

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VITTORIO CHECCUCCI

**Sulle omografie che trasformano in sè una quadrica o  
una antiquadrica dell' $S_{n-1}$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 2,*  
n° 1-4 (1950), p. 131-149

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1950\\_3\\_2\\_1-4\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_131_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SULLE OMOGRAFIE CHE TRASFORMANO IN SÈ  
UNA QUADRICA O UNA ANTIQUADRICA  
DELL'  $S_{n-1}$

di VITTORIO CHECCUCCI (Pisa)

Il problema di cui al titolo e quello più generale delle omografie permutabili con correlazioni o anticorrelazioni non degeneri, hanno attirata l'attenzione di non pochi geometri italiani e stranieri, le cui ricerche si ricollegano ai risultati ottenuti dal FROBENIUS in una classica memoria <sup>(1)</sup>. Sono particolarmente notevoli i lavori di U. SEGRE <sup>(2)</sup> e quelli più recenti di G. DANTONI <sup>(3)</sup>, coi quali l'argomento ha ricevuto una sistemazione abbastanza soddisfacente.

In questa nota riprendiamo *ex novo* l'argomento servendoci sistematicamente del simbolismo elementare delle matrici e della forma canonica introdotta da S. CHERUBINO <sup>(4)</sup>. Si riottengono così rapidamente non solo i risultati geometrici più significativi dei lavori menzionati, ma altresì gli stessi teoremi fondamentali del Frobenius, dai quali essi conseguivano.

Non è soltanto il metodo della trattazione che ci sembra degno di qualche rilievo, ma anche il fatto che nel corso di essa abbiamo potuto fare qualche osservazione che non crediamo sia stata, almeno esplicitamente, da altri rilevata. In parte nuove sono le proprietà sugli spazi fondamentali e secondari <sup>(5)</sup> delle omografie in oggetto, nei riguardi delle quadriche o anti-

---

<sup>(1)</sup> G. FROBENIUS: *Ueber lineare Substitutionen und bilinearen Formen* [Crelle, 84 p. 41].

<sup>(2)</sup> C. SEGRE a) *Ricerche sulle omografie e correlazioni...* [Mem. Acc. Torino 37 (2) 1886 pp. 395-404]. b) *Un nuovo campo di ricerche geometriche* [Atti Acc. Torino 1890 Nota III].

<sup>(3)</sup> G. DANTONI: a) *Omografie che trasformano in sè una data quadrica* [Mem. Acc. Italia 8-1936]. b) *Sul diverso comportamento di una omografia rispetto alle quadriche che essa trasforma in sè* [Annali Sc. Norm. Sup. 6 (2) 1937].

<sup>(4)</sup> S. CHERUBINO: *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica* [Rend. Lincei 1936 Note I e II].

<sup>(5)</sup> Gli spazi secondari, non sempre coincidenti con quelli del Predella, furono di recente introdotti da S. CHERUBINO: *Sulla teoria delle omografie di uno Spazio  $S_{n-1}$  in sè*. [Rend. Roma 1 (4) 1937, pag. 16].

quadriche trasformate in sè. Pure non priva di interesse ci sembrano la forma con la quale vengono caratterizzate le due schiere distinte di spazi lineari di dimensione massima esistenti su una quadrica non degenera dell' $\mathcal{S}_{2h-1}$ , ed il modo diretto ed immediato col quale si riconosce il loro comportamento rispetto alle omografie che trasformano in sè la quadrica.

### § 1. Trasformazione per cogredienza di una matrice in sè.

1. — Se  $A$  ed  $X$  sono matrici quadrate complesse di ordine  $n$ , la matrice  $A_{-1} X A$  <sup>(6)</sup> si dice *trasformata per cogredienza* della  $X$  mediante la  $A$ ; ci proponiamo in primo luogo la determinazione di tutte le matrici *non degeneri*  $X$ , trasformate per cogredienza in sè mediante una data matrice  $A$ , tali cioè che

$$(1.1) \quad A_{-1} X A = X.$$

Perciò la matrice data  $A$  deve essere non degenera e la (1.1) equivale alla

$$(2.1) \quad A^{-1} = X^{-1} A_{-1} X \text{ (7);}$$

quindi  $A^{-1}$  ed  $A_{-1}$  devono essere simili. D'altra parte  $A_{-1}$  è simile ad  $A$ , dunque  $A^{-1}$  ed  $A$  devono essere simili. Intanto  $A^{-1}$  ha le radici caratteristiche reciproche di quelle di  $A$  e con la stessa segnatura; infatti le matrici

$$(A - \alpha I), (A - \alpha I)^2, \dots$$

hanno le stesse nullità delle matrici

$$\left(A^{-1} - \frac{1}{\alpha} I\right) = (\alpha I - A) \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \left(A^{-1} - \frac{1}{\alpha} I\right)^2 = (A^{-1})^2 \frac{1}{\alpha^2} (\alpha I - A)^2, \dots$$

Pertanto le radici caratteristiche di  $A$  devono essere a coppie reciproche e con la stessa segnatura.

Viceversa se ciò accade per una matrice  $A$  (non degenera), la  $A_{-1}$  risulta simile alla  $A^{-1}$  ed esiste almeno una matrice non degenera  $\lambda$  per cui vale la (2.1), quindi la (1.1).

Dunque: « *condizione necessaria e sufficiente perchè la (1.1) ammetta soluzioni non degeneri  $X$ , è che la matrice  $A$  abbia le radici caratteristiche a coppie reciproche e con ugual segnatura* ».

<sup>(6)</sup>  $A_{-1}$  indica la matrice trasposta di  $A$ .

<sup>(7)</sup>  $A^{-1}$  indica la matrice inversa.

2. — Se  $H$  è una matrice permutabile con  $A$ , cioè se

$$(3.1) \quad A H = H A$$

quindi anche

$$(4.1) \quad H_{-1} A_{-1} = A_{-1} H_{-1}$$

e se  $A$  soddisfa alle condizioni suddette, detta  $X$  una soluzione della (1.1), anche  $X H$  e  $H_{-1} X$  soddisfano la (1.1). Infatti dalla (1.1) si ha

$$X H = A_{-1} X A H = A_{-1} (X H) A$$

oppure

$$H_{-1} X = H_{-1} A_{-1} X A = A_{-1} (H_{-1} X) A$$

Viceversa se  $X$  è non degenera e soluzione della (1.1) e  $X'$  è un'altra soluzione della (1.1), poniamo

$$X' = X H \quad \text{oppure} \quad X' = K_{-1} X$$

con che

$$H = X^{-1} X' \quad \text{e} \quad K = X_{-1}^{-1} X'_{-1}$$

Si ha subito che tanto  $H$  che  $K$  risultano permutabili con  $A$ .

Infatti

$$X' = X H = A_{-1} X A H$$

come pure

$$X' = A_{-1} X H A;$$

sottraendo e moltiplicando a sinistra per  $X^{-1} A_{-1}^{-1}$  si ottiene

$$A H - H A = 0$$

e analogamente per  $K$ . Dunque: « se  $X$  è una soluzione non degenera della (1.1), tutte e sole le soluzioni si ottengono moltiplicando a destra la  $X$  per le matrici permutabili con  $A$ , oppure a sinistra la  $X$  per le trasposte delle matrici permutabili con  $A$  »<sup>(8)</sup>.

3. — Sia  $C$  la forma canonica di  $A$ ; esiste dunque una  $P$  non degenera tale che

$$A = P^{-1} C P \quad \text{ossia} \quad C = P A P^{-1}$$

Se  $D$  è una matrice tale che

$$(5.1) \quad D = C_{-1} D C$$

---

<sup>(8)</sup> Cfr. C. DEL PRETE *Le omografie e correlazioni permutabili tra loro* [Giorn. di Mat. 1899]

la matrice  $X = P_{-1} D P$  soddisfa la (1.1) e viceversa se  $X$  soddisfa la (1.1), la  $D = P_{-1}^{-1} X P^{-1}$  soddisfa la (5.1); a soluzioni della (1.1) di nullità  $k$  (in particolare non degeneri) corrispondono soluzioni della (5.1) di uguale nullità (in particolare non degeneri) e viceversa.

Possiamo quindi ridurci al caso in cui  $A$  è di forma canonica: la  $C$  allora è composta mediante certe matrici  $C^{\alpha_s}$  corrispondenti alle radici caratteristiche distinte  $\alpha_s$  di  $A$  e precisamente

$$C = \left[ \begin{array}{c|c|c} C^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & C^{\alpha_2} & \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & C^{\alpha_m} \end{array} \right]$$

dove

$$C^{\alpha_s} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \alpha I_{h_0} & I_{h_0} & 0 \\ \hline 0 & \alpha I_{h_1} & \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \alpha I_{h_j} \end{array} \right]$$

essendo  $(h_0, h_1, \dots, h_j)$  la segnatura di  $\alpha$  e  $I_{h_r}$  la matrice identica di ordine  $h_r$ .

Si divida  $D$  in gruppi di righe e colonne, così come si è divisa la  $C$ , cioè si ponga

$$D = \| \| D_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

dove  $D_{ik}$  ha tante righe quanto è l'ordine di  $C^{\alpha_i}$  e tante colonne quanto è l'ordine di  $C^{\alpha_k}$ .

La (5.1) equivale così alle relazioni

$$(6.1) \quad D_{ik} = C_{-1}^{\alpha_i} D_{ik} C^{\alpha_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

Poniamo

$$D_{ik} = \| \| d_{rs} \| \quad (r = 0, 1, \dots, j_i; s = 0, 1, \dots, j_k)$$

dove  $d_{rs}$  è una matrice ad  $h_r$  righe e  $h'_s$  colonne, se  $(h_0, h_1, \dots, h_{j_i})$   $(h'_0, h'_1, \dots, h'_{j_k})$  sono le segnature rispettive di  $\alpha_i$  e  $\alpha_k$ . Con ciò la (6.1) si scrive

$$D_{ik} = \left[ \alpha_i I + \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline I_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_1 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \right] \cdot D_{ik} \cdot \left[ \alpha_k I' + \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & I'_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I'_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \right]$$

e quindi

$$(7.1) \quad D_{ik}(1-\alpha_i \alpha_k) = \alpha_i \left| \begin{array}{c|c|c} d_{00} & 0 & d_{01} & 0 & \dots \\ \hline d_{10} & 0 & d_{11} & 0 & \dots \\ \hline d_{20} & 0 & d_{21} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right| + \alpha_k \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & & & & \\ \hline d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right| +$$

$$+ \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & & & & \\ \hline d_{00} & 0 & d_{01} & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline d_{10} & 0 & d_{11} & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right|$$

Pertanto se  $\alpha_i \alpha_k \neq 1$ , confrontando i termini di ugual posto risulta  $d_{00} = 0$ ; proseguendo il confronto ne segue  $d_{10} = 0$  e  $d_{01} = 0$  e successivamente uguali a zero tutte le matrici parziali  $d_{rs}$  di  $D_{ik}$ . Dunque in  $D$  sono non nulle solamente le matrici  $D_{ik}$  corrispondenti a coppie di radici reciproche (con ugual segnatura per il n. 1) o alle eventuali radici  $\pm 1$ . Se ad es.  $C$  ha le radici  $\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1$ , la  $D$  è del tipo

$$D = \begin{array}{c|c|c} 0 & D_{12} & 0 \\ \hline D_{21} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & D_{33} \end{array}$$

e le  $D_{ik}$  non nulle sono quadrate ed ugualmente suddivise in gruppi di righe e colonne, in base alla segnatura comune delle due radici caratteristiche reciproche.

Per le  $D_{ik}$  non nulle vale dunque la (7.1) col primo membro uguale a zero; se  $j + 1$  è l'indice comune delle due radici reciproche  $\alpha, \frac{1}{\alpha}$  (eventualmente è l'indice di  $+1$ , o di  $-1$ ), segue dal confronto dei termini corrispondenti che

$$(8.1) \quad d_{rs} = 0 \quad \text{per} \quad r + s < j \quad (r, s = 0, 1, \dots, j - 1)$$

$$\alpha (d_{rs} \ 0) + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} d_{r-1, s+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{r-1, s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad r + s \geq j$$

$$(r = 1, 2, \dots, j; s = 0, 1, \dots, j - 1)$$

Ossia le matrici  $d_{rs}$  al disopra della diagonale secondaria di  $D_{ik}$  sono tutte nulle; quelle sulla diagonale secondaria e al disotto di essa sono del tipo

$$(9.1) \quad d_{r,j+k-r} = \begin{pmatrix} \delta_r^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \dots, j; r = k, k+1, \dots, j)$$

essendo le  $\delta_r^k$  matrici quadrate di ordine  $h_k$ , che soddisfano alla relazione ricorrente

$$(10.1) \quad \alpha \delta_r^k + \frac{1}{\alpha} \delta_{r-1}^k + \begin{pmatrix} \delta_{r-1}^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, j; r = k, k+1, \dots, j)$$

Se in  $D_{ik}$  si fissano ad arbitrio le  $\delta$  non nulle della diagonale principale e quelle della prima parallela ad essa soprastante, la (10.1) determina completamente la  $D_{ik}$ .

D'altra parte si ha

$$|D| = \pm II \cdot |D_{ik}|$$

essendo il prodotto  $II$  esteso alle  $D_{ik}$  corrispondenti a coppie di radici reciproche (eventualmente alla radice  $+1$  o  $-1$ ); la condizione che sia  $D$  non degenerare è dunque assicurata allora e solo che siano non degeneri le  $D_{ik}$  predette.

Se poniamo

$$(11.1) \quad \delta_r^k = \begin{pmatrix} a_r^k & c_r^k \\ d_r^k & b_r^k \end{pmatrix}$$

dove  $a_r^k$  è una matrice quadrata di ordine  $h_{k-1}$  e quindi  $b_r^k$  è quadrata di ordine  $h_k - h_{k-1}$ , si ha

$$(12.1) \quad |D_{ik}| = \pm II \cdot |\delta_{r_0}^0| \cdot |b_{r_1}^1| \cdot \dots \cdot |b_j^j| \quad (r_k = k, k+1, \dots, j)$$

e  $D_{ik}$  è perciò non degenerare allora e solo che sono non degeneri le  $\delta_{r_0}^0$  e le  $b_{r_k}^k$ , per il che, a norma delle (10.1), occorre e basta che siano non degeneri le  $b^k$  delle  $\delta^k$  fissate ad arbitrio.

Le soluzioni della (5.1), quindi della (1.1), formano manifestamente un sistema lineare che dipende da  $\sum_{ik} (h_k^i)^2$  parametri arbitrari omogenei, essendo  $(h_0^i, h_1^i, \dots, h_j^i)$  la segnatura della radice caratteristica  $\alpha$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

4. Si voglia ora esaminare se e quando tra le soluzioni non degeneri della (5.1) vi sono matrici simmetriche (o antisimmetriche), tali cioè che

$$D_{ki} = (D_{ik})_{-1} \quad (\text{o } D_{ki} = -(D_{ik})_{-1})$$

Se è  $i \neq k$  (cioè  $\alpha \neq \pm 1$ ) e se  $D_{ik}$  è una matrice che soddisfa alla (6.1), la matrice  $(D_{ik})_{-1}$  soddisfa alla (6.1) quando vi si scambiano  $\alpha_i$  con  $\alpha_k$  e pertanto è una  $D_{ki}$ . Dunque, determinata  $D_{ik}$  come al n. 3, risulta determinata di conseguenza  $D_{ki}$ .

Se è  $\alpha = \pm 1$ , la (10.1) diventa

$$(13.1) \quad \delta_r^k + \delta_{r-1}^k + \alpha \left( \frac{\delta_{r-1}^{k-1}}{0} \middle| \frac{0}{0} \right) = 0;$$

con la posizione (11.1) segue in particolare

$$(14.1) \quad b_r^k + b_{r-1}^k = 0.$$

Se indichiamo con  $\delta^k, \delta^h$  le matrici  $\delta$  non nulle della diagonale principale e della prima parallela ad essa soprastante (quelle cioè che al n. 3 potevano assegnarsi ad arbitrio), segue dalla condizione di simmetria e dalla (13.1)

$$(15.1) \quad \delta_r^k = \delta_{r-1}^k \quad \text{e} \quad \delta_r^h + \delta_{r-1}^h + \alpha \left( \frac{\delta_{r-1}^{h-1}}{0} \middle| \frac{0}{0} \right) = 0;$$

in particolare, con ovvio significato dei simboli

$$(16.1) \quad b_r^h + b_{r-1}^h = 0$$

Dunque le  $\delta^h$  hanno arbitraria la loro parte emisimmetrica, essendo la loro parte simmetrica fissata dalle  $\delta^{h-1}$  mediante la (15.1). Le  $\delta_r^k$  che si determinano per ricorrenza mediante la (13.1), una volta fissate le  $\delta^k$  e  $\delta^h$  in modo che soddisfino alle (15.1), sono allora tali che  $D_{ii}$  è simmetrica.

Ricordando la condizione alla fine del n. 3, perchè  $D_{ii}$  sia non degenera, segue che le matrici  $b^h$ , emisimmetriche per la (16.1), devono essere di ordine pari, quindi le eventuali radici  $\pm 1$  debbono avere segnatura  $(h_0, h_1, \dots, h_j)$  tale che le differenze  $h_i - h_{k-1}$  siano pari quando  $j - k$  è dispari.

Procedendo in modo analogo per le soluzioni  $D = -D_{-1}$ , si trova che le differenze  $h_k - h_{k-1}$  devono essere pari quando  $j - k$  è pari. Dunque: « condizione necessaria e sufficiente perchè la matrice  $\Lambda$  trasformi per cogredienza in sè matrici non degeneri simmetriche (emisimmetriche) è che le sue ra-

dici caratteristiche siano a coppie reciproche e con ugual segnatura, mentre per le eventuali radici  $\pm 1$ , la segnatura sia tale che  $h_k - h_{k-1}$  è pari quando  $j - k$  è dispari (pari)».

Le soluzioni simmetriche costituiscono poi un sistema lineare che dipende da

$$\frac{1}{2} \left[ \sum_{i,k} (h_k^i)^2 + \sum_{r=0}^J (-1)^r r k_r + \sum_{s=0}^{J'} (-1)^{J'-s} k'_s \right]$$

parametri arbitrari omogenei, essendo  $(h_0^i, \dots, h_{j_i}^i)$  la segnatura della radice  $\alpha_i$  diversa da  $\pm 1$ , e  $(k_0 \dots k_i)$ ,  $(k'_0 \dots k'_{j'})$  le segnature delle eventuali radici  $\pm 1$ .

## § 2. Trasformazione per anticogredienza di una matrice in se.

5. — Diremo che la matrice  $X$  è trasformata per anticogredienza in se dalla matrice  $A$ , se  $A$  è non degenera e si ha

$$(1.2) \quad A_{-1} X \bar{A} = X^{(9)}.$$

I procedimenti dei numeri 3 e 4 si applicano anche alla (1.2). È ovvio che le radici caratteristiche di  $A$  sono le complesse coniugate di quelle di  $X$  e con ugual segnatura; ma  $A$  è non degenera, se tale deve essere la  $X$ , e dalla (1.2) segue

$$\bar{A}^{-1} = X^{-1} A_{-1} X.$$

quindi: « condizione necessaria e sufficiente perchè la (1.2) ammetta soluzioni non degeneri  $X$  è che le radici caratteristiche di  $A$  siano a coppie l'una reciproca della coniugata dell'altra e con ugual segnatura, oppure di modulo uguale ad uno ».

Inoltre se  $A$  è una soluzione non degenera della (1.2) ogni altra soluzione della (1.2) è del tipo  $X \bar{H}$  e  $H_{-1} X$ , essendo  $H$  permutabile con  $A$ .

Se  $C$  è la forma canonica di  $A$ , alla (1.2) si può sostituire la  $D = C_{-1} D \bar{C}$  e col già detto significato delle matrici  $D_{ik}$  e  $C^{(\alpha)}$ , si ha

$$(2.2) \quad D_{ik} = C_{-1}^{(\alpha_i)} D_{ik} \bar{C}^{\alpha_k}$$

con che si ottiene l'analoga della (7.1) sostituendovi  $\bar{\alpha}_k$  al posto di  $\alpha_k$ . Ne

---

(<sup>9</sup>)  $\bar{A}$  indica la matrice complessa coniugata della  $A$ .

segue che  $D_{ih}$  è nulla quando  $a_i \bar{\alpha}_h \neq 1$ , mentre per  $a_i \alpha_k = 1$ , posto  $D_{ih} = \|\| d_{rs} \|\|$ , si ha ancora  $d_{rs} = 0$  per  $r + s < j$  e

$$(3.2) \quad \alpha \delta_r^h + \frac{1}{\alpha} \delta_{r-1}^k + \left( \frac{\delta_{r-1}^{k-1} | 0}{0 | 0} \right) = 0 \text{ per } r + s \geq j,$$

fatta la posizione (9.1).

Fissate ad arbitrio le matrici  $\delta^k$  non nulle della diagonale principale e della parallela soprastante a questa,  $D_{ih}$  risulta determinata dalla (3.2).

Tra le soluzioni non degeneri ne esistono sempre delle antisimmetriche o antiemisimmetriche, cioè tali che

$$D = \bar{D}_{-1} \text{ (o } D = -\bar{D}_{-1})^{(40)};$$

ed infatti per  $i \neq k$ , se  $D_{ih}$  soddisfa la (2.2), vi soddisfa pure  $(D_{ih})_{-1}$  quando si scambi  $\alpha_i$  con  $\alpha_k$ ; mentre per  $i = k$ , cioè  $\alpha_i \bar{\alpha}_i = 1$ , fissate ad arbitrio, con le posizioni del n. 4. le matrici parziali  $\delta^k$  purchè antisimmetriche, e le parti antiemisimmetriche delle  $\delta^h$ , la (3.2) consente di determinare la  $D_{ii}$  che si verifica facilmente essere antisimmetrica. La generica  $D_{ii}$  è poi non degenera, perchè tali sono le matrici  $b^k$ ,  $b^h$  rispettivamente antisimmetriche e antiemisimmetriche.

6. — Diremo *ortogonale* ogni matrice complessa  $H$  che soddisfa alla relazione

$$H_{-1} H = I.$$

Allora  $H$  trasforma per cogredienza in sè la matrice non degenera e simmetrica  $I$ ; le sue radici caratteristiche sono quindi a coppie reciproche e con ugual segnatura, mentre le eventuali radici  $\pm 1$  hanno segnatura tale che  $h_k - h_{k-1}$  è pari quando  $j - k$  è dispari.

Diremo *unitaria* ogni matrice complessa  $U$  che soddisfi alla relazione

$$U_{-1} \bar{U} = I:$$

Una tale  $U$  trasforma per anticogredienza in sè la matrice  $I$ . Detta  $C$  la forma canonica di  $U$  e  $P$  una matrice per cui  $U = P C P^{-1}$ , si ha

$$P_{-1}^{-1} C_{-1} P_{-1} \bar{P} \bar{C} \bar{P}^{-1} = I$$

<sup>40)</sup> Si osservi anche che se  $D = \bar{D}_{-1}$  soddisfa la  $D = C_{-1} D \bar{C}$ , la matrice  $iD = -(iD)_{-1}$  la soddisfa pure.

da cui

$$C_{-1} P_{-1} \bar{P} \bar{C} = P_{-1} \bar{P}.$$

Siccome  $P_{-1} \bar{P}$  è matrice discriminante di una forma hermitiana definita, i suoi minori principali, compresi quelli del 1° ordine, sono tutti non degeneri. Ricordando la forma della  $P_{-1} \bar{P}$  come si è trovata al n. 5, si ha che mancano in  $C$  le radici di modulo diverso da 1, mentre quelle di modulo uguale ad uno sono tutte di indice uno.

In particolare una matrice ortogonale e reale, cioè ortogonale ed unitaria ha le sue radici caratteristiche tutte di indice e modulo uguale ad uno, a coppie reciproche e con ugual segnatura.

### § 3. Applicazioni geometriche.

7. — Sia  $A$  il modulo di una omografia non degenera,  $B$  il modulo di una correlazione non degenera dell' $\mathcal{S}_{n-1}$  in sè, rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$\varrho x'_{-1} = A x_{-1}$$

$$\sigma \xi'_{-1} = B x_{-1}$$

essendo  $x$  e  $x'$   $n$ -complessi di coordinate proiettive omogenee di punto,  $\xi$  e  $\xi'$   $n$ -complessi di coordinate proiettive omogenee di iperpiano. Con  $A$  e  $B$  indicheremo anche la suddetta omografia e correlazione.

Diciamo che  $A$  e  $B$  sono permutabili se la correlazione prodotto di  $A$  per  $B$  coincide con la correlazione prodotto di  $B$  per  $A$ , cioè se esiste un fattore  $\varepsilon$  di proporzionalità tale che

$$\varepsilon B A = A_{-1}^{-1} B$$

ossia che

$$(1.3) \quad B = \varepsilon A_{-1} B A$$

Se nella  $A$  conglobiamo il fattore  $\varepsilon$  sostituendo ad  $A$  la matrice  $\pm \sqrt{\varepsilon} A$ , seguono dal § 1 le condizioni (necessarie e sufficienti) perchè  $A$  sia permutabile con almeno una correlazione non degenera (in particolare con una polarità od un sistema nullo).

Sia allora  $A$  una determinazione del modulo dell'omografia soddisfacente alle condizioni trovate e  $X$  una soluzione non degenera della (1.1). Procedendo come al n. 2, se  $H$  è il modulo di una omografia permutabile in

senso stretto o lato con la  $A$  <sup>(11)</sup>, cioè

$$(2.3) \quad A H = \varepsilon H A$$

anche la correlazione  $X H$  e la correlazione  $H_{-1} X$  sono permutabili con l'omografia  $A$ , e precisamente

$$X H = \varepsilon A_{-1} (X H) A$$

$$H_{-1} X = \varepsilon A_{-1} (H_{-1} X) A.$$

Se viceversa  $X'$  è tale che

$$(3.3) \quad X' = \varepsilon A_{-1} X' A$$

detta  $H$  la matrice per la quale è  $X' = X H$  oppure  $X' = H_{-1} X$ , l'omografia  $H$  risulta permutabile con la  $A$  relativamente allo stesso fattore  $\varepsilon$  che compare nella (3.3).

D'altra parte condizione necessaria e sufficiente perchè la  $A$  ammetta permutabilità in senso lato, cioè con un fattore  $\varepsilon \neq 1$ , è che le sue radici possano raggrupparsi in « cicli » le radici di uno stesso ciclo essendo tutte di ugual segnatura e proporzionali ai numeri

$$(4.3) \quad 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{\delta-1}$$

dove  $\varepsilon$  è radice primitiva  $\delta$ -ma dell'unità e  $\delta$  è un divisore dell'ordine  $n$  della matrice  $A$ . Se  $\delta$  è il più grande divisore di  $n$  per cui questo avviene, allora le omografie permutabili con  $A$  si ripartiscono in  $\delta$  sistemi lineari necessariamente distinti, le omografie di uno stesso sistema lineare essendo relative ad uno stesso valore del fattore  $\varepsilon$  che compare nella (2.3) ed essendo i numeri (4.3) i possibili valori per esso. In altrettanti sistemi lineari si ripartiscono quindi le correlazioni permutabili con  $A$ , e la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di più di tali sistemi di correlazioni non degeneri si ottiene associando alla condizione suddetta quella del n. 1.

Se in particolare  $A$  soddisfa alla condizione di cui al n° 4, quindi l'omografia  $A$  ammette polarità (sistemi nulli) non degeneri permutabili con essa, alle stesse condizioni del n° 4 soddisfa la matrice  $\pm \sqrt{\varepsilon} A$  e pertanto nei sistemi lineari suddetti sono contenuti altrettanti sistemi lineari di polarità (sistemi nulli) non degeneri permutabili con la data omografia <sup>(12)</sup>. Si riottengono così i risultati raggiunti per altra via dal DANTONI <sup>(13)</sup>.

<sup>(11)</sup> S. CHERUBINO, *Sulle omografie permutabili* [Rend. Roma 2 (4) 1938].

<sup>(12)</sup> eccetto, per  $\delta$  pari, quando  $A$  ha il ciclo delle radici  $\delta$ -me di  $-1$  e la loro segnatura non è quella caratteristica di  $\pm 1$ ; si hanno allora sistemi lineari di polarità non degeneri solo per  $\varepsilon^{2h}$ .

<sup>(13)</sup> G. DANTONI, loco cit. 3) b).

I suddetti sistemi lineari si ottengono direttamente risolvendo l'equazione

$$D = \varepsilon^k U_{-1} D C;$$

infatti le (7.1) restano inalterate salvo il diverso accoppiamento delle radici reciproche. Quando si cercano i sistemi lineari di correlazioni permutabili con la  $A$ , si può anche moltiplicare le correlazioni di un sistema, ad es. quello relativo ad  $\varepsilon = 1$ , per  $\delta - 1$  omografie non degeneri scelte ad arbitrio tra quelle tali che  $C H = \varepsilon^k H C$  ( $k = 1, 2, \dots, \delta - 1$ ).

8. — Le proprietà caratteristiche di tali correlazioni seguono immediatamente dalla forma della matrice  $D$ .

Siano

$$(5.3) \quad {}_a S_0, {}_a S_1, \dots, {}_a S_j$$

$$(6.3) \quad {}_a \Sigma_0, {}_a \Sigma_1, \dots, {}_a \Sigma_j$$

gli spazi e le stelle fondamentali associate alla radice caratteristica  $\alpha$  della data omografia e

$$(7.3) \quad {}_a \Sigma_0^*, {}_a \Sigma_1^*, \dots, {}_a \Sigma_j^*$$

$$(8.3) \quad {}_a S_0^*, {}_a S_1^*, \dots, {}_a S_j^*$$

le stelle che hanno per sostegni gli spazi (5.3) e i sostegni delle stelle (6.3) <sup>(14)</sup>.

Sia inoltre  ${}_a S_{il}$  lo spazio secondario associato ad  $\alpha$  intersezione di  ${}_a S_i$  con  ${}_a S_k^*$  e  ${}_a \Sigma_{il}$  la stella secondaria associata ad  $\alpha$  intersezione di  ${}_a \Sigma_i$  con  ${}_a \Sigma_k^*$  <sup>(15)</sup>.

Se la matrice dell'omografia è ridotta a forma canonica, gli spazi e le stelle suddette congiungono vertici e facce della piramide fondamentale e perciò il punto e l'iperpiano correnti su esse hanno coordinate tutte nulle

<sup>(14)</sup> I punti di  ${}_a S_i$  e gli iperpiani di  ${}_a \Sigma_i$  hanno per coordinate  $x$  e  $\xi$  le soluzioni non nulle delle equazioni  $(A - \alpha I)^r x_{-1} = 0$ ;  $\xi (A - \alpha I)^s = 0$ . Gli spazi e le stelle fondamentali godono, fra l'altro, delle seguenti proprietà

- se  $i < k$   ${}_a S_i$  è contenuto in  ${}_a S_k$  e  ${}_a \Sigma_i$  contiene  ${}_a \Sigma_k$ ; ne segue che  ${}_a S_i^*$  contiene  ${}_a S_k^*$ .
- ${}_a S_0$  e  ${}_a \Sigma_0$  sono spazi di punti uniti e stelle di iperpiani uniti.
- se  $\alpha \neq \beta$  ogni  ${}_a S_i$  appartiene a ciascun  ${}_a S_k^*$ .
- il sostegno della più ampia  ${}_a \Sigma_i$  è indipendente da ogni  ${}_a S_k$  (vedi S. CHERUBINO loco cit. 5) pag. 11.

<sup>(15)</sup> S. CHERUBINO, loco cit. 5), p. 16

eccetto alcune arbitrarie. Dalle espressioni di tali coordinate <sup>(16)</sup> e dalla forma della matrice  $D$ , segue senz'altro che: *le correlazioni  $D$  di uno stesso sistema lineare permutabili con una data omografia trasformano gli spazi  ${}_a S_i$ ,  ${}_a S_k^*$  e conseguentemente  ${}_a S_{ik}$  associati ad una radice caratteristica  $\alpha$  dell'omografia, nelle stelle  $\frac{1}{\alpha} \Sigma_i$ ,  $\frac{1}{\alpha} \Sigma_k^*$  e  $\frac{1}{\alpha} \Sigma_{ik}$  associate a quella radice che è reciproca di  $\alpha$  per la determinazione della matrice  $A$  dell'omografia rispetto alla quale, nella (1.3), si ha  $\varepsilon = 1$ .*

Se le correlazioni (non degeneri) permutabili con la data omografia si ripartiscono in  $\delta > 1$  sistemi lineari distinti, gli  $\frac{n}{\delta}$  cicli di radici di cui al n. 7 sono a coppie tali che le radici di un ciclo sono reciproche di quelle dell'altro ciclo e con ugual segnatura, eccetto gli eventuali cicli che contengono le radici  $\delta$ -me di  $\pm 1$ . Se chiamiamo i cicli di una stessa coppia l'uno *reciproco* dell'altro (e gli eventuali *autoreciproci*), si ha che: *le correlazioni permutabili con una omografia trasformano gli spazi fondamentali e secondari associati alle radici di un ciclo nelle stelle fondamentali e secondarie associate alle radici del ciclo reciproco.*

Quando si considerano polarità, gli spazi  ${}_a S_i$ ,  ${}_a S_k^*$  e  ${}_a S_{ik}$  risultano polari dai sostegni delle stelle corrispondenti. Se  $\alpha$  è diversa da  $\pm 1$ , per le proprietà citate in (14), essi appartengono ai loro spazi polari: giacciono quindi sulla quadrica di incidenza della polarità ed hanno ivi per spazi tangenti  $\frac{1}{\alpha} S_i^*$ ,  $\frac{1}{\alpha} S_k$  e il sostegno della stella  $\frac{1}{\alpha} \Sigma_{ik}$  (che è lo spazio congiungente  $\frac{1}{\alpha} S_i^*$  con  $\frac{1}{\alpha} S_k$ ).

Ancora per le proprietà citate in (14), della stessa proprietà godono gli spazi secondari associati alle eventuali radici  $\pm 1$ .

9. — È noto <sup>(17)</sup> che una omografia che trasformi in sé una quadrica non degenera ed operi in uno spazio di dimensione  $n - 1$  dispari, trasforma gli spazi lineari di dimensione massima appartenenti alla quadrica e giacenti in una delle due schiere, in spazi della stessa schiera o dell'altra schiera, a seconda che il determinante della matrice dell'omografia (una volta conglobato in essa il fattore  $\varepsilon$  di cui alla (1.3)) vale  $+1$  o  $-1$  (omografie di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie rispetto alla quadrica).

La dimostrazione di questa importante proprietà si ottiene agevolmente utilizzando le nostre notazioni e risultati.

<sup>(16)</sup> S. CHERUBINO loco cit 5) pag. 19.

<sup>(17)</sup> C. SEGRE, Ricerche sulle omografie .. pag. 400.

L'equazione della quadrica non degenera  $Q_{n-1}$  può sempre scriversi, a meno di omografie o trasformazioni di coordinate

$$(9.3) \quad x I x_{-1} = 0$$

e perciò tutte le omografie che trasformano in sè la  $Q_{n-1}$  hanno per modulo le matrici ortogonali  $H$ , tali cioè che

$$(10.3) \quad H_{-1} H = I.$$

Posto  $n = 2h$ , sia

$$(11.3) \quad X = (a \mid b)$$

una matrice ad  $h$  righe ed  $n$  colonne di caratteristica  $h$ , mentre  $a$  e  $b$  sono matrici quadrate di ordine  $h$ . Interpretando le sue righe come coordinate di  $h$  punti (indipendenti), la matrice  $X$  individua un  $S_{h-1}$  che appartiene a  $Q_{n-1}$  allora e solo che

$$(12.3) \quad X X_{-1} = a a_{-1} + b b_{-1} = 0$$

e pertanto  $a$  è non degenera allora e solo che è non degenera  $b$ .

Sia  $i_1 \dots i_n \dots i_n$  una qualunque permutazione degli indici  $1, 2, \dots, n$  e siano  $a', b'$  i minori di  $X$  costituiti dalle colonne  $i_1 \dots i_n$  e  $i_{n+1} \dots i_n$  rispettivamente.

Dimostriamo anzitutto che, detto  $r$  un intero pari o dispari insieme alla classe della permutazione  $i_1 \dots i_n$ , comunque si scelga questa, si ha

$$(13.3) \quad |a'| = \pm i^h (-1)^r |b'|$$

dove per una data  $X$  vale sempre il segno  $+$  o il segno  $-$ .

Alla (12.3) soddisfano pure  $a'$  e  $b'$  giacchè uno scambio nelle colonne di  $X$  equivale ad uno scambio nelle coordinate e con ciò la (9.3) resta invariata. La (13.3) è pertanto verificata se  $a'$ , quindi  $b'$ , è degenera.

Basterà allora dimostrare che, se  $a$  e  $b$  sono i minori relativi ad una permutazione  $h_1, h_2, \dots, h_n$  e  $a'$  e  $b'$  quelli relativi ad una permutazione  $i_1, i_2, \dots, i_n$  ed  $a$  e  $a'$  (quindi  $b$  e  $b'$ ) sono non degeneri, si ha

$$(14.3) \quad i^h \frac{|b|}{|a|} = i^h (-1)^r \frac{|b'|}{|a'|} = \pm 1$$

dove vale sempre il segno  $+$  o il segno  $-$ , ed  $r$  è un intero pari o dispari, secondo che  $h_1, h_2, \dots, h_n$  e  $i_1, i_2, \dots, i_n$  sono della stessa classe o

di classe opposta. Supponiamo per semplicità di esposizione che  $h_1, h_2, \dots, h_n$  coincida con la permutazione fondamentale  $1, 2, \dots, n$  e poniamo

$$(15.3) \quad X^* = i a^{-1} X = (i I \mid c)$$

dove

$$c = i a^{-1} b$$

La (12.3) si scrive

$$c c_{-1} = I$$

quindi  $c$  è ortogonale e pertanto

$$(16.3) \quad |c| = \pm 1.$$

D'altra parte

$$\frac{|b|}{|a|} = \frac{|c|}{|i I|} = \pm \frac{h}{i^h}$$

e quindi

$$(17.3) \quad i^h \frac{|b|}{|a|} = \pm 1.$$

La (14.3), quindi la (13.3) è senz'altro verificata per gli  $a'$  e  $b'$  relativi a permutazioni  $i_1, i_2, \dots, i_n$  che scambiano tra loro solo colonne di  $a$  e colonne di  $b$ , giacchè si effettua al più uno stesso cambiamento di segno nei determinanti di  $a'$  e  $b'$ .

D'altra parte una qualunque permutazione nelle colonne di  $X$  si può ottenere facendo seguire ad una permutazione che scambi solo colonne di  $a$  e colonne di  $b$ , una permutazione che porti un certo numero di colonne di  $a$  in colonne di  $b$ , numero che indicheremo con lo stesso esponente  $r$ , perchè ci dà la classe della permutazione corrispondente.

Ci riferiamo alla  $X^*$  anzichè alla  $X$  dato che lo  $S_{n-1}$  che si considera può assegnarsi indifferentemente con la  $X$  o la  $X^*$  anche agli effetti della (14.3) Siano le prime  $r$  colonne di  $i I$  che si scambiano ordinatamente nelle prime  $r$  colonne di  $c$  (ma il ragionamento ha carattere generale), e si ponga

$$c = \left( \begin{array}{c|c} c_r & x \\ \hline y & O_r \end{array} \right)$$

dove  $c_r$  è matrice quadrata di ordine  $r$ . Effettuata la suddetta permutazione si ha

$$(18.3) \quad (a' \mid b') = \left( \begin{array}{c|c|c} c_r & 0 & i I_r \mid x \\ \hline y & i I_{n-r} & 0 \mid C_r \end{array} \right).$$

Per una nota proprietà delle matrici ortogonali <sup>(48)</sup>, si ha

$$|c_r| = |c| \cdot |C_r|$$

mentre dalla (18.3) segue

$$|a'| = |c_r| i^{h-1} \quad |b'| = |C_r| i^r;$$

quindi, come si voleva

$$|a'| = \pm i^h (-1)^{r+1} |b'|$$

valendo sempre il segno  $+$  o il segno  $-$ .

Al variare con continuità dell' $S_{h-1}$  su  $Q_{n-1}$ , cioè al variare con continuità della matrice  $(a|b)$  a partire da una determinazione fissata, in modo che  $a a_{-1} + b b_{-1} = 0$ , nella (18.3) seguirà a valere il segno  $+$  o il segno  $-$ , che compete a quella determinazione. Gli  $S_{h-1}$  di  $Q_{n-1}$  risultano così distribuiti in due schiere distinte, caratterizzate dal segno suddetto.

Sia ora  $(a|b)$  la matrice che individua un  $S_{h-1}$  di  $Q_{n-1}$ , appartenente alla schiera cui compete il segno  $\varepsilon = \pm$ ; la matrice (ortogonale)  $H$  che trasforma  $Q_{n-1}$  in sé, trasforma lo  $S_{h-1}$  nello spazio  $S'_{h-1}$  individuato dalla  $(a'|b') = (a|b)H$ .

Poniamo

$$H = (H' | H'')$$

dove  $H'$  e  $H''$  sono matrici ad  $n$  righe ed  $h$  colonne e consideriamo le permutazioni  $i_1 i_2 \dots i_n$  degli indici  $1, 2, \dots, n$  tali che

$$i_1 < i_2 < \dots < i_h \quad i_{h+1} < i_{h+2} < \dots < i_n.$$

Se con  $x'_{i_1 i_h}$   $x''_{i_1 i_h}$  indichiamo i minori di ordine  $h$  estratti da  $H'$  e  $H''$  e formati con le righe  $i_1 \dots i_h$  e con  $a_{i_1 i_h}$  il minore di ordine  $h$  estratto da  $(a|b)$  e formato con le colonne  $i_1 \dots i_h$ , si ha

$$|a'| = \Sigma |a_{i_1 i_h}| \cdot |x'_{i_1 i_h}| \quad |b'| = \Sigma |a_{i_{h+1} i_n}| \cdot |x''_{i_{h+1} i_n}|$$

le sommatorie essendo estese a tutte le combinazioni  $i_1 \dots i_h$  e  $i_{h+1} \dots i_n$  di classe  $h$ , degli indici  $1, 2, \dots, n$ .

<sup>(48)</sup> Ogni minore di una matrice ortogonale è uguale al suo complemento algebrico moltiplicato per il determinante della matrice.

Per la proprietà di cui alla nota (18) si ha

$$|x'_{i_1} \dots i_h| = |H| \cdot (-1)^r \cdot |x''_{i_{h+1} \dots i_n}|$$

essendo  $r$  un intero pari o dispari insieme alle classe della permutazione  $(i_1 i_2 \dots i_h \dots i_n)$ , mentre per la (13.3) si ha

$$a_{i_1 i_h} = \varepsilon i^h (-1)^r |a_{i_{h+1} \dots i_n}|$$

Dunque

$$|a'| = \sum \varepsilon i^h (-1)^{2i} |H| \cdot |a_{i_{h+1} \dots i_n}| \cdot |x''_{i_{h+1} \dots i_n}| = \varepsilon i^h |b'| \cdot |H|$$

ed il teorema del Segre è così dimostrato.

10. - Se una anticorrelazione non degenera

$$(19.3) \quad \varrho \xi_{-1} = B x_{-1}$$

e permutabile con una data omografia non degenera di modulo  $A$ , esiste un fattore  $\omega$  per il quale

$$(20.3) \quad \omega B = A_{-1} B \bar{A}$$

e si può usufruire del fattore a meno del quale è determinata la  $A$  per supporre

$$(21.3) \quad \omega \bar{\omega} = 1.$$

Con ciò la  $A$  risulta determinata a meno di un fattore di modulo uno ma del resto arbitrario. Procedendo come al n. 5 si trova che insieme ad  $\alpha$  la  $A$  ammette la radice caratteristica  $\frac{\omega}{\alpha}$  e con la stessa segnatura e quindi la radice  $\frac{\omega \alpha}{\omega} = \omega^2 \alpha$ :  $\omega^2$  è radice primitiva  $\delta$ -ma dell'unità giacchè  $A$  ammette le radici

$$\alpha, \omega^2 \alpha, \dots, \omega^{2(\delta-1)} \alpha$$

(tutte con la stessa segnatura). Se  $k \geq \delta$  è il massimo intero per il quale la  $A$ , se ammette la radice  $\alpha$ , ammette le radici

$$(22.3) \quad \alpha, \varepsilon \alpha, \dots, \varepsilon^{k-1} \alpha$$

tutte con la stessa segnatura,  $\varepsilon$  essendo radice  $k$  ma primitiva dell'unità, dalla definizione di  $k$  e da elementari proprietà delle radici dell'unità segue che  $\delta$  è divisore di  $k$  e pertanto  $\omega^2$  è una potenza di  $\varepsilon$ :

$$(23.3) \quad \omega^2 = \varepsilon^r.$$

Intanto l'omografia  $A$  ammette omografie non degeneri permutabili in senso lato e precisamente tutte quelle di modulo  $H$  tale che

$$(24.3) \quad H A = \varepsilon^i A H \quad (i = 0, 1, \dots, k-1).$$

Allora la (20.3), insieme alla  $B$  relativamente al fattore  $\omega$ , ammette le soluzioni non degeneri  $H_1 B$  relativamente al fattore  $\omega \varepsilon^i$  e queste sole.

Dunque: Se una omografia di modulo  $A$  è permutabile con anticorrelazioni non degeneri, le sue radici caratteristiche si ripartiscono in cicli tali che:

— le radici caratteristiche di uno stesso ciclo hanno ugual segnatura e sono proporzionali ai numeri

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}$$

dove  $k$  è divisore del numero  $m$  delle radici distinte di  $A$  e  $\varepsilon$  è radice primitiva  $k$ -ma dell'unità.

— i cicli si distribuiscono in coppie in modo che le radici dei due cicli della coppia hanno tutte ugual segnatura e quelle di un ciclo sono uguali alle inverse delle coniugate dell'altro ciclo, moltiplicate per un fattore  $\omega^*$  che è  $1$  o  $-1$  o  $\sqrt{\varepsilon}$  o  $-\sqrt{\varepsilon}$ .

Dopo di che i possibili valori di  $\omega$  per i quali è risolubile la (20.3) con  $B$  non degenera sono

$$\omega = \omega^* \varepsilon^i \quad (i = 0, 1, \dots, k-1).$$

Le anticorrelazioni permutabili con la data omografia si ripartiscono allora in  $k$  sistemi lineari distinti, uno per ciascun valore di  $\omega$ .

Le condizioni suddette sono anche sufficienti, perchè insieme a ogni radice  $\alpha$  la  $A$  ammette la radice  $\frac{\omega^* \varepsilon^i}{\alpha}$  e quindi esiste almeno una  $B$  non degenera per cui è soddisfatta la (20.3) per  $\omega = \omega^* \varepsilon^i$ .

Se  $B = \pm \bar{B}_1$ , cioè se l'anticorrelazione è una antipolarità, detto  $x$  un  $n$ -complesso non nullo per il quale  $x B \bar{x}_1$  è diverso da zero, si ha dalla (20.3)

$$\omega = \frac{\bar{x} \bar{A}_{-1} \bar{B} A x_{-1}}{x B \bar{x}_1} = \frac{x A_{-1} \bar{B}_{-1} \bar{A} \bar{x}_{-1}}{x \bar{B}_{-1} \bar{x}_{-1}} = \omega$$

e pertanto è

$$\omega = \pm 1,$$

una omografia è permutabile con antipolarità non degeneri, le condizioni precedenti vanno dunque modificate nel senso che  $\omega$  può assumere solo il valore  $\pm 1$  o  $-1$ . Esse sono ancora sufficienti come risulta dal n. 5 per  $\omega = 1$  e come si prova immediatamente per  $\omega = -1$  seguendo lo stesso procedimento del numero 5 citato.

Se ne conclude quindi che *le antipolarità non degeneri permutabili con una omografia che soddisfa alle condizioni suddette, si distribuiscono in due sistemi lineari distinti oppure costituiscono un unico sistema lineare, a seconda che  $k$  è pari o dispari.*

Le anticorrelazioni non degeneri permutabili con una data omografia operano sugli spazi fondamentali e secondari di questa in modo analogo a come operano le correlazioni permutabili con una omografia (vedi n. 8). In particolare per una antipolarità non degeneri permutabile con una data omografia gli spazi  ${}_a S_i, {}_a S_k^*, {}_a S_{ik}$  associati alla radice costruttiva  $\alpha$  sono polari degli spazi  $\frac{\omega}{\alpha} S_i^*, \frac{\omega}{\alpha} S_k'$  e dello spazio congiungente  $\frac{\omega}{\alpha} S_i^*$  con  $\frac{\omega}{\alpha} S_k$  associati alla radice  $\frac{\omega}{\alpha}$ . Pertanto se  $\omega = -1$ , essi stanno tutti sull'antiquadrica di incidenza dell'antipolarità; se invece  $\omega = 1$  questa proprietà non è soddisfatta per i soli spazi fondamentali associati alle eventuali radici di modulo unitario, seguitando a valere per tutti gli altri spazi fondamentali e secondari.

[Pervenuto alla Redazione il 27 9-1949]