

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ENRICO MAGENES

## **Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli. I - Condizioni sufficienti per la semicontinuità**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 2,*  
n° 1-4 (1950), p. 1-38

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1950\\_3\\_2\\_1-4\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# INTORNO AGLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI I - CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA SEMICONITINUITÀ

di ENRICO MAGENES (Padova)

Nella presente memoria ed in una successiva esporrò alcuni risultati circa gli integrali di FUBINI-TONELLI:

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz$$

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)) dx dz.$$

Il funzionale  $I(y)$  è stato considerato per la prima volta da G. FUBINI<sup>(1)</sup>, il quale nell'introdurne lo studio, ha messo ben in rilievo l'importanza che tali ricerche di Calcolo delle Variazioni hanno anche in altri campi dell'Analisi, come ad es. in quello delle equazioni integro-differenziali (basta pensare che l'equazione di Eulero di  $I(y)$  è appunto un'equazione integro-differenziale). Il FUBINI si è limitato però ad un caso particolare.

Anche H. H. GOLDSTINE<sup>(2)</sup> ha ottenuto alcuni risultati circa il « minimo relativo debole » di  $I(y)$ , come applicazione dello studio di un funzionale più generale, studio fatto, nell'ambito del Calcolo Funzionale, secondo l'indirizzo classico del Calcolo delle Variazioni.

---

<sup>(1)</sup> G. FUBINI: *Alcuni problemi di Calcolo delle Variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali* (Annali di Mat. pura e appl. (3)-XX, 1913, pp. 217-244).

<sup>(2)</sup> H. H. GOLDSTINE: *Conditions for a minimum of a functional* (Contributions to the Calculus of Variations - 1933-37 - Chicago - pp. 316-357); in particolare v. pp. 353-357.

Nel 1939 L. TONELLI<sup>(3)</sup> ha introdotto il Suo *metodo diretto* nello studio di  $I(y)$ , trattandone alcuni casi particolari, di notevole importanza soprattutto per l'applicazione, ben nota, che se ne fa nella teoria delle equazioni integrali di FREDHOLM.

Solo recentemente però è stato intrappreso da S. FAEDO<sup>(4)</sup> lo studio sistematico di questo capitolo del Calcolo delle Variazioni, mediante il *metodo diretto del TONELLI*, incominciando dalla ricerca delle condizioni necessarie per la semicontinuità di  $I(y)$ . Egli ha messo in luce le difficoltà che possono incontrarsi nello studio di  $I(y)$  ed ha rilevato come sia opportuno introdurre anche il funzionale più generale  $I(y_1, y_2)$ , il quale presenta del resto interesse di per se stesso.

Ottenute condizioni necessarie per la semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$  e di  $I(y)$ , S. FAEDO ha dato anche successivamente le condizioni sufficienti per la continuità di  $I(y_1, y_2)$  e di  $I(y)$ .<sup>(5)</sup>

Impostato così il problema nei termini generali, secondo il *metodo diretto del TONELLI*, resta ora da continuare nella ricerca delle condizioni sufficienti per la semicontinuità e dei criteri di esistenza dell'estremo. In questa Memoria io darò appunto alcune condizioni sufficienti per la semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$  e di  $I(y)$  «in tutto il campo», di cui mi servirò successivamente nella prossima Memoria per stabilire dei criteri di esistenza dell'estremo, nei quali rientreranno tra l'altro i casi particolari studiati dal FUBINI e dal TONELLI.

Le suddette condizioni sufficienti sono ottenute estendendo opportunamente un ragionamento fondamentale del TONELLI e facendo uso dei teoremi di « uguale continuità » dell'integrale semplice ordinario del Calcolo delle Variazioni, messi in rilievo da S. FAEDO.

(3) L. TONELLI *Su alcuni funzionali* (Annali di Mat. pura e appl. (4) - XVIII - 1939 - pp. 1-21) L. TONELLI ha anche additato le ricerche relative ad  $I(y)$  e  $I(y_1, y_2)$  all'attenzione dei matematici nella Sua conferenza *L'Analisi funzionale nel Calcolo delle Variazioni* (Annali Scuola Normale Sup. di Pisa (2)-IX - 1940 - pp. 289-301).

(4) S. FAEDO *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali* (Annali di Mat. pura e appl. (4) XXIII - 1944 - pp. 69-121); - *Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli* (Litografia Tacchi - 1946 - Pisa)

(5) S. FAEDO : *Un nuovo tipo di funzionali continui* (Rend. di Mat. e delle sue applicazioni - (5) - IV - fase III-IV - 1943 - pp. 223-249).

## CAPITOLO I.

La semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$ .

## § 1. - Definizioni e posizione del problema.

1. — *Definizioni.* — Diremo *campo*  $A_1$  [*campo*  $A_2$ ] un insieme di punti del piano  $(x, y_1)$  [ $(z, y_2)$ ] che contenga ogni suo punto di accumulazione posto al finito. Diremo poi *campo*  $A$  l'insieme dei punti dello spazio a 4 dimensioni  $(x, z, y_1, y_2)$  prodotto dei due campi  $A_1$  e  $A_2$ :  $A = A_1 \times A_2$ . La funzione  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  sarà definita in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $A$  e per ogni valore di  $y'_1$  e  $y'_2$  e continua insieme alle sue derivate  $f_{y'_1}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_2 y'_2}$  in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  in cui è definita. Di-

remo *curva*  $C$  ogni coppia di funzioni  $y_1 = y_1(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ;  $y_2 = y_2(z)$ ,  $c \leq z \leq d$ , assolutamente continue rispettivamente in  $(a, b)$  e  $(c, d)$ , tali che i punti  $[x, y_1(x)]$  e  $[z, y_2(z)]$  appartengano rispettivamente ad  $A_1$  e ad  $A_2$ .

Diremo poi che la curva  $C$  è anche *ordinaria* se, inoltre, esiste finito l'integrale nel senso del LEBESGUE:

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y'_1(x), y'_2(z)) dx dz;$$

« arco » di una curva  $C[y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$  si dirà ogni curva  $C'[y_1(x), y_2(z), a' \leq x \leq b', c \leq z \leq d']$  con  $a \leq a' < b' \leq b$ ,  $c \leq c' < d' \leq d$ .

Per ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $A$  e per ogni terna di numeri  $y'_1, \bar{y}'_1, y'_2$  si dirà funzione  $\mathcal{E}_1$  di Weierstrass la funzione

$$\mathcal{E}_1(x, z, y_1, y_2, y'_2; y'_1, \bar{y}'_1) = f(x, z, y_1, y_2, \bar{y}'_1, y'_2) - f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (\bar{y}'_1 - y'_1) f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2).$$

Analogamente per ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $A$  e ogni terna  $y'_1, \bar{y}'_2, y'_2$  la funzione  $\mathcal{E}_2$  di Weierstrass sarà definita da

$$\mathcal{E}_2(x, z, y_1, y_2, y'_1; y'_2, \bar{y}'_2) = f(x, z, y_1, y_2, y'_1, \bar{y}'_2) - f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (\bar{y}'_2 - y'_2) f_{y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2).$$

Diremo che una curva  $C[y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$  « appartiene propriamente » all'intorno ( $\varrho$ ) di un'altra curva  $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$  se:

1) Per ogni  $x$  comune ad  $(a, b)$  e  $(\bar{a}, \bar{b})$  e ogni  $z$  comune a  $(c, d)$  e  $(\bar{c}, \bar{d})$  è

$$|y_1(x) - \bar{y}_1(x)| \leq \varrho; \quad |y_2(z) - \bar{y}_2(z)| \leq \varrho.$$

2) Per ogni  $x < \bar{a}$  e appartenente ad  $(a, b)$  e ogni  $z < \bar{c}$  e appartenente a  $(c, d)$  è:

$$|y_1(x) - \bar{y}_1(\bar{a})| \leq \varrho; \quad |y_2(z) - \bar{y}_2(\bar{c})| \leq \varrho;$$

3) Per ogni  $x > \bar{b}$  e appartenente ad  $(a, b)$  e ogni  $z > \bar{d}$  e appartenente a  $(c, d)$  è:

$$|y_1(x) - \bar{y}_1(\bar{b})| \leq \varrho; \quad |y_2(z) - \bar{y}_2(\bar{d})| \leq \varrho;$$

4) È

$$|a - \bar{a}| \leq \varrho; \quad |b - \bar{c}| \leq \varrho; \quad |c - \bar{b}| \leq \varrho; \quad |\bar{d} - \bar{d}| \leq \varrho.$$

Si dirà che l'integrale  $I(y_1, y_2)$  è « semicontinuo inferiormente sulla curva ordinaria  $\bar{C}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$  » se preso ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un  $\varrho > 0$ , in modo che per tutte le curve ordinarie  $C(y_1, y_2)$  appartenenti propriamente all'intorno ( $\varrho$ ) di  $\bar{C}$ , sia

$$I(y_1, y_2) > I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - \varepsilon.$$

Se  $I(y_1, y_2)$  è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria, si dirà *semicontinuo inferiormente*. Analoghe definizioni valgono per la semicontinuità superiore e per la continuità. Ci occuperemo della semicontinuità inferiore.

2. — *Posizione del problema.* — S. FAEDO<sup>(6)</sup> ha stabilito che condizione necessaria affinché  $I(y_1, y_2)$  sia semicontinuo inferiormente in tutto  $A$  è che sia:

$$(\alpha) \quad f_{y_1 y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq 0, \quad f_{y_2 y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq 0$$

per ogni valore finito di  $y_1'$  e  $y_2'$ , in tutti i punti interni di  $A$  o di accumulazione di tali punti.

(6) v. luogo citato per primo in (4) pag. 79.

Egli ha rilevato anche notevoli analogie tra  $I(y_1, y_2)$  e l'integrale semplice del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria,

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Ora è noto <sup>(7)</sup> che per quest'ultimo, ammesse l'esistenza e la continuità delle derivate  $F_{y'}$ ,  $F_{y'y'}$ ,  $F_{y'x}$  dappertutto, la condizione  $F_{y'y'} \geq 0$  è non solo necessaria, ma anche sufficiente per la semicontinuità inferiore in tutto il campo.

Si può quindi esser portati a credere, per l'analogia tra  $I(y_1, y_2)$  e l'integrale

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

e tra le  $(\alpha)$  e la  $F_{y'y'} \geq 0$ , che le  $(\alpha)$ , ammesse delle ipotesi di continuità su alcune derivate della  $f$ , siano sufficienti per la semicontinuità inferiore di  $I(y_1, y_2)$ ; tuttavia ciò non è, anche nell'ipotesi della continuità di *tutte* le derivate del secondo ordine della  $f$ . È opportuno mettere in rilievo questo fatto mediante il seguente esempio.

La funzione

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = e^{2y'_1 - y'_2} + \\ + \frac{1}{2} y'_1{}^4 + \frac{1}{3} y'_1{}^3 y'_2 - 2 y'_1{}^2 y'_2{}^2 + \frac{1}{3} y'_1 y'_2{}^3 + \frac{1}{2} y'_2{}^4 - 1$$

è continua in tutto lo spazio  $(x, z, y_1, y_2)$  e qualunque siano  $y'_1$  e  $y'_2$ , insieme alle sue derivate del primo e secondo ordine. Risulta:

$$f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = 4 e^{2y'_1 - y'_2} \{4(y'_1 - y'_2)^2 + 1\} + 6 y'_1{}^2 + 2 y'_1 y'_2 - 4 y'_2{}^2$$

$$f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_2, y'_1) = \\ = 4 e^{2y'_1 - y'_2} \{4(y'_1 - y'_2)^2 + 1\} - 4 y'_1{}^2 + 2 y'_1 y'_2 + 6 y'_2{}^2.$$

(7) v. ad es. L. TONELLI - *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I - 1921 - Bologna pag. 397.

Si può vedere facilmente che  $f'_{y_1 y_1}$  e  $f'_{y_2 y_2}$  sono sempre *positive*.

Limitiamoci a considerare  $f'_{y_2 y_2}$ .

Fissiamo un qualunque valore  $\bar{y}'_2$  di  $y'_2$  e consideriamo  $f'_{y_2 y_2}$  come funzione della sola  $y'_1$ ;  $f'_{y_2 y_2}$  può considerarsi allora come somma delle due funzioni di  $y'_1$ :

$$\varphi(y'_1) = 4 e^{2y'_1 - \bar{y}'_2} \{4(y'_1 - \bar{y}'_2)^2 + 1\} \quad \text{e} \quad \psi(y'_1) = -4y_1'^2 + 2y'_1 \bar{y}'_2 + 6\bar{y}'_2{}^2$$

$\varphi(y'_1)$  è positiva per ogni  $y'_1$ ,  $\psi(y'_1)$  si annulla per  $y'_1 = \frac{3}{2} \bar{y}'_2$  e per  $y'_1 = -\bar{y}'_2$ . Supporremo  $\bar{y}'_2 > 0$  (in modo del tutto analogo si ragionerebbe se fosse  $\bar{y}'_2 \leq 0$ ). Allora per  $-\bar{y}'_2 < y'_1 < \frac{3}{2} \bar{y}'_2$  anche  $\psi(y'_1) > 0$  e quindi anche  $f'_{y_2 y_2} = \varphi(y'_1) + \psi(y'_1) > 0$  per  $-\bar{y}'_2 \leq y'_1 \leq \frac{3}{2} \bar{y}'_2$ .

D'altra parte la derivata (rispetto a  $y'_1$ ) di  $\varphi(y'_1) + \psi(y'_1)$  è data da

$$16(y'_1 - \bar{y}'_2) e^{2y'_1 - \bar{y}'_2} \{4(y'_1 - \bar{y}'_2)^2 + 1\} + 32(y'_1 - \bar{y}'_2) e^{2y'_1 - \bar{y}'_2} - 8y'_1 + 2\bar{y}'_2.$$

Risulta quindi per  $y'_1 > \frac{3}{2} \bar{y}'_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(y'_1) + \psi'(y'_1) &> 32(y'_1 - \bar{y}'_2) e^{\frac{\bar{y}'_2}{2}} - 8y'_1 = 32y'_1 e^{\frac{\bar{y}'_2}{2}} - 32\bar{y}'_2 e^{\frac{\bar{y}'_2}{2}} - 8y'_1 > \\ &> 32y'_1 e^{\frac{\bar{y}'_2}{2}} - 32\frac{2}{3}y'_1 e^{\frac{\bar{y}'_2}{2}} - 8y'_1 = \frac{32}{3}y'_1 e^{\frac{\bar{y}'_2}{2}} - 8y'_1 > \left(\frac{32}{3} - 8\right)y'_1 > 0. \end{aligned}$$

Ne segue che  $\varphi(y'_1) + \psi(y'_1)$  è funzione crescente di  $y'_1$  per  $y'_1 > \frac{3}{2} \bar{y}'_2$  e quindi ancora positiva per  $y'_1 > \frac{3}{2} \bar{y}'_2$ .

Analogamente, con artifici di calcolo ancor più semplici, si dimostra che anche per  $y'_1 < -\bar{y}'_2$  risulta  $\varphi(y'_1) + \psi(y'_1) > 0$ .

Risulta quindi sempre, essendo  $\bar{y}'_2$  un qualunque valore di  $y'_2$ ,  $f'_{y_2 y_2} > 0$  (7').

La funzione sopra definita soddisfa quindi alle ( $\alpha$ ).

Tuttavia l'I( $y_1, y_2$ ) ad essa relativo non è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria.

(7') La cosa poteva del resto facilmente vedersi anche osservando che risulta  $f'_{y_2 y_2} > 22y_1'^2 - 30y_1'y_2' + 12y_2'^2$ , che è una forma quadratica definita positiva

Sia infatti  $C_0$  la curva formata dai due punti origine dei piani  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$ :  $y_{1,0}(0) = 0, y_{2,0}(0) = 0$ . È evidentemente  $I(y_{1,0}, y_{2,0}) = 0$ . Sia poi  $C$  la curva composta da  $y_1(x) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} x, 0 \leq x \leq b^{3/2}$ ;  $y_2(z) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} z, 0 \leq z \leq b^{3/2}$ , con  $b > 0$ .

Risulta

$$I(y_1, y_2) = - \int_0^{b^{3/2}} \int_0^{b^{3/2}} \frac{(1-b^2)^2}{3 b^4} dx dz = - \frac{(1-b^2)^2}{3 b}.$$

Ma al tendere di  $b$  a zero la curva  $C$  tende alla curva  $C_0$ , cioè fissato comunque un intorno  $(\varrho)$  di  $C_0$  per  $b$  sufficientemente piccolo la curva  $C$  appartiene propriamente all'intorno  $(\varrho)$  di  $C_0$ , mentre d'altra parte  $I(y_1, y_2)$  tende a  $-\infty$  per  $b \rightarrow 0$ . Su  $C_0$   $I(y_1, y_2)$  non è perciò semicontinuo inferiormente.

Se si vogliono dunque cercare delle condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore di  $I(y_1, y_2)$  in tutto  $A$ , bisognerà aggiungere alle  $(\alpha)$  delle nuove ipotesi sulla funzione  $f$ .

Un suggerimento può essere dato dalle condizioni sufficienti per la continuità di  $I(y_1, y_2)$ , stabilite da S. FAEDO (8), e dai ragionamenti stessi che sono serviti al TONELLI e ad altri autori per stabilire la semicontinuità

di altri tipi di funzionali, soprattutto dell'integrale  $\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ , con il quale  $I(y_1, y_2)$  ha profonde analogie.

Le condizioni sufficienti, che sono date in questo lavoro, vengono ottenute estendendo appunto un ragionamento fondamentale del TONELLI (9).

§ 2 - La semicontinuità in un caso particolare.

1. — Studieremo dapprima il caso in cui la  $f$  soddisfi a condizioni assai restrittive, che poi generalizzeremo.

Si supponga dunque che la  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ , considerata nel n. 1, § 1, soddisfi anche alle seguenti ipotesi:

I) per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$ , in tutti i punti di  $A$  sia

( $\alpha$ )  $f_{y'_1 y'_1} \geq 0; f_{y'_2 y'_2} \geq 0;$

(8) v. luogo citato in (5).

(9) v. luogo citato in (7) pag. 392-400.



II) per ogni parte limitata  $\bar{A}$  di  $A$  si possano trovare tre numeri  $N, \nu_1$  e  $Y'$  con  $\nu_1 > 0$ , e  $Y' \geq 1$ , tali che sia:

$$(1) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \nu_1 |y'_2|$$

per ogni  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}$ , per ogni  $y'_1$  e per  $|y'_2| \geq Y'$ ; e inoltre

$$(2) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq N$$

per ogni  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}$  e per  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque;

III) esistano due campi  $A'_1$  e  $A'_2$ , aventi rispettivamente tutti i punti di  $A_1$  e di  $A_2$  come punti interni, tali che posto  $A' = A'_1 \times A'_2$  in  $A' = A$  possa definirsi la  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$ , in modo che in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  e  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque, la  $f$  e le sue derivate  $f'_{y'_1}, f'_{y'_1 y'_1}, f'_{y'_2}, f'_{y'_2 y'_2}$  siano continue ed inoltre ivi esistano e siano pure continue le  $f'_{y'_1 x}, f'_{y'_2 z}$ ;

IV) per ogni parte limitata  $\bar{A}'$  di  $A'$  si possono trovare sedici numeri positivi  $M_1, M_2, N_1, N_2, R_1, R_2, S_1, S_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , tali che per  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}'$  e  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque sia:

$$(3) \quad |f'_{y'_1 x}| \leq M_2 |y'_2| + N_2; \quad (3') \quad |f'_{y'_2 z}| \leq M_1 |y'_1| + N_1;$$

$$(4) \quad |f'_{y'_1 y'_1}| \leq R_2 |y'_2| + S_2; \quad (4') \quad |f'_{y'_2 y'_2}| \leq R_1 |y'_1| + S_1;$$

$$(5) \quad |f'_{y'_1}| \leq \alpha_2 |y'_2| + \beta_2; \quad (5') \quad |f'_{y'_2}| \leq \alpha_1 |y'_1| + \beta_1;$$

$$(6) \quad |f| \leq \gamma_1 |y'_1| |y'_2| + \gamma_2 |y'_1| + \gamma_3 |y'_2| + \gamma_4.$$

V) per quasi tutti gli  $x$  e tutti gli  $z, y_1$  e  $y_2$  tali che  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenga ad  $A'$  e per tutti gli  $y'_1$  e  $y'_2$ , esistano la  $f_{y'_1}$  e la  $f'_{y'_1 y'_1}$  e siano continue, per  $x$  fissato, rispetto a  $(z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ ; inoltre per ogni parte limitata  $\bar{A}'$  di  $A'$  e ogni  $L > 0$ , si possano trovare quattro numeri positivi  $B_2, \bar{B}_2, D_2, \bar{D}_2$  tali che per  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}'$ ,  $y'_2$  qualunque e  $|y'_1| \leq L$  sia

$$(7) \quad |f_{y'_1}| \leq B_2 |y'_2| + \bar{B}_2; \quad (7') \quad |f'_{y'_1 y'_1}| \leq D_2 |y'_2| + \bar{D}_2.$$

In queste ipotesi dimostreremo che il funzionale  $I(y_1, y_2)$  è *semicontinuo inferiormente* <sup>(10)</sup>.

Sia dunque  $\bar{C} [\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$  una curva ordinaria <sup>(11)</sup> appartenente al campo  $A$  e indichiamo con  $\bar{A}$  e  $\bar{A}'$  le parti rispettivamente di  $A$  e di  $A'$  appartenenti all'intorno unitario di  $\bar{C}$ .

Siano  $N, \nu_1$  e  $Y'$  i numeri corrispondenti ad  $\bar{A}$  secondo l'ipotesi II). È evidente che ci potremo limitare a considerare tutte le curve ordinarie  $C [y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d]$  di  $A$  appartenenti propriamente all'intorno unitario di  $\bar{C}$ , per le quali è verificata la  $I(y_1, y_2) < I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ . Per ognuna di queste  $C$  detto  $E_2$  l'insieme dei punti di  $(c, d)$  in cui è  $|y_2'(z)| > Y'$  oppure  $y_2'(z)$  non esiste finita, in virtù dell'ipotesi II), si ha

$$\int_a^b \int_c^d \nu_1 |y_2'(z)| dx dz \leq \int_a^b \left\{ \int_{E_2} \nu_1 |y_2'(z)| dz + \nu_1 Y' (d - c) \right\} dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)) dx dz + |N| (b - a) (d - c) +$$

$$+ \nu_1 Y' (b - a) (d - c) < I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) + [ |N| + \nu_1 Y' ] (\bar{b} - \bar{a} + 2) (\bar{d} - \bar{c} + 2) = H$$

e quindi

$$(8) \quad \int_c^d |y_2'(z)| dz < \frac{H}{\nu_1 (b - a)}$$

dove la costante  $H$  è indipendente dalla  $C$ .

Inscriviamo ora rispettivamente nella curva di equazione  $y = \bar{y}_1(x)$  e in quella di equazione  $y = \bar{y}_2(z)$  due poligonali, aventi gli stessi estremi delle suddette curve ed i cui vertici corrispondano nell'ordine degli  $x$  e  $z$  crescenti alla suddivisione rispettivamente di  $(\bar{a}, \bar{b})$  e di  $(\bar{c}, \bar{d})$  in  $n$  parti uguali. Siano  $y_1 = \pi_{1,n}(x)$  e  $y_2 = \pi_{2,n}(z)$  le equazioni di queste poligonali. Per  $n \rightarrow \infty$ ,  $\pi_{1,n}(x)$  e  $\pi_{2,n}(z)$  convergono uniformemente rispettivamente verso la  $\bar{y}_1(x)$  e la  $\bar{y}_2(z)$  e le lunghezze di  $\pi_{1,n}(x)$  e  $\pi_{2,n}(z)$  convergono alle lun-

<sup>(10)</sup> Se il campo  $A'$  coincidesse con  $A$ , la dimostrazione che daremo porterebbe alla semicontinuità inferiore di  $I(y_1, y_2)$  su ogni curva ordinaria  $C$  completamente interna ad  $A$ .

<sup>(11)</sup> Osserviamo che, in questo caso, in virtù della (6), ogni « curva  $C$  » è una curva ordinaria.

ghezze di  $\bar{y}_1(x)$  e di  $\bar{y}_2(z)$ . Allora per noti risultati <sup>(12)</sup>, preso  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, è possibile determinare un  $\bar{n}$ , tale che per  $n \geq \bar{n}$  gli insiemi  $E_n$  e  $E'_n$  dei punti di  $(\bar{a}, \bar{b})$  e di  $(\bar{c}, \bar{d})$ , in cui rispettivamente non esistono finite le  $\bar{y}'_1(x)$  e  $\bar{y}'_2(z)$  o non sono verificate le :

$$|\bar{y}'_1(x) - \pi'_{1,n}(x)| < \varepsilon, \quad |\bar{y}'_2(z) - \pi'_{2,n}(z)| < \varepsilon$$

soddisfino alle :

$$(9) \quad \int_{E'_n} |\bar{y}'_2(z)| dz < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \int_{E'_n} |\pi'_{2,n}(z)| dz < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\int_{E_n} |\bar{y}'_1(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \int_{E_n} |\pi'_{1,n}(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supposto allora  $n \geq \bar{n}$  smussiamo » i vertici di  $\pi_{1,n}(x)$  e  $\pi_{2,n}(z)$  (cioè, sostituiamo alla poligonale, in prossimità dei vertici, dei piccoli archi di curva opportunamente) in modo da avere due curve continue  $y_1 = \pi_{1,n}(x)$  e  $y_2 = \pi_{2,n}(z)$ , con derivate prime e seconde pure continue e soddisfacenti alle

$$(10) \quad \int_{\bar{E}_n} |\bar{y}'_1(x)| dx < \varepsilon; \quad \int_{E_n} |\bar{\pi}'_{1,n}(x)| dx < \varepsilon;$$

$$(11) \quad \int_{\bar{E}'_n} |\bar{y}'_2(z)| dz < \varepsilon; \quad \int_{E'_n} |\bar{\pi}'_{2,n}(z)| dz < \varepsilon$$

dove  $\bar{E}_n$  e  $\bar{E}'_n$  sono rispettivamente gli insiemi dei punti di  $(\bar{a}, \bar{b})$  e  $(\bar{c}, \bar{d})$  in cui non esistono finite le  $\bar{y}'_1(x)$  e  $\bar{y}'_2(z)$  o non è

$$|\bar{y}'_1(x) - \bar{\pi}'_{1,n}(x)| < \varepsilon, \quad |\bar{y}'_2(z) - \bar{\pi}'_{2,n}(z)| < \varepsilon.$$

Poniamo poi  $\bar{\pi}'_{1,n}(x) = \bar{\pi}'_{1,n}(\bar{a})$  nell'intervallo  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{a})$  e  $\bar{\pi}'_{1,n}(x) = \bar{\pi}'_{1,n}(\bar{b})$  in  $(\bar{b}, \bar{b} + \varepsilon)$  e analogamente  $\bar{\pi}'_{2,n}(z) = \bar{\pi}'_{2,n}(\bar{c})$  in  $(\bar{c} - \varepsilon, \bar{c})$ ,  $\bar{\pi}'_{2,n}(z) = \bar{\pi}'_{2,n}(\bar{d})$  in  $(\bar{d}, \bar{d} + \varepsilon)$ .

---

<sup>(12)</sup> v. luogo cit. in (7), n. 28, 52 o), 66.

Allora per ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $A$ , appartenente all'intorno  $(\varrho)$  di  $C$ , con  $\varrho < \min(\varepsilon, 1)$  e per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$ , si ha

$$(12) \quad \begin{aligned} f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) &= f(x, z, y_1, y_2, \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2) + (y'_1 - \\ &- \bar{\pi}'_{1,n}(x)) f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2, \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2) + \varepsilon_1(x, z, y_1, y_2, y'_2; \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_1) \end{aligned}$$

$$(12') \quad \begin{aligned} f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) &= f(x, z, y_1, y_2, y'_1, \bar{\pi}'_{2,n}(z)) + (y'_2 - \\ &- \bar{\pi}'_{2,n}(z)) f_{y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, \bar{\pi}'_{2,n}(z)) + \varepsilon_2(x, z, y_1, y_2, y'_1; \bar{\pi}'_{2,n}(z), y'_2). \end{aligned}$$

Se ora  $C$  è una qualunque delle curve ordinarie sopra considerate che appartenga inoltre propriamente all'intorno  $(\varrho)$  di  $\bar{C}$ , potremo scrivere

$$(13) \quad \begin{aligned} I(y_1, y_2) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) dx dz - \\ &- \int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) dx dz + \int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) dx dz - \\ &- \int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) dx dz \end{aligned}$$

poichè effettivamente il secondo e il terzo integrale del secondo membro di (13) esistono finiti in virtù della (6).

Applichiamo allora ai primi due integrali del secondo membro di (13) le (12) e agli ultimi due le (12'). Otterremo ad es.

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) dx dz &= \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz + \\ &+ \int_a^b \int_c^d [y'_1(x) - \bar{\pi}'_{1,n}(x)] f_{y'_1}(x, z, y_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz + \\ &+ \int_a^b \int_c^d \varepsilon_1(x, z, y_1(x), y_2(z), y'_2(z); \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_1(x)) dx dz \end{aligned}$$

poichè effettivamente gli integrali del secondo membro ora scritto esistono finiti, in virtù della (6) e della (5). Analogamente per gli altri integrali che compaiono in (13). Se ora teniamo presente che in tutto  $A$  e per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$  finiti  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono  $\geq 0$  in virtù dell'ipotesi  $I$ ), potremo scrivere :

$$\begin{aligned}
 I(y_1, y_2) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) &\geq \left| \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_1(z)) dx dz - \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^b \int_c^d f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz \right| + \\
 &\quad + \left| \int_a^b \int_c^d y'_1(x) f_{y'_1}(x, z, y_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz - \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^b \int_c^d \bar{y}'_1(x) f_{\bar{y}'_1}(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz \right| - \\
 (14) \quad &\quad - \left| \int_a^b \int_c^d \bar{\pi}'_{1,n}(x) f_{\bar{\pi}'_{1,n}}(x, z, y_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz - \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^b \int_c^d \bar{\pi}'_{1,n}(x) f_{\bar{\pi}'_{1,n}}(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz \right| + \\
 &\quad + \left| \int_a^b \int_c^d f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx dz - \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^b \int_c^d f(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx dz \right| + \\
 &\quad + \left| \int_a^b \int_c^d y'_2(z) f_{y'_2}(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx dz - \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^b \int_c^d \bar{y}'_2(z) f_{\bar{y}'_2}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx dz \right| -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{\pi}'_{2,n}(z) f_{y'_2}(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx dz - \right. \\
 & \left. - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{\pi}_{2,n}(z) f_{y'_2}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx dz \right] - \\
 & - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \mathcal{E}_1(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), y'_2(z); \bar{\pi}'_{1,n}(x), \bar{y}'_1(x)) dx dz - \\
 & - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \mathcal{E}_2(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x); \bar{\pi}_{2,n}(z), \bar{y}'_2(z)) dx dz.
 \end{aligned}$$

Consideriamo anzitutto gli ultimi due integrali del secondo membro della (14); in virtù della (12) e della (5), per tutti gli  $x$  e gli  $z$  nei quali esistono finite le  $y'_2(x)$  e  $y'_1(z)$ , potremo scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}_1(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), y'_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), \bar{y}'_1(x)) \leq \\
 & \leq | \bar{y}'_1(x) - \bar{\pi}'_{1,n}(x) | | f_{y'_1}(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_1(z)) | + \\
 & + | f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{y}'_1(x), y'_2(z)) - f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) | \leq \\
 & \leq 2 | \bar{y}'_1(x) - \bar{\pi}'_{1,n}(x) | (\alpha_2 | y'_2(z) | + \beta_2)
 \end{aligned}$$

e quindi, se  $x$  non appartiene all'insieme  $\bar{E}_n$ :

$$\mathcal{E}_1(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), y'_2(z); \bar{\pi}'_{1,n}(x), \bar{y}'_1(x)) \leq 2 \varepsilon (\alpha_2 | y'_2(z) | + \beta_2).$$

Ma allora, in virtù anche della (8) e delle (10), si ottiene se è  $\varrho < \frac{\bar{b} - \bar{a}}{4}$ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \mathcal{E}_1(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), y'_2(z); \bar{\pi}'_{1,n}(x), \bar{y}'_1(x)) dx dz < \\
 & < 2 \varepsilon \left[ \alpha_2 \frac{H(\bar{b} - \bar{a})}{\nu_1(\bar{b} - \bar{a})} + \beta_2 (\bar{b} - \bar{a})(\bar{d} - c) \right] + 4 \varepsilon \left[ \frac{\alpha_2 H}{\nu_1(\bar{b} - \bar{a})} + \beta_2 (\bar{d} - c) \right] < \\
 & < 2 \varepsilon \left[ \frac{2 \alpha_2 H}{\nu_1} + \beta_2 (\bar{b} - \bar{a}) \left( \bar{d} - c + \frac{\bar{b} - \bar{a}}{2} \right) + \frac{4 \alpha_2 H}{\nu_1(\bar{b} - \bar{a})} + \right. \\
 & \left. + \beta_2 \left( \bar{d} - c + \frac{\bar{b} - \bar{a}}{2} \right) \right] = 2 \varepsilon K
 \end{aligned}$$

con  $K$  indipendente da  $C$ .

Analogamente in virtù delle (12') (5'), (11) e dell'integrabilità di  $\bar{y}_1(x)$ , si può ottenere

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} \mathcal{E}_2(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1(x); \bar{\pi}_{2,n}(z), \bar{y}'_2(z)) dx dz \leq 2 \varepsilon K'$$

con  $K'$  costante indipendente da  $C$ .

Passiamo ora a considerare la prima differenza fra parentesi quadre del secondo membro della (14). Essa può scriversi anche :

$$\int_a^b F(x, y_1(x)) dx - \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} F(x, \bar{y}_1(x)) dx$$

dove si è posto

$$(15) \quad F(x, y_1) = \int_c^d f(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dz.$$

Osserviamo che  $F(x, y_1)$  dipende da  $y_2(z)$  e quindi da  $C$ .

*Fissata* che sia una delle  $C$  considerate, e quindi una determinata  $y_2(z)$   $F(x, y_1)$  è continua in tutti gli  $(x, y_1)$  di  $A_1$ , appartenenti all'intorno ( $\varrho$ ) di  $\bar{y}_1(z)$ . Infatti poichè  $|\bar{\pi}'_{1,n}(x)|$  è limitata in  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{b} + \varepsilon)$  e per la (6), si ha che, per gli  $(x, y_1)$  suddetti e per ogni  $z$  in cui esiste finita la  $y'_2(z)$ , cioè quasi dappertutto in  $(c, d)$ , vale la :

$$(16) \quad |f(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z))| \leq l |y'_2(z)| + m$$

con  $l$  e  $m$  costanti opportune indipendenti da  $y_2(z)$ . Ma allora, dalla continuità di  $f$  rispetto a  $(x, y_1, y')$  e dalla integrabilità in  $(c, d)$  di  $y'_2(z)$ , si ha, per un noto risultato <sup>(13)</sup>, che l'integrale

$$\int_c^d f(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx = F(x, y_1)$$

è continuo rispetto a  $(x, y_1)$ .

<sup>(13)</sup> Si tratta del fatto che se  $g(x, \alpha)$  è una funzione quasi-continua in  $x$  per ogni  $\alpha$  e continua in  $\alpha$  per ogni  $x$  ( $x_0 \leq x \leq x_1, \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ) e inoltre esiste una funzione  $q(x)$  integrabile in  $(x_0, x_1)$  per la quale è per ogni  $\alpha$  e quasi-dappertutto in  $(x_0, x_1)$   $|g(x, \alpha)| \leq$

$\leq q(x)$ , allora  $\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, \alpha) dx$  è una funzione continua di  $\alpha$  in  $(\alpha_0, \alpha_1)$ . Esso segue

per es. dalla nota di L. TIBALDI : *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto a una e continue rispetto ad un'altra variabile* (Rend. Acc. Lincei, vol. II, fasc. 2, 1947).

Inoltre esiste una costante  $\bar{L} > 0$  tale che, qualunque sia la curva  $C$ , tra quelle considerate e appartenenti propriamente all'intorno  $(\varrho)$  di  $\bar{C}$ , è  $|F(x, y_1)| \leq \bar{L}$  in ogni  $(x, y_1)$  di  $A'_1$  appartenente all'intorno  $(\varrho)$  di  $\bar{y}_1(x)$ . Infatti, poichè è  $\varrho < \frac{\bar{b} - \bar{a}}{4}$ , dalla (16), in virtù della (8) otteniamo

$$|F(x, y_1)| \leq \frac{2 \downarrow H}{r_1(\bar{b} - \bar{a})} + m \left( \bar{d} - \bar{c} + \frac{\bar{b} - \bar{a}}{2} \right) = \bar{L}$$

Dico anche che per quasi-tutti gli  $x$  di  $(\bar{a} - \varrho, \bar{b} + \varrho)$  esiste finita la  $F_{y_1}(x, y_1)$  ed è continua, per  $x$  fissato, rispetto a  $y_1$ . Infatti nella (15) è possibile la derivazione sotto il segno di integrale <sup>(14)</sup>, in quasi tutti gli  $x$  di  $(\bar{a} - \varrho, \bar{b} + \varrho)$  in virtù dell'ipotesi V) e dell'integrabilità di  $y'_2(z)$  e del fatto che  $|\bar{\pi}'_{1,n}(x)|$  è limitato in  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{b} + \varepsilon)$ ; ed è quindi per tutti gli  $x$  suddetti:

$$(17) \quad F_{y_1}(x, y_1) = \int_c^d f_{y_1}(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dz$$

Per gli stessi  $x$  inoltre  $F_{y_1}(x, y_1)$ , considerata per una determinata  $y_2(z)$ , è continua rispetto a  $y_1$ , in virtù della continuità stessa di  $f_{y_1}$  rispetto a  $y_1$  e ancora della (5) dell'ipotesi V), secondo la quale è:

$$(18) \quad |f_{y_1}(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z))| \leq B_2 |y'_2(z)| + \bar{B}_2$$

dove  $B_2$  e  $\bar{B}_2$  dipendono effettivamente dal massimo di  $|\bar{\pi}'_{1,n}(x)|$  in  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{b} + \varepsilon)$  <sup>(15)</sup>.

È ora anche facile dimostrare, tenendo presenti le (17), (18), e (8) che, qualunque sia la curva  $C$  di quelle considerate appartenenti all'intorno  $(\varrho)$  di  $\bar{C}$ , in ogni punto  $(x, y_1)$  di  $A'_1$ , appartenente all'intorno  $(\varrho)$  di  $\bar{y}_1(x)$ , in cui esiste la  $F_{y_1}(x, y_1)$  è:  $|F_{y_1}(x, y_1)| \leq L'$ , con  $L'$  costante opportuna indipendente da  $C$ .

Ma allora il funzionale  $\int_a^b F(x, y_1(x)) dx$  è « ugualmente continuo » <sup>(16)</sup> su  $\bar{y}_1(x)$  nell'insieme di curve  $y_1(x)$ , con  $y_1(x)$  appartenenti ad una qualunque

<sup>(14)</sup> v. ad es. C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Functionen*. Leipzig, 1918, § 572, p. 661.

<sup>(15)</sup> Anche qui si ricorre, in virtù della (18), al risultato citato in <sup>(13)</sup>.

<sup>(16)</sup> v. luogo citato in (5), § I, n. 5 c.



delle curve  $C$  considerate e appartenenti propriamente all'intorno  $(\varrho)$  di  $\bar{C}$ , sicchè si può determinare un  $\varrho_1 < \varrho$  e positivo, tale che per ogni curva  $C$ , di quelle considerate, appartenenti propriamente all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{C}$  sia :

$$\left| \int_a^b F(x, y_1(x)) dx - \int_a^{\bar{b}} F(x, \bar{y}_1(x)) dx \right| = \left| \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz - \int_a^{\bar{b}} \int_c^d f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dx dz \right| < \varepsilon$$

Passiamo ora alla seconda differenza del secondo membro di (14). Essa si può scrivere :

$$\int_a^b y'_1(x) Q(x, y_1(x)) dx - \int_a^{\bar{b}} \bar{y}'_1(x) Q(x, \bar{y}_1(x)) dx$$

dove si è posto :

$$(19) \quad Q(x, y_1) = \int_c^d f_{y'_1}(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) dz$$

Osserviamo che  $Q(x, y_1)$  dipende da  $y_2(z)$  e quindi da  $C$ . Per una  $C$ , e quindi una  $y_2(z)$ , determinata,  $Q(x, y_1)$  è continua in tutti gli  $(x, y_1)$  di  $A'_1$  appartenenti all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{y}_1(x)$ . Ciò segue immediatamente, in modo analogo a quanto si è fatto per  $F(x, y_1)$  tenendo presente la (5). E in modo analogo si ottiene pure che esiste una costante  $M > 0$ , tale che qualunque sia la curva  $C$ , tra quelle considerate, appartenenti propriamente all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{C}$ , è  $|Q(x, y_1)| \leq M$ , in ogni punto  $(x, y_1)$  di  $A'_1$ , appartenente all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{y}_1(x)$ .

Dalla (19) ricaviamo l'esistenza e la continuità di  $\frac{\partial Q(x, y_1)}{\partial x}$  in tutti i punti  $(x, y_1)$  di  $A'_1$ , appartenenti all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{y}_1(x)$ . Infatti dalle ipotesi III) e IV) e dal fatto che esiste continua e limitata in  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{b} + \varepsilon)$  la  $\bar{\pi}''_{1,n}(x)$ , è possibile in (19) derivare sotto il segno di integrale (17) ed ottenere :

$$(20) \quad \frac{\partial Q(x, y_1)}{\partial x} = \int_c^d f_{y'_1 x}(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{1,n}(x), y'_2(z)) + + \bar{\pi}''_{2,n}(x) f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2(z), \bar{\pi}'_{2,n}(x), y'_2(z)) dz.$$

(17) v. luogo citato in (14).

E la stessa (20), per le ipotesi stesse citate, ci assicura anche la continuità di  $\frac{\partial Q(x, y_1)}{\partial x}$  rispetto agli  $(x, y_1)$  suddetti (18).

Infine dalla (20), dalle ipotesi III) e IV), dalla limitatezza delle  $\bar{\pi}'_{1,n}(x)$  e  $\bar{\pi}''_{1,n}(x)$  in  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{b} + \varepsilon)$  e dalla (8), otteniamo l'esistenza di una costante  $M' > 0$ , tale che, qualunque sia la curva  $C$ , tra quelle considerate, appartenente propriamente all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{C}$ , in ogni punto  $(x, y_1)$  di  $A'_1$ , appartenente all'intorno  $(\varrho_1)$  di  $\bar{y}_1(x)$ , è  $\left| \frac{\partial Q(x, y_1)}{\partial x} \right| \leq M'$ .

Ma allora al funzionale  $\int_a^b y'_1(x) Q(x, y_1(x)) dx$  è applicabile un altro risultato di S. FAEDO (19) sulla « uguale continuità » dei funzionali, cioè si può determinare un  $\varrho_2 < \varrho_1$  e positivo tale che per ogni curva  $C$ , di quelle considerate, appartenenti propriamente all'intorno  $(\varrho_2)$  di  $C$  sia

$$\left| \int_a^b y'_1(x) Q(x, y_1(x)) dx - \int_a^{\bar{b}} \bar{y}'_1(x) Q(x, \bar{y}_1(x)) dx \right| < \varepsilon.$$

La terza differenza che appare nel secondo membro di (14), si tratta come la prima, tenendo presente la continuità e quindi la limitatezza di  $\bar{\pi}'_{1,n}(x)$  in  $(\bar{a} - \varepsilon, \bar{b} + \varepsilon)$ , l'ipotesi V) e la (5), sicchè essa può rendersi in modulo  $< \varepsilon$  pur di considerare le curve  $C$ , tra quelle già considerate, appartenenti propriamente ad un intorno opportuno  $(\varrho_3)$  di  $C$ , con  $\varrho_3 < \varrho_2$  e positivo.

Passiamo ora alla quarta differenza del secondo membro di (14); essa può scriversi:

$$\int_c^d G(z, y_2(z)) dz - \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} G(z, \bar{y}_2(z)) dz$$

dove si è posto:

$$G(z, y_2) = \int_a^{\bar{b}} f(x, z, \bar{y}_1(x), y_2, \bar{y}'_1(x), \bar{\pi}'_{2,n}(z)) dx.$$

$G(z, y_2)$  è continua in tutti i punti  $(z, y_2)$  di  $A'_2$ , appartenenti all'intorno

(18) v. nota (15).

(19) v. luogo citato in (5), § I, n. 5-a).

( $\mathcal{Q}_3$ ) di  $\bar{y}_2(z)$ ; ciò segue immediatamente dal risultato citato in (18), poiché vale la (6) e  $|\bar{\pi}_{2,n}(z)|$  è limitato in  $(\bar{c} - \varepsilon, \bar{d} + \varepsilon)$ . Allora il funzionale  $\int_c^{\bar{c}} G(z, y_2(z)) dz$  è continuo su  $\bar{y}_2(z)$  (20); si può quindi determinare un  $\varrho_4 < \varrho_3$  e positivo, tale che per tutte le curve  $C$ , di quelle considerate, appartenenti propriamente all'intorno ( $\mathcal{Q}_4$ ) di  $\bar{C}$  sia soddisfatta la

$$\left| \int_c^{\bar{c}} G(z, y_2(z)) dz - \int_c^{\bar{c}} G(z, \bar{y}_2(z)) dz \right| < \varepsilon.$$

La quinta differenza del secondo membro di (14) si può scrivere

$$\int_c^{\bar{c}} y_2'(z) P(z, y_2(z)) dz - \int_c^{\bar{c}} \bar{y}_2'(z) P(z, \bar{y}_2(z)) dz$$

dove si è posto

$$(21) \quad P(z, y_2) = \int_a^{\bar{b}} f_{y_2}'(x, z, \bar{y}_1(x), y_2, \bar{y}_1'(x), \bar{\pi}_{2,n}'(z)) dx$$

$P(z, y_2)$  è continua in tutti i punti  $(z, y_2)$  di  $A'_2$ , appartenenti all'intorno ( $\mathcal{Q}_4$ ) di  $\bar{y}_2(z)$ , in virtù della (5') e del risultato citato in (13).

Esiste anche negli stessi  $(z, y_2)$  la  $\frac{\partial P(z, y_2)}{\partial z}$ ; infatti nella (21) si può derivare sotto il segno di integrale (v. nota (14)) in virtù delle ipotesi III), IV), e della continuità di  $\bar{\pi}_{2,n}''(z)$  in  $(\bar{c} - \varepsilon, \bar{d} + \varepsilon)$ ; ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, y_2)}{\partial z} &= \int_a^{\bar{b}} [f_{y_2 z}'(x, z, \bar{y}_1(x), y_2, \bar{y}_1'(x), \bar{\pi}_{2,n}'(z)) + \\ &+ \bar{\pi}_{2,n}''(z) f_{y_2 y_2}'(x, z, \bar{y}_1(x), y_2, \bar{y}_1'(x), \bar{\pi}_{2,n}'(z))] dx \end{aligned}$$

e di qui si ricava, per le stesse ipotesi citate e sempre per il risultato citato in (13) che  $\frac{\partial P(z, y_2)}{\partial z}$  è continua negli  $(z, y_2)$  sopradetti.

---

(20) v. luogo citato in (7), n° 149, pag. 385-389.

Allora il funzionale  $\int_c^d \bar{y}'_2(z) P(z, y_2(z)) dz$  è continuo su  $\bar{y}_2(z)$  <sup>(21)</sup>; si può quindi determinare un  $\varrho_5 < \varrho_4$  e positivo tale che per ogni curva  $C$ , di quelle considerate, appartenenti propriamente all'intorno  $(\varrho_5)$  di  $C$  sia

$$\left| \int_c^d \bar{y}'_2(z) P(z, y_2(z)) dz - \int_c^d \bar{y}'_2(z) P(z, \bar{y}_2(z)) dz \right| < \varepsilon$$

Infine anche la sesta differenza del secondo membro di (14) si tratta in modo analogo alla quarta, tenendo presente la (5').

In definitiva si può trovare un  $\varrho_6 > 0$  tale che per ogni curva  $C$  ordinaria, appartenente propriamente all'intorno  $(\varrho_6)$  di  $\bar{C}$  e per la quale è  $I(y_1, y_2) < I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$  si abbia

$$(22) \quad I(y_1, y_2) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) > -6\varepsilon - 2\varepsilon K - 2\varepsilon K' = -\varepsilon \bar{K}$$

con  $\bar{K}$  costante opportuna indipendente da  $C$ .  $I(y_1, y_2)$  è quindi semicontinuo inferiormente su  $\bar{C}$ .

2. — Le ipotesi dell'enunciato del n. 1 presentano delle dissimmetrie rispetto alle variabili  $(x, y_1, y'_1)$  e  $(z, y_2, y'_2)$  che non sono evidentemente essenziali alla dimostrazione data. Così il risultato è ancora valido, se nel n. 1 alla (1) dell'ipotesi II) è sostituita la simmetrica:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \nu_1 |y'_1|$$

per ogni  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}$ , per ogni  $y'_2$  e per  $|y'_1| \geq Y'$ , e se l'ipotesi V) è sostituita con la:

V') per quasi tutti gli  $z$  e tutti gli  $x, y_1$  e  $y_2$  tali che  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenga ad  $A'$  e per tutti gli  $y'_1$  e  $y'_2$  esistano la  $f_{y'_2}$  e la  $f_{x, y'_2}$  e siano continue per  $z$  fissato, rispetto a  $(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ ; inoltre per ogni parte limitata  $\bar{A}'$  di  $A'$  e ogni  $L > 0$ , si possano trovare quattro numeri positivi  $B_1, \bar{B}_1, D_1$  e  $\bar{D}_1$ , tali che per  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}'$ ,  $y'_1$  qualunque e  $|y'_2| \leq L$ , sia:

$$|f_{y_2}| \leq B_1 |y'_1| + \bar{B}_1; \quad |f_{y'_2}| \leq D_1 |y'_1| + \bar{D}_1$$

Basterà infatti, in questo caso, invertire il ruolo di  $\bar{y}_1(x)$  con quello di  $\bar{y}_2(z)$  nella dimostrazione data in 1.

<sup>(21)</sup> V. luogo citato in <sup>(20)</sup>.

3. — È opportuno fare infine un'osservazione. Se, ferme restando le ipotesi I), III), IV) e V) del n. 1 ci si limita alla semicontinuità in ogni classe  $K$  di curve ordinarie  $C[y_1(x), y_2(z)]$  appartenenti ad  $A$ , per le quali la curva rappresentativa della funzione  $y = y_2(z)$  abbia lunghezza inferiore ad uno stesso numero  $L$ , indipendente da  $C$ , allora l'ipotesi II) del n. 1 può tralasciarsi, come risulta dalla dimostrazione stessa data nel n. 1 e dal fatto che in questo caso non occorre dimostrare la (8), essendo senz'altro verificata la

$$\int_C y'_2(z) | dz \leq H$$

con  $H$  costante indipendente da  $C$ .

Un'osservazione analoga vale circa il teorema del n. 2. scambiando naturalmente il ruolo di  $y_2(z)$  con quello di  $y_1(x)$ .

### § 3. — La semicontinuità di $I(u_1, u_2)$ nel caso generale.

1. Estenderemo ora i risultati del § 2 a classi di funzioni  $f$  più generali.

Precisamente supporremo che la  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ , considerata nel n. 1 § 1, soddisfi alle seguenti ipotesi:

1) per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$ , in tutti i punti del campo  $A$ , sia:

$$(\alpha) \quad f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0; \quad f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0.$$

2) esistano due campi  $A'_1$  e  $A'_2$  aventi rispettivamente tutti i punti di  $A_1$  e  $A_2$  come punti interni, tali che posto  $A' = A'_1 \times A'_2$  in  $A' = A$  possa definirsi la  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$  in modo che, in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  e  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque, la  $f$  e le sue derivate  $f_{y'_1}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_2 y'_2}$  siano continue e negli stessi punti esistano anche e siano continue le derivate  $f_{y'_1 x}, f_{y'_2 z}$ ;

3) per ogni parte limitata  $\bar{A}'$  di  $A'$  si possano trovare due numeri  $v_1 > 0$  e  $Y' \geq 1$  e quattro funzioni  $P(x, z, y_1, y_2)$ ,  $Q(x, z, y_1, y_2)$ ,  $R(x, z, y_1, y_2)$  e  $S(x, z, y_1, y_2)$ , definite e continue in  $\bar{A}'$  con le derivate  $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z}, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z}, \frac{\partial P}{\partial y_1}, \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \frac{\partial R}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_1}$ , tali che, detta  $\bar{A}$  la parte di  $A$  contenuta in  $\bar{A}'$ :

a) in tutto  $\bar{A}$  e per ogni valore di  $y'_1$  e  $y'_2$  sia:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2$$

b) in  $\bar{A}$ , per ogni  $y'_1$  e per  $|y'_2| \geq Y'$  sia:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2) \geq r_1 |y'_2|;$$

4) in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  e  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque esistano e siano continue le derivate  $f_{y_1}$  e  $f_{y'_1 y'_1}$ .

In questa ipotesi dimostreremo che il funzionale  $I(y_1, y_2)$  è semicontinuo inferiormente<sup>(22)</sup>.

Sia infatti  $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$  una curva ordinaria appartenente al campo  $A$ , e fissiamo un intorno, per es. quello unitario, di  $\bar{C}$ . Dette  $\bar{A}$  e  $\bar{A}'$  le parti rispettivamente di  $A$  e di  $A'$  contenute nel detto intorno, siano  $P, Q, R, S$  e  $r_1$  e  $Y'$  le funzioni e i numeri corrispondenti ad  $\bar{A}$  e  $\bar{A}'$ , secondo l'ipotesi 3). Consideriamo la nuova funzione

$$\bar{f}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = f - (P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2)$$

la quale risulta definita per ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}'$  (e quindi anche di  $\bar{A}$ ) e per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$  e per gli stessi  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  ammette continue le derivate  $\bar{f}_{y'_1}, \bar{f}_{y'_1 y'_1}, \bar{f}_{y'_1 x}, \bar{f}_{y'_2}, \bar{f}_{y'_2 y'_2}, \bar{f}_{y'_2 z}, \bar{f}_{y'_2 y_1}, \bar{f}_{y'_1 y_1}$ ; inoltre essa è maggiore o uguale a zero in tutti gli  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}$  e  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque e per gli stessi  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  soddisfa alle:

$$\bar{f}_{y'_1 y'_1} \geq 0; \quad \bar{f}_{y'_2 y'_2} \geq 0;$$

e in tutto  $\bar{A}$  e per ogni  $y'_1$  e per  $|y'_2| \geq Y'$  soddisfa alla

$$\bar{f}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq r_1 |y'_2|.$$

E chiaro, in virtù della continuità del funzionale

$$\int_a^b \int_c^d (P + Q y'_2 + R y'_2 + S y'_1 y'_2) dx dz \quad (23)$$

<sup>(22)</sup> Se il campo  $A'$  coincidesse con  $A$ , la dimostrazione che daremo, porterebbe alla semicontinuità inferiore di  $I(y_1, y_2)$  su ogni curva ordinaria completamente interna ad  $A$ ,

<sup>(23)</sup> v. luogo cit. in (5) § 2, n. 2.

che, volendo dimostrare la semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$  su  $\bar{C}$ , basterà dimostrare la semicontinuità su  $\bar{C}$  del funzionale

$$\bar{I}(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d \bar{f}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)) dx dz$$

il quale esiste per ogni curva ordinaria  $C$  appartenente propriamente all'intorno unitario di  $\bar{C}$ , in virtù dell'esistenza di  $I(y_1, y_2)$  stesso.

Scelto allora ad arbitrio un numero positivo  $\varepsilon \leq 1$ , possiamo determinare un numero positivo  $\bar{R} > Y'$ , tale che sia

$$(23) \quad \iint_{C(E)} f(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)) dx dz < \varepsilon.$$

dove  $C(E)$  indica il complementare, rispetto al rettangolo  $[\bar{a} \leq x \leq \bar{b}; \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ , dell'insieme  $E$  dei punti del rettangolo detto in cui esistono finite ambedue le  $\bar{y}_1'(x)$  e  $\bar{y}_2'(z)$  ed hanno un valore assoluto  $\leq \bar{R}$ .

Vogliamo ora sostituire alla funzione  $\bar{f}$  una funzione  $\bar{g}$  la quale coincida con la  $\bar{f}$  in tutto  $\bar{A}'$  e per  $|y_1'| \leq \bar{R}$  e  $|y_2'| \leq \bar{R}$ , sia  $\leq \bar{f}$  e  $\geq 0$  in tutto  $\bar{A}'$  e per  $y_1'$  e  $y_2'$  qualunque e inoltre soddisfi alle ipotesi del teorema del § 2, n. 1. Potremo, per esempio, costruire  $\bar{g}$  nel seguente modo, che è suggerito dall'esempio analogo costruito dal TONELLI, per l'integrale semplice in forma ordinaria<sup>(24)</sup>.

Definiamo anzitutto in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}'$ , che indicheremo brevemente con  $\omega$ , una funzione  $g(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = g(\omega, y_1', y_2')$  ponendo:

$$\text{per ogni } y_2' \text{ e per } |y_1'| \leq \bar{R}: g = \bar{f};$$

$$\text{per ogni } y_2' \text{ e per } \bar{R} \leq y_1' \leq 2\bar{R}:$$

$$g = O_{y_1'}'(\bar{f}) = 2\bar{f}(\omega, y_1', y_2') - \frac{y_1'}{\bar{R}} \bar{f}(\omega, y_1', y_2') + \\ + \frac{2}{\bar{R}} \int_{\bar{R}}^{y_1'} \bar{f}(\omega, y_1', y_2') dy_1' - \frac{y_1'}{\bar{R}} \bar{f}(\omega, \bar{R}, y_2') + \bar{f}(\omega, \bar{R}, y_2')$$

<sup>(24)</sup> v. luogo cit. in (7) pag. 398, nota (4).

per ogni  $y'_2$  e per  $y'_1 \geq 2\bar{R}$ :

$$g = O''_{y'_1}(\bar{f}) = \frac{y'_1}{R} [\bar{f}(\omega, 2\bar{R}, y'_1) - \bar{f}(\omega, \bar{R}, y'_2)] - \\ - 2\bar{f}(\omega, 2\bar{R}, y'_2) + \bar{f}(\omega, \bar{R}, y'_2) + \frac{2}{R} \int_{\bar{R}}^{2\bar{R}} \bar{f}(\omega, y'_1, y'_2) d y'_1$$

dove con  $O'_{y'_1}(\bar{f})$  e  $O''_{y'_1}(\bar{f})$  si intendono gli operatori, applicati alla  $\bar{f}$  sopra-  
scritti.

Analogamente cambiando  $\bar{R}$  in  $-\bar{R}$  si costruisca  $g$  per  $-2\bar{R} \leq y'_1 \leq -\bar{R}$  e per  $y'_2 \leq -2\bar{R}$ .

Trasformiamo poi la  $g$ , così definita, mediante gli operatori  $O'_{y'_2}$  e  $O''_{y'_2}$  analoghi ad  $O'_{y'_1}$  e  $O''_{y'_1}$ , ponendo cioè in ogni punto di  $\bar{A}'$ :

per ogni  $y'_1$  e per  $y'_2 \leq \bar{R}$ :  $\bar{g} = g$ ;

per ogni  $y'_1$  e per  $\bar{R} \leq y'_2 \leq 2\bar{R}$ :

$$g = O'_{y'_2}(g) = 2g(\omega, y'_1, y'_2) - \frac{y'_2}{R} g(\omega, y'_1, y'_2) + \\ + \frac{2}{R} \int_{\bar{R}}^{y'_2} g(\omega, y'_1, y'_2) d y'_2 - \frac{y'_2}{R} g(\omega, y'_1, \bar{R}) + g(\omega, y'_1, \bar{R});$$

per ogni  $y'_1$  e per  $y'_2 \geq 2\bar{R}$ :

$$\bar{g} = O''_{y'_2}(g) = \frac{y'_2}{R} [g(\omega, y'_1, 2\bar{R}) - g(\omega, y'_1, \bar{R})] - 2g(\omega, y'_1, 2\bar{R}) + \\ + g(\omega, y'_1, \bar{R}) + \frac{2}{R} \int_{\bar{R}}^{2\bar{R}} g(\omega, y'_1, y'_2) d y'_2$$

e analogamente, cambiando  $\bar{R}$  in  $-\bar{R}$ , si costruisca  $\bar{g}$  per  $-2\bar{R} \leq y'_2 \leq -\bar{R}$  e per  $y'_1 \leq -2\bar{R}$ .



La funzione  $\bar{g}(y, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ , che abbiamo così definita in tutto  $\bar{A}'$  e per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$  finiti, soddisfa ivi alle ipotesi I), II), III), IV), V), del teorema del § 1, n. 2.

Infatti osserviamo anzitutto che  $\bar{g} = \bar{f}$  in tutto  $\bar{A}'$  e per  $|y'_1| \leq \bar{R}$  e  $|y'_2| \leq \bar{R}$ . Di qui e dal significato degli operatori  $O'_{y'_1}, O''_{y'_1}, O'_{y'_2}, O''_{y'_2}$ , i quali trasformano funzioni non negative, in funzioni non negative, ricaviamo che in tutto  $\bar{A}$  e per  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque è  $g_{y'_1 y'_1} \geq 0$  e  $\bar{g}_{y'_2 y'_2} \geq 0$ ; infatti teniamo presente che negli stessi  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  è  $\bar{f}_{y'_1 y'_1} \geq 0$  e  $\bar{f}_{y'_2 y'_2} \geq 0$  e che è

$$D_{y'_1 y'_1} [O'_{y'_1}(\bar{f})] \geq 0; \quad D_{y'_1 y'_1} [O''_{y'_1}(\bar{f})] = 0; \quad D_{y'_2 y'_2} [O'_{y'_2}(\bar{f})] = O'_{y'_1} [D_{y'_2 y'_2}(\bar{f})] = \\ = O'_{y'_1}(f_{y'_2 y'_2}) \geq 0; \quad D_{y'_2 y'_2} [O''_{y'_2}(\bar{f})] = O'_{y'_1} [D_{y'_2 y'_2}(f)] = O''_{y'_1}(f_{y'_2 y'_2}) \geq 0,$$

dove con  $D_{y'_1 y'_1}$  e  $D_{y'_2 y'_2}$  indichiamo l'operazione di derivazione rispetto alle variabili indicate; ne risulta che è  $g_{y'_1 y'_1} \geq 0$  e  $g_{y'_2 y'_2} \geq 0$  in tutto  $\bar{A}'$  e per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$ ; in modo analogo si passa alla  $\bar{g}$ . È così provato che è soddisfatta l'ipotesi I).

Per quanto riguarda l'ipotesi II), risulta anzitutto, poichè gli operatori  $O'_{y'_1}, O''_{y'_1}, O'_{y'_2}, O''_{y'_2}$  trasformano funzioni non negative in funzioni non negative, che in tutto  $\bar{A}$  e per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$  è  $\bar{g} \geq 0$ . Inoltre in tutto  $\bar{A}$ , per ogni  $y'_1$  e per  $|y'_2| \geq \bar{R}$  è pure  $\bar{g} \geq r_1 |y'_2|$ . Infatti ciò è evidente per la  $g$ , in virtù della definizione stessa di  $g$  e del fatto che  $\bar{f}$  soddisfa nei suddetti punti  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  alla  $\bar{f} \geq r_1 |y'_2|$ .

D'altra parte gli operatori  $O'_{y'_2}$  e  $O''_{y'_2}$ , applicati alla funzione  $g - r_1 y'_2$ , che per ogni  $y'_1$  e  $y'_2 \geq \bar{R}$  è  $\geq 0$ , trasformano la  $g - r_1 y'_2$  in una funzione non negativa in tutti i punti  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}$ , per ogni  $y'_2$  e per  $y'_2 \geq \bar{R}$ ; ma si verifica subito che è  $O'_{y'_2}(g - r_1 y'_2) = O'_{y'_2}(g) - r_1 y'_2$  e perciò da  $O'_{y'_2}(g - r_1 y'_2) \geq 0$  si ricava  $O'_{y'_2}(g) = \bar{g} \geq r_1 y'_2$  per ogni  $y'_1$  e per  $y'_2 \geq \bar{R}$ . Analogamente si ragiona per  $y'_2 \leq -\bar{R}$  e si arriva così alla  $\bar{g} \geq r_1 |y'_2|$  per ogni  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $\bar{A}$ , per ogni  $y'_1$  e per  $|y'_2| \geq \bar{R}$ . La  $\bar{g}$  soddisfa quindi all'ipotesi II).

L'ipotesi III) è immediatamente verificata in virtù del fatto che gli operatori  $O'_{y'_1}, O''_{y'_1}, O'_{y'_2}, O''_{y'_2}$  mantengono le proprietà di derivabilità delle funzioni a cui si applicano.

Le ipotesi IV), V) si verificano tenendo presente che per  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}'$  e  $|y'_1| \leq 2\bar{R}$ ,  $|y'_2| \leq 2\bar{R}$  le

$$\bar{g}, \bar{g}_{y'_1}, \bar{g}_{y'_1 y'_1}, \bar{g}_{y'_1 x}, \bar{g}_{y'_1 y'_2}, \bar{g}_{y'_2 y'_2}, \bar{g}_{y'_2 z}, \bar{g}_{y'_1}, \bar{g}_{y'_1 y_1}, \bar{g}_{y_2}, \bar{g}_{y'_2 y_2}$$

sono tutte in modulo limitate e che gli operatori  $O''_{y'_2}$  e  $O''_{y'_1}$  trasformano le funzioni, cui si applicano, in funzioni lineari rispettivamente in  $y'_2$  e  $y'_1$  e trasformano anche funzioni lineari rispettivamente in  $y'_1$  e  $y'_2$  in altrettante funzioni lineari rispettivamente in  $y'_1$  e  $y'_2$ .

Possiamo anche notare che, nel nostro caso le costanti indicate nelle ipotesi IV), V) dipenderanno dai confini superiori dei moduli di  $\bar{g}$  e delle sue derivate per  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}'$  e  $|y'_1| \leq 2\bar{R}$ ,  $|y'_2| \leq 2\bar{R}$ .

Ma allora il funzionale  $\int_a^b \int_c^d \bar{g}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ , il quale esiste sulle curve ordinarie  $C$ , appartenenti propriamente all'intorno unitario di  $\bar{C}$ , in virtù del fatto che in tutto  $\bar{A}$  e per  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque è  $\bar{g} \leq \bar{f}$ , è semicontinuo inferiormente sulla curva  $\bar{C}$ , per il risultato del § 2, n. 1. Si può quindi determinare un  $\varrho < 1$  e positivo, tale che per ogni curva ordinaria  $C$  appartenente propriamente all'intorno ( $\varrho$ ) di  $\bar{C}$ , sia

$$\int_a^b \int_c^d \bar{g} dx dz \geq \int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{g} dx dz - \varepsilon.$$

D'altra parte è pure per le stesse  $C$ :

$$\int_a^b \int_c^d \bar{f} dx dz \geq \int_a^b \int_c^d \bar{g} dx dz$$

e anche:

$$\int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{g} dx dz = \int_E \bar{g} dx dz + \int_{C(E)} \bar{g} dx dz$$

e, poichè per  $|y'_1| \leq \bar{R}$  e  $|y'_2| \leq \bar{R}$  è  $\bar{g} = \bar{f}$  e  $g$  è  $\geq 0$

$$\int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{g} dx dz \geq \int_E \bar{f} dx dz$$

e quindi per la (23):

$$\int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{g} \, dx \, dz \geq \int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{f} \, dx \, dz - \varepsilon$$

e perciò:

$$\int_a^b \int_c^d \bar{f} \, dx \, dz \geq \int_a^{\bar{b}} \int_c^{\bar{d}} \bar{f} \, dx \, dz - 2\varepsilon$$

cioè il funzionale  $\bar{I}(y_1, y_2)$  è semicontinuo inferiormente su  $C$  e quindi lo è pure  $I(y_1, y_2)$ .

OSSERVAZIONE. — L'ipotesi della continuità delle  $\frac{\partial P}{\partial y_1}, \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \frac{\partial R}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_1}$ ,  $f_{y_1}$  e  $f_{y_1 y_1}$  possono essere notevolmente attenuate, in quanto esse intervengono nella dimostrazione solo per assicurare l'applicabilità dei teoremi di « uguale continuità » di S. FAEDO, citati nel § 2. Si può per es., analogamente a quanto si è ammesso nella V) del n. 1 § 2, sostituire la 4) con la

4\*) *per quasi-tutti gli  $x$  e tutti gli  $z, y_1$  e  $y_2$  tali che  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenga ad  $A'$  e per tutti gli  $y_1'$  e  $y_2'$ , esistano la  $f_{y_1}$  e la  $f_{y_1 y_1}$  e siano continue, per  $x$  fissato, rispetto a  $(z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ ; inoltre per ogni parte limitata  $\bar{A}'$  di  $A'$  e ogni  $L > 0$ , si possa trovare un numero  $B > 0$ , tale che per  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $\bar{A}'$  e  $|y_1'| \leq L, |y_2'| \leq L$ , sia:*

$$|f_{y_1}| \leq B; \quad |f_{y_1 y_1}| \leq B.$$

In modo analogo basta per es. che la  $\frac{\partial P}{\partial y_1}$  esista per quasi-tutti gli  $x$  e tutti  $z, y_1$  e  $y_2$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  e sia limitata in  $\bar{A}'$ .

2. — Il risultato del numero precedente è stato ottenuto riportando la dimostrazione al caso studiato nel § 2, n. 1, e presenta come quello delle dissimmetrie rispetto alle variabili  $(x, y_1, y_1')$  e  $(z, y_2, y_2')$ . Si potrà dunque sostituendo alla 3) b) la

3) b'): *in tutto  $\bar{A}$  per ogni  $y_2'$  e per  $|y_1'| \geq Y'$  sia*

$$f = (P + Q y_1' + R y_2' + S y_1' y_2') \geq r_1 |y_1'|.$$

alla 4) la

4') *in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$  con  $(x, z, y_1, y_2)$  appartenente ad  $A'$  e  $y_1'$  e  $y_2'$  qualunque esistano e siano continue la  $f_{y_2}$  e la  $f_{y_2 y_2}$ ;*

e nella 3) all'esistenza e alla continuità delle  $\frac{\partial P}{\partial y_1}, \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \frac{\partial R}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_1}$ , quelle delle  $\frac{\partial P}{\partial y_2}, \frac{\partial Q}{\partial y_2}, \frac{\partial R}{\partial y_2}, \frac{\partial S}{\partial y_2}$ , ottenere un'altra condizione sufficiente per la semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$ , sfruttando con lo stesso ragionamento del numero precedente, il risultato del n. 2 § 2.

Ed anche in questo caso varrà un'osservazione analoga a quella finale del n. precedente.

3. — La condizione 3) del n. 1, § 3 è stata enunciata per ogni parte limitata  $\bar{A}'$  del campo  $A'$ , sicchè in un certo senso si potrebbe dire che essa è data « globalmente » in  $A$ . Ma essa potrebbe essere data anche « puntualmente » e in questo secondo modo può essere più utile, anche se non è sostanzialmente più generale della 3) (cioè non è detto che la 3) rientri in quella che ora daremo). Precisamente, il risultato enunciato è ancora valido se, ferme restando le ipotesi 1), 2), 4), (o la (4\*)) è verificata la seguente ipotesi:

3) per ogni punto  $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$  di  $A$  si possano determinare sette numeri  $p, q, r, s, v_1, Y'$  e  $R$ , con  $v_1$  e  $R$  positivi e  $Y' \geq 1$ , tali che in tutti i punti  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $A$  distanti da  $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$  per non più di  $R$  sia:

$$(a) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2$$

per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$ ; e inoltre:

$$(b) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2) \geq v_1 | y'_2 |$$

per ogni  $y'_1$  e per  $| y'_2 | \geq Y'$ .

Sia infatti  $\bar{C}[y_1(x), y_2(z), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}; \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$  una curva ordinaria appartenente al campo  $A$ . Per ogni punto  $(x, z, y_1(x), y_2(z))$  di  $\bar{C}$  possiamo determinare i numeri  $p, q, r, s, v_1, Y'$  e  $R$  dell'ipotesi 3); mediante il teorema di PINCHERLE-BOREL e ragionamenti ben noti, opportunamente adattati allo spazio ambiente (a quattro dimensioni), in cui è immersa  $\bar{C}$ , che qui ometto per brevità, potremo scomporre  $\bar{C}$  in un numero finito di archi su ciascuno dei quali valga una condizione analoga alla 3); più precisamente potremo dividere  $(\bar{a}, \bar{b})$  e  $(\bar{c}, \bar{d})$  in un numero finito  $n$  di parti, mediante i punti  $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n = \bar{b}$ ;  $\bar{c}_0 = \bar{c}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n = \bar{d}$  in modo che per ogni arco  $\bar{C}_{h,k}$  di  $\bar{C}$  di equazioni:  $y_1 = y_1(x), \bar{a}_h \leq x \leq \bar{a}_{h+1}, y_2 = y_2(z), \bar{c}_k \leq z \leq \bar{c}_{k+1}$  ( $h, k = 0, 1, \dots, n-1$ ) (in totale sono quindi  $n^2$  archi di  $\bar{C}$ , che consideriamo) si possono trovare sette numeri  $p_{h,k}, q_{h,k}, z_{h,k}, s_{h,k}, v_{h,k}, Y'_{h,k}, \varrho_{h,k}$ , con  $v_{h,k}$  e  $\varrho_{h,k}$  positivi e  $Y'_{h,k} \geq 1$ , tali che in tutti i punti  $(x, z, y_1, y_2)$  di  $A$  appartenenti all'intorno  $(\varrho_{h,k})$  dell'arco  $\bar{C}_{h,k}$  di  $\bar{C}$  considerato, sia:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p_{h,k} + q_{h,k} y'_1 + z_{h,k} y'_2 + s_{h,k} y'_1 y'_2$$

per ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$ ; e inoltre

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p_{h,k} + q_{h,k} y'_1 + z_{h,k} y'_2 + s_{h,k} y'_1 y'_2) \geq r_{h,k} |y'_2|$$

per ogni  $y'_1$  e per  $|y'_2| \geq Y_{h,k}$ .

Allora per ogni arco  $C_{h,k}$  di  $\bar{C}$  esiste un opportuno intorno in cui sono verificate le condizioni 1), 2), 3), 4) del n. 1, § 3.

Su ciascuno di questi archi quindi,  $I(y_1, y_2)$  è semicontinuo inferiormente. Basta allora osservare che si può scrivere:

$$I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) dx dz = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\bar{a}_h}^{\bar{a}_{h+1}} \int_{\bar{c}_k}^{\bar{c}_{k+1}} f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) dx dz$$

e che una analoga scomposizione di  $I(y_1, y_2)$  varrà per ogni curva ordinaria  $C$  appartenente ad un intorno opportuno di  $\bar{C}$ , per concludere che  $I(y_1, y_2)$  è semicontinuo inferiormente su tutta  $\bar{C}$ .

OSSERVAZIONE. — Non occorre far rilevare naturalmente che una analoga e « simmetrica » condizione « puntuale » corrispondente al n. 2 § 3. può essere sfruttata in modo del tutto analogo.

4. — Analogamente a quanto si è osservato nel n. 3 del parag. precedente, se ci si limita alla ricerca della semicontinuità nella classe  $K$  di curve ordinarie  $C$  ivi considerata, si può tralasciare l'ipotesi 3), b) enunciata nel n. 1 di questo paragrafo e così pure la 3), b) del n. 3. E un'osservazione analoga vale naturalmente anche per il risultato del n. 2 e per quello dell'osservazione finale del n. 3.

#### § 4. — Estensione della semicontinuità.

1. Sia  $\bar{C}$  una « curva  $C$  » la quale non sia però una curva ordinaria. Dimostriamo che:

*Se la funzione  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  soddisfa alle ipotesi enunciate nel n. 1, § 3 preso ad arbitrio un  $K$ , si può determinare un  $\varrho > 0$ , in modo che, ogni curva ordinaria  $C$  appartenente propriamente all'intorno ( $\varrho$ ) della curva  $\bar{C}$ , soddisfi alla disuguaglianza  $I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) > K$ .*

Consideriamo la funzione  $\bar{f} = f - (P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2)$  introdotta nel n. 1, § 3. È chiaro che la  $\bar{f}$  risulta integrabile sulle curve ordinarie  $C$ ,

essendolo la  $f$ . Poichè  $\bar{y}_1(x)$  e  $y_2(z)$  sono assolutamente continue la funzione

$$P(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)) + Q(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)) \bar{y}'_1(x) + R(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)) \bar{y}'_2(z) + \\ + S(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)) \bar{y}'_1(x) \bar{y}'_2(z)$$

è integrabile sul rettangolo  $(\bar{a}, \bar{b})(\bar{c}, \bar{d})$  e in virtù dei risultati di S. FAEDO <sup>(25)</sup>, l'integrale:

$$\int_a^b \int_c^d (P + Q \bar{y}'_1 + R \bar{y}'_2 + S \bar{y}'_1 \bar{y}'_2) dx dz$$

è continuo anche sulla curva  $\bar{C}$ . Ma su  $\bar{C}$  la  $f$  non è integrabile, quindi non è integrabile su  $\bar{C}$  nemmeno la  $\bar{f}$ ; e poichè  $\bar{f} \geq 0$ , si può quindi determinare un  $\bar{K} > 0$  tale che, indicato con  $E$  l'insieme dei punti del rettangolo  $(\bar{a}, \bar{b})(\bar{c}, \bar{d})$ , in cui esistono finite ambedue le  $\bar{y}'_1(x)$  e  $\bar{y}'_2(z)$  e hanno un valore assoluto  $\leq \bar{R}$ , risulti:

$$\int_E \bar{f}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{y}'_2(z)) dx dz > K + 1 + \\ (24) \quad + \int_a^b \int_c^d (P + Q \bar{y}'_1 + R \bar{y}'_2 + S \bar{y}'_1 \bar{y}'_2) dx dz$$

Prendiamo poi  $\bar{\varrho} > 0$  e  $< 1$  in modo che per ogni curva ordinaria appartenente propriamente all'intorno  $(\bar{\varrho})$  di  $\bar{C}$ , si abbia:

$$\left| \int_a^b \int_c^d (P + Q \bar{y}'_1 + R \bar{y}'_2 + S \bar{y}'_1 \bar{y}'_2) dx dz - \int_a^b \int_c^d (P + Q \bar{y}'_1 + \\ (25) \quad + R \bar{y}'_2 + S \bar{y}'_1 \bar{y}'_2) dx dz \right| < \frac{1}{2}$$

Consideriamo ora la funzione  $\bar{g}$  introdotta nel n. 1, § 3 in corrispondenza al  $\bar{R}$  ora fissato e osserviamo che, poichè la  $\bar{g}$  soddisfa ad una rela-

<sup>(25)</sup> v. luogo cit. in (5), § 2 n. 2.

zione del tipo

$$0 \leq \bar{g} \leq \gamma_1 + \gamma_2 |y'_1| + \gamma_3 |y'_2| + \gamma_4 |y'_1| |y'_2|$$

con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  costanti opportune, essa risulta integrabile anche su  $\bar{C}$ .

Continuando allora la dimostrazione come in n. 1, § 3, determiniamo un  $\varrho > 0$  e  $< \bar{\varrho}$  in modo che per ogni curva ordinaria  $C$  appartenente propriamente all'intorno ( $\varrho$ ) della  $\bar{C}$ ; si abbia:

$$\int_a^b \int_c^d \bar{g} \, dx \, dz \geq \int_a^{\bar{a}} \int_c^{\bar{c}} \bar{g} \, dx \, dz - \frac{1}{2}$$

Ma per le stesse curve  $C$  è pure

$$\int_a^b \int_c^d \bar{f} \, dx \, dz \geq \int_a^{\bar{a}} \int_c^{\bar{c}} \bar{g} \, dx \, dz$$

e

$$\int_a^{\bar{a}} \int_c^{\bar{c}} \bar{g} \, dx \, dz \geq \int_E \bar{g} \, dx \, dz + \int_k \bar{f} \, dx \, dz$$

da cui per le (24) e (25)

$$I(y_1, y_2) > K.$$

**OSSERVAZIONE I.** — Il teorema precedente si può dimostrare con ovvie aggiunte e modifiche al ragionamento ora svolto, anche se la  $f$  soddisfa le condizioni del n. 3 § 3.

**OSSERVAZIONE II.** — È poi anche chiaro che il teorema è vero se la  $f$  soddisfa le condizioni del n. 2, § 3 o quelle dell'osservazione finale del n. 3, § 3.

2. — Se ci si limita a considerare la classe  $K$  di curve ordinarie  $C$  introdotta nel n. 3, § 2 allora i risultati del numero precedente e dell'osservazione I valgono rispettivamente indipendentemente dalle ipotesi 3) b) del n. 1, § 3 e 3) b) del n. 3, § 3.

Un'analogha considerazione va fatta per i risultati dell'osservazione II del numero precedente.

## CAPITOLO II.

La semicontinuità di  $I(y)$ 

## § 1. - Condizioni del I e II tipo.

1. — Premettiamo alcune definizioni.

Intendiamo qui per « campo  $A$  » un insieme di punti del piano  $(x, y)$  che contenga ogni suo punto di accumulazione posto al finito.

La funzione  $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  <sup>(26)</sup> sia definita per ogni coppia di punti  $(x, y_1), (z, y_2)$  di  $A$  e ogni valore finito di  $y'_1$  e  $y'_2$  e continua in ogni punto  $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$  in cui è definita insieme alle sue derivate parziali  $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y_1 y'_1}, f_{y_2 y'_2}$ . Per mantenere l'analogia con  $I(y_1, y_2)$  si può anche indicare ogni coppia  $(x, y_1), (z, y_2)$  di  $A$  con il punto  $(x, z, y_1, y_2)$  dell'insieme, nello spazio a quattro dimensioni,  $A \times A$ .

Diciamo « curva  $C$  » ogni funzione assolutamente continua  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) appartenente ad  $A$ ; se inoltre esiste finito l'integrale

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz$$

allora diciamo che  $C$  è una « curva ordinaria ».

Diciamo poi che una curva  $C [y(x), a \leq x \leq b]$  appartiene propriamente all'intorno ( $\varrho$ ) di un'altra curva  $\bar{C} [\bar{y}(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$  se:

1<sup>o</sup>) per ogni  $x$  comune ad  $(a, b)$  e  $(\bar{a}, \bar{b})$  è

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \varrho;$$

2<sup>o</sup>) per ogni  $x < \bar{a}$  e appartenente ad  $(a, b)$  è

$$|y(x) - \bar{y}(\bar{a})| \leq \varrho$$

---

(26) Si è soliti, considerando  $I(y)$ , limitarsi alle funzioni  $f$  tali che

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = f(z, x, y_2, y_1, y'_2, y'_1),$$

il che non toglie, come si può facilmente vedere, generalità al problema; per quanto diremo è però inutile introdurre questa limitazione.



3<sup>o</sup>) per ogni  $x > \bar{b}$  e appartenente ad  $(a, b)$  è

$$|y(x) - \bar{y}(\bar{b})| \leq \varrho;$$

4<sup>o</sup>) è  $|a - \bar{a}| \leq \varrho; \quad |b - \bar{b}| \leq \varrho.$

Si introducono poi nello stesso modo le altre definizioni del n. 1, § 1, Cap. I.

Anche per il funzionale  $I(y)$  le (α), come risulta dallo stesso esempio del n. 2, § 1, cap. I non sono sufficienti per la semicontinuità inferiore in tutto il campo; ma esse non sono nemmeno più necessarie. Ed in realtà, come ha messo in rilievo nei lavori citati S. FAEDO, vi sono diversità notevoli tra  $I(y)$  e  $I(y_1, y_2)$ . Tuttavia è chiaro che ogni condizione sufficiente per la semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$  può essere interpretata anche come condizione sufficiente per la semicontinuità di  $I(y)$ , la cui generalità dipende dalla generalità della stessa condizione per  $I(y_1, y_2)$ .

È evidente dunque che i ragionamenti fatti nel capitolo precedente, portano, sotto le stesse ipotesi<sup>(27)</sup> circa la  $f$ , agli stessi risultati anche per  $I(y)$ . Si possono quindi enunciare altrettante condizioni sufficienti per la semicontinuità di  $I(y)$ .

Indicheremo tali condizioni come *condizioni del I tipo*.

2. — Ma accanto ad esse possono ottenersi anche altre condizioni sufficienti che permettono di considerare anche altre classi di funzioni  $f$  assai importanti. Queste nuove condizioni, che chiameremo *condizioni del II tipo*, si ottengono partendo dalla seguente osservazione.

Supponiamo che la funzione  $f$  soddisfi alle ipotesi I), III), IV) e V)<sup>(27)</sup> del n. 1, § 2, cap. I e inoltre alla seguente ipotesi

II') per ogni parte limitata  $\bar{A}$  di  $A$  si possano trovare tre numeri  $N$ ,  $\nu_1$  e  $Y'$  con  $\nu_1 > 0$  e  $Y' \geq 1$ , tali che sia:

$$(1') \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \nu_1 |y'_1| |y'_2|$$

per ogni coppia  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$  di  $\bar{A}$  e per  $|y'_1| \geq Y'$ ,  $|y'_2| \geq Y'$ ; e inoltre

$$(2) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq N$$

per ogni coppia  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$  di  $\bar{A}$  e per  $y'_1$  e  $y'_2$  qualunque.

<sup>(27)</sup> Naturalmente enunciando le 1), . . . (e tutte le altre ipotesi del cap. I sulla  $f$ ) le intendiamo adattate alla nuova nomenclatura introdotta per  $I(y)$ : in altre parole si tenga presente che i campi  $A_1, A_2$  e  $A$  introdotti nel § 1 cap. I coincidono ora rispettivamente con  $A, A \bullet A \times A$ .

Allora è facile vedere che gli stessi ragionamenti del n. 1, § 2, cap. I permettono di dimostrare che  $I(y)$  è *semicontinuo inferiormente* in tutto  $A$ .

Consideriamo infatti una curva ordinaria  $\bar{C}[\bar{y}(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$  appartenente ad  $A$  e indichiamo con  $\bar{A}$  la parte di  $A$  appartenente all'intorno unitario di  $\bar{C}$ . Siano  $N, \nu_1$ , e  $Y'$  i numeri corrispondenti ad  $\bar{A}$  secondo l'ipotesi II') e si considerino tutte le curve ordinarie  $C[y(x), a \leq x \leq b]$  di  $A$ , appartenenti propriamente all'intorno unitario di  $\bar{C}$  per le quali è verificata la  $I(y) < I(\bar{y})$ . Per ognuna di esse, detto  $E$  l'insieme dei punti di  $(a, b)$  in cui è  $|y'(x)| > Y'$  oppure  $y'(x)$  non esiste finita e  $C(E)$  il complementare di  $E$  in  $(a, b)$ , risulta

$$\begin{aligned} \int_a^b |y'(x)| dx &= \int_E |y'(x)| dx + \int_{C(E)} |y'(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu_1} \sqrt{\int_E \int_E \nu_1 |y'(x)| |y'(z)| dx dz} + Y'(b-a) \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu_1} \sqrt{\int_E \int_{E'} f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz} + Y'(b-a) \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu_1} \sqrt{\int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz} + N |b-a|^2 \Big\} + \\ &+ Y'(b-a) < \frac{1}{\nu_1} \sqrt{I(\bar{y})} + N |(\bar{b} - \bar{a} + 2)|^2 + Y'(\bar{b} - \bar{a} + 2) = H \end{aligned}$$

con  $H$  costante indipendente da  $C$ . Risulta dunque analogamente alla (8) del n. 1, § 2, cap. I:

$$\int_a^b |y'(x)| dx < H$$

Non resta ora che adattare i ragionamenti del n. 1, § 2, cap. I, tenendo presente che  $I(y)$  si ottiene da  $I(y_1, y_2)$  se  $y_1(x) = y(x)$  e  $y_2(z) = y(z)$ .

Con gli stessi ragionamenti si ottiene anche la semicontinuità inferiore di  $I(y)$ , se  $f$  soddisfa le ipotesi I), III), IV), V') dei n. 1, e 2, § 2, cap. I e la II').

Sfruttando poi questi risultati e con gli stessi ragionamenti dei n. 1, e 2, § 3, cap. I si ottiene che  $I(y)$  è semicontinuo inferiormente in tutto  $A$ , se la  $f$  soddisfa le ipotesi enunciate rispettivamente negli stessi n. 1 e 2, § 3, cap. I, dove però la 3) b) e la 3) b') vanno sostituite con la

3') b) per ogni coppia  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$  di  $A$  e per  $|y'_1| \geq Y'$ ,  $|y'_2| \geq Y'$  sia :

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2) \geq r_1 |y'_1| |y'_2|$$

3. — Anche al teorema del n. 3, § 3, cap. I corrisponde una analoga condizione del II tipo. Precisamente dimostreremo che  $I(y)$  è semicontinuo inferiormente se la  $f$  soddisfa alle ipotesi 1), 2), 4) (o 4\*) del n. 1, § 3, cap. I [oppure alle corrispondenti del n. 2, § 3, cap. I] e inoltre alla :

3') per ogni coppia di punti  $(\bar{x}, \bar{y}_1)$  e  $(\bar{z}, \bar{y}_2)$  di  $A$  si possano determinare 7 numeri  $p, q, r, s, v, Y'$  e  $R$  con  $v$  e  $R$  positivi e  $Y' \geq 1$ , tali che per tutte le coppie  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$  di  $A$  distanti rispettivamente da  $(\bar{x}, \bar{y}_1)$  e  $(\bar{z}, \bar{y}_2)$  per non più di  $R$ , sia :

$$a) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2$$

per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$ ;

b) e inoltre, nel caso che  $\bar{x} = \bar{z}$ ,  $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ , per le stesse coppie  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2) \geq v |y'_1| |y'_2|$$

per  $|y'_1| \geq Y'$  e  $|y'_2| \geq Y'$ .

Sia infatti  $\bar{C}[\bar{y}(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$  una curva ordinaria appartenente ad  $A$ . Con lo stesso ragionamento del n. 3, § 3, cap. I potremo dividere  $\bar{C}$  in  $n$  archi  $\bar{C}_h$  corrispondenti alla suddivisione di  $(\bar{a}, \bar{b})$  in  $n$  parti mediante i punti  $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_h, \dots, \bar{a}_n = \bar{b}$ ,  $\bar{C}_h \equiv [\bar{y} = \bar{y}(x), \bar{a}_h \leq x \leq \bar{a}_{h+1}]$  ( $h = 0, 1, \dots, n-1$ ), in modo che per ogni coppia  $\bar{C}_h$  e  $\bar{C}_k$  di essi ( $h, k = 0, 1, \dots, n-1$ ) si possano trovare 7 numeri  $p_{h,k}, q_{h,k}, r_{h,k}, s_{h,k}, v_{h,k}, Y'_{h,k}$  e  $q_{h,k}$  con  $v_{h,k}$  e  $q_{h,k}$  positivi e  $Y'_{h,k} \geq 1$ , tali che per tutte le coppie  $(x, y_1)$  e  $(z, y_2)$  di punti di  $A$  appartenenti rispettivamente agli intorni  $(\varrho_{h,k})$  di  $\bar{C}_h$  e  $\bar{C}_k$  sia :

$$(26) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p_{h,k} + q_{h,k} y'_1 + r_{h,k} y'_2 + s_{h,k} y'_1 y'_2$$

per ogni  $y'_1$  e  $y'_2$  e, se è anche  $h = k$

$$(27) \quad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p_{h,k} + q_{h,k} y'_1 + r_{h,k} y'_2 + s_{h,k} y'_1 y'_2) \geq v_{h,k} |y'_1| |y'_2|$$

per  $|y'_1| \geq Y'_{h,k}$ ,  $|y'_2| \geq Y'_{h,k}$ .

Sia  $\varrho_0$  il più piccolo dei  $\varrho_{h,k}$  e  $Y_0$  il più grande degli  $Y'_{h,k}$  ( $h, k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Consideriamo ora una qualunque curva ordinaria  $C[y(x), a \leq x \leq b]$  di  $A$  appartenente propriamente all'intorno  $(\varrho_0)$  di  $C$ , per la quale è  $\bar{I}(y) \leq \bar{I}(\bar{y})$ . Potremo evidentemente supporre  $\varrho_0$  più piccolo anche di  $\bar{a}_1 - \bar{a}_0$  e di  $\bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}$ , cosicchè l'intervallo  $(a, b)$  viene diviso mediante i punti  $a_0 = a, a_1 = \bar{a}_1, a_2 = \bar{a}_2, \dots, a_{n-1} = \bar{a}_{n-1}, a_n = b$  in  $n$  archi  $C_h [y = y(x) a_h \leq x \leq a_{h+1}]$  ( $h = 0, 1, \dots, n-1$ ) appartenenti propriamente rispettivamente agli intorni  $(\varrho_0)$  degli archi  $\bar{C}_h$  di  $\bar{C}$ .

Dopo di che, dalla (26) risulta, per  $h, k = 0, 1, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} & \int_{a_h}^{a_{h+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz \geq \\ & \geq \int_{a_h}^{a_{h+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} [p_{h,k} + q_{h,k} y'(x) + r_{h,k} y'(z) + s_{h,k} y'(x) y'(z)] dx dz \geq \\ & \geq p_{h,k} (a_{k+1} - a_k) (a_{h+1} - a_h) + q_{h,k} (a_{k+1} - a_k) [y(a_{h+1}) - y(a_h)] + \\ & + r_{h,k} (a_{h+1} - a_h) [y(a_{h+1}) - y(a_k)] + s_{h,k} [y(a_{h+1}) - y(a_h)] [y(a_{k+1}) - y(a_k)] \geq \\ & \geq |p_{h,k}| (\bar{b} - \bar{a} + 2\varrho_0)^2 - |q_{h,k}| |\bar{b} - \bar{a} + 2\varrho_0| [|\bar{y}(\bar{a}_{h+1}) - \bar{y}(\bar{a}_h)| + 2\varrho_0] - \\ & - |r_{h,k}| |\bar{b} - \bar{a} + 2\varrho_0| [|\bar{y}(\bar{a}_{h+1}) - \bar{y}(\bar{a}_k)| + 2\varrho_0] - \\ & - |s_{h,k}| [|\bar{y}(\bar{a}_{h+1}) - \bar{y}(\bar{a}_h)| + 2\varrho_0] [|\bar{y}(\bar{a}_{k+1}) - \bar{y}(\bar{a}_k)| + 2\varrho_0] \geq -K^* \end{aligned}$$

dove  $K^*$  è una costante positiva dipendente solo dai numeri  $p_{h,k}, q_{h,k}, r_{h,k}, s_{h,k}, \varrho_0$  e dalla  $\bar{y}(x)$ .

Detto ora  $E$  l'insieme dei punti di  $(a, b)$  in cui è  $|y'(x)| > Y'_0$  oppure  $y'(x)$  non esiste finita,  $C(E)$  il complementare di  $E$  in  $(a, b)$  e  $E_h$  ( $h = 0, 1, \dots, n-1$ ) le parti di  $E$  contenute in  $(a_h, a_{h+1})$ , risulta per la curva  $C$  ora considerata:

$$\begin{aligned} \int_a^b |y'(x)| dx &= \int_{C(E)} |y'(x)| dx + \int_E |y'(x)| dx \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2\varrho_0) + \\ & + \sum_{h=0}^{n-1} \int_{E_h} |y'(x)| dx \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2\varrho_0) + \sum_{h=0}^{n-1} \sqrt{\int_{E_h} \int_{E_h} |y'(x)| |y'(z)| dx dz} \leq \\ & \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2\varrho_0) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{v_{h,h}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\int_{E_h} \int_{E_h} |f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) - (p_{h,h} + q_{h,h} y'(x) + r_{h,h} y'(z) + s_{h,h} y'(x) y'(z))| dx dz} \leq \\
& \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2 \varrho_0) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\nu_{h,h}}} \times \\
& \times \sqrt{\int_{a_h}^{a_{h+1}} \int_{a_h}^{a_{h+1}} [(f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) - (p_{h,h} + q_{h,h} y'(x) + r_{h,h} y'(z) + s_{h,h} y'(x) y'(z)))] dx dz} \\
& \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2 \varrho_0) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\nu_{h,h}}} \sqrt{\int_{a_h}^{a_{h+1}} \int_{a_h}^{a_{h+1}} f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz +} \\
& \quad \left. + \int_{a_h}^{a_{h+1}} \int_{a_h}^{a_{h+1}} [p_{h,h} + q_{h,h} y'(x) + r_{h,h} y'(z) + s_{h,h} y'(x) y'(z)] dx dz \right| \leq \\
& \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2 \varrho_0) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\nu_{h,h}}} \sqrt{\int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz +} \\
& \quad \left. + (n^2 - 1) K^* + K^* \right| \leq \\
& \leq Y'_0 (\bar{b} - \bar{a} + 2 \varrho_0) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\nu_{h,h}}} \sqrt{I(\bar{y}) + n^2 K^*} = H
\end{aligned}$$

dove  $H$  è una costante positiva indipendente da  $C$ .

Varrà quindi anche per la stessa  $C$

$$(28) \quad \int_{a_h}^{a_{h+1}} y'(x) | dx \leq H \quad (h = 0, 1, \dots, n-1)$$

Consideriamo allora, sempre per la  $C$  sopraddetta, la differenza

$$\begin{aligned}
I(y) - I(\bar{y}) = & \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \int_{a_h}^{a_{h+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz \right. \\
& \left. - \int_{a_h}^{\bar{a}_{h-1}} \int_{a_k}^{\bar{a}_{k+1}} f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) dx dz \right]
\end{aligned}$$

Ciascuna delle differenze

$$\int_{\alpha_h}^{\alpha_{h+1}} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) \, dx \, dz -$$

$$- \int_{\bar{\alpha}_h}^{\bar{\alpha}_{h+1}} \int_{\bar{\alpha}_k}^{\bar{\alpha}_{k+1}} f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) \, dx \, dz,$$

poichè valgono le (28) e le ipotesi 1), 2), 4) (o 4\*) del n. 1, § 3, Cap. I (oppure le corrispondenti del n. 2, § 3, cap. I) può essere trattata con gli stessi ragionamenti del n. 1, § 3, Cap. I (si ricordi anche il n. 4, § 3, cap. I).

Ne segue dunque la semicontinuità inferiore di  $I(y)$  anche in questo caso.

4. — Osserveremo infine (e la cosa è naturale) che un'estensione della semicontinuità di  $I(y)$  analoga a quella data nel § 4, Cap. I, si ottiene senz'altro in modo analogo, se la  $f$  soddisfa ad una qualunque delle condizioni del I o II tipo poste in rilievo nei numeri precedenti.

o 2. - **Confronto con i risultati precedenti.**

È opportuno ora domandarsi se le condizioni trovate per la semicontinuità di  $I(y_1, y_2)$  e di  $I(y)$  hanno una sufficiente generalità, soprattutto in relazione con gli ulteriori sviluppi della teoria.

Anzitutto osserveremo che sotto abbastanza larghe ipotesi di regolarità anche i casi particolari studiati dal FUBINI e dal TONELLI possono rientrare nelle condizioni qui enunciate.

Il FUBINI <sup>(28)</sup> ha considerato il funzionale  $I(y)$  nel caso che sia :

$$f = a y_1^2 + 2 b y_1 y_1' + c y_1'^2 + 2 e y_1 y_2' + 2 \lambda y_1 y_2 + 2 \mu y_1' y_2' + A y_2^2 +$$

$$+ 2 B y_2 y_2' + C y_2'^2 + 2 E y_1' y_2$$

dove  $a, b, c, e, A, B, C, E, \lambda, \mu$  sono funzioni di  $(x, z)$  nel quadrato  $Q$  ( $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ) continue con derivate parziali rispetto a  $x$  e  $z$  limitate e integrabili in  $Q$  e inoltre le  $a, b, c, e$ , si mutano nelle  $A, B, C, E$ , scam-

<sup>(28)</sup> v. luogo citato in <sup>(1)</sup> pag. 225.

biando  $x$  con  $z$  e  $\lambda$  e  $\mu$  sono funzioni simmetriche di  $x$  e  $z$ ; ed ha supposto anche che la  $f$  fosse una forma definita positiva o più generalmente positiva  $e \neq 0$  quando almeno una delle  $y'_1$  e  $y'_2$  è  $\neq 0$ . Questo caso, se supponiamo in più che le derivate parziali delle  $a, b, c, e, A, B, C, E, \lambda, \mu$  siano anche continue in  $Q$ , rientra evidentemente nella classe di funzioni  $f$  considerate nel cap. I, § 2, n. 1. I funzionali  $I(y_1, y_2)$  e  $I(y)$  a essa relativi sono quindi semicontinui inferiormente.

L. TONELLI <sup>(29)</sup> ha dimostrato la semicontinuità inferiore dell'integrale

$$I(y) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) y'^2(x) y'^2(z) dx dz$$

dove  $K(x, z)$  è una funzione continua e positiva nel quadrato  $Q$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ). Anche in questo caso è evidente che la funzione  $K(x, z) y'_1 y'_2$  rientra in quelle considerate nel n. 2, § 1, cap. II, se ammettiamo in più l'ipotesi che  $K(x, z)$  abbia le derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x$  e  $z$  continue in  $Q$ .

Ma è soprattutto dall'applicazione ai teoremi sull'esistenza del minimo, di cui tratterò nella Memoria a questa successiva, che mi sembra risulti che le predette condizioni presentano una sufficiente generalità.

[Pervenuto alla redazione il 10 marzo 1919]

---

<sup>(29)</sup> v. luogo citato per primo in <sup>(3)</sup> n. 2.