ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EMILIO BAIADA

Il problema isoperimetrico del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 15, nº 1-4 (1950), p. 97-112

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_2_15_1-4_97_0>

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di EMILIO BAIADA (Pisa).

1. - Introduzione. – Con il nome di problema isoperimetrico si comprende, nel Calcolo delle Variazioni, una vasta classe di problemi che generalizzano il classico problema degli isoperimetri. Questi problemi sono del tipo condizionato e si possono brevemente porre, nella forma parametrica, nel modo seguente:

Siano

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}=\int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y')ds \qquad \text{e} \qquad \mathcal{G}_{\mathcal{C}}=\int_{\mathcal{C}} G(x, y, x', y')ds,$$

due integrali definiti per una classe K di curve ordinarie $\mathcal{C}$; fra tutte le curve di K per le quali l'integrale $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ assume un dato valore, determinare quelle che rendono minimo l'integrale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

È noto che questo problema, di grande interesse, presenta delle forti difficoltà, al punto che, sino a recentemente erano noti essenzialmente due soli teoremi d'esistenza ([1]). Di questi due teoremi uno era relativo al caso in cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ fosse un integrale « continuo » rispetto alla curva $\mathcal{C}$, ossia che G avesse la forma:

$$G \equiv M(x, y)x' + N(x, y)y',$$

l'altro invece era relativo al caso in cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ fosse legato in modo opportuno all'integrale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ e precisamente che:

$$G \equiv f(x, y)F(x, y, x', y').$$

Questi teoremi, se da una parte risolvono quelle questioni, specialmente di natura geometrica, da cui storicamente deriva il problema, da un'altra parte appaiono troppo particolari. Malgrado lo sforzo di vari Autori il problema non si poteva dire affatto risolto.

In una nota precedente, dovendomi occupare d'un problema di calcolo delle

([1]) Vedere L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 449 e 466.

variazioni [2], avevo proposto un metodo affatto generale per trattare questi problemi, metodo che estende il procedimento di Lagrange per affrontare i problemi condizionati del calcolo ordinario. In questa nota mi propongo di sviluppare questo metodo per raggiungere enunciati molto generali.

Tra il 1939 e il 1940 sono apparse delle note di E. J. MAC-SHANE [3] relative al problema non regolare del calcolo delle variazioni. La IV e la V nota si occupano del problema isoperimetrico ed in particolare la V nota tratta del problema isoperimetrico messo sotto forma parametrica. I risultati del Mac-Shane vengono raggiunti partendo dai risultati ottenuti nelle note I, II, III precedenti, relative al problema libero, ma anche se ottenuti con metodi alquanto elaborati e diversi dai consueti, sono in realtà molto notevoli. Riportiamo qui appresso questi risultati. Premettiamo però prima alcune definizioni.

2. – Siano $F(x, y, x', y')$ e $G(x, y, x', y')$ due funzioni definite per (x, y) in un campo S e per qualunque (x', y') non entrambi nulli. Esse siano inoltre positivamente omogenee di grado 1 rispetto a (x, y) ed ammettano derivate seconde parziali rispetto a x' e y' continue escluso per i valori di x' e y' entrambi nulli.

a) Si dice « insieme d'appoggio » (Approach Set) relativo al punto (x, y) e alla coppia delle funzioni F e G, l'insieme A delle coppie di angoli (θ_1, θ_2) tali che la matrice:

$$\Delta(x,y,\theta_1,\theta_2) \equiv \left\| \begin{matrix} F_{x'}(x,y,\cos\theta_1,\operatorname{sen}\theta_1) - F_{x'}(x,y,\cos\theta_2,\operatorname{sen}\theta_2) & F_{y'}(x,y,\cos\theta_1,\operatorname{sen}\theta_1) - F_{y'}(x,y,\cos\theta_2,\operatorname{sen}\theta_2) \\ G_{x'}(x,y,\cos\theta_1,\operatorname{sen}\theta_1) - G_{y'}(x,y,\cos\theta_2,\operatorname{sen}\theta_2) & G_{x'}(x,y,\cos\theta_1,\operatorname{sen}\theta_1) - G_{y'}(x,y,\cos\theta_2,\operatorname{sen}\theta_2) \end{matrix} \right\|$$

sia di caratteristica inferiore a 2.

Si prova immediatamente che se l'integrale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ è quasi-regolare normale nel punto (x, y) di S ed A è l'insieme d'appoggio relativo al punto (x, y) secondo la definizione precedente, esiste un numero $\lambda(x, y)$ tale che, considerata la funzione:

$$H(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + \lambda G(x, y, x', y'),$$

l'insieme A è anche l'insieme d'appoggio relativo al punto (x, y) per la funzione H, intendendo per insieme d'appoggio relativo a una sola funzione H

---

(2) Vedere E. BAIADA: *Sopra un problema di Mayer*, Annali Scuola Norm. di Pisa, Serie II, Vol. IX (1940), IV Teorema di esistenza.

(3) E. J. MAC-SHANE: *Some existence theorems in the calculus of variations.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 44 e 45.

l'insieme delle coppie (θ_1, θ_2) tali che:

$$H_{x'}(x, y, \cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1) = H_{x'}(x, y, \cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$H_{y'}(x, y, \cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1) = H_{y'}(x, y, \cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2).$$

Il viceversa è evidente.

b) Sia K la classe di tutte le curve rettificabili di equazioni parametriche: $x=x(s)$, $y=y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$ (dove $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$ indica la lunghezza della curva $\mathcal{C}$) e congiungenti due punti fissi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) appartenenti entrambi al campo S. Indichiamo con $K(L)$ la sottoclasse di K formata da tutte le curve $\mathcal{C}$ per cui l'integrale:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} G(x, y, x', y')ds,$$

assume valore costantemente uguale a L.

Il MAC-SHANE dimostra il seguente teorema:
Ammesse le seguenti ipotesi [4]:

α) Supponiamo che il campo S coincida con tutto il piano (x, y).

β) Supponiamo che ad ogni coppia di numeri positivi l, m corrisponda un numero positivo M, tale che se la curva $\mathcal{C}$, appartenente alla classe K, è tale che:

$$|\mathcal{G}_{\mathcal{C}}| \leqslant l \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \leqslant m,$$

sia anche:

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{C}} \leqslant M.$$

γ) Supponiamo che l'insieme d'appoggio relativo a un qualunque punto (x, y) del piano sia o vuoto o contenga un numero finito di valori θ_i $(i=1, 2, ..., n)$, che possono essere ordinati in modo tale che $\Omega_H(x, y, \theta_i, \theta_j) < 0$, se $i<j$; dove con Ω_H abbiano indicato la funzione di Weierstrass, relativa alla funzione H, seguente:

$$\begin{aligned}\Omega_H(x, y, \theta_i, \theta_j) = {} & H_x(x, y, \cos\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i) + H_y(x, y, \cos\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i) \\ & - H_x(x, y, \cos\theta_j, \operatorname{sen}\theta_j) - H_y(x, y, \cos\theta_j, \operatorname{sen}\theta_j).\end{aligned}$$

δ) $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ sia quasi-regolare normale.

Allora: o la sottoclasse $K(L)$ è vuota oppure esiste in essa una curva $\mathcal{C}$ che rende minimo l'integrale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

---

(4) Per le notazioni, locuzioni, definizioni qui adoperate vedere L. TONELLI: *Calcolo delle Variazioni*, indici delle definizioni, Vol. II.

Osserviamo subito che questo bel risultato di Mac-Shane esclude però l'esistenza di piani d'appoggio multipli che hanno tutto un tratto a comune con la figurativa, contrariamente a quanto fa il Mac-Shane stesso per i problemi liberi.

3. – Illustriamo ora un procedimento affatto generale, utile nello studio del problema isoperimetrico. Esso è naturale estensione del metodo di Lagrange per le risoluzioni dei problemi di minimo condizionato del calcolo ordinario.

Sia $\Phi(x)$ una funzione definita per tutti gli x reali. Conserviamo le notazioni definite nel numero precedente.

Data una curva $\mathcal{C}$ della classe K, consideriamo il funzionale:

$$R_{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)=\mathcal{F}_{\mathcal{C}}+\lambda\mathcal{G}_{\mathcal{C}}+\Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]. \tag{1}$$

Supponiamo che, qualunque sia la funzione Φ e qualunque sia λ in un intervallo (λ_1, λ_2), il problema di minimo relativo al funzionale $R_{\mathcal{C}}$ (λ, Φ) ammetta soluzione nella classe K.

Indichiamo con $\mathcal{C}(\lambda, \Phi)$ una minimante qualunque di questo problema (se l'esistenza della soluzione è stata provata mediante il metodo delle successioni minimizzanti, vi è la possibilità di scegliere una di queste minimanti adoperando il procedimento di Arzelà-Tonelli).

Indichiamo con $[\mathcal{C}(\lambda, \Phi)]$ l'insieme delle curve minimanti corrispondenti a un λ e a una Φ fissati. Se $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)}=L$, il problema isoperimetrico posto nell'introduzione ammette $\mathcal{C}(\lambda, \Phi)$ quale minimante nella classe $K(L)$ delle curve per le quali $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}=L$. Infatti, esprimendo che $\overline{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)$ è minimante per il funzionale $R_{\mathcal{C}}$, avremo:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}+\lambda\mathcal{G}_{\mathcal{C}}+\Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]\geqslant \mathcal{F}_{\overline{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)}+\lambda\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)}+\Phi[\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)}],$$

e, se $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}=\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)}=L$, sarà:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}\geqslant \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}.$$

Quindi, se indichiamo con $[L(\lambda, \Phi)]$ l'insieme dei valori assunti da $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ sulle curve della classe $[\mathcal{C}(\lambda, \Phi)]$, il problema isoperimetrico da studiare ammette soluzione per ogni valore L dell'insieme $[L(\lambda, \Phi)]$.

Indichiamo ora con $[L(\lambda)]$ l'insieme formato con tutti i numeri che appartengono a uno qualunque degli insiemi $[L(\lambda, \Phi)]$, dove Φ è una qualunque funzione e λ un numero fissato dell'intervallo (λ_1, λ_2). Indichiamo con $[L]$ l'insieme formato da tutti i numeri che appartengono ad almeno uno degli insiemi $[L(\lambda)]$. Per quanto detto sopra, per ogni numero L della classe $[L]$ il problema isoperimetrico proposto ammette soluzione.

4. – Vediamo ora come il procedimento generale indicato nel numero precedente possa articolarsi, attraverso lo studio dell'insieme $[L]$, in una proposizione effettiva dedotta da ipotesi che permettano di assicurare l'esistenza del minimo per il problema di minimo libero assoluto relativo al funzionale $R_{\mathcal{C}}$ definito nel numero precedente.

Oltre alle ipotesi di continuità messe al principio del numero 2, ammettiamo le seguenti ipotesi:

I) $G(x, y, x', y')$ sia quasi-regolare normale sul campo S.

II) Qualunque sia $\lambda \neq 0$ la funzione $F(x, y, x', y') + \lambda G(x, y, x', y')$ soddisfi alla seguente condizione:

in ciascun punto (x, y) del campo S esistono le estreme direzioni orientate d'appoggio relative al piano d'appoggio multiplo della figurativa e se θ_1, θ_2, sono gli angoli che definiscono queste direzioni d'appoggio, sia:

$$\Omega_{F+\lambda G}(x, y, \theta_1, \theta_2) \neq 0.$$

Gli insiemi d'appoggio si distribuiscano inoltre in un numero finito al più di intervalli.

Va osservato che questa condizione è più generale della γ, infatti ogni piano d'appoggio multiplo fornisce un insieme d'appoggio relativo alla coppia di funzioni F e G. Si osservi inoltre che gli insiemi d'appoggio posson contenere interi tratti.

III) Sia K una classe di curve $\mathcal{C}$ rettificabili di equazioni parametriche: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$, soddisfacente alla seguente condizione:

a) Sia completa, e ogni sua curva $\mathcal{C}$ sia formata di punti di S di indifferenza rispetto a K.

b) Ad ogni coppia di numeri positivi l, m corrisponde un numero positivo M, tale che se $\mathcal{C}$ appartiene alla classe K e sia tale che:

$$|\mathcal{G}_{\mathcal{C}}| \leqslant l \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \leqslant m, \qquad \text{sia anche} \quad \mathcal{L}_{\mathcal{C}} \leqslant M.$$

c) Se $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = M$, (con M sufficientemente grande), $\mathcal{C}$ non sia un segmento.

d) Le curve $\mathcal{C}$ tali che $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} \leqslant M$ riempiano una porzione limitata S' tutta interna al campo S.

Questa classe è più generale di quella ammessa nell'ipotesi *b*) del n. 2.

Se vogliamo allora studiare il problema del minimo di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ nella classe di curve $K(L)$, basta prendere in considerazione soltanto le curve di K che abbiano lunghezza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} \leqslant M' + 1$, dove M' è quel numero che secondo la ipotesi III corrisponde a L e a uno qualunque dei valori che $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ assume su una curva $\mathcal{C}$ per cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} = L$. Per semplicità indicheremo ancora con K questa sotto classe di curve di lunghezze limitate, la quale è ovviamente ancora completa, e le cui curve saranno formate di punti di indifferenza (ristretta).

5. – Sia $\Phi(x)$ una funzione sempre crescente continua e derivabile definita per tutti gli x reali.

Dimostriamo nelle ipotesi ammesse, che il funzionale:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \lambda \mathcal{G}_{\mathcal{C}} + \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$$

ammette minimo nella classe K, qualunque sia $\lambda \neq 0$.

Due casi si possono presentare:

1°) la figurativa relativa alla funzione: $F + \lambda G$ ed a un punto qualunque di S' abbia almeno un piano d'appoggio e resti tutta al disopra di questo piano.

2°) la ipotesi 1°) non è verificata. Presa allora una successione minimizzante $\{ \mathcal{C}_n \}$, sia $\mathcal{C}_0$ una sua curva d'accumulazione, se su $\mathcal{C}_0$ è verificata la ipotesi 1°), si è riportati al primo caso avendo cura di prendere per campo un intorno sufficientemente piccolo della curva $\mathcal{C}_0$. Se invece esiste un punto di $\mathcal{C}_0$, (e quindi esiste tutto un intorno) in cui non è verificata la 1°), vorrà dire che potremo ammettere che abbia lunghezza massima e che quindi $\lim\limits_{n \to \infty} \{ \mathcal{L}_{\mathcal{C}_n} \} = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0}$, da cui l'esistenza del minimo.

Dimostriamo che anche nell'eventualità 1°) il minimo esiste.

A tale uopo, poniamo:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \lambda \mathcal{G}_{\mathcal{C}},$$

e consideriamo l'integrale ausiliare:

$$\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} H(x, y, x', y')\, ds,$$

dove la funzione H sia costruita nel seguente modo:

1°) essa sia positivamente omogenea rispetto alle variabili x', y'.

2°) indicati con θ_1, θ_2, gli angoli d'appoggio che definiscono le estreme direzioni orientate d'appoggio relativamente al punto (x, y), per ogni θ corrispondente a una direzione orientata d'appoggio non interna a nessuno degli insiemi d'appoggio, poniamo:

$$H \equiv F + \lambda G,$$

mentre per ogni altra direzione si pone:

$$H \equiv F_{x'}(x, y, \cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)\cos\theta + \lambda G_{x'}(x, y, \cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)\cos\theta + \\ + F_{y'}(x, y, \cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)\operatorname{sen}\theta + \lambda G_{y'}(x, y, \cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)\operatorname{sen}\theta.$$

Questa nuova espressione gode delle stesse proprietà di regolarità ammesse per F e G, se si eccettuano al più quelle coppie (x', y') che corrispondono alle estreme direzioni d'appoggio.

In virtù di teoremi noti, l'integrale $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}}$, così come l'integrale $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$, sono semi-continui inferiormente nella classe K, e quindi lo sarà pure il funzionale $\overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}} + \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$, giacchè abbiamo ammesso la crescenza di Φ.

Il funzionale detto ammetterà minimo nella classe K. Sia $\mathcal{C}_0$ una delle sue minimanti (scelta per esempio mediante il metodo delle successioni minimizzanti). Ora siccome è:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}} \geqslant \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}} + \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}],$$

se è:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}_0} = \overline{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}_0} + \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}], \tag{2}$$

anche il funzionale (1) ammette minimo nella classe K [5].

L'uguaglianza precedente viene provata, in questi problemi di tipo non regolare, a partire dalle equazioni di Eulero - Lagrange alle quali devono soddisfare le minimanti relative al funzionale ausiliare.

Osserviamo che, se $\mathcal{C}_\gamma$ indica una curva qualunque di K, tale che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma} \neq \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}$ possiamo scrivere:

$$\Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma}] - \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}] = \frac{\Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma}] - \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}]}{\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}} \cdot (\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}),$$

e poichè abbiamo ammesso la derivabilità della Φ, quando $\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}$ tende a zero, l'espressione:

$$\frac{\Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma}] - \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}]}{\mathcal{G}_{\mathcal{C}_\gamma} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}},$$

tende a un numero, indipendente da γ.

In base a questi ragionamenti si perviene al risultato, che la minimante deve soddisfare ad un sistema differenziale che è esattamente lo stesso di quello che si dovrebbe scrivere per la minimante relativa all'integrale $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, dove però la costante λ va opportunamente cambiata.

Indichiamo con E l'insieme dei punti della curva $\mathcal{C}_0$ tali che in essi esista la tangente orientata interna al massimo angolo d'appoggio; su E è dunque:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)} \Omega_H(x, y) = 0, \qquad \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)} \Omega_H(x, y) = 0.$$

---

[5] Vedere E. Baiada: *Un problema non regolare del C. d. V.* Annali Scuola Norm. Sup. (Pisa), 2, Vol. XI (1942).

(dove sia sottinteso che Ω_H non è calcolata per il valore λ della costante, ma per un altro valore opportuno come è stato detto sopra). Se l'insieme E non fosse di misura nulla, queste due relazioni andrebbero a contraddire la ipotesi II del numero 4.

Risulta così dimostrata la (2). Per tutti i particolari di questa dimostrazione rimando alla nota citata in ([5]).

Per la validità di quanto è stato detto bisogna essenzialmente che la minimante $\mathcal{C}_0$ soddisfi alle equazioni necessarie di EULERO-LAGRANGE, il che è ovvio se la lunghezza della minimante è inferiore a $M'+1$, cioè non è massima, poichè la curva stessa è tutta interna al campo S. Nel caso in cui la lunghezza di $\mathcal{C}_0$ sia massima, faremo vedere ora che essa deve ancora soddisfare alle equazioni di EULERO-LAGRANGE. Per quanto è stato ammesso sulla classe K, in questo caso la minimante non si riduce a un solo segmento, cioè non è un estremale per l'integrale:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x'^2+y'^2}\, ds.$$

Supponiamo che $\mathcal{C}_0$ non sia dunque un'estremale relativa all'integrale precedente e sia a_0 un arco della curva $\mathcal{C}_0$. Quest'arco è tutto interno al campo S. Qualunque curva ordinaria avente gli stessi estremi di a_0 e appartenente ordinatamente ad un intorno sufficientemente piccolo di quest'arco, può essere sostituita ad a_0, nella $\mathcal{C}_0$, senza far uscire dalla classe K.

Siano allora, $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$, (s_1, s_2) le equazioni dell'arco a_0. Siccome a_0 non è un estremale relativa a $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$, esiste una coppia di funzioni $\varphi(s)$ e $\psi(s)$, assolutamente continue in tutto (s_1, s_2), con le derivate limitate (dove esistono) e soddisfacenti alle:

$$\varphi(s_1)=\varphi(s_2)=\psi(s_1)=\psi(s_2)=0, \quad \int_{s_2}^{s_1} [\varphi' x'(x'^2+y'^2)^{-\frac{1}{2}}+\psi' y'(x'^2+y'^2)^{-\frac{1}{2}}]ds = a < 0.$$

Scegliamo un'altra coppia $\varphi_1(s)$ e $\psi_1(s)$ di funzioni analoghe a $\varphi(s)$ e $\psi(s)$, le quali però possono anche non soddisfare alla disuguaglianza. La curva

$$a_{\gamma,\eta}: \quad x=x_0(s)+\gamma\varphi_1(s)+\eta\varphi(s), \quad y=y_0(s)+\gamma\psi_1(s)+\eta\psi(s), \qquad (s_1, s_2),$$

è ordinaria e, per qualunque coppia sufficientemente piccola (γ, η), la curva $\mathcal{C}_{\gamma,\eta}$, che si ottiene da $\mathcal{C}_0$ sostituendo a_0 con $a_{\gamma,\eta}$, appartiene alla classe K ed è interna ad S. Gli integrali $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}$ dipendono da η e γ. Scriviamo ora l'equazione:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}} = L - b\eta. \tag{3}$$

Per tutti i b, tali che $0 \leqslant b \leqslant \frac{|a|}{2}$, la seguente relazione può essere esplicitata rispetto a η, in una funzione $\eta(\gamma)$, finita e continua insieme con la sua derivata $\eta'(\gamma)$, e soddisfacente alla $\eta(0)=0$. Con ciò dunque la curva $\mathcal{C}_{\gamma,\eta(\gamma)}$ appartiene alla classe $K(M'+1)$, per tutti i valori di γ sufficientemente prossimi allo zero.

Se è $\gamma=0$ la $\mathcal{C}_{\gamma,\eta(\gamma)}$ coincide con la $\mathcal{C}_0$, la quale per ipotesi è una curva estremante per $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$; e poichè $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta(\gamma)}}$, come funzione di γ, ammette la derivata prima finita e continua, per $\gamma=0$, ne viene:

$$\left(\frac{d}{d\gamma}\mathcal{H}_{\mathcal{C},\,\eta(\gamma)}\right)_{\gamma=0}=0,$$

Ma è:

$$\frac{d}{d\gamma}\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta(\gamma)}}=\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}+\eta'(\gamma)\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}$$

e, in virtù della (3),

$$\eta_\gamma'=-\frac{\partial}{\partial\gamma}\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}:\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\gamma,\eta}}+b\right).$$

Si ha così ponendo:

$$\lambda_0=-\left[\frac{d}{d\eta}\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{0,\eta}}:\left(\frac{d}{d\eta}\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{0,\eta}}+b\right)\right]_{\eta=0},$$

l'equazione:

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,0}}+\lambda_0\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\gamma,0}}\right)_{\gamma=0}=0.$$

Osservando che al variare di b la espressione $\left[\frac{d}{d\eta}\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{0,\eta}}+b\right]_{\eta=0}$ può prendere infiniti valori, mentre le quantità:

$$\frac{d}{d\eta}\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{0,\eta}},\quad \frac{d}{d\gamma}\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{\gamma,0}}\quad \text{e}\quad \frac{d}{d\gamma}\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,0}}$$

rimangono inalterate al variare di b, se ne deduce che deve necessariamente essere:

$$\left[\frac{d}{d\gamma}\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\gamma,0}}\right]_{\gamma=0}=0.$$

Il ragionamento prosegue quindi come nel caso ordinario, per arrivare alle equazioni di EULERO - LAGRANGE.

6. – Per quanto dimostrato nel numero precedente, possiamo allora asserire che l'insieme $[L(\lambda)]$ non è mai vuoto per tutti i $\lambda\neq 0$. Distingueremo due casi:

1°) l'insieme $[L(\lambda)]$ contiene un solo elemento,

2°) l'insieme $[L(\lambda)]$ contiene almeno due elementi. Siano $\mathcal{C}(\lambda,\Phi_1)$ e $\mathcal{C}(\lambda,\Phi_2)$ le due minimanti relative, le quali, per ipotesi, devono essere tali che:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\Phi_1)}\neq\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\Phi_2)}$$

(rimanga sottinteso che Φ_1 e Φ_2 possono rappresentare anche la stessa funzione). Supponiamo che:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_1)} > \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)}\,.$$

Scriviamo che $\mathcal{C}(\lambda,\ \Phi_2)$ è minimante per il problema libero assoluto relativamente al funzionale $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\lambda,\ \Phi_2)$, avremo:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} - \mathcal{F}_{(\lambda,\,\Phi_2)} \geqslant \lambda(\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) + \Phi_2[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)} - \Phi_2[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]]\,. \tag{4}$$

Da questa relazione osserviamo che $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ è limitata inferiormente per tutte le curve $\mathcal{C}$ per le quali $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} \leqslant \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)}$.

Sostituendo a $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}(\lambda,\ \Phi_1)$ nella (4), abbiamo:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_1)} - \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)} \geqslant \lambda(\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_1)}) + \Phi_2[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_2)}] - \Phi_2[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda,\,\Phi_1)}]\,. \tag{5}$$

7. – Enunciamo ora alcune proposizioni sugl'insiemi di funzioni e sugli insiemi di curve.

a) Fissati un numero L positivo e un intervallo $(a,\ b)$, comunque presi due numeri ε, σ positivi, si può in corrispondenza ad essi determinare un altro numero η positivo, tale che, comunque si prenda una funzione $F(x)$ definita sull'intervallo $(a',\ b')$, interno ad $(a,\ b)$ che rappresenti una curva rettificabile di lunghezza l_F inferiore ad L, ad essa si può fare corrispondere un numero ϱ_F positivo tale che, se $f(x)$ è una funzione definita su un intervallo $(c,\ d)$ interno ad $(a,\ b)$ i cui estremi differiscono per meno di ϱ_F dagli estremi dell'intervallo $(a',\ b')$, che rappresenti inoltre una curva rettificabile continua di lunghezza l_f, e siano verificate le disuguaglianze:

$$|\,l_F - l_f\,| \leqslant \eta\,, \qquad |\,f(x) - F(x)\,| \leqslant \varrho_F\,,$$

allora l'insieme dei punti in cui non è:

$$|\,f'(x) - F'(x)\,| \leqslant \sigma\,,$$

si può rinchiudere in un plurintervallo di ampiezza minore di ε.

La dimostrazione di questa proposizione è la stessa di quella data da L. TONELLI su analogo argomento e riportata in *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, pp. 92-95.

b) Fissati un campo limitato S, e un numero positivo L, comunque si prenda un numero positivo ε, si può in corrispondenza ad esso determinare un numero τ positivo, tale che, comunque si consideri una curva ordinaria del campo S e di lunghezza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ inferiore ad L, si può trovare in corrispondenza ad essa un numero positivo $\varrho_{\mathcal{C}}$, tale che se $\overline{\mathcal{C}}$ indica una qualunque curva ordinaria del campo S appartenente all'intorno $\varrho_{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ che abbia lunghezza $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{C}}}$ soddisfacente alla:

$$|\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{C}}} - \mathcal{L}_{\mathcal{C}}| \leqslant \tau,$$

allora è anche:

$$|\mathcal{F}_{\overline{\mathcal{C}}} - \mathcal{F}_{\mathcal{C}}| < \varepsilon.$$

La dimostrazione di questo teorema corre all'incirca come quella data da L. TONELLI e riportata in *Fondamenti*, ecc., Vol. I, pp. 227-229, e la tralasciamo per ragioni di brevità.

c) Siano dati un campo limitato S e un numero positivo L. Supposto l'integrale $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ quasi-regolare positivo normale, scelto ad arbitrio un numero positivo δ, è possibile determinare un numero positivo ε, tale che comunque si scelga una curva ordinaria $\mathcal{C}_0$ appartenente al campo S e di lunghezza $l_{\mathcal{C}_0}$ inferiore o uguale a L, si può associare ad essa un numero positivo $\varrho_{\mathcal{C}_0}$ in modo che, per ogni curva $\mathcal{C}$ del campo S, appartenente propriamente all' intorno $\varrho_{\mathcal{C}_0}$ della $\mathcal{C}_0$ e soddisfacente alla disuguaglianza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} - \mathcal{L}_{\mathcal{C}_0} \geqslant \delta$, si abbia:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} \geqslant \varepsilon.$$

La dimostrazione di questo teorema è la stessa di quella data da L. TONELLI e riportata in *Fondamenti*, ecc., Vol. I, pp. 303-320, e pp. 327-330.

d) Mediante l'ausilio delle proposizioni *a*), *b*), *c*) e ripetendo lo stesso ragionamento classico sulla convergenza degli integrali di linea, si ottiene il seguente teorema:

Dato un campo limitato S, e un numero L positivo, se l'integrale $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ è quasi-regolare normale, e ammesse le solite ipotesi di regolarità sulla funzione $F(x, y, x', y')$, comunque fissato un numero positivo ε, ad esso si può fare corrispondere un numero positivo η tale che, ad una qualunque curva ordinaria $\mathcal{C}_0$ del campo S, di lunghezza minore o uguale ad L, si può far corrispondere un numero positivo $\varrho_{\mathcal{C}_0}$ tale che, per ogni curva ordinaria $\mathcal{C}$ del campo S, appartenente propriamente all'intorno $\varrho_{\mathcal{C}_0}$ di $\mathcal{C}_0$, per la quale è soddisfatta la disuguaglianza: $|\mathcal{G}_{\mathcal{C}} - \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}| \leqslant \eta$, è vera la disuguaglianza:

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{C}} - \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}| \leqslant \varepsilon.$$

8. – Veniamo ora a studiare il problema del minimo di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ nella classe di curve della classe K per cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} = L$.

Consideriamo una successione minimizzante $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ nella sotto-classe $K(\mathcal{G}_{\mathcal{C}} = L)$

e la indichiamo con $\{\mathcal{C}_n\}$. Se essa è formata con un numero finito di curve il minimo esiste. Se avviene che:

$$\lim_{n\to\infty}\{\mathcal{G}_{\mathcal{C}_n}\}=L=\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0},$$

è anche per quanto detto,

$$\lim_{n\to\infty}\{\mathcal{F}_{\mathcal{C}_n}\}=\mathcal{F}_{\mathcal{C}_0},$$

e quindi esiste il minimo.

Supponiamo invece ora che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}<L$. Scegliamo un A tale che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}<A<L$. Esistono allora curve $\overline{\mathcal{C}}$ di K tali che $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}}=A$, bastando a tale scopo collegare, onde formare una curva ordinaria, una opportuna parte di $\mathcal{C}_0$ con una opportuna parte di $\mathcal{C}_n$, con n sufficientemente grande.

Prendiamo un B maggiore di L. Fissando la nostra attenzione per esempio sulla curva $\overline{\mathcal{C}}$, in virtù d'una immediata conseguenza del teorema c), esistono curve $\mathcal{C}'$ per cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'}$ sia un numero qualunque compreso tra A e B. Inoltre esiste un numero M per cui sia sempre $\mathcal{L}_{\mathcal{C}'}\leqslant M$.

Sia J l'estremo superiore di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ sulla classe di curve $\mathcal{C}$ per cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ sia compresa tra A e B e le $\mathcal{C}$ siano inoltre di lunghezza $\leqslant M$. Vista la limitatezza della lunghezza delle curve e del campo S, J è un numero finito.

Sia a un numero compreso tra A e B. Sia f_a l'estremo inferiore dei valori di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ calcolati sulle curve $\mathcal{C}$ di K per cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}=a$. Poichè fra le curve per cui $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}=a$ esiste una curva del tipo $\mathcal{C}'$ ed è $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'}\leqslant J$ e siccome $f_a=\mathcal{F}_{\mathcal{C}'}$ sarà:

$$f_a\leqslant J.$$

In corrispondenza al numero J e al numero B esiste un numero M' per cui se:

$$|\mathcal{G}_{\mathcal{C}}|<B \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{C}}<J,$$

è:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\leqslant M'.$$

Nello studio del problema del minimo di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ nella classe delle curve di K per cui è $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}=a$, con $A\leqslant a\leqslant B$, possiamo quindi limitarci a considerare le curve di K le cui lunghezze sono inferiori a N, dove N è il maggiore dei numeri $M+1$ e $M'+1$. Per ogni curva $\mathcal{C}$ di K per cui è:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}\leqslant J,\quad A\leqslant\mathcal{G}_{\mathcal{C}}\leqslant B,\quad \text{è}\quad \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\leqslant N-1,$$

Per la classe di curve di K per cui $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\leqslant N$, esiste un ε positivo tale che se per la curva $\mathcal{C}_1$ sono verificate le prime due disuguaglianze $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_1}\leqslant J$, $A\leqslant\mathcal{G}_{\mathcal{C}_1}\leqslant B$, in un qualunque intorno di $\mathcal{C}_1$ esistono curve $\mathcal{C}$ tali che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} > \mathcal{G}_{\mathcal{C}_1} + \varepsilon$, e questo in virtù del teorema *c*) del numero 7.

9. – Per quanto abbiamo visto nel numero precedente possiamo sempre supporre che A sia maggiore del minimo di $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ nella classe K, nel caso contrario si dovrebbe presentare la prima eventualità colà prospettata.

Dimostriamo ora che comunque fissato un numero b maggiore del minimo di $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ nella classe K, e minore di A, esiste un valore di λ tale che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda)}$ sia minore di b, quando il problema di minimo di $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ sia relativo alle curve della classe K per cui le lunghezze siano $\leqslant N'$. N' essendo il maggiore dei numeri N e $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{C}}}$, dove $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{C}}}$ è la lunghezza di una curva $\overline{\mathcal{C}}$ di K, per cui:

$$\text{minimo di } \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \leqslant \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}} \leqslant b.$$

Senza alterare nulla nei risultati relativi al funzionale $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ se $\lambda > 0$, lo possiamo sostituire con il funzionale $\frac{1}{\lambda}\mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \mathcal{G}_{\mathcal{C}}$. Siccome le curve che consideriamo sono di lunghezza inferiore a N', esisterà un T tale che $|\mathcal{F}_{\mathcal{C}}| \leqslant T$. Si può quindi trovare un $\overline{\lambda} > 0$ in corrispondenza d'un ε positivo prefissato, tale che $|\mathcal{F}_{\mathcal{C}} : \overline{\lambda}| \leqslant \varepsilon$.

Indicata con $\mathcal{C}(\overline{\lambda})$ la minimante relativa al funzionale sopradetto, per ogni curva di K di lunghezza inferiore a N', deve essere:

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \geqslant \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}_{\mathcal{C}(\overline{\lambda})} + \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\overline{\lambda})},$$

e quindi:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}} \geqslant \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\overline{\lambda})} - 2\varepsilon,$$

e, poichè fra queste curve vi è la curva $\overline{\mathcal{C}}$, dovrà essere:

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{C}}} \geqslant \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\overline{\lambda})} - 2\varepsilon.$$

Essendo ε un numero arbitrario, esisterà un $\overline{\lambda}$ per cui:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\overline{\lambda})} \leqslant b.$$

Se $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ indica una curva di K per cui $\mathcal{G}_{\overline{\overline{\mathcal{C}}}}$ è maggiore di B, si può operando come abbiamo fatto precedentemente, e aumentando se occorre N', trovare un $\overline{\overline{\lambda}}$ tale che la curva $\mathcal{C}(\overline{\overline{\lambda}})$, che minimizza l'integrale $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(\overline{\overline{\lambda}})$, sia tale che:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\overline{\overline{\lambda}})} \geqslant B.$$

Ovviamente $\overline{\overline{\lambda}}$ si può sempre pensare negativo.

10. – Consideriamo l'intervallo $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$, che contiene l'intervallo (A, B), sia a un numero di quello intervallo, non coincidente con il primo estremo, scelto un numero ε positivo e sufficientemente piccolo, consideriamo l'intorno $(a-\varepsilon, a)$ e indichiamo con $\mathcal{F}_{a,\varepsilon}$ l'estremo inferiore di $\mathcal{F}_a$ calcolato sulle curve di K tali che il valore $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ corrispondente ad esse sia interno a questo intorno. Dalla relazione (4) del numero 6 è $\mathcal{F}_{a,\varepsilon} \neq -\infty$. Sia poi $\mathcal{F}_a$ il limite di $\mathcal{F}_{a,\varepsilon}$ quando ε tende a zero.

Dimostriamo che $\mathcal{F}_a$ è funzione continua di a.

Infatti comunque fissato un σ positivo si può trovare un ε positivo tale che $|\mathcal{F}_{a,\varepsilon} - \mathcal{F}_a| < \sigma$. Se prendiamo $\varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ e $|a'-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ è:

$$\mathcal{F}_{a',\varepsilon'} \geqslant \mathcal{F}_{a,\varepsilon},$$

e siccome $\mathcal{F}_{a,\varepsilon}$ è crescente quando ε decresce, è:

$$\mathcal{F}_{a'} \geqslant \mathcal{F}_a - \sigma.$$

Per quanto detto al numero 7, comunque fissato un numero σ positivo, si può ad esso far corrispondere un numero $\eta > 0$ tale che, comunque si scelgano curve ordinarie $\mathcal{C}_0$ di K, per tutte le curve $\mathcal{C}'$ di K, entrambe $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}$ di lunghezza inferiore a N', soddisfacenti alla disuguaglianza $\mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} < \mathcal{G}_{\mathcal{C}} < \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} + \eta$ ed appartenenti ad un intorno sufficientemente piccolo di $\mathcal{C}_0$, sarà:

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{C}} - \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}| \leqslant \sigma.$$

Per quanto già a suo tempo osservato, tali curve esistono effettivamente. Fissato che sia stato σ, si può trovare una curva $\mathcal{C}^*$ tale che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}^*}$ sia comunque vicino a sinistra al valore a ed inoltre tale che:

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{C}^*} - \mathcal{F}_a| < \sigma.$$

Facendo coincidere $\mathcal{C}^*$ con la $\mathcal{C}_0$ dell'alinea precedente, si raggiunge la conclusione che esistono, in tutto un intorno di a delle curve $\mathcal{C}$ per cui:

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{C}} - \mathcal{F}_{\mathcal{C}^*}| < \sigma,$$

e quindi:

$$|\mathcal{F}_{\mathcal{C}} - \mathcal{F}_a| < 2\sigma.$$

È così provato che esiste tutto un intorno di a, tale che se a' è in questo intorno, è $\mathcal{F}_{a'} \leqslant \mathcal{F}_{a+2\sigma}$, la continuità asserita è così completamente dimostrata.

Osserviamo adesso che se per una certa funzione Φ la minimante $\mathcal{C}(\lambda, \Phi)$

relativa al funzionale $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\lambda, \Phi)$ da un valore interno all'intervallo $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$, allora è:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}.$$

Infatti sempre in virtú dei teoremi del numero 7, esistono curve di K che, mentre danno all'integrale $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ valori comunque fissati in un opportuno intorno di $\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}$, danno all'integrale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ valori che differiscono da $\mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}$ per meno di un numero prefissato, e quindi deve essere:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)} \geqslant \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}}.$$

Siccome è d'altra parte:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \lambda \mathcal{G}_{\mathcal{C}} + \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}] \geqslant \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)} + \lambda \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)} + \Phi[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}],$$

se $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ è sufficientemente vicino a $\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)}$ è:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \geqslant \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)} - \varepsilon,$$

ne risulta così l'asserto.

Dopo quanto detto la continuità di $\mathcal{F}_{\alpha}$ nel secondo estremo dell'intervallo è assicurata. Nel primo estremo, comunque fissato un ε positivo si può determinare un σ positivo, tale che se $|\alpha - \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}| < \sigma$ è $\mathcal{F}_{\alpha} \leqslant \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})} + \varepsilon$. Siccome ovviamente, ricordando che $\mathcal{C}(\lambda, \Phi)$ è la minimante del problema di minimo relativo al funzionale $\mathcal{R}$, è:

$$\mathcal{F}_{\alpha'} \geqslant \mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda, \Phi)} - \varepsilon.$$

Se definiamo allora la funzione $\mathcal{F}_{\alpha}$ uguale a $\mathcal{F}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}$ nel primo estremo dell'intervallo, essa risulterà così definita e continua su tutto $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$.

11. – Prima di andare oltre, premettiamo due semplici osservazioni.

Se $f(x)$ è una funzione definita in (a, b) ed ivi limitata inferiormente: $f(x) \geqslant -M$, e finita nel punto b: $|f(b)| < M$. Comunque preso un ε positivo, si può determinare un λ tale che la funzione: $f(x) - \lambda x$, non possa avere minimo nell'intervallo $(a, b - \varepsilon)$.

Infatti, prendiamo $\lambda = \frac{2M}{\varepsilon}$. Allora se:

$$a \leqslant x \leqslant b - \varepsilon, \quad \text{è} \quad f(x) - \lambda x > -M - \frac{2M}{\varepsilon} x > -M - \frac{2M}{\varepsilon}(b - \varepsilon),$$

e se, invece:

$$x = b \quad \text{è} \quad f(b) - \lambda b < M - \frac{2M}{\varepsilon} b = -\frac{2M}{\varepsilon}(b - \varepsilon) - M,$$

e quindi il minimo se c'è deve avvenire dentro all'intervallo $(b - \varepsilon, b)$.

Analogamente a quanto fatto qui sopra, si può dimostrare che: se $f(x)$ è definita in (b, c) ed è inoltre $|f(b)| < M$ e $f(x) > -M$, comunque preso un ε positivo si può determinare un λ tale che la funzione $f(x)+\lambda x$, non può avere minimo nell'intervallo $(b+\varepsilon, c)$.

Prendiamo $\lambda = \frac{2M}{\varepsilon}$

$$\text{per} \quad b+\varepsilon \leqslant x \leqslant c, \quad \text{è} \quad f(x)+\lambda x > -M+\lambda x > -M+\frac{2M}{\varepsilon}(b+\varepsilon),$$

mentre che per $x=b$ è:

$$f(b)+\lambda b \leqslant M+\frac{2M}{\varepsilon}(b+\varepsilon)-2M$$

quindi:

$$f(b)+\lambda b < f(x)+\lambda x, \quad \text{se} \quad b+\varepsilon \leqslant x \leqslant c.$$

Comunque fissiamo un a interno all'intervallo $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$ e comunque si prenda un ε in modo che $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sia tutto contenuto in $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$ si può trovare un valore λ_1 e una funzione Φ_3 non decrescente continua e derivabile tale che il funzionale $\mathcal{R}_{\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi_3)}$ abbia minimante $\mathcal{C}_{(\lambda_1, \Phi_3)}$ che dà all'integrale $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ un valore interno all'intorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Siccome sappiamo che $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, per tutte le curve $\mathcal{C}$ che danno all'integrale un valore compreso nell'intervallo $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$, risulta $\geqslant -M$, basta a tale fine prendere $\lambda_1 = -\frac{2M+1}{\varepsilon}\bar{\bar{\lambda}}$, e Φ_3 più crescente di $\frac{4M+1}{\varepsilon}x + K_3$ per $x \geqslant a$ e costante per $x < a-\varepsilon$ ma sempre interno all'intervallo $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$, mentre che per $x \leqslant \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}$ porre $\Phi_3 = K_1 x + K_4$ e per $x \geqslant \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}$, $\Phi_3 = K_2 x + K_5$, con $K_1 = \bar{\lambda} - \lambda_1$, $k_2 = \bar{\bar{\lambda}} - \lambda_1$, e k_3, k_4, k_5 tre costanti scelte in modo che Φ_3 risulti continua. Si raccordi ulteriormente gli eventuali punti angolosi.

La funzione $\mathcal{F}_x + \lambda_1 x + \Phi_3(x)$ non può avere minimo fuori dell'intervallo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Per ciò il funzionale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \lambda_1 \mathcal{G}_{\mathcal{C}} + \Phi_3[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$ deve avere minimante $\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi_3)$ tale che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi_3)}$ debba essere interno all'intorno ε di a, perchè in caso contrario $\mathcal{F}_x$ avrebbe minimo fuori di questo intorno.

Va osservato che, se $\lambda' > \lambda''$, l'insieme $[L(\lambda'')]$ contiene l'insieme $[L(\lambda')]$, giacchè la parte $(\lambda' - \lambda'')x$ può sempre essere assorbita dalla funzione $\Phi(x)$.

Dalla costruzione precedente ne deduciamo che l'insieme $[L(\lambda_1)]$ è ovunque denso sull'intervallo $[\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\lambda})}, \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\bar{\bar{\lambda}})}]$.

Noi sappiamo dalla relazione 5 del n. 6 che l'espressione $\mathcal{F}_{\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi)} + \lambda_1 \mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi)}$ è decrescente rispetto a $\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi)}$, perciò la funzione $\mathcal{F}_x + \lambda_1 x$ essendo continua e coincidendo su un insieme ovunque denso sul suo intervallo di definizione con una funzione decrescente, deve assere allora anche essa decrescente.

Si può così trovare una funzione Φ_1 tale che $\mathcal{F}_x + \lambda_1 x + \Phi_1(x)$ abbia minimo proprio nel punto a, cosìchè il funzionale $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} + \lambda_1 \mathcal{G}_{\mathcal{C}} + \Phi_1[\mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$ ha per minimante una curva $\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi_1)$ tale che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}(\lambda_1, \Phi_1)} = a$.