l'equazione del primo ordine nell'incognita* $\mathrm{q}(\mathrm{y})$:

$$\frac{dq}{dy} = \psi(y, q) \tag{14}$$

---

(7) I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math., Vol. XXIV, 1901, p. 7.

con $\psi(y, q)$ *funzione continua nel dominio* D $(-\infty < y < +\infty, \alpha(y) \leq q \leq \leq \beta(y))$, $\alpha(y)$ *e* $\beta(y)$ *funzioni periodiche, di periodo* 2π, *e continue. Inoltre* $\psi(y, q)$, *come funzione di* y, *sia periodica, di periodo* 2π *e per la* (14) *valga il teorema di unicità, in corrispondenza di arbitrarie condizioni iniziali* $q(\overline{y}) = \overline{q}$ (*con* $(\overline{y}, \overline{q})$ *punto di* D).

Allora se la (14) *ammette, nell'intervallo* $y_0 \vdash +\infty$ (*oppure* $-\infty \dashv y_0$) *una linea integrale* $q = q(y)$ *contenuta in* D, *essa ammette anche, in* D, *un integrale periodico* $q = q^*(y)$, *di periodo* 2π, *al quale è asintotica la soluzione* $q = q(y)$ *nel senso che risulta*

$$(15)\qquad \lim_{y \to +\infty} \{ q(y) - q^*(y) \} = 0 \quad (\textit{oppure} \lim_{y \to -\infty} \{ q(y) - q^*(y) \} = 0).$$

Si ha, per ipotesi, per $y_0 \leq y < +\infty$,

$$\alpha(y) \leq q(y) \leq \beta(y).$$

Se è $q(y_0 + 2\pi) = q(y_0)$, l'integrale $q(y)$ è periodico, di periodo 2π. Sia ora, ad esempio, $q(y_0 + 2\pi) > q(y_0)$. In tal caso è anche

$$(16)\qquad q(y + 2\pi) > q(y),$$

per $y \geq y_0$. Infatti, per la periodicità di $\psi(y, q)$ come funzione di y, è un integrale della (14) anche la funzione $q_1(y) = q(y + 2\pi)$ e, per il teorema di unicità, la linea integrale l_1 di equazione $q = q_1(y)$ non può avere punti comuni con la linea l di equazione $q = q(y)$.

Poichè risulta $q_1(y_0) = q(y_0 + 2\pi) > q(y_0)$, sarà allora, per ogni $y \geq y_0$, $q_1(y) > q(y)$, cioè varrà la (16).

Posto

$$q_n(y) = q(y + 2n\pi) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

le funzioni $q_n(y)$ (tutte integrali della (14)) costituiscono una successione crescente, risultando

$$(17)\qquad \alpha(y) < q_1(y) < q_2(y) < \ldots < \beta(y).$$

Esiste perciò il limite

$$\lim_{n \to \infty} q_n(y) = q^*(y)$$

ed è

$$\alpha(y) < q^*(y) \leq \beta(y).$$

Inoltre si ha

$$q^*(y) = \lim_{n \to \infty} q_n(y) = \lim_{n \to \infty} q_{n+1}(y) = \lim_{n \to \infty} q_n(y + 2\pi) = q^*(y + 2\pi),$$

cioè $q^*(y)$ è funzione periodica, di periodo 2π.

Si ha poi dalla (14), integrando tra y_0 e y,

$$q_n(y) - q_n(y_0) = \int_{y_0}^{y} \psi(y, q_n(y))\, dy. \tag{18}$$

Se H è il massimo, in D, di $|\psi(y, q)|$, risulta infine

$$|\psi(y, q_n(y))| \leq H$$

e quindi, per il teorema di Arzelà-Lebesgue, è lecito nella (18) passare al limite sotto il segno di integrale.

Ne segue

$$q^*(y) - q^*(y_0) = \int_{y_0}^{y} \psi(y, q^*(y))\, dy. \tag{19}$$

Perciò $q^*(y)$ è funzione continua. Inoltre, dalla continuità, in D, di $\psi(y, q)$ segue la continuità di $\psi(y, q^*(y))$. Dalla (19), derivando, si ricava allora che $q^*(y)$ è un integrale della (14).

Dalle (18) e (19) si deduce inoltre, che la successione $\{q_n(z)\}$ converge a $q^*(z)$ uniformemente nell'intervallo $J\,(y_0 \leq z \leq y_0 + 2\pi)$. Perciò, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare in corrispondenza un indice n_ε in modo che, per $n > n_\varepsilon$ e qualunque sia z in J, risulti

$$|q_n(z) - q^*(z)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Poniamo ora $y = z + 2n\pi$ e osserviamo che è

$$q^*(y) = q^*(z), \quad q(y) = q(z + 2n\pi) = q_n(z).$$

Dalla (20), per $y > y_0 + 2\pi + 2n_\varepsilon\pi$, segue

$$|q(y) - q^*(y)| < \varepsilon,$$

cioè la (15).

LEMMA II. *Nelle stesse ipotesi del lemma* I, *se la* (14) *ammette, in* D, *una soluzione periodica* $q = q^*(y)$, *questa ha necessariamente il periodo* 2π. *Inoltre, se* $\psi(y, q)$ *è funzione crescente* (*o decrescente*) *di* q, *tale soluzione periodica è unica.*

Supponiamo che esista una soluzione $q = q(y)$, periodica e di periodo Y. Esiste allora, per il lemma I, anche una soluzione $q = q^*(y)$, periodica e di periodo 2π, cui è asintotica $q(y)$.

Dimostriamo che risulta, necessariamente,

(21) $$q(y) \equiv q^*(y).$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$, possiamo determinare η_ε in modo che, per $y > \eta_\varepsilon$, risulti

(22) $$| q(y) - q^*(y) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per la periodicità e continuità di $q^*(y)$ si può poi determinare $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che, per ogni coppia (y_1, y_2) soddisfacente alla limitazione

$$| y_1 - y_2 | < \delta_\varepsilon,$$

risulti

(23) $$| q^*(y_1) - q^*(y_2) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $y_1 > \eta_\varepsilon$, $| y_1 - y_2 | < \delta_\varepsilon$ sarà allora, per le (22) e (23),

(24) $$| q(y_1) - q^*(y_2) | \leq | q(y_1) - q^*(y_1) | + | q^*(y_1) - q^*(y_2) | < \varepsilon.$$

Prendiamo ora, ad arbitrio, un valore $\bar{y}$ e determiniamo (come è possibile) due interi positivi m, n in modo che sia

$$\bar{y} + m\,Y > \eta_\varepsilon, \quad | m\,Y - n\,2\pi | < \delta_\varepsilon.$$

Posto $y_1 = \bar{y} + m\,Y$, $y_2 = \bar{y} + n\,2\pi$, risulta allora, per le (23) e (24),

$$| q(\bar{y}) - q^*(\bar{y}) | = | q(\bar{y} + m\,Y) - q^*(\bar{y} + n\,2\pi) | = | q(y_1) - q^*(y_2) | < \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\bar{y}$ e di ε, si ricava la (21).

Il resto della tesi segue da una opportuna generalizzazione di una proposizione del Tricomi [8] (relativa alla (1)).

Supponiamo infatti che $\psi(y, q)$ sia funzione crescente di q e che esista, oltre a $q(y)$, un'altra soluzione, $\bar{q}(y)$, periodica (e necessariamente di periodo 2π). Sarà, ad esempio, per il teorema di unicità, $q(y) > \bar{q}(y)$ per $-\infty < y < +\infty$.

Poichè risulta

$$q(0) = q(2\pi), \quad \bar{q}(0) = \bar{q}(2\pi),$$

---

[8] F. Tricomi, loc. cit. in [3], p. 7.

integrando la (14) nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 2\pi$ in corrispondenza delle due soluzioni $q(y)$, $\bar{q}(y)$, si ricava allora

$$\int_0^{2\pi} \psi(y, q(y))\, dy = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \psi(y, \bar{q}(y))\, dy = 0\,,$$

ciò che è assurdo. Infatti, essendo $\psi(y, q)$ funzione crescente di q, risulta $\psi(y, q(y)) > \psi(y, \bar{q}(y))$ e quindi

$$\int_0^{2\pi} \psi(y, q(y))\, dy > \int_0^{2\pi} \psi(y, \bar{q}(y))\, dy$$

4. — Studiamo dapprima il *comportamento asintotico, per* $t \to +\infty$, *degli integrali della* (6) *supponendo*

$$F(y) > 0$$

in tutto l'intervallo $0 \vdash\!\dashv 2\pi$.

Per le (3), l'equazione

$$f(y, p) = 0$$

ha una unica soluzione $p = \zeta(y)$, con $\zeta(y)$ funzione continua, periodica e di periodo 2π.

Inoltre, poichè risulta per $p \leq 0$ (essendo $f(y, p)$ funzione decrescente di p)

(25) $$f(y, p) \geq f(y, 0) = F(y) > 0,$$

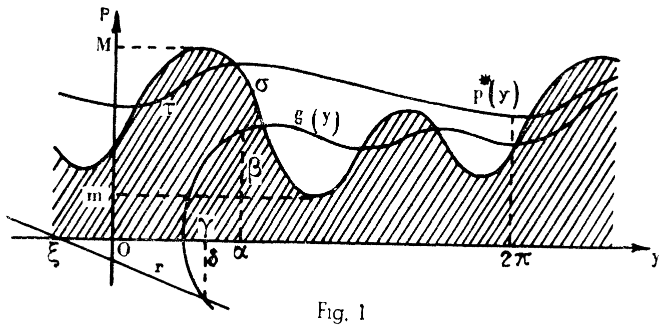

Fig. 1

si ha necessariamente

$$\zeta(y) > 0.$$

La linea σ, di equazione $p = \zeta(y)$ (*linea di stazionarietà* per l'equazione (13)) è perciò situata nel semipiano $p > 0$; detto poi τ il dominio delimitato superiormente da σ e inferiormente dall'asse y, e osservando che è

$$f(y, p) < 0 \qquad \text{per } p > \zeta(y)$$

$$f(y, p) > 0 \qquad \text{per } p < \zeta(y),$$

si ricava

$$\frac{dp}{dy} = \frac{f(y, p)}{p} > 0 \qquad \text{nei punti interni a } \tau$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{f(y, p)}{p} < 0 \qquad \text{nei punti esterni a } \tau.$$

Siano m ed M il minimo e il massimo, positivi, di $\zeta(y)$ e sia $p = g(y)$ un integrale dell'equazione (13), soddisfacente, per $y = \alpha$, alla condizione iniziale $g(\alpha) = \beta$, con

$$m \leq \beta \leq M.$$

Dimostriamo che la funzione $g(y)$ è definita nell'intervallo $\alpha \vdash\!\!- +\infty$ e soddisfa ivi alla limitazione

$$m \leq g(y) \leq M. \tag{26}$$

La (26) segue dall'osservazione che $g(y)$ è funzione crescente nei punti della striscia $D\,(-\infty < y < +\infty, m \leq p \leq M)$ interni a τ, decrescente nei punti esterni a τ. Non può allora essere, ad esempio, in un punto $\overline{y} > \alpha$, $g(\overline{y}) > M$ perchè esisterebbe un punto ξ, con $g(\xi) = M$ e $g(y) > M$ per $\xi < y \leq \overline{y}$. Allora $g'(y)$ dovrebbe essere positiva in un punto ξ_1 dell'intervallo $\xi - \overline{y}$, ciò che è assurdo perchè $g(\xi_1) > M$.

Inoltre $g(y)$ è definita nell'intervallo $\alpha \vdash\!\!- +\infty$. Infatti, detto η l'estremo superiore dei valori di y per cui è definita la funzione $g(y)$, si trova, per $y < \eta$, integrando la (13),

$$g(y) = \beta + \int_{\alpha}^{y} \frac{f(y, g(y))}{g(y)}\, dy \tag{27}$$

ed è, in D,

$$\left| \frac{f(y, p)}{p} \right| \leq K,$$

con K costante positiva. Perciò, se η è finito, $g(y)$ tende, per $y \to \eta -$, al limite finito

$$\beta + \int_a^\eta \frac{f(y, g(y))}{g(y)} d y .$$

Se allora si pone $g(\eta)$ eguale a questo limite, si può prolungare la linea integrale $p = g(y)$, a partire dal punto $(\eta, g(\eta))$, in un intorno destro di η, ciò che è assurdo. Deve perciò essere $\eta = + \infty$.

Esiste allora, per il lemma I, *una soluzione periodica, di periodo* 2π, *della* (13):

$$p = p^*(y)$$

ed è

$$m \leq p^*(y) \leq M \qquad (-\infty < y < +\infty) .$$

Inoltre la funzione $g(y)$ *è asintotica, per* $y \to +\infty$, *alla* $p^*(y)$, *nel senso che risulta*

$$\lim_{y \to +\infty} \{g(y) - p^*(y)\} = 0 . \tag{28}$$

Proviamo ora che *ogni caratteristica* $L\{y(t), p(t)\}$ *è asintotica, nel piano* (y, p), *alla caratteristica* L^*, *di equazione* $p = p^*(y)$, *nel senso che* L *ha, per* t *abbastanza grande, un'equazione cartesiana* $p = g(y)$ *e vale la* (28).

Supponiamo infatti, dapprima, che L abbia un punto $\overline{P}(\overline{y}, \overline{p})$ al di sopra di L^*: sia cioè $\overline{p} > p^*(\overline{y})$. Allora L è (per il teorema di unicità) sempre al di sopra di L^*: risulta perciò $\frac{d y}{d t} = p > 0$ ed L ha un'equazione cartesiana $p = g(y)$. Inoltre, osservando che fuori di τ la derivata $\frac{d p}{d y}$ è negativa, si ricava che $g(y)$ non potrà mai superare, per $y \geq \overline{y}$, il più grande, N, dei due numeri $\overline{p}, M$: sarà inoltre $\overline{p} \geq m$. La funzione $g(y)$ risulta allora definita nell'intervallo $\overline{y} \vdash + \infty$ e soddisfa alla limitazione

$$m \leq g(y) \leq N .$$

Per il lemma I la soluzione $g(y)$ è perciò asintotica a una soluzione periodica, di periodo 2π, $p = h(y)$, soddisfacente alla medesima limitazione.

Ora posto, per $q > 0$, $p = \sqrt{q}$, si trova che $q(y)$ soddisfa, per la (13) all'equazione

$$\frac{d q}{d y} = 2 f(y, \sqrt{q}) = \psi(y, q) ,$$

dove $\psi(y, q)$ risulta funzione decrescente di q, nel semipiano $q > 0$. Poichè questa equazione non può ammettere, nella striscia $m^2 \leq q \leq N^2$, per il lemma II, due soluzioni periodiche distinte, si conchiude che è $h(y) = p^*(y)$ e vale la (28).

Supponiamo ora che L abbia un punto $\overline{P}(\overline{y}, \overline{p})$ (le coordinate di $\overline{P}$ sono indicate nella fig. 1 con (α, β) o con (γ, δ), nei due casi considerati) al di sotto di L^*. Allora, se è $\overline{p} \geq m$ la tesi è già stata provata; se è $0 \leq \overline{p} < m$, $g(y)$ ha andamento crescente in un intorno destro $\overline{y} \vdash\!\dashv y_1$ di $\overline{y}$: risulta $p(y_1) > 0$ e, detto m_1 il minore dei due numeri m e $p(y_1)$, la caratteristica L risulta contenuta, per $y \geq y_1$, nella striscia $m_1 \leq p \leq M$ e si conchiude che è ancora asintotica alla $p^*(y)$.

Supponiamo infine $\overline{p} < 0$. Scritta la (13) nella forma

$$\frac{dy}{dp} = \frac{p}{f(y, p)},$$

si trova che y è funzione decrescente di p, per $p \leq 0$. Si ha poi, per $\overline{p} \leq p \leq 0$,

$$\frac{dy}{dp} > \frac{\overline{p}}{\nu}$$

dove $\nu > 0$ è il minimo di $f(y, p)$ nella striscia $(\overline{p} \leq p \leq 0, \; -\infty < y < < +\infty)$. Perciò L interseca l'asse y in un punto ξ situato alla destra dell'intersezione di tale asse con la retta r spiccata dal punto $\overline{P}$ con coefficiente angolare $\frac{\nu}{\overline{p}}$ (rispetto all'asse y). Prolungando poi L a partire da tale intersezione, si ricade nel caso precedente e si deduce la tesi.

Si noti inoltre che $p = p^*(y)$ *è l'unica soluzione periodica della* (13).

Infatti, se esiste un'altra soluzione $p = p_1(y)$, periodica e di periodo Y, questa deve essere asintotica a $p^*(y)$ e allora, per quanto si è detto nella dimostrazione del lemma II, coincide con $p(y)$.

Si riconosce infine immediatamente che, *per* $t \to +\infty$, *tutte le soluzioni della* (2) *sono divergenti a* $+\infty$.

Sia infatti L una caratteristica qualsiasi. Per $t \geq \overline{t}$ abbastanza grande L avrà un'equazione $p = p(y)$, con

$$\frac{m}{2} \leq p(y) \leq \frac{3}{2} M. \tag{29}$$

Poichè, per la prima della (12), è

$$\frac{dy}{dt} = p(y)$$

si ricava, integrando tra i limiti $\bar{t}$ e t, $\bar{y}$ e y,

$$(30) \qquad t - \bar{t} = \int_{\bar{y}}^{y} \frac{dy}{p(y)}$$

e quindi

$$\frac{2}{3}\,\frac{y-\bar{y}}{M} \leq t - \bar{t} \leq 2\,\frac{y-\bar{y}}{m},$$

cioè t ed y tendono contemporaneamente a $+\infty$.

Risulta perciò

$$(31) \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty,$$

cioè la tesi.

Possiamo inoltre precisare in modo assai espressivo il comportamento asintotico, per $t \to +\infty$, *della funzione* $y(t)$ *nell'ipotesi che, nei punti della caratteristica* L^*, *risulti*

$$(32) \qquad R_p(y, p^*(y)) > 0 \qquad (-\infty < y < +\infty).$$

Osserviamo, innanzi tutto, che, per essere $m \leq p^*(y) \leq M$, *la* (32) *è soddisfatta se è* $R_p(y, p) > 0$ *per* $p > 0$ *o anche soltanto per* $m \leq p \leq M$.

Consideriamo ora una caratteristica $L\{y(t), p(t)\}$ e prendiamo $\bar{t}$ così grande che, per $t \geq \bar{t}$, L abbia, nel piano (y, p), un'equazione cartesiana $p = p(y)$, ove $p(y)$ soddisfa alla (29). Poniamo inoltre

$$y(\bar{t}) = \bar{y} \quad , \quad p(\bar{t}) = \bar{p}$$

e, per $y \geq \bar{y}$,

$$(33) \qquad G(y) = \int_{\bar{y}}^{y} \frac{dy}{p(y)}.$$

Segue allora dalla (30) l'equazione

$$(34) \qquad G(y) = t - \bar{t}$$

da cui si ricava, risolvendo rispetto a y,

$$y = y(t) \qquad (y(\bar{t}) = \bar{y}).$$

Posto poi

$$G^*(y) = \int_0^y \frac{dy}{p^*(y)} \qquad , \qquad \Lambda(y) = \int_{\bar{y}}^{y} \left\{ \frac{1}{p^*(y)} - \frac{1}{p(y)} \right\} dy$$

si ha, per le (33) e (34),

$$G(y) = G^*(y) - G^*(\bar{y}) - \Lambda(y) = t - \bar{t}. \tag{35}$$

Dimostriamo che, se vale la (32), risulta

$$\lim_{y \to +\infty} \Lambda(y) = \int_{\bar{y}}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{p^*(y)} - \frac{1}{p(y)} \right\} dy = l, \tag{36}$$

finito.

Si ha infatti, per la (13),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dy} \{p^{*2}(y) - p^2(y)\} = -\{R(y, p^*(y)) - R(y, p(y))\}$$

e quindi, integrando tra $\bar{y}$ e y,

$$\frac{p^{*2}(y) - p^2(y)}{2} - \frac{p^{*2}(\bar{y}) - p^2(\bar{y})}{2} = \int_{\bar{y}}^{y} \{R(y, p^*(y)) - R(y, p(y))\}\, dy. \tag{37}$$

Per le (28) e (29) è poi

$$\lim_{y \to +\infty} \{p^2(y) - p^{*2}(y)\} = 0$$

e quindi dalla (37) segue

$$\frac{p^{*2}(\bar{y}) - p^2(\bar{y})}{2} = \int_{\bar{y}}^{+\infty} \{R(y, p^*(y)) - R(y, p(y))\}\, dy,$$

cioè $\{R(y, p^*(y)) - R(y, p(y))\}$ è funzione integrabile nell'intervallo $\bar{y} \vdash\!\dashv + \infty$. Osserviamo inoltre che la differenza $p^*(y) - p(y)$ ha ivi sempre lo stesso segno e lo stesso avviene di $R(y, p^*(y)) - R(y, p(y))$, perchè $R(y, p)$ è funzione crescente di p.

Ne segue che anche l'integrale

$$\int_{\bar{y}}^{+\infty} | R(y, p^*(y)) - R(y, p(y)) | \, dy$$

esiste finito.

Osserviamo ora che $R_p(y, p^*(y))$ è funzione periodica e continua di y. Per la (32) si può allora determinare un numero $\delta > 0$ in modo che la funzione $R_p(y, p)$ abbia un minimo $\varrho > 0$ nel dominio $C(-\infty < y < +\infty$, $p^*(y) - \delta \leq p \leq p^*(y) + \delta)$. Per la (28) esiste poi un valore $y_\delta \geq \bar{y}$ tale che, per $y \geq y_\delta$, risulti

$$p^*(y) - \delta < p(y) < p^*(y) + \delta. \tag{38}$$

Indicato con $\eta(y)$ un conveniente valore compreso tra $p(y)$ e $p^*(y)$ si ha allora, per $y \geq y_\delta$,

$$| R(y, p^*(y)) - R(y, p(y)) | = R_p(y, \eta(y)) \, | p^*(y) - p(y) | \geq$$

$$\geq \varrho \, | p^*(y) - p(y) | .$$

Perciò anche $| p^*(y) - p(y) |$ è integrabile nell'intervallo $\bar{y} \vdash\!\dashv +\infty$.
Se supponiamo, come è possibile, $\delta < m$, si ha poi, per $y \geq y_\delta$,

$$\left| \frac{1}{p^*(y)} - \frac{1}{p(y)} \right| = \left| \frac{p^*(y) - p(y)}{p^*(y)\, p(y)} \right| \leq \frac{| p^*(y) - p(y) |}{m(m - \delta)}$$

e quindi risulta provata la (36).

Osserviamo ora che, posto

$$\xi = G^*(y), \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{dy}{p^*(y)}, \tag{38}$$

si ha (9)

$$y = \frac{2\pi}{T} \xi + z(\xi), \tag{39}$$

con $z(\xi)$ funzione continua e periodica di ξ, di periodo T.

Dalla (35) segue poi

$$G^*(y) = t - \bar{t} + G^*(\bar{y}) + \Delta(y) = t - \bar{t} + G^*(\bar{y}) + \Delta(y(t)) = t - k + \alpha(t)$$

---

(9) F. TRICOMI, loc. cit. in (3), p. 15.

avendo posto

$$k = \bar{t} - G^*(\bar{y}) - l\,.$$

$$\alpha(t) = A(y(t)) - l = -\int_{y(t)}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p^*(y)} - \frac{1}{p(y)} \right\} dy\,.$$

Risulta inoltre per le (31) e (36),

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \to +\infty} \{A(y(t)) - l\} = 0\,. \tag{40}$$

Per le (38) e (39) si ha allora

$$\begin{aligned} y &= \frac{2\pi}{T}(t - k + \alpha(t)) + z(t - k + \alpha(t)) = \\ &= \frac{2\pi}{T}(t - k) + z(t - k) + \beta(t) \end{aligned} \tag{41}$$

avendo posto

$$\beta(t) = \frac{2\pi}{T}\alpha(t) + \{z(t - k + \alpha(t)) - z(t - k)\}\,.$$

Dimostriamo che risulta

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(t) = 0\,. \tag{42}$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$, si può determinare, per la continuità e periodicità di $z(\xi)$, $\sigma_\varepsilon > 0$ in modo che sia

$$| z(\xi') - z(\xi'') | < \varepsilon \tag{43}$$

per $| \xi' - \xi'' | < \sigma_\varepsilon$.

Per la (40) si può poi prendere $t_\varepsilon > \bar{t}$ in modo che, per $t > t_\varepsilon$, risulti

$$| \alpha(t) | < \sigma_\varepsilon\,.$$

Per $t > t_\varepsilon$ segue allora

$$| z(t - k + \alpha(t)) - z(t - k) | < \varepsilon$$

e quindi dalla (40) si ricava la (42).

Dalla (41) segue perciò che, *se vale la* (32), *un qualsiasi integrale* y (t) *risulta somma di una funzione lineare di* t, *di una funzione periodica di pe-*

riodo T *e di una funzione infinitesima per* $t \to +\infty$. Inoltre i primi due termini di tale somma sono sostanzialmente *indipendenti* dall'integrale considerato poichè *si passa dai termini relativi a un integrale a quelli relativi a un altro integrale con uno spostamento dell'origine dei tempi.*

5. — Indichiamo alcune proprietà delle caratteristiche, *nell'ipotesi che* $F(y)$ *abbia degli zeri, ma tutti semplici.*

Questi sono allora necessariamente in numero *finito* nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 2\pi$ perchè, se fossero infiniti, esisterebbe uno zero ξ di accumulazione e risulterebbe $F'(\xi) = 0$, ciò che è assurdo. Il numero delle radici nell'intervallo $0 \vdash 2\pi$ è poi *pari*. Infatti se è $F(0) \neq 0$, poichè si ha $F(2\pi) = F(0)$ e gli zeri di $F(y)$ sono tutti semplici, $F(y)$ si annullerà necessariamente in un numero pari, $2s$, di punti interni all'intervallo considerato. Se poi è $F(0) = F(2\pi) = 0$ e supponiamo, ad esempio, $F(y) > 0$ in un intorno destro $0 \dashv a$ di 0, sarà $F(y) < 0$ in un intorno sinistro $b \vdash 2\pi$ di 2π: perciò l'equazione $F(y) = 0$ ha un numero dispari, $2s - 1$, di radici nell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ e quindi un numero pari, $2s$, nell'intervallo $0 \vdash 2\pi$.

Per la periodicità, a qualunque intervallo $\bar{y} \vdash \bar{y} + 2\pi$ appartiene sempre lo stesso numero, $2s$, di radici di $F(y)$.

Indicheremo con $\{y_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ la successione delle radici nell'intervallo $-\infty \text{---} +\infty$; supporremo inoltre, per fissare le idee, che sia $F'(y_{2k}) > 0$, $F'(y_{2k-1}) < 0$ e che nell'intervallo $0 \vdash 2\pi$ cadano le radici $y_1, y_2, \ldots, y_{2s}$.

Studiamo ora l'equazione (13) nell'intorno dei suoi punti singolari $N_i(y_i, 0)$.

Detto m_i il coefficiente angolare della tangente a una linea integrale $p = g_i(y)$ passante per il punto N_i, si ha, per la (13),

$$m_i = \lim_{y \to y_i} \frac{F(y) - R(y, g_i(y))}{g_i(y)} = \lim_{y \to y_i} \frac{F'(y) - R_y(y, g_i(y)) - R_p(y, g_i(y)) g_i'(y)}{g_i'(y)} =$$

$$= \frac{F'(y_i) - m_i R_p(y_i, 0)}{m_i},$$

perchè risulta $R_y(y, 0) \equiv 0$.

Si ottiene in tal modo l'equazione di secondo grado in m_i:

$$m_i^2 + m_i R_p(y_i, 0) - F'(y_i) = 0$$

da cui segue

$$m_i = -\frac{R_p(y_i, 0)}{2} \mp \sqrt{\frac{R_p^2(y_i, 0)}{4} + F'(y_i)} = \begin{cases} m_i' \\ m_i'' \end{cases}.$$

Poichè $F'(y_{2k}) > 0$, risulta

$$m'_{2k} < 0 \quad , \quad m''_{2k} > 0 . \tag{44}$$

Il punto N_{2k} *è perciò un colle.*

Invece il punto N_{2k-1} *è un nodo o un fuoco.*

Per il punto N_{2k} passano [10] *due* linee integrali della (13), formanti complessivamente *quattro* caratteristiche del sistema (12), che indicheremo rispettivamente, come nella figura 2, con

$$R'_{2k} \, , \; S'_{2k} \, , \; R''_{k} \, , \; S''_{2k} \, .$$

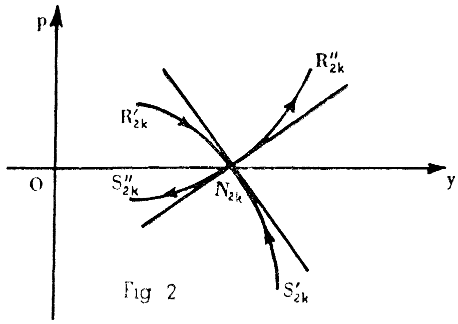

Fig 2

Di queste caratteristiche, due, R'_{2k} ed S'_{2k} sono percorse dal punto $P(y(t), p(t)) \equiv P(t)$, al crescere di t, nel verso $P \rightarrow N_{2k}$, due, R''_{2k} ed S''_{2k}, nel verso opposto.

Da quanto è stato detto si deduce che *le caratteristiche* R'_{2k} *ed* S'_{2k} $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *sono le uniche caratteristiche instabili,* perchè i punti N_{2k} sono i soli punti che corrispondono a una posizione di equilibrio statico instabile sulla traiettoria Γ. *Per la periodicità, esse risultano individuate una volta note quelle relative ai valori* $1, \ldots, s$ *di* k.

Quanto alle caratteristiche R''_{2k} ed S''_{2k}, possiamo rilevare che, per quel che si è osservato nel § 2, esse sono definite per t variabile nell'intervallo $-\infty \text{---} +\infty$.

Dimostriamo ora che *non esistono, nel piano* (y, p), *caratteristiche chiuse e questo tanto se si considerano intervalli finiti quanto intervalli infiniti del tempo.*

Per provare la tesi, procediamo nel modo seguente. Dalla (6), moltiplicati entrambi i membri per $y'(t)$, segue:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'^2}{2} - \varphi(y)\right) = - y' R(y, y') \leq 0 , \tag{45}$$

avendo posto

$$\varphi(y) = \int_0^y F(y)\, d\, y . \tag{46}$$

---

[10] Cfr. F. TRICOMI, *Equazioni differenziali,* Einaudi, 1948, p. 71.

Dalla (45) segue che la funzione

$$(47) \qquad \lambda(t) = \varphi(y(t)) - \frac{y'^2(t)}{2} = \varphi(y(t)) - \frac{p^2(t)}{2}$$

è non decrescente. Più precisamente, se $L\{y(t), p(t)\}$ *è una caratteristica, la funzione* $\lambda(t)$ *è crescente: risulta cioè*

$$(48) \qquad \lambda(t') < \lambda(t'') \quad per \quad t' < t''.$$

Infatti dalle (45) e (47) segue

$$\lambda(t'') - \lambda(t') = \int_{t'}^{t''} y' R(y, y')\, d\, t$$

e l'integrale a secondo membro si annulla solo se è $y' R(y, y') \equiv 0$ in tutto $t' \longmapsto t''$, cioè per $y'(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv$ cost. (perchè $y' R(y, y') > 0$ per $y' \neq 0$): ma, in tal caso, per il teorema di unicità, è $y(t) \equiv$ cost., per tutti i valori di t, contro l'ipotesi che L sia una caratteristica

Consideriamo ora, nel piano (y, p), la famiglia di linee l_λ, di equazioni

$$(49) \qquad \frac{p^2}{2} - \varphi(y) + \lambda = 0,$$

con λ costante arbitraria. *Per ogni punto* (y_0, p_0) *passa una e una sola linea,* l_{λ_0}, *con* $\lambda_0 = \varphi(y_0) - \frac{p_0^2}{2}$. Dalla (47) segue allora che, *al crescere di* t, *il punto* $P(t)$, *descrivendo la caratteristica* L, *appartiene successivamente a linee* $l_{\lambda(t)}$ *corrispondenti a valori crescenti di* λ. La tesi risulta con ciò provata.

Consideriamo ora (nella fig. 3) il grafico della funzione

$$(50) \qquad u = \varphi(y) = \int_0^y F(y)\, d\, y - \mu\, y + \psi(y),$$

dove $\mu \geq 0$ è il *valor medio*, nell'intervallo $0 \longmapsto 2\pi$, di $F(y)$ e

$$\psi(y) = \int_0^y \{F(y) - \mu\}\, d\, y$$

è una funzione periodica, di periodo 2π.

Perciò $\varphi(y)$ presenta dei minimi relativi nei punti y_{2k} $(F = 0,\ F' > 0)$, dei massimi relativi nei punti y_{2k-1} $(F = 0,\ F' < 0)$. Inoltre, essendo per ipotesi $\mu \geq 0$, se dal punto $Q_{2k}(y_{2k}, \varphi(y_{2k}))$, di minimo, conduciamo, nel verso opposto a quello dell'asse y, una semiretta parallela

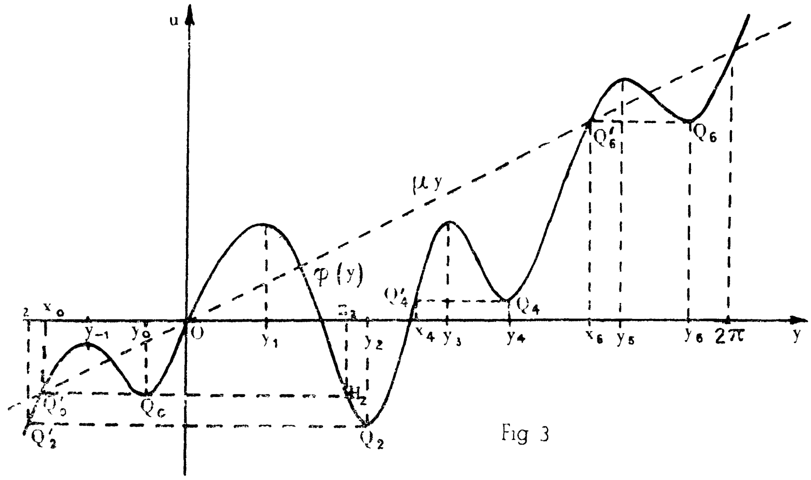

Fig 3

a tale asse, questa incontra la linea $u = \varphi(y)$ in un punto $Q'_{2k}(x_{2k}, \varphi(x_{2k}))$ (con $x_{2k} < y_{2k-1} < y_{2k}$) tale che in tutto il segmento $x_{2k} - y_{2k}$, risulti $\varphi(y) >$ $> \varphi(x_{2k})$ e sia inoltre $\varphi(x_{2k}) = \varphi(y_{2k})$.

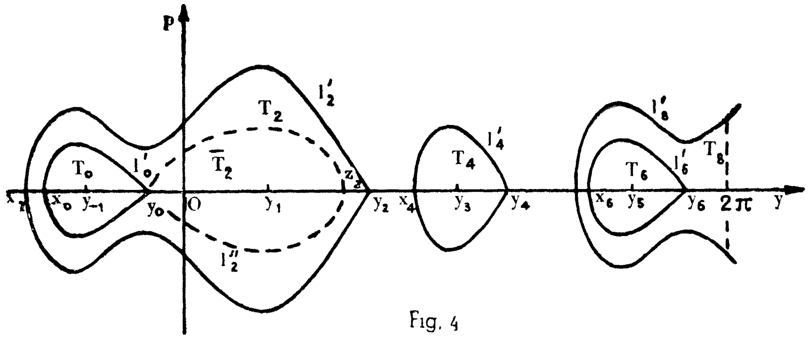

Fig. 4

La funzione

$$p = \pm \sqrt{2\{\varphi(y) - \varphi(y_{2k})\}} \tag{51}$$

è allora definita nell'intervallo $x_{2k} \vdash\!\dashv y_{2k}$ ed ha, nel piano (y, p) il grafico indicato nella fig. 4, costituente una parte, l'_{2k}, della linea $l_{\varphi\, y_{2k}}$).

Indichiamo con T_{2k} il dominio delimitato da l'_{2k}. Può darsi che un dominio T_{2k} contenga dei domini T_{2h}, con $h < k$ corrispondenti ai punti y_{2h}

contenuti nell'intervallo $x_{2k} - y_{2k}$. *Uno almeno dei punti* y_{2i} (con $1 \leq i \leq s$) *non è interno a nessun dominio* T_{2k}. Basta infatti assumere y_{2i} in modo che $\varphi(y_{2i})$ sia il minimo dei valori $\varphi(y_2), \ldots, \varphi(y_{2s})$. Si noti poi che se T_{2k} contiene T_{2k-2}, alla linea $l_{\varphi(y_{2k-2})}$ appartiene, oltre a l'_{2k-2}, una parte chiusa, l''_{2k}, la quale è frontiera di un dominio $\overline{T}_{2k}$ contenuto in T_{2k} e contenente nel suo interno *il solo punto singolare* N_{2k-1} (nella fig. 4 la linea l''_2 è tratteggiata).

Osserviamo inoltre che il punto N_{2k} è un *punto angoloso* per la linea l'_{2k}. In un intorno sinistro di y_{2k} la (51) si scrive infatti

$$p = \pm \sqrt{(y - y_{2k})^2 \varphi''(\xi)} = \pm (y - y_{2k}) \sqrt{F'(\xi)} \qquad (y < \xi < y_{2k})$$

e quindi le due semirette tangenti a l'_{2k} nel punto N_{2k} hanno coefficienti angolari

(52) $$n'_{2k} = -\sqrt{F'(y_{2k})} \quad , \quad n''_{2k} = \sqrt{F''(y_{2k})} \, .$$

Il comportamento asintotico, per $t \to +\infty$, di una caratteristica L la quale, all'istante t_0, abbia un punto $P_0(y_0, p_0)$ in uno dei domini T_{2k} si studia facilmente. Infatti, per $\varphi(y_{2k}) \leq \lambda \leq \varphi(y_{2j+1})$ (essendo $\varphi(y_{2j+1})$ il massimo di $\varphi(y)$ nell'intervallo $x_{2k} \vdash y_{2k}$), la linea l_λ contiene una parte chiusa $\overline{l}_\lambda$ (eventualmente formata da più cicli distinti e da punti isolati) appartenente al dominio T_{2k} e di equazione

$$p = \pm \sqrt{2 \{ \varphi(y) - \lambda \}} \, .$$

Inoltre, detta $\overline{T}_\lambda$ la parte di T_{2h} costituita da $\overline{l}_\lambda$ e dai punti ad essa interni, $\overline{T}_{\lambda'}$ contiene $\overline{T}_{\lambda''}$ per $\lambda' < \lambda''$ e $T_{\varphi(y_{2j+1})}$ si riduce al punto N_{2j+1} ed eventualmente ad altri punti N_{2h+1}.

Al crescere di t, il punto $P(t)$ mobile sulla caratteristica L, appartiene a linee $l_{\lambda(t)}$ corrispondenti a valori di λ crescenti con continuità. Non può perciò uscire da T_{2k} (perchè l'_{2k} corrisponde al valore minimo $\lambda = \varphi(y_{2k})$). Siccome non esistono caratteristiche chiuse, si conchiude, per un teorema di di Bendixson (11) che il punto $P(t)$ tende, per $t \to +\infty$, a uno dei punti singolari *interni* al dominio T_{2k}. Pertanto, *se* P_0 *non appartiene a una caratteristica instabile che penetri in* T_{2k}, *il punto* $P(t)$ *tende a uno dei punti* N_{2i-1} *interni a* T_{2k} *cioè* L *è una caratteristica stabile.*

Si noti che *se* T_{2k} *contiene nel suo interno il solo punto singolare* N_{2k-1}, *la caratteristica considerata è necessariamente stabile. Se poi* T_{2k} *contiene*

(11) I. BENDIXSON, loc. cit. in (7), p. 17.

T_{2k-2}, *sarà sicuramente stabile ogni caratteristica avente un punto* P_0 *nel dominio* $\overline{T}_{2k}$.

Si è ottenuto in tal modo un *criterio* molto semplice *di stabilità.*

Consideriamo ora, nel piano (y, p) la linea σ di stazionarietà, avente equazione

$$F(y) - R(y, p) = 0,$$

o, in forma esplicita, $p = \zeta(y)$.

Poichè $R(y, p)$ ha lo stesso segno di p, risulta

$$\zeta(y) > 0 \qquad \text{se } F(y) > 0$$

$$\zeta(y) < 0 \qquad \text{se } F(y) < 0$$

e quindi

$$\zeta(y) = 0 \qquad \text{nei } soli \text{ punti } y_k.$$

Nei punti interni al dominio τ, tratteggiato nella fig. 5 e avente la fron

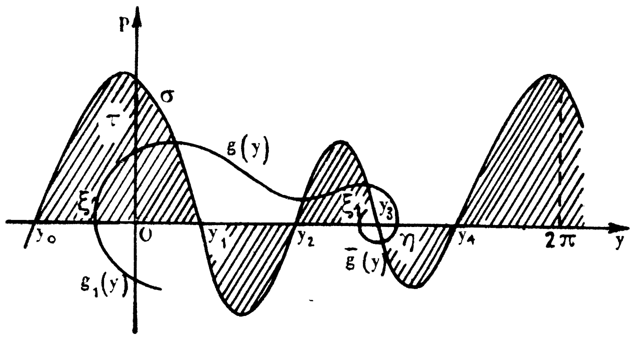

Fig 5

tiera costituita dalla linea σ e dall'asse y, le caratteristiche hanno andamento crescente, risultando, per la (13), $\frac{dp}{dy} > 0$; nei punti esterni a τ è $\frac{dp}{dy} < 0$ e le caratteristiche hanno andamento decrescente.

Consideriamo un arco di caratteristica di equazione cartesiana

$$p = g(y) \tag{53}$$

(con $g(y)$ integrale della (13)) situato nel semipiano $p > 0$, oppure nel semipiano $p < 0$, e sia $\xi - \eta$ il più ampio intervallo aperto in cui è $g(y) > 0$, oppure $g(y) < 0$.

Dimostriamo ora i seguenti lemmi.

LEMMA III. — *Siano ξ ed η finiti. Allora, se è* $g(y) > 0$, *risulta*

$$\lim_{y \to \eta -} g(y) = 0 \tag{54}$$

e inoltre

$$\lim_{y \to \xi +} g(y) = 0 \qquad \textit{oppure} \lim_{y \to \xi +} g(y) = +\infty . \tag{55}$$

Se è $g(y) < 0$, *risulta*

$$\lim_{y \to \xi +} g(y) = 0 \tag{56}$$

e inoltre

$$\lim_{y \to \eta -} g(y) = 0 \qquad \textit{oppure} \lim_{y \to \eta -} g(y) = -\infty . \tag{57}$$

Supponiamo $g(y) > 0$ e osserviamo innanzi tutto, per provare la (54), che può esistere un intorno sinistro $\alpha \mid\!\!- \eta$ di η nel quale sia $g(y) \geq \zeta(y)$. In tal caso $g(y)$ è non crescente e tende, per $y \to \eta -$, a un limite $l \geq 0$. Non può poi essere $l > 0$ perchè $\dfrac{f(y, p)}{p}$ risulterebbe continua in tutto un intorno del punto (η, l) e la linea integrale $p = g(y)$ si potrebbe prolungare, restando $g(y) > 0$, in un intorno destro di η, con la condizione iniziale $g(\eta) = l$, ciò che è assurdo. Deve perciò essere $l = 0$.

Non può poi risultare, in un intorno sinistro $\alpha \mid\!\!- \eta$ di η, $g(y) \leq \zeta(y)$. In tal caso infatti $g(y)$ risulta non decrescente e tende, per $y \to \eta -$, a un limite l, con $0 < l \leq \zeta(\eta)$ e si ricade nel caso precedente.

Supponiamo infine che in ogni intorno sinistro $\alpha \mid\!\!- \eta$ di η esistano punti y con $g(y) > \zeta(y)$ e punti y con $g(y) < \zeta(y)$. Sarà perciò $\zeta(y) \geq 0$ per $0 < \eta - y \leq \bar{\alpha}$, con $\bar{\alpha} > 0$ e convenientemente piccolo. Dimostriamo che risulta

$$\lim_{y \to \eta -} g(y) = \zeta(\eta). \tag{58}$$

Preso $\varepsilon > 0$, si determini α_ε, con $0 < \alpha_\varepsilon \leq \bar{\alpha}$, in modo che, per

$$0 < \eta - y \leq \alpha_\varepsilon , \tag{59}$$

risulti

$$| \zeta(y) - \zeta(\eta) | < \varepsilon. \tag{60}$$

Sia poi y_ε^* la minima ascissa dei punti $\bar{y}$ soddisfacenti alla (59) per i quali è $g(\bar{y}) = \zeta(\bar{y})$ e osserviamo che $g(y)$ è funzione monotona in ogni intervallo $\gamma \vdash\!\dashv \delta$ tale che sia, per $\gamma < y < \delta$, $g(y) < \zeta(y)$ oppure $g(y) > \zeta(y)$ e inoltre $g(\gamma) = \zeta(\gamma)$, $g(\delta) = \zeta(\delta)$. Perciò, se γ e δ appartengono all'intervallo $y^*_\varepsilon \vdash\!\!- \eta$, risulta, per la (60),

$$| g(\gamma) - \zeta(\eta) | < \varepsilon , \quad | g(\delta) - \zeta(\eta) | < \varepsilon$$

e quindi

$$| g(y) - \zeta(\eta) | < \varepsilon . \tag{61}$$

Poichè la (61) vale in tutto l'intervallo $y^*_\varepsilon \vdash\!\!- \eta$, la (58) è dimostrata.

Non può poi essere $\zeta(\eta) > 0$, per quanto si è già rilevato.

La (54) è perciò dimostrata.

Consideriamo ora il punto ξ. Osserviamo che se in un intorno destro di ξ, $\xi \,-\!\!\dashv \beta$, risulta $g(y) \geq \zeta(y)$, $g(y)$ è non crescente ed esiste il limite

$$\lim_{y \to \xi +} g(y).$$

Tale limite o vale $+\infty$ o è ≥ 0. Non può però essere positivo, se finito, perchè l'integrale $g(y)$ sarebbe prolungabile, restando positivo, a sinistra di ξ. Vale perciò necessariamente l'una o l'altra delle (55). Se si esaminano poi gli altri due casi, si trova che deve valere la prima delle (55).

In modo del tutto analogo, se è $g(y) < 0$, si dimostrano le (56) e (57).

Si noti che, *se risulta* $g(\xi +) = g(\eta -) = 0$, *l'ampiezza* $\eta - \xi$ *dell'intervallo considerato non può superare* 2π. Infatti se fosse $\eta - \xi > 2\pi$ le due linee integrali $L\,(p = g(y))$ ed $L'\,(p = g(y - 2\pi))$, definite rispettivamente negli intervalli $\xi \,\overline{}\, \eta$, $(\xi + 2\pi) \,\overline{}\, (\eta + 2\pi)$ avrebbero necessariamente almeno un punto (y, p), con $p > 0$, in comune, ciò che è assurdo.

Lemma IV. *Sia* $g(y) > 0$, ξ *ed* η *finiti. Allora, se è* $\eta \neq y_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *la caratteristica* L *di cui fa parte l'arco* $p = g(y)$ *si prolunga nel semipiano* $p < 0$, *in un arco di equazione* $p = \bar{g}(y)$, *con* $\bar{g}(y)$ *funzione definita in un intorno sinistro di* η. *Detto poi* $\xi_1 \,\overline{}\, \eta$ *il più ampio intervallo in cui è* $\bar{g}(y) < 0$, *risulta* $\xi < \xi_1 < \eta$.

Analogamente, se è $\xi \neq y_{2h}$ [12] $(h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, L *si prolunga nel semipiano* $p < 0$, *in un arco di equazione* $p = g_1(y)$, *con* $g_1(y) < 0$ *nell'intervallo* $\xi \,\overline{}\, \eta_1$, *con* $\eta < \eta_1$. *Inoltre, se è sempre* $g_1(y) \geq m$, η_1 *è necessariamente finito.*

Infatti, è chiaro che η deve appartenere a un intervallo $y_{2k-1} \vdash\!\dashv y_{2k}$. Se poi è $y_{2k-1} < \eta < y_{2k}$, il punto $(\eta, 0)$ non è singolare e la caratteristica

---

[12] Non può essere $\xi = y_{2h+1}$ perchè $g(y)$ è decrescente in un intorno destro di tale punto

L penetra nel semipiano $p < 0$: inoltre (come risulta dalla fig. 5) il punto $P(t)$, descrivendo tale prolungamento di L, si sposta, al crescere di t, da destra a sinistra, lungo un arco $p = \overline{g}(y)$, con $\overline{g}(y) \geq m$ (minimo di $\zeta(y)$). Se poi è $\xi_1 \leq \xi$, risulta $\overline{g}(\xi) \leq 0$ e ai due punti $P_1(\xi, g(\xi+)) \equiv P_1(\xi, 0)$, $P_2(\xi, \overline{g}(\xi))$ corrispondono, per il parametro $\lambda(t)$ definito dalla (47) i due valori

$$\lambda_1 = \varphi(\xi) \quad , \quad \lambda_2 = \varphi(\xi) - \frac{\overline{g}^2(\xi)}{2} \leq \lambda_1 ,$$

ciò che è assurdo perchè $\lambda(t)$ è funzione crescente di t lungo una caratteristica.

In modo analogo, considerando la $g_1(y)$, si trova che non può essere $\eta_1 \leq \eta$. Supponiamo ora $\eta_1 = +\infty$, $g_1(y) \geq m$ in tutto l'intervallo $\xi \rule{1em}{0.4pt} +\infty$. Detto $\nu < 0$ il massimo di $g_1(y)$ nell'intervallo $\xi + 2\pi \,\vdash\!\dashv\, \xi + 4\pi$, si ha, per $y \geq \xi + 2\pi$, (osservando che è $g_1(y + 2\pi) < g_1(y)$),

$$m \leq g_1(y) \leq \nu .$$

Esisterebbe allora una caratteristica periodica negativa $p = p^*(y)$ soddisfacente alla stessa limitazione. Scritta poi la (13) nella forma

$$(62) \qquad \frac{1}{2} \frac{d\,p^2}{d\,y} = F(y) \quad R(y, p)$$

e integrando nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 2\pi$ in corrispondenza della soluzione $p = p^*(y)$ si troverebbe

$$0 = \int_0^{2\pi} F(y)\,d\,y - \int_0^{2\pi} R(y, p^*(y))\,d\,y$$

ciò che è assurdo perchè, essendo $p^*(y) < 0$, risulta

$$\int_0^{2\pi} R(y, p^*(y))\,d\,y < 0$$

e, per la (10),

$$\int_0^{2\pi} F(y)\,d\,y = 2\pi\mu \geq 0 .$$

Notiamo infine che, in virtù di quanto ora si è dimostrato, *non può esistere un integrale* p = p* (y) *periodico e negativo della* (13).

6. — Di fondamentale importanza, per caratterizzare le condizioni di stabilità o di divergenza, è lo studio delle caratteristiche instabili S'_{2k} ed R'_{2k}.

a) Consideriamo dapprima una caratteristica S'_{2k}. Questa, in un intorno destro di y_{2k}, $y_{2k} \mid\!\!-\!\!- \eta_{2k}$, ha equazione

$$p = \omega_{2k}(y)\,, \tag{63}$$

con

$$\omega_{2k}(y) < 0 \qquad (\omega_{2k}(y_{2k}) = 0)\,. \tag{64}$$

Intenderemo che tale intorno sia il più ampio possibile

Dimostriamo che, *per un valore almeno di* k (*e quindi per infiniti, a causa della periodicità*), *risulta*

$$\lim_{y \to \eta_{2k}-} \omega_{2k}(y) = -\infty\,. \tag{65}$$

Sia dapprima, per un certo k, $\eta_{2k} = +\infty$. Detto $\nu < 0$ il massimo di $\omega_{2k}(y)$ nell'intervallo $(y_{2k} + 2\pi) \mid\!\!-\!\!-\!\!\mid (y_{2k} + 4\pi)$, non può essere, per ogni $y \geq y_{2k}$,

$$\omega_{2k}(y) \geq m$$

(essendo, al solito, m il minimo di $\zeta(y)$) perchè esisterebbe una caratteristica $p = p^*(y)$ periodica e negativa, ciò che è assurdo, come si è constatato nella dimostrazione del lemma IV.

Esiste perciò un $\bar{y}$ tale che sia $\omega_{2k}(\bar{y}) < m$. Allora, per $y \geq \bar{y}$, $\omega_{2k}(y)$ è decrescente ed esiste il limite

$$\lim_{y \to +\infty} \omega_{2k}(y)\,.$$

Questo non può essere finito perchè esisterebbe una soluzione periodica (anzi costante) negativa. Resta perciò provata, per $\eta_{2k} = +\infty$, la (65).

Sia ora η_{2k} finito per tutte le caratteristiche. Dimostriamo che non può essere, per tutti i valori di k,

$$\omega_{2k}(y) \geq m \qquad (y_{2k} < y < \eta_{2k})\,. \tag{66}$$

Infatti, se vale la (66), si ha, per la prima delle (57),

$$\omega_{2k}(\eta_{2k}-) = 0$$

ed η_{2k} appartiene necessariamente a un intervallo $y_{2i-1} \mid\!\!-\!\!\mid y_{2i}$ (vedasi la fig. 6) con $i > k$. Se è $\eta_{2k} = y_{2i}$ la caratteristica S'_{2k} coincide con S''_{2i}.

Supponiamo ora $\eta_{2k} < y_{2i}$ e conduciamo dal punto N_{2i} la caratteristica S''_{2i}. Questa in un intorno sinistro di y_{2i} ha equazione

$$p = \bar{\omega}_{2i}(y)$$

e sarà necessariamente

$$m \leq \bar{\omega}_{2i}(y) < \omega_{2k}(y) \tag{67}$$

in tutti i punti dell'intervallo $y_{2k} \frown \eta_{2k}$.

Sia $\xi_{2i} \frown y_{2i}$ il più ampio intervallo in cui è $\bar{\omega}_{2i}(y) < 0$. Non può essere $\xi_{2i} = -\infty$ perchè (avendosi sempre $\bar{\omega}_{2i}(y) \geq m$, $\bar{\omega}_{2i}(y - 2\pi) < \bar{\omega}_{2i}(y)$) esisterebbe una soluzione periodica negativa. Perciò ξ_{2i} è finito ed appartiene necessariamente a un intervallo $y_{2h} \vdash\!\dashv y_{2h+1}$ con $h < k$. Se è $\xi_{2i} = y_{2h}$, risulta $S''_{2i} \equiv S'_{2h}$. Se è $\xi_{2i} > y_{2h}$ si conduca la caratteristica S'_{2h} la quale, per la (66), incontrerà l'asse y in un punto η_{2h} appartenente a un intervallo $y_{2l-1} \dashv y_{2l}$, con $l > i$.

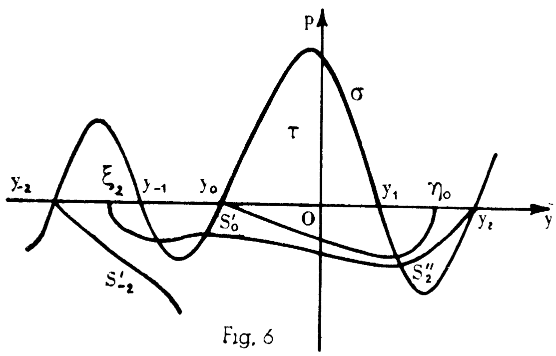

Fig. 6

Così procedendo, siamo certi di trovare due caratteristiche S'_{2q} ed S''_{2r} le quali coincidono. Infatti i successivi intervalli $y_{2k} \vdash\!\dashv \eta_{2k}$, $\xi_{2i} \vdash\!\dashv y_{2i}$, $y_{2l} \vdash\!\dashv \eta_{2l}$ contengono ciascuno almeno due punti singolari in più del precedente. Se la successione procedesse indefinitamente le corrispondenti ampiezze supererebbero, da un certo punto in poi, 2π, ciò che è assurdo.

Consideriamo ora tra le caratteristiche $S'_2, S'_4, \ldots, S'_{2s}$ quelle analoghe alla S'_{2q} ora indicata. Tra tali caratteristiche prendiamone poi una, $S'_{2u} \equiv S''_{2v}$, in modo che l'intervallo $y_{2u} \vdash\!\dashv y_{2v}$ contenga il massimo numero di punti singolari. Tracciamo il grafico di tutte le S'_{2u+ns} con n intero. Dal punto y_{2v} conduciamo poi la S'_{2v}: questa coincide con una S''_w perchè, in caso contrario, la caratteristica S''_{2w} (prendendo w in modo che sia $y_{2w-1} < \eta_{2v} < y_{2w}$) passerebbe necessariamente al di sotto di S'_{2u} e si dedurrebbe l'esistenza di una caratteristica $S'_{2\vartheta} \equiv S''_{2\varrho}$ il cui intervallo di definizione $y_{2\vartheta} \vdash\!\dashv y_{2\varrho}$ conterrebbe più punti singolari dell'intervallo $y_{2u} \vdash\!\dashv y_{2v}$, ciò che è assurdo. Tracciamo il grafico di tutte le $S'_{2(v+ns)}$. Così proseguendo, si estrae dalla successione $\{S'_{2k}\}$ una successione parziale $\{S'_{2k_r}\}$ $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ la quale, nel suo complesso, si rappresenta con un'equazione

$$p = \omega(y),$$

con $\omega(y)$ funzione continua, periodica di periodo 2π, negativa per $y \neq y_{2k_r}$, la quale, per $y \neq y_{2r}$ soddisfa all'equazione (62) Poichè la derivata $\omega'(y)$ è continua in tutto l'intervallo $-\infty \overline{} + \infty$, esclusi i punti y_{2k_r} dove presenta discontinuità di prima specie, si ha allora, per la (62), comunque si prendano y e $\bar{y}$,

$$\frac{\omega^2(y)}{2} - \frac{\omega^2(\bar{y})}{2} = \int_{\bar{y}}^{y} F(y)\, d\, y - \int_{\bar{y}}^{y} R(y\,,\,\omega(y))\, d\, y\,.$$

In particolare, per $y = \bar{y} + 2\pi$, risulta

$$0 = \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} F(y)\, d\, y - \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} R(y\,,\,\omega(y))\, d\, y\,,$$

ciò che è assurdo, essendo

$$\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} F(y)\, d\, y \geq 0 \quad , \quad \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} R(y\,,\,\omega(y))\, d\, y < 0\,.$$

Perciò la (66) non può valere per tutti i valori di k. Esiste cioè una caratteristica S'_j almeno tale che risulti, in un punto $\bar{y}$,

$$\omega_{2j}(\bar{y}) < m\,.$$

Per $y \geq \bar{y}$, $\omega_{2j}(y)$ è funzione decrescente. Di qui si deduce allora

$$\lim_{y \to \eta_{2j}-} \omega_{2j}(y) = -\infty$$

cioè la tesi.

b) Consideriamo ora le caratteristiche R'_{2k}. Una di tali caratteristiche è positiva in un intorno sinistro (e intenderemo il più ampio possibile) $\vartheta_{2k} \overline{} y_{2k}$ del punto y_{2k}, nel quale ha equazione

(68) $$p = \psi_{2k}(y) \qquad (\psi_{2k}(y_{2k}) = 0)\,.$$

Se ϑ_{2k} *è finito risulta allora*, per le (55),

(69) $$\lim_{y \to \vartheta_{2k}+} \psi_{2k}(y) = 0\,, \quad \textit{oppure} \quad \lim_{y \to \vartheta_{2k}+} \psi_{2k}(y) = +\infty\,.$$

Dimostriamo che, *se è* $\vartheta_{2k} = -\infty$, *risulta*

$$\lim_{y \to -\infty} \psi_{2k}(y) = +\infty . \tag{70}$$

Non può essere infatti per ogni $y \leq y_{2k}$, $\psi_{2k}(y) \leq M$ (massimo di $\zeta(y)$). In tale ipotesi esiste infatti una caratteristica $p = p^*(y)$ periodica e si ha (osservando che è $\psi_{2k}(y - 2\pi) > \psi_{2k}(y)$)

$$p^*(y) > \psi_{2k}(y) \quad \text{per} \quad y < y_{2k} . \tag{71}$$

Ora, integrando la (62) nell'intervallo $(y_{2k} - 2\pi) \vdash\!\dashv y_{2k}$ in corrispondenza delle due soluzioni $p^*(y)$ e $\psi_{2k}(y)$ si trova

$$\int_{y_{2k}-2\pi}^{y_{2k}} F(y)\, dy = \int_{y_{2k}-2\pi}^{y_{2k}} R(y, p^*(y))\, dy ,$$

$$\int_{y_{2k}-2\pi}^{y_{2k}} F(y)\, dy = \int_{y_{2k}-2\pi}^{y_{2k}} R(y, \psi_{2k}(y))\, dy \quad \frac{\psi_{2k}^2(y_{2k} - 2\pi)}{2}$$

e questo è assurdo. avendosi, per la (71),

$$\int_{y_{2k}-2\pi}^{y_{2k}} R(y, p^*(y))\, dy > \int_{y_{2k}-2\pi}^{y_{2k}} R(y, \psi_{2k}(y))\, dy .$$

Esiste perciò un $\bar{y} < y_{2k}$, con $\psi_{2k}(\bar{y}) > M$. Allora $\psi_{2k}(y)$ è decrescente per $y < \bar{y}$ e tende a un limite per $y \to -\infty$. Questo non può essere finito perchè esisterebbe una caratteristica periodica (anzi costante) $> \psi_{2k}(y)$, ciò che è escluso dal ragionamento ora fatto. Resta perciò dimostrata la (70).

c) Sia S'_{2j} una caratteristica soddisfacente alla condizione

$$\lim_{y \to \eta_{2j}-} \omega_{2j}(y) = -\infty \tag{72}$$

e consideriamo la corrispondente caratteristica R'_{2j}.

Può darsi che sia

$$\lim_{y \to \vartheta_{2j}+} \psi_{2j}(y) = +\infty$$

e allora la linea $R'_{2j} + S'_{2j}$ ha l'andamento indicato nella fig. 7.

Può darsi poi che risulti

$$\lim_{y \to \vartheta^{+}_{2j}} \psi_{2j}(y) = 0 .$$

In tal caso ϑ_{2j} è finito ed R'_{2j} incontra l'asse y nel punto ϑ_{2j}, appartenente necessariamente a un intervallo $y_{2h} \vdash y_{2h+1}$, con $h < j$.

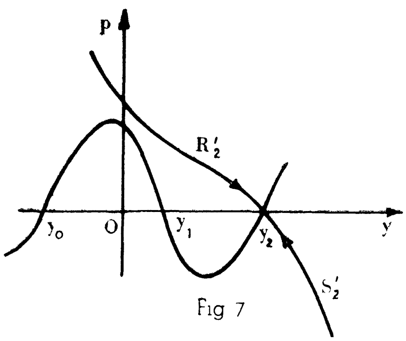

Fig 7

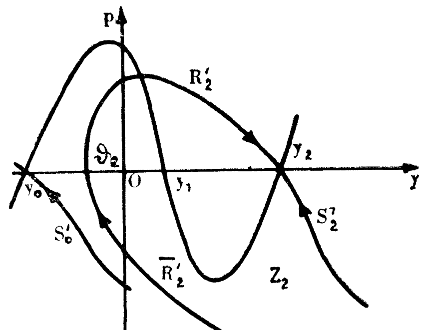

Fig. 8

Supponiamo dapprima $y_{2h} < \vartheta_{2j}$. Allora R'_{2j} si prolunga nel semipiano $p < 0$ in una linea (che diremo, per maggior chiarezza, $\bar{R}'_{2j}$) avente equazione

$$p = \bar{\psi}_{2j}(y), \tag{73}$$

con $\bar{\psi}_{2j}(\vartheta_{2j}) = 0$, $\bar{\psi}_{2j}(y) < 0$ in un intorno destro $\vartheta_{2j} \vdash \nu_{2j}$ (e intenderemo il più ampio possibile) di ϑ_{2j}.

Non può essere, in tutto l'intervallo $\vartheta_{2j} \vdash \nu_{2j}$,

$$\bar{\psi}_{2j}(y) > m . \tag{74}$$

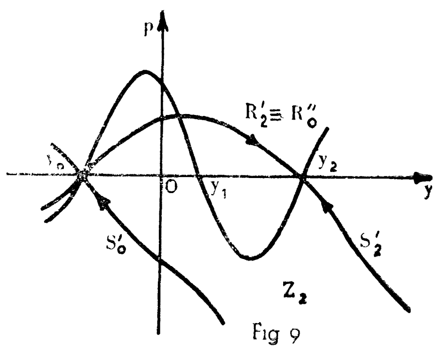

Fig 9

In tal caso infatti ν_{2j} è finito per il lemma IV e risulta

$$\lim_{y \to \nu^{-}_{2j}} \bar{\psi}_{2j}(y) = 0 .$$

Inoltre il punto ν_{2j} appartiene necessariamente a un intervallo $y_{2l-1} \vdash y_{2l}$ e sarà, per la (72), $y_{2l} \leq y_{2j}$, ciò che è assurdo, per il lemma IV. Esiste allora un punto $\bar{y}$, con $\bar{\psi}_{2j}(\bar{y}) < m$. Con il solito ragionamento, si ricava che, *se è* $y_{2h} < \vartheta_{2j} < y_{2h+1}$, *risulta*

$$\lim_{y \to \vartheta_{2j}^-} \overline{\psi}_{2j}(y) = -\infty .$$

In tal caso la linea $S'_{2j} + R'_{2j} + \overline{R}'_{2j}$ *è la frontiera di un dominio* Z_{2j} (indicato nella fig. 8), *contenente nel suo interno i punti singolari* $N_{2h+1}, \ldots, N_{2j-1}$.

Può essere infine $\vartheta_{2j} = y_{2h}$. In tal caso risulta $R'_{2j} \equiv R''_{2h}$. Condotta poi la caratteristica S'_{2h} si dimostra che non può incontrare l'asse y in un punto $\eta_{2h} \leq y_{2j}$ e *risulta* perciò

$$\lim_{y \to \eta_{2h}^-} \omega_{2h}(y) = -\infty .$$

Se fosse infatti $\eta_{2h} = y_{2j}$, si avrebbe, per la (62), l'assurdo (perchè $\psi_{2j}(y) > \omega_{2h}(y)$):

$$\int_{y_{2h}}^{y_{2j}} R(y, \psi_{2j}(y))\, dy = \int_{y_{2h}}^{y_{2j}} R(y, \omega_{2h}(y))\, dy .$$

Non può poi essere $\eta_{2h} < y_{2j}$ perchè la caratteristica S'_{2h}, prolungandosi nel semipiano $p \geq 0$, incontrerebbe nuovamente l'asse y in un punto $\delta_{2h} > y_{2h}$, ciò che è assurdo per il lemma IV.

In questo caso la linea $S'_{2j} + R'_{2j} + S'_{2h}$ è la frontiera di un dominio Z_{2j} (indicato nella fig. 9) contenente nel suo interno i punti singolari $N_{2h+1}, \ldots, N_{2j-1}$.

d) Dimostriamo che *se, per una caratteristica* R'_{2j}, *risulta*

(75) $$\lim_{y \to \vartheta_{2j}^+} \psi_{2j}(y) = +\infty ,$$

esistono due caratteristiche R'_{2q}, S'_{2q}, *relative al medesimo punto* N_{2q}, *per le quali si ha*

(76) $$\lim_{y \to \vartheta_{2q}^+} \psi_{2q}(y) = +\infty , \qquad \lim_{y \to \eta_{2q}^-} \omega_{2q}(y) = -\infty .$$

Consideriamo le caratteristiche S'_{2k}, con $k \geq j$. Se risulta

(77) $$\lim_{y \to \eta_{2j}^-} \omega_{2j}(y) = -\infty$$

la tesi è provata.

In caso contrario, consideriamo, tra le caratteristiche successive $S'_{2j+2}, \ldots$, una, S'_{2l}, per la quale sia

(78) $$\lim_{y \to \eta_{2l}^-} \omega_{2l}(y) = -\infty .$$

Se è

$$\lim_{y \to \vartheta_{2l}^+} \psi_{2l}(y) = +\infty , \tag{79}$$

la tesi è provata.

Se non è verificata la (79), consideriamo la caratteristica di indice massimo, S'_{2h}, la quale non sia interna al dominio Z_{2l}. Per S'_{2h} sarà allora (come segue dalle fig. (8) e (9))

$$\lim_{y \to \eta_{2h}^-} \omega_{2h}(y) = \infty .$$

Inoltre sarà $h > j$ perchè, per ipotesi, non vale la (77) e, se fosse $h < j$, la linea R'_{2j} avrebbe punti interni a Z_{2l}, ciò che è assurdo.

Se è allora

$$\lim_{y \to \vartheta_{2h}^+} \psi_{2h}(y) = +\infty$$

la tesi è dimostrata. In caso contrario ripetiamo per S'_{2h} quanto abbiamo fatto per S'_{2l}. Così procedendo, dovremo trovare una coppia R'_{2q}, S'_{2q}, con $q > j$ per la quale valgono le (76): infatti, in caso contrario, R'_{2j} verrebbe ad avere punti interni a un dominio Z_{2i}, per un certo valore $i > j$, ciò che è assurdo.

7. — Siamo ora in grado di *caratterizzare* il comportamento asintotico, per $t \to +\infty$, di *tutti* gli integrali della (2).

a) Dimostriamo che *se per una caratteristica* R'_{2j} *vale la* (75), *la* (2) *ammette, oltre alle caratteristiche instabili, soltanto caratteristiche stabili.*

Sia infatti $L\{y(t), p(t)\}$ una caratteristica *non instabile* e sia $\overline{P}(\overline{y}, \overline{p})$ un punto di L corrispondente al valore $\overline{t}$ del tempo.

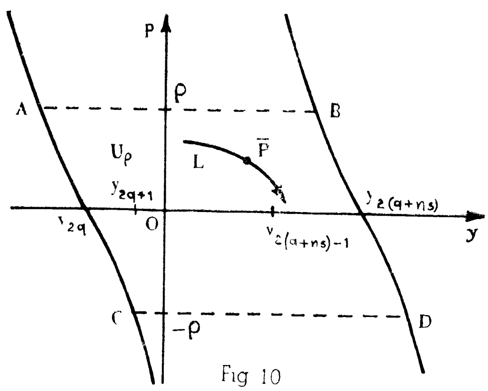

Fig 10

Sia R'_{2q}, S'_{2q} una coppia di caratteristiche per cui valgono le (76) e tali che $\overline{P}$ appartenga al dominio U avente come frontiera, a sinistra, la linea $R'_{2q} + S'_{2q}$ e, a destra, la linea $R'_{2(q+ns)} + S'_{2(q+ns)}$, n essendo un conveniente intero positivo. Sia ϱ un numero maggiore dei numeri $\overline{p}$, M, $|m|$ e sia U_ϱ la parte di U contenuta nella striscia $(-\infty < y < +\infty$, $-\varrho \leq p \leq \varrho)$. Allora il punto $P(t)$, descrivendo L, non può uscire, per $t \geq \overline{t}$, dal dominio U_ϱ. Non può infatti uscirne lateralmente, perchè incontrerebbe una delle caratteristiche R'_{2q}, S'_{2q}, $R'_{2(q+ns)}$, $S'_{2(q+ns)}$. Non può poi (riferendoci alla fig. 10) attraversare, in un istante t, il segmento $A\,B$ perchè dovrebbe essere $\frac{d\,p}{d\,t} \geq 0$, mentre è $\frac{d\,p}{d\,y} < 0$, $\frac{d\,y}{d\,t} = p > 0$. Analogamente non può attraversare il segmento $C\,D$, perchè dovrebbe essere $\frac{d\,p}{d\,t} \leq 0$, mentre è $\frac{d\,p}{d\,y} < 0$, $\frac{d\,y}{d\,t} = p < 0$.

Per il teorema di Bendixson già utilizzato nel § 5, poichè L non è instabile, il punto $P(t)$ tende allora, per $t \to +\infty$, a uno dei punti N_{2i+1} contenuti in U_ϱ cioè la caratteristica L è stabile.

b) Supponiamo ora che per nessuna caratteristica R'_{2j} valga la (75). Allora *tutte* le caratteristiche R'_{2k} incontrano l'asse y.

Consideriamo una caratteristica S'_{2h} per la quale risulti

$$\lim_{y \to \eta_{2h}-} \omega_{2h}(y) = -\infty$$

e il corrispondente dominio Z_{2h}.

Sia poi L *una caratteristica non instabile, la quale abbia un punto* $\overline{\mathrm{P}}(\bar{\mathrm{y}}, \bar{\mathrm{p}})$ *in* Z_{2h}. *Dimostriamo che* L *è stabile.*

Preso infatti un numero negativo δ, con

$$\delta < \bar{p}, \quad \delta < m$$

e detta U_δ la parte di Z_{2h} contenuta nel semipiano $p \geq \delta$ si dimostra, come in *a*), che il punto $P(y(t), p(t))$ tende, per $t \to +\infty$, a uno dei punti N_{2i+1} contenuti in Z_{2h}. La caratteristica L è pertanto stabile.

Consideriamo ora tutti i domini Z_{2h} (dove h descrive una successione di interi) e osserviamo che uno di questi può risultare interno a un numero *finito* di analoghi domini (perchè, per la periodicità, possono essere interni a un dato dominio Z_{2h} al massimo $2\,s - 1$ punti singolari). Sia $\{Z_{2k_r}\}$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) la successione formata dai domini che non sono interni a nessun altro dominio della successione $\{Z_{2h}\}$.

Posto $C = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_r\, Z_{2k_r}$, *il dominio* C *contiene all'interno o sulla frontiera tutti i punti singolari* $\mathrm{N_i}$. *Anzi alla frontiera di* C *appartengono solo punti* N_{2k}. Possono poi darsi due casi.

α) Esistono punti del semipiano $p \leq 0$ esterni al dominio C (fig. 11).

β) C contiene tutto il semipiano $p \leq 0$.

Dimostriamo che, *nel caso* α) *esiste un integrale della* (13), $\mathrm{p} = \mathrm{p}^*(\mathrm{y})$, *positivo, periodico e di periodo* $2\,\pi$.

Per provare la tesi, conduciamo da un punto y_{2k_i} appartenente al solo dominio Z_{2k_i} la caratteristica R''_{2k_i}. *Questa esiste nell'intervallo* $y_{2k_i} \overline{\quad} +\infty$ *nel quale ha equazione*

(80) $$p = g_{2k_i}(y) \quad (g_{2k_i}(y_{2k_i}) = 0)$$

con

(81) $$0 < g_{2k_i}(y) \leq M.$$

Infatti sia $y_{2k_i} \overline{\quad} \gamma_{2k_i}$ il più ampio intervallo in cui vale la (81). Risulta $\gamma_{2k_i} = +\infty$.

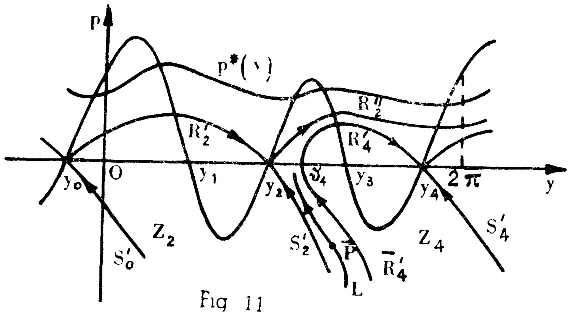

Fig 11

Infatti se supponiamo γ_{2k_i} finito, si ha $g_{2k_i}(\gamma_{2k_i} -) = 0$ e γ_{2k_i} appartiene necessariamente a un intervallo $y_{2k_r-1} \vdash\!\!\dashv y_{2k_r}$. Non può essere $\gamma_{2k_i} = y_{2k_r}$ perchè il punto y_{2k_i} apparterrebbe anche (come punto di ascissa minima) al dominio Z_{2k_r}. Si ha perciò $y_{2k_r-1} \leq \gamma_{2k_i} < y_{2k_r}$ e questo è assurdo perchè il segmento $y_{2k_r-1} \vdash\!\!\dashv y_{2k_r}$ è interno a Z_{2k_r} e quindi la caratteristica R''_{2k_i} ne intersecherebbe la frontiera.

È perciò $\gamma_{2k_i} = +\infty$. Di qui si deduce immediatamente l'esistenza pella soluzione periodica $p = p^*(y)$.

Consideriamo ora il caso β). Il dominio C, contenente l'intero semipiano $p \leq 0$, ha la frontiera costituita dalla successione delle caratteristiche R'_{2k_r} le quali, nel loro complesso, formano una linea di equazione

(82) $$p = \psi(y)$$

con $\psi(y)$ funzione continua nell'intervallo $-\infty \overline{\quad} +\infty$, periodica di periodo 2π. Inoltre $\psi(y)$ è, in ogni intervallo $y_{2k_r} \overline{\quad} y_{2k_{r+1}}$, un integrale della (13); nel punto y_{2k_r} la derivata $\psi'(y)$ presenta una discontinuità di prima specie.

Per la (62), $\psi(y)$ è perciò soluzione dell'equazione

$$(83) \qquad \frac{\psi^2(y)}{2} - \frac{\psi^2(\bar{y})}{2} = \int_{\bar{y}}^{y} F(y)\,d\,y - \int_{\bar{y}}^{y} R(y, \psi(y))\,dy,$$

comunque si prendano y e $\bar{y}$. Diremo perciò che $\psi(y)$ è una soluzione *periodica impropria* della (13).

Dimostriamo ora che *se una caratteristica* L $\{y(t), p(t)\}$ *ha per* $t = \bar{t}$ *un punto* $\bar{P}(\bar{y}, \bar{p})$ *esterno al dominio* C, L *è una caratteristica divergente e risulta asintotica* (nel senso indicato nel § 4) *alla soluzione periodica (eventualmente impropria).*

Consideriamo dapprima il caso α). Allora se è $\bar{p} > p^*(\bar{y})$ la tesi si dimostra come nel § 4.

Sia ora $\bar{p} < p^*(\bar{y})$. Allora se è $\bar{p} > 0$, il punto $P(t)$ descrive L spostandosi da sinistra a destra, al crescere di t e non può mai incontrare l'asse y. Infatti dovrebbe incontrarlo in un punto esterno a C (non potendo essere L instabile), cioè in un punto di un segmento $y_{2h} \text{---} y_{2h+1}$, ciò che è assurdo perchè nel campo $(y_{2h} < y < y_{2h+1}, p < \zeta(y))$ le caratteristiche hanno andamento crescente. Si deduce allora, come nel § 4, la tesi.

Sia infine $\bar{p} \leq 0$. Allora il punto $\bar{P}$ appartiene a un dominio V delimitato superiormente da un segmento $y_{2k_j} \text{---} \vartheta_{2k_j+1}$, lateralmente dalle caratteristiche S'_{2k_j}, $\bar{R}'_{2k_j+1}$ per un conveniente valore di j. Preso δ, con $\delta < \bar{p}$ e $\delta < m$, sia V_δ il dominio formato dai punti di V per cui è $p \geq \delta$.

Entro V_δ non esistono punti singolari Poichè la caratteristica L non può incontrare nè S'_{2k_j} nè $\bar{R}'_{2k_{j+1}}$ e $P(t)$ non può attraversare, per $t \geq \bar{t}$, il segmento HK formato dai punti di ordinata minima $(= \delta)$ di V_δ si ricava che, per t abbastanza grande, il punto $P(t)$ attraversa il segmento $\overline{y_{2k_j} \text{---} \vartheta_{2k_j+1}}$ e penetra nel semipiano $p > 0$.

La tesi è perciò provata.

Consideriamo infine il caso β). Supponiamo (ed è la sola ipotesi possibile) $\bar{p} > \psi(\bar{y})$. Allora la caratteristica L non può uscire dal dominio W delimitato inferiormente dalla linea $\bar{L}\,(p = \psi(y))$ e superiormente dalla retta $p = \varrho$, ϱ essendo il massimo dei due numeri M e $\bar{p}$. L ha perciò un'equazione cartesiana $p = p(y)$. Inoltre $p(y)$ è definita e positiva nell'intervallo $\bar{p} \,|\!\!-\, +\infty$.

Dimostriamo che *risulta*

$$(84) \qquad \lim_{y \to +\infty} \{ p(y) - \psi(y) \} = 0$$

Per questo cominciamo col provare che in W la funzione $\frac{f(y, p)}{p}$ è limitata. Infatti i soli punti di W in cui $\frac{f(y, p)}{p}$ sia discontinua sono i punti singolari N_{2k_i}, i quali risultano punti angolosi per $\overline{L}$.

Condotta per N_{2k_i} la retta di equazione

$$y - y_{2k_i} = \nu p$$

(sicchè ν rappresenterà il coefficiente angolare rispetto all'asse p), si ha

$$\frac{f(y, p)}{p} = \frac{f(y_{2k_i} + \nu p, p)}{p} = \nu f_y (y_{2k_i} + \vartheta \nu p, \vartheta p) + f_p (y_{2k_i} + \vartheta \nu p, \vartheta p), \tag{85}$$

con $0 < \vartheta < 1$. Supponiamo $|\nu| < \nu_i$, in modo che le due caratteristiche R'_{k_i}, $R''_{k_i} \equiv R'_{k_{i+1}}$ risultino spiccate internamente all'angolo di vertice N_{2k_i}, di apertura $2 \operatorname{arctg} \nu_i$ e avente per bisettrice la retta $y = y_{2k_i}$. Dalla (85) segue, nei punti di W appartenenti a tale angolo,

$$\left| \frac{f(y, p)}{p} \right| \leq b_i ,$$

con b_i costante positiva. Di qui (e dalla periodicità di $\frac{f(y, p)}{p}$ come funzione di y) si deduce l'esistenza di una costante b per cui risulti, in tutto W,

$$\left| \frac{f(y, p)}{p} \right| \leq b . \tag{86}$$

Ragionando per l'equazione (13) come si è fatto nel lemma I per l'equazione (14) e posto $p_n(y) = p(y + 2 n \pi)$ si prova che la successione $\{p_n(y)\}$ converge, per $y \geq \overline{y}$, a una funzione periodica, di periodo 2π, $p = \chi(y)$, con

$$\chi(y) \geq \psi(y). \tag{87}$$

Si ha poi

$$p_n(y) - p_n(\overline{y}) = \int_{\overline{y}}^{y} \frac{f(y, p_n(y))}{p_n(y)} d y$$

e quindi, potendosi applicare il teorema di Arzelà-Lebesgue per la (86), si trova

$$\chi(y) - \chi(\overline{y}) = \int_{\overline{y}}^{y} \frac{f(y, \chi(y))}{\chi(y)} d y. \tag{88}$$

Inoltre, come nel lemma I, si ottiene

$$\lim_{y \to +\infty} \{ p(y) - \chi(y) \} = 0. \tag{89}$$

Per provare la (84) occorre dimostrare che è $\chi(y) = \psi(y)$. Ora per la (88) $\chi(y)$ è funzione continua per tutti i valori di y, dotata di derivata continua per $y \neq y_{2k_i}$ e inoltre limitata, per la (86). Perciò $\chi(y)$ soddisfa per $y \neq y_{2k_i}$, all'equazione

$$\frac{1}{2} \frac{d p^2}{d y} = f(y, p)$$

e, comunque si prendano y e $\bar{y}$, risulta

$$\frac{\chi^2(y)}{2} - \frac{\chi^2(\bar{y})}{2} = \int_{\bar{y}}^{y} f(y, \chi(y))\, d y = \int_{\bar{y}}^{y} F(y)\, d y \quad \int_{\bar{y}}^{y} R(y, \chi(y))\, d y .$$

In particolare, per $y = \bar{y} + 2\pi$, si ha

$$0 = \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} F(y)\, d y - \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} R(y, \chi(y))\, d y. \tag{90}$$

Dalla (83) in cui si ponga $y = \bar{y} + 2\pi$, e dalla (90) segue poi

$$\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} R(y, \chi(y))\, d y = \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+2\pi} R(y, \psi(y))\, d y$$

cioè, per la (87) e per essere $R(y, p)$ funzione crescente di p,

$$\chi(y) = \psi(y).$$

La (84) è perciò dimostrata.

Che L sia poi divergente si dimostra osservando che $y(t)$ è funzione crescente di t e tende perciò, per $t \to +\infty$, a un limite l. Questo non può essere finito perchè, per $t \geq \bar{t}$ convenientemente grande il punto $P(t)$ apparterrebbe al dominio limitato $\overline{W}$ formato dai punti di W per i quali è $l - 1 \leq y \leq l$, ciò che è assurdo perchè entro $\overline{W}$ non cadono punti singolari ed L non è instabile.

Risulta perciò

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty.$$

In modo del tutto analogo a quello seguito nel § 4, si dimostra infine che *se esiste una soluzione periodica* $p = p^*(y)$ (*non impropria*) *e se risulta*

$$R_p(y\,,\,p^*(y)) > 0 \qquad (-\infty < y < +\infty),$$

un integrale divergente $y(t)$ *è somma di una funzione lineare, di una funzione periodica di periodo*

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dy}{p^*(y)}$$

e di una funzione infinitesima per $t \to +\infty$.

Inoltre le prime due di tali funzioni sono, a meno di uno spostamento dell'origine dei tempi, le medesime per tutti gli integrali divergenti.

[*Pervenuto alla Redazione il 12-1-1950*]