

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

GAETANO FICHERA

**Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno  
misti, relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del  
secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 1,  
n° 1-4 (1949), p. 75-100*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1949\\_3\\_1\\_1-4\\_75\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1949_3_1_1-4_75_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ANALISI ESISTENZIALE PER LE SOLUZIONI  
DEI PROBLEMI AL CONTORNO MISTI, RELATIVI  
ALL'EQUAZIONE E AI SISTEMI DI EQUAZIONI  
DEL SECONDO ORDINE DI TIPO ELLITTICO,  
A U T O A G G I U N T I <sup>(1)</sup>**

di GAETANO FICHERA (Roma).

Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine, alle derivate parziali, in  $m$  variabili:

$$(1) \quad E[u] \equiv \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^m b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c u = f,$$

essendo  $a_{hk}, b_h, c, f$  funzioni del punto  $P$  di coordinate  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  de, finite in un campo  $C$  dello spazio euclideo ad  $m$  dimensioni. Supporrò che la (1) sia autoaggiunta, il che equivale ad affermare il verificarsi in  $C$  delle seguenti identità

$$b_h = \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k},$$

e supporrò altresì che essa sia di tipo ellittico, la qual cosa mi permetterà, fra l'altro, di assumere identicamente uguale a 1 in  $C$  il determinante  $\Delta$  della matrice

$$\| a_{hk} \| \quad (h, k = 1, 2, \dots, m)$$

e ciò senza ledere la generalità della questione.

Assegnato un dominio regolare  $\mathcal{D}$ , limitato e contenuto in  $C$ , considererò il problema consistente nel ricercare una soluzione della (1), per la quale, su una parte  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  della frontiera  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  di  $\mathcal{D}$ , siano stati prescritti i valori suoi e sulla restante parte  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  quelli della sua derivata conormale.

In opportune ipotesi per i coefficienti della (1) e per il dominio  $\mathcal{D}$ , ipotesi che verrò a ben precisare, e sotto le quali si dimostrano i noti teoremi di esistenza per gli ordinari problemi al contorno di DIRICHLET e di NEUMANN, dimostrerò un teorema di esistenza per quello suddetto di tipo misto

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

che prima d'ora, a quanto mi consta, è stato considerato solo nel caso dell'equazione  $\Delta_2 u = 0$  <sup>(2)</sup>.

Il procedimento che seguirò trae partito dalla nuova impostazione data dal PICONE alla teoria dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari e che conduce alla traduzione di detti problemi in equazioni integrali di prima specie <sup>(3)</sup>. A tal scopo mi varrò di un teorema analogo a quello, da recente dato dall'AMERIO, di inversione della formola di GREEN <sup>(4)</sup>.

Tratteggio sommariamente il detto procedimento, premettendo che *d'ora in avanti supporrò la (1) ellittico-positiva e il coefficiente  $c$  mai positivo in  $C$ .*

Siano  $\alpha(P)$  i valori prescritti alla  $u$  su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  e  $\beta(P)$  quelli prescritti alla derivata conormale  $\frac{du}{d\nu}$  <sup>(5)</sup> su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . Indico con  $v(P)$  una funzione biregolare <sup>(6)</sup> in  $\mathcal{D}$  e per la quale si abbia su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ :  $v(P) = \alpha(P)$  e in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$ :

<sup>(2)</sup> Cfr. S. ZAREMBA, *Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1910. V. VOLTERRA, *Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa*, Annali di Mat. t. XI, 1882-83, p. 1-55. A. SIGNORINI, *Sopra un problema al contorno della teoria delle funzioni di variabile complessa*, ibidem t. XXV, 1916. A. GHIZZETTI *Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, trattato col metodo delle trasformate parziali*, Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, 1946. Veramente anche nel caso dell'equazione generale (1) il GIRAUD ha dato un teorema di esistenza per il problema misto in questione, ma egli si limita solo al caso — concettualmente assai più semplice — che, riuscendo  $\mathcal{D}$  a connessione ipersuperficiale multipla,  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  ed  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  abbiano distanza positiva, essendo composta ciascuna da ipersuperficie chiuse. Cfr di quest'Autore: *Sur certains problèmes non linéaires de Neumann*, chap. XII: *problème linéaire mixte*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, tome 49, 1932, pag. 269-271.

<sup>(3)</sup> Cfr. M. PICONE, *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*, Rend. Accademia Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. II, 1947.

<sup>(4)</sup> Cfr. L. AMERIO, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*, American Journal of Mathematics, vol. LXIX N. 3, July 1947.

<sup>(5)</sup> Detta  $n$  la normale interna a  $\mathcal{F} \mathcal{D}$ , porremo

$$\frac{du}{d\nu} = \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \cos(x_h, n) \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Indicata con  $\nu$  la direzione avente come coordinate le quantità  $\sum_{h=1}^m a_{hk} \cos(x_h, n)$ , si osserva che  $\frac{du}{d\nu}$  è proporzionale alla derivata della  $u$  secondo tale direzione, epperò è improprio l'appellativo di derivata conormale, ma esso appartiene ormai all'uso comune e ad esso ci uniformiamo.

<sup>(6)</sup> Seguendo PICONE dirò che  $v(P)$  è biregolare in  $\mathcal{D}$  se è ivi continua assieme alle derivate prime, frontiera inclusa.

$E[v] = f$ . Tale funzione è certo esistente se, supposti i coefficienti della (1),  $f$  ed  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  convenientemente regolari, la  $\alpha(P)$  è la traccia su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  di una funzione continua, assieme alle sue derivate fino ad un dato ordine, in tutto  $\mathcal{D}$  (7). Assunta come nuova incognita la funzione  $u - v$ , che seguirò ad indicare con  $u$ , il problema che si tratta di risolvere è il seguente:

$$(2) \quad E[u] = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D};$$

$$(3) \quad u = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_1\mathcal{D}, \quad \frac{d u}{d \nu} = \delta(Q) = \beta(Q) - \frac{d v}{d \nu} \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_2\mathcal{D}.$$

Sia  $\mathcal{D}'$  un dominio regolare contenuto in  $C$  e contenente  $\mathcal{D}$  e tale che  $\mathcal{F}\mathcal{D} \cdot \mathcal{F}\mathcal{D}' = \mathcal{F}_1\mathcal{D}$ . Indicata con  $G(Q, P)$  la funzione di GREEN per il problema di DIRICHLET relativo all'equazione  $E[u] = f$  nel dominio  $\mathcal{D}'$ , dimostrerò che se  $\mu(Q)$  e  $\delta(Q)$  sono due funzioni definite su  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  e verificanti per ogni  $P'$  in  $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$  l'equazione

$$(4) \quad \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}} [\mu(Q) \frac{d G(Q, P')}{d \nu_Q} - \delta(Q) G(Q, P')] d_Q \sigma,$$

la funzione definita dall'eguaglianza

$$(5) \quad u(P) = \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}} [\mu(Q) \frac{d G(Q, P)}{d \nu_Q} - \delta(Q) G(Q, P)] d_Q \sigma$$

verifica in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  la (2) e su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  le (3) in un senso che verrà ben precisato in seguito.

Assegnata, quindi, su  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  la funzione  $\delta(Q)$ , la dimostrazione dell'esistenza di una funzione appartenente alla classe  $\mathcal{E}_\mu$  delle soluzioni della (2), per cui valgono le formole (4) e (5), e verificante le (3) è ricondotta a quella della soluzione dell'equazione integrale di prima specie (4) nell'incognita  $\mu(Q)$ . Tale questione viene risolta col teorema XI del presente scritto.

Nell'ultima parte del lavoro farò vedere come il procedimento si estenda ai sistemi lineari di equazioni del secondo ordine, di tipo ellittico, auto-

---

(7) Cfr. G. GIRAUD, *Sur le problème de Dirichlet généralisé; équations non linéaires à  $m$  variables*, Ann. Ec. N. Sup. t. 49, 1926, p. 1-128. M. GEVREY, *Détermination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatif aux équations linéaires du type elliptique*, Journal de Mathém. t. 9, 1930, p. 1-80.

aggiunti e quindi come possa, in particolare, conseguirsi il teorema di esistenza per il problema al contorno misto relativo al classico sistema delle equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico.

### 1. — Richiamo di taluni noti risultati e teorema d'inversione.

Suppongo che in  $C$  le funzioni  $a_{hk}$  siano di classe 3 e che  $c$  sia di classe 1<sup>(8)</sup>. In queste ipotesi rimane assicurata l'esistenza di una funzione  $F(Q, P)$ , simmetrica rispetto a  $Q$  e  $P$ , *soluzione fondamentale* dell'equazione  $E[u] = 0$  in  $A$ <sup>(9)</sup>. Ammetto, inoltre, che la frontiera  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  di  $\mathcal{D}$  e quella  $\mathcal{F}\mathcal{D}'$  di  $\mathcal{D}'$  siano costituite da un numero finito di ipersuperficie regolari, chiuse di classe 2. Posto  $\overline{\mathcal{F}_1\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{F}\mathcal{D} \cdot \mathcal{F}\mathcal{D}'}$ , suppongo che  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  si componga di un numero finito di ipersuperficie aperte<sup>(10)</sup> e che, quindi, sia tale l'insieme non vuoto

$$\mathcal{F}_2\mathcal{D} = (\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{F}_1\mathcal{D}) + D(\mathcal{F}\mathcal{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathcal{D}}) \quad (11)$$

Porrò

$$\mathcal{F}_1\mathcal{D} = \mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{F}_2\mathcal{D}.$$

Si osservi che  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  è un insieme chiuso ed  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$  un insieme aperto. Farò uso dei due seguenti noti teoremi.

I. — *Assegnata su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  la funzione continua  $\delta^*(Q)$ , verificante la condizione*

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \delta^*(Q) d\sigma = 0$$

*se  $c \equiv 0$  in  $\mathcal{D}$ , esiste una funzione  $u^*(P)$  continua in  $\mathcal{D}$  e avente derivate prime e seconde continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ , verificante ivi l'equazione  $E[u] = 0$  e su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  la condizione*

$$\lim_{P \rightarrow Q \text{ (su } \nu_Q)} \frac{d u^*(P)}{d \nu_Q} = \delta^*(Q) \quad (12)$$

<sup>(8)</sup> Dicendo che  $f(P)$  è di classe  $h$  in  $C$  intendo che essa è continua in  $C$  assieme alle sue prime  $h$  derivate parziali.

<sup>(9)</sup> Cfr. E. E. LEVI, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, vol. 24, 1907, pag. 275-317.

<sup>(10)</sup> Le definizioni di ipersuperficie chiusa o aperta le intendo conformi a quelle date per le varietà regolari, ad un numero qualsiasi di dimensioni di uno spazio euclideo, nella mia Memoria: *Sull'integrazione in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado*, Revista Matematicas y Física teorica, Universidad Nacional de Tucuman, v. 6, 1947, pp. 51-70.

<sup>(11)</sup> Se  $\mathcal{D}$  è un insieme con  $\mathcal{D}\mathcal{D}$  indico l'insieme derivato

<sup>(12)</sup> Cfr. ad es. G. GIRAUD loc. cit. (2) cap. XI: *problème lineaire de Neumann*, pp. 257-269.

II. — *Esiste la funzione di GREEN  $G(Q, P)$  per il problema di DIRICHLET relativo all'equazione  $E[u] = f$  nel dominio  $\mathcal{D}'$  <sup>(13)</sup> e questa è funzione biregolare di  $(P, Q)$  se questi variano in due domini senza punti in comune <sup>(14)</sup>.*

Per quanto riguarda la funzione  $u^*(P)$  di cui al teorema I, si può dimostrare che

III. — *La funzione  $u^*(P)$  del teor. I possiede le derivate prime di quadrato sommabile in  $\mathcal{D}$ .*

Detta funzione  $u^*(P)$ , come segue dalla dimostrazione del teorema di esistenza I data dal GIRAUD, può mettersi sotto la forma seguente

$$u^*(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \varphi(Q) L(Q, P) d_Q \sigma + F(P) \text{ <sup>(15)</sup>},$$

essendo  $F(P)$  una funzione continua in  $\mathcal{D}$  assieme alle derivate prime,  $\varphi(Q)$  continua su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  ed  $L(Q, P)$  continua assieme alle derivate prime e seconde, se  $Q \equiv P$ , e verificante le limitazioni

$$|L(Q, P)| < \frac{K}{P Q^{m-2}}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_k} L(Q, P) \right| < \frac{K}{P Q^{m-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

con  $K$  costante e dove il secondo membro della prima limitazione va sostituito da  $K \log K/PQ$  per  $m = 2$ .

Ne viene allora, detta  $H$  una conveniente costante

$$\left| \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right| \leq H \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} |\varphi(Q)| \frac{1}{P Q^{m-1}} d_Q \sigma$$

Si consideri la funzione dei punti  $P, Q, M$

$$\varphi(Q) \varphi(M) \frac{1}{P Q^{m-1}} \frac{1}{P M^{m-1}}$$

<sup>(13)</sup> La soluzione del problema di DIRICHLET nel dominio  $\mathcal{D}'$  potrà allora mettersi sotto la forma seguente

$$u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}'} u(Q) \frac{d}{d\nu_Q} G(Q, P) d_Q \sigma - \int_{\mathcal{D}'} f(Q) G(Q, P) d_Q T.$$

<sup>(14)</sup> Cfr. Loc. cit. (7).

<sup>(15)</sup> Cfr. Loc. cit. (12).

per  $P$  variabile in  $\mathcal{D}$  e  $Q$  ed  $M$  su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$ . Fissati comunque  $Q$  ed  $M$  si ha

$$|\varphi(Q)| |\varphi(M)| \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{P Q^{m-1}} \frac{1}{PM^{m-1}} d_P T \leq \begin{cases} |\varphi(Q)| |\varphi(M)| \frac{B}{\overline{QM}^{m-2}}, & \text{se } m > 2, \\ |\varphi(Q)| |\varphi(M)| B \log B/\overline{QM}, & \text{se } m = 2, \end{cases}$$

con  $B$  costante dipendente da  $\mathcal{D}$ . Poichè la funzione al secondo membro è sommabile su  $[\mathcal{F}\mathcal{D}]^2$ , prodotto topologico di  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  per se stesso, ne segue che è finito l'integrale

$$\int_{[\mathcal{F}\mathcal{D}]^2} |\varphi(Q)| |\varphi(M)| \frac{1}{P Q^{m-1}} \frac{1}{PM^{m-1}} d_Q \sigma d_M \sigma$$

e quindi l'integrale

$$\int_{\mathcal{D}} \left\{ \int_{\mathcal{F}\mathcal{G}} \varphi(Q) \frac{1}{P Q^{m-1}} d_Q \sigma \right\}^2 d_P T$$

donde la tesi.

Fondamentale interesse per la nostra trattazione riveste il seguente teorema d'inversione:

IV. — *Siano  $\mu(Q)$  e  $\delta(Q)$  due funzioni definite su  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$  e ivi sommabili, le quali, per ogni  $P'$  contenuto in  $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ , verifichino l'equazione*

$$(4) \quad \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{G}} \left\{ \mu(Q) \frac{dG(Q, P')}{d\nu_Q} - \delta(Q) G(Q, P') \right\} d_Q \sigma = 0.$$

*La funzione che in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  è definita dall'eguaglianza*

$$(5) \quad u(P) = \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{G}} \left\{ \mu(Q) \frac{dG(Q, P)}{d\nu_Q} - \delta(Q) G(Q, P) \right\} d_Q \sigma$$

*soddisfa ivi all'equazione  $E[u] = 0$ , mentre verifica le seguenti condizioni al contorno*

$$(6) \quad \lim_{P \rightarrow M} u(P) = 0, \quad \text{se } M \text{ è su } \mathcal{F}_1\mathcal{D},$$

$$(7) \quad \lim_{P \rightarrow M \text{ (su } \nu_M)} u(P) = \mu(M), \quad \lim_{P \rightarrow M \text{ (su } \nu_M)} \frac{du(P)}{d\nu_M} = \delta(M)$$

*per quasi tutti i punti  $M$  di  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ .*

Comunque si fissi  $M$  su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$  esso avrà distanza positiva da  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . È ovvio che risulta

$$\lim_{P \rightarrow M} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \delta(Q) G(Q, P) d_Q \sigma = 0$$

D'altra parte la funzione  $\frac{d G(Q, P)}{d v_Q}$ , quando  $P \rightarrow M$ , converge uniformemente al variare di  $Q$  su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  e pertanto, poichè  $G(Q, M)$  è funzione di  $Q$  identicamente nulla su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , per il teorema della derivabilità, si ha

$$\lim_{P \rightarrow M} \frac{d G(Q, P)}{d v_Q} = 0$$

uniformemente rispetto a  $Q$  su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ . Ne segue

$$\lim_{P \rightarrow M} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \mu(Q) \frac{d G(Q, P)}{d v_Q} d_Q \sigma = 0$$

e quindi la (6). Per dimostrare le (7) tenendo presente che si ha

$$G(Q, P) = K F(Q, P) + g(Q, P)$$

con  $K$  costante e con  $g(Q, P)$  continua con le sue derivate prime quando  $Q$  e  $P$  sono interni a  $\mathcal{D}'$ , non c'è che da ripetere i ragionamenti che l'AMERIO ha seguiti per dimostrare il teorema, uguale a quello in questione, ma con  $F(Q, P)$  al posto di  $G(Q, P)$ <sup>(16)</sup>.

Indicheremo con  $\mathcal{E}_u$  la classe delle funzioni continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ , nulle su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ , aventi derivate prime e seconde continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  e verificanti ivi l'equazione  $E[u] = 0$ , per le quali inoltre, esistendo i limiti (7), risultano verificate le (4) e (5).

La classe  $\mathcal{E}_u$  contiene quella delle soluzioni biregolari in  $\mathcal{D}$  dell'equazione  $E[u] = 0$ , che si annullano su  $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ .

Dal teorema IV segue ovviamente che

V. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una soluzione del problema (2), (3) appartenente alla classe  $\mathcal{E}_u$  è che ammetta soluzione l'equazione integrale di prima specie (4) nell'incognita  $\mu(Q)$ .*

Il teorema d'esistenza per l'equazione (4) verrà dato al N. 3.

<sup>(16)</sup> Cfr. loc. cit. (4). Il teorema IV in un caso particolare è già stato dimostrato da A. GHIZZETTI, *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo d'integrazione finito*, Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, 1947, pag. 34 e *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$  in  $n$  variabili*, Rend. Seminario Matem. Università di Padova, 1948, pag. 72.



2. — **Teoremi preliminari.**

VI. — *Se  $\mathcal{D}$  è una dominio limitato dello spazio ad  $m$  dimensioni e  $\{u_n\}$  una successione di funzioni, soluzioni in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  dell'equazione  $E(u) = 0$ , la quale converge in media su  $\mathcal{D}$ , essa allora converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  e lo stesso avviene delle successioni formate con le derivate prime. La funzione limite della successione  $\{u_n\}$  verifica in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  l'equazione  $E[u] = 0$ .*

Sia  $C_0$  un insieme chiuso contenuto in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  e sia  $\varrho_0$  una quantità reale positiva tale che, fissato comunque  $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$  in  $C_0$ , il dominio definito dall'inequazione

$$\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}(P) (\xi_h - x_h) (\xi_k - x_k) \leq \varrho_0^2$$

risulti contenuto in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ .

Posto

$$\varrho(P, Q) = \left[ \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}(P) (\xi_h - x_h) (\xi_k - x_k) \right]^{\frac{1}{2}}$$

e detto  $\mathcal{D}_r$  il dominio limitato avente per frontiera l'iperellissoide d'equazione  $\varrho^2(P, Q) = r^2$ , sussiste per  $0 < r \leq \varrho_0$  la seguente formula, caso particolare di una più generale dovuta al PICONE<sup>(17)</sup>, applicabile ad ogni funzione  $u$  soluzione in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  di  $E[u] = 0$ :

$$(S) \quad k_m u(P) = \int_{\mathcal{D}_r} u E \left[ \frac{1}{\varrho^{m-2}} \right] dT - \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_r} \left( \frac{d u}{d \nu} \frac{1}{\varrho^{m-2}} - u \frac{d}{d \nu} \frac{1}{\varrho^{m-2}} \right) d\sigma, \text{ per } m > 2,$$

$$2 \pi u(P) = \int_{\mathcal{D}_r} u E \left[ \log \frac{1}{\varrho} \right] dT - \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_r} \left( \frac{d u}{d \nu} \log \frac{1}{\varrho} - u \frac{d}{d \nu} \log \frac{1}{\varrho} \right) d\sigma, \text{ per } m = 2,$$

essendo  $k_m = (m - 2) \sigma_m$  e  $\sigma_m$  la misura ipersuperficiale della ipersfera di raggio 1. Nel corso di questa dimostrazione supporremo  $m > 2$ , ma è ovvio come vadano modificate le cose, che verremo a dire, per  $m = 2$ .

Si ha

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_r} \frac{d u}{d \nu} \frac{1}{\varrho^{m-2}} d\sigma = \frac{1}{r^{m-2}} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_r} \frac{d u}{d \nu} d\sigma = \frac{1}{r^{m-2}} \int_{\mathcal{D}_r} c u dT,$$

(17) Cfr M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1941, pag. 800.

laddove il PICONE dimostra il sussistere della seguente disuguaglianza <sup>(18)</sup>

$$\left| E \left[ \frac{1}{\varrho^{m-2}} \right] \right| \leq \frac{\Lambda(\varnothing)}{\varrho^{m-1}},$$

essendo  $\Lambda(\varnothing)$  una costante dipendente solo da  $\varnothing$ .

Abbiamo allora, supposto  $0 < \varrho_1 \leq r \leq \varrho_0$ , con  $\varrho_1 < \varrho_0$ ,

$$\left| \int_{\varnothing_r} u E \left[ \frac{1}{\varrho^{m-2}} \right] d T \right| \leq \frac{\Lambda(\varnothing)}{\varrho_1^{m-1}} \int_{\varnothing_{\varrho_0}} |u| d T \leq \frac{\Lambda(\varnothing)}{\varrho_1^{m-1}} \int_{\varnothing} |u| d T,$$

$$\left| \int_{\varnothing_r} \frac{d u}{d \nu} \frac{1}{\varrho^{m-2}} d \sigma \right| \leq \frac{M(\varnothing)}{\varrho_1^{m-2}} \int_{\varnothing} |u| d T,$$

$$\left| \int_{\varnothing_r} u \frac{d}{d \nu} \frac{1}{\varrho^{m-2}} d \sigma \right| \leq m^3 (m-2) \frac{\delta M(\varnothing)}{\varrho_1^m} \int_{\varnothing_r} |u| d \sigma,$$

avendo indicato con  $\delta$  il diametro di  $\varnothing$  e con  $M(\varnothing)$  un numero non superato in  $\varnothing$  da  $|a_{hk}|$  ( $h, k = 1, 2, \dots, m$ ) e  $|c|$ .

Diciamo  $l_1(P), l_2(P), \dots, l_m(P)$  i semiassi dell'iperellissoide d'equazione  $\varrho_2(P, Q) = 1$ , che ha quindi equazione canonica:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{l_k^2} X_k^2 = 1.$$

Introduciamo il sistema di coordinate curvilinee  $(\varrho_1 \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)$ , definite dalla trasformazione

$$X_1 = \varrho l_1 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{m-2} \operatorname{sen} \varphi,$$

$$X_2 = \varrho l_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{m-2} \cos \varphi,$$

$$X_3 = \varrho l_3 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \cos \theta_{m-2},$$

.....

$$X_{m-1} = \varrho l_{m-1} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$X_m = \varrho l_m \cos \theta_1.$$

$$0 \leq \theta_i \leq \pi \quad (i = 1, 2, \dots, m-2) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \varrho \geq 0.$$

<sup>(18)</sup> Cfr. loc. cit. (17) pag. 797.

Un punto  $Q$  viene determinato una volta assegnato un punto  $Q_0 \equiv (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)$ , sulla sfera unitaria  $\omega(P)$  di centro  $P$ , e la quantità non negativa  $\varrho$ . Detto  $l(\varphi)$  un numero non superato in  $\varphi$  da nessuna delle funzioni  $l_1(P), l_2(P), \dots, l_m(P)$  si ha

$$\int_{\mathcal{F}\varphi_r} |u| d\sigma \leq r^{m-1} [l(\varphi)]^{m-1} \int_{\omega(P)} |u|(\varrho_1 P) d\omega$$

e quindi, tenendo presente che il determinante  $\Delta$  della matrice  $\|a_{hk}\|$  vale 1, si ottiene

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_0} dr \int_{\mathcal{F}\varphi_r} |u| d\sigma \leq [l(\varphi)]^{m-1} \int_{\varphi_{\varrho_0 - \varrho_1}} |u| dT \leq [l(\varphi)]^{m-1} \int_{\varphi} |u| dT.$$

Dalla (8) integrando i due membri nell'intervallo  $(\varrho_1, \varrho_0)$  si deduce

$$k_m(\varrho_0 - \varrho_1) |u(P)| \leq \left[ \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_1^{m-2}} \left( M + \frac{\Delta}{\varrho_1} \right) + \frac{m^3(m-2)\delta M^2 l^{m-1}}{\varrho_1^m} \right] \int_{\varphi} |u| dT,$$

cioè

$$|u(P)| \leq L(C_0, \varphi) \int_{\varphi} |u| dT$$

con  $L(C_0, \varphi)$  costante che dipende unicamente da  $C_0$  e  $\varphi$ .

Abbiamo allora

$$|u_h(P) - u_k(P)|^2 \leq L^2 \left( \int_{\varphi} |u_h - u_k| dT \right)^2 \leq L^2 \delta^2 \int_{\varphi} [u_h - u_k]^2 dT$$

e quindi la convergenza uniforme in  $\varphi$  di  $\{u_h\}$  <sup>(19)</sup>.

<sup>(19)</sup> Allo stesso risultato può pervenirsi sfruttando noti teoremi di media per le soluzioni delle equazioni di tipo ellittico. Il prof. PICONE, per il caso  $m=2$ , mi ha indicato il seguente teorema di media, che trovasi in un suo vecchio corso

$$\pi u(\xi, \eta) [a_{11}(\xi, \eta) + a_{22}(\xi, \eta)] = \int_{\gamma} uv \frac{a_{11} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{F}{v} \right)^2 + 2 a_{12} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{F}{v} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{F}{v} \right) + a_{22} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{F}{v} \right)^2}{\left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{F}{v} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{F}{v} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} ds$$

essendo  $F(x, \gamma, \xi, \eta)$  la soluzione fondamentale di  $E[u]=0$  — che non occorre supporre autoaggiunta o di tipo ellittico —  $v(x, \gamma, \xi, \eta)$  una soluzione regolare dell'equazione aggiunta che vale 1 per  $x=\xi, \gamma=\eta$  e  $\gamma$  una linea di livello della funzione  $F(x, \gamma, \xi, \eta)$ , che contorna il punto  $(\xi, \eta)$ .

Per dimostrare la convergenza uniforme in  $C_0$  delle successioni delle derivate può ragionarsi al modo seguente. Sia  $\mathfrak{D}^*$  un dominio avente frontiera di classe 2, contenuto in  $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$  e contenente  $C_0$  nel suo interno. Diciamo  $G^*(Q, P)$  la funzione di GREEN per il problema di DIRICHLET, considerato nel dominio  $\mathfrak{D}^*$ .

Poichè si ha per  $P$  in  $C_0$

$$\frac{\partial u_h(P)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k(P)}{\partial x_i} = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}^*} [u_h(Q) - u_k(Q)] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{d\nu_Q} G^*(Q, P) d_Q \sigma,$$

ne segue l'uniforme convergenza in  $C_0$  della successione  $\left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right\}$ . Detta  $u$  la funzione limite di  $\{u_h\}$ , dalla relazione

$$u_h(P) = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}^*} u_h(Q) \frac{d}{d\nu_Q} G^*(Q, P) d_Q \sigma,$$

passando al limite per  $h \rightarrow \infty$ , si deduce

$$u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}^*} u(Q) \frac{d}{d\nu_Q} G^*(Q, P) d_Q \sigma,$$

epperò  $u(P)$  verifica in  $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$  la  $E[u] = 0$ .

VII. Se la funzione  $V(Q)$  è di quadrato sommabile nel dominio limitato  $\mathfrak{D}$  indicata con  $\alpha$  una quantità minore di  $m$ , è pure di quadrato sommabile la funzione

$$W(P) = \int_{\mathfrak{D}} V(Q) \frac{1}{P Q^\alpha} d_Q T^{(20)}$$

e si ha

$$\int_{\mathfrak{D}} [W(P)]^2 d_Q T \leq L \left[ \int_{\mathfrak{D}} [V(Q)]^2 d_Q T \right]^\beta,$$

essendo  $L$  una costante che dipende solo da  $\mathfrak{D}$  e  $\beta$  un numero positivo che dipende da  $\alpha$  e da  $m$ .

(20) Si constata facilmente applicando i teoremi di TONELLI e FUBINI sugli integrali multipli che per quasi tutti i punti  $P$  di  $\mathfrak{D}$

$$V(Q) \frac{1}{P Q^\alpha}$$

è funzione di  $Q$  sommabile su  $\mathfrak{D}$ .

Per dimostrare la sommabilità del quadrato di  $W(P)$  basta ripetere un ragionamento analogo a quello fatto per dimostrare il teor. III.

Si ha inoltre

$$\int_{\mathfrak{D}} \left[ \int_{\mathfrak{D}} V(Q) \frac{1}{PQ^\alpha} d_Q T \right]^2 d_P T = \iint_{\mathfrak{D}} V(Q) V(M) d_Q T d_M T \int_{\mathfrak{D}} \frac{1}{PQ^\alpha} \frac{1}{PM^\alpha} d_P T$$

e riesce, detta  $B$  una costante che dipende solo da  $\mathfrak{D}$ :

$$\int_{\mathfrak{D}} \frac{1}{PQ^\alpha} \frac{1}{PM^\alpha} d_P T \left\{ \begin{array}{ll} \leq B & \text{se } \alpha < \frac{m}{2}, \\ \leq B \log \frac{B}{MQ} & \text{se } \alpha = \frac{m}{2}, \\ \leq \frac{B}{MQ^{2\alpha-m}} & \text{se } \alpha > \frac{m}{2}. \end{array} \right.$$

Sicchè per  $\alpha < \frac{m}{2}$  avremo

$$\int_{\mathfrak{D}} [W(P)]^2 d T \leq B \int_{\mathfrak{D}} [V(P) d_P T]^2 \leq L \int_{\mathfrak{D}} [V(P)]^2 d_P T.$$

Per  $\alpha = \frac{m}{2}$  si ha invece

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} [W(P)]^2 d T &\leq B \int_{\mathfrak{D}} \left\{ V(Q) \int_{\mathfrak{D}} V(M) \log \frac{B}{MQ} d_M T \right\} d_Q T \leq \\ &\leq B \left[ \int_{\mathfrak{D}} [V(Q)]^2 d T \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \iint_{\mathfrak{D}} V(Q) V(M) d_Q T d_M T \log \frac{B}{PQ} \log \frac{B}{PM} d_P T \right] \leq \\ &\leq L \left[ \int_{\mathfrak{D}} [V(P)]^2 d T \right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Mentre infine per  $\alpha > \frac{m}{2}$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} [W(P)]^2 d T &\leq B \int_{\mathfrak{D}} \left\{ V(Q) \int_{\mathfrak{D}} V(M) \frac{1}{MQ^{2\alpha-m}} d_M T \right\} d_Q T \leq \\ &\leq B \left[ \int_{\mathfrak{D}} [V(Q)]^2 d T \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathfrak{D}} \left[ \int_{\mathfrak{D}} V(Q) \frac{1}{PQ^{2\alpha-m}} d_Q T \right]^2 d_P T \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

con che si vede che il teorema è ricondotto dal caso relativo ad  $\alpha$  a quello relativo a  $2\alpha - m < \alpha$ . Iterando il procedimento un numero conveniente di volte si perverrà ad un esponente  $\leq \frac{m}{2}$  e quindi alla dimostrazione della tesi.

VIII. — Se  $\{u_h\}$  è una successione di soluzioni biregolari in  $\mathcal{D}$  dell'equazione  $E[u] = 0$ , tale che la successione di vettori  $\{\text{grad } u_h\}$  converga in media in  $\mathcal{D}$ , allora la successione  $\{u_h\}$  converge essa pure in media in  $\mathcal{D}$ , se non è ivi  $c \equiv 0$ , mentre se è  $c \equiv 0$  può determinarsi una successione  $\gamma_h$  di costanti tali che  $\{u_h + \gamma_h\}$  converga in media in  $\mathcal{D}$ .

Indico con  $N(Q, P)$  la funzione di GREEN per il problema di NEUMANN relativo al dominio  $\mathcal{D}^{(21)}$ . Si ha allora se  $c \equiv 0$  in  $\mathcal{D}$ , detta  $u(P)$  una soluzione biregolare in  $\mathcal{D}$  di  $E[u] = 0$

$$u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \frac{d u(Q)}{d v_Q} N(Q, P) d_Q \sigma$$

e se è  $c \equiv 0$ , detta  $\gamma$  una costante

$$u(P) + \gamma = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \frac{d u(Q)}{d v_Q} N(Q, P) d_Q \sigma.$$

Poichè si ha, dette  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  le coordinate di  $Q$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_h} N(Q, P) \right| \leq \frac{K}{P Q^{m-1}} \quad (h = 1, 2, \dots, m),$$

posto  $V = |\text{grad } u|$ , applicando la formula di GREEN e con ovvie maggiorazioni si deduce

$$\left| \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \frac{d u(Q)}{d v_Q} N(Q, P) d_Q \sigma \right| \leq H \int_{\mathcal{D}} V(Q) \frac{1}{P Q^{m-1}} d_Q T.$$

<sup>(21)</sup> La funzione  $N(Q, P)$  può decomporre al modo seguente

$$N(Q, P) = N_0(Q, P) - \frac{1}{k_m} F(Q, P)$$

essendo di  $N_0(Q, P)$  una funzione di  $Q$ , la quale, per ogni fissato  $P$  in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  verifica la  $E[u] = 0$ , e la seguente condizione al contorno

$$\frac{d}{d v_Q} N_0(Q, P) \left\{ \begin{array}{ll} = \frac{1}{k_m} \frac{d}{d v_Q} F(Q, P) & \text{se } c \equiv 0, \\ = \frac{1}{k_m} \frac{d}{d v_Q} F(Q, P) - \frac{1}{\text{mis } \mathcal{F}\mathcal{D}} & \text{se } c \equiv 0. \end{array} \right.$$

con  $H$  costante positiva dipendente unicamente dai coefficienti dell'equazione  $E[u] = 0$ . Ne segue, per il lemma precedente, a seconda che è  $c \equiv 0$ ,  $c \equiv 0$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} [u(P)]^2 dT \\ & \int_{\mathcal{D}} [u(F) + \gamma]^2 dt \end{aligned} \right\} \leq L \left\{ \int_{\mathcal{D}} [V(Q)]^2 dt \right\}^\beta,$$

donde la dimostrazione del teorema.

IX. — Se  $u_h$  è una successione di soluzioni biregolari in  $\mathcal{D}$  dell'equazione  $E[u] = 0$  e se la successione  $\{\text{grad } u_h\}$  converge in media in  $\mathcal{D}$ , essa converge uniformemente nell'interno di  $\mathcal{D}$ .

È un ovvio corollario dei due teoremi precedenti. Altro fondamentale teorema per il conseguimento di quello d'esistenza che abbiamo in vista di dimostrare è il seguente:

X. — Sia  $S$  il cilindro dello spazio cartesiano  $(u_1, u_2, \dots, u_r, \varrho)$ , descritto al variare di  $M \equiv (u_1, u_2, \dots, u_r)$  nel dominio limitato  $A$  dello spazio  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  e di  $\varrho$  nell'intervallo chiuso  $(0, \varrho_0)$ . Detto  $A_2$  un dominio contenuto in  $A$  e avente misura minore di quella di  $A$ , sia  $A_1 = A - A_2$  e sia  $\{v^{(k)}(M, \varrho)\}$  una successione di funzioni definite in  $S$ , che siano ivi continue assieme alle derivate parziali prime, siano nulle in  $A_1$  e tali inoltre che la successione di vettori  $\{\text{grad } v^{(k)}\}$  converga in media in  $S$  ed uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in  $S$ .

È possibile determinare una successione crescente di indici  $k_1, k_2, \dots, k_h, \dots$  tale che la successione  $\{v^{(k_h)}(M, \varrho)\}$  converga uniformemente in ogni insieme chiuso interno ad  $S$  verso una funzione  $v(M, \varrho)$  che gode delle seguenti proprietà:

- 1<sup>o</sup>. è continua assieme alle derivate parziali prime in  $S - F S$ ;
- 2<sup>o</sup>. fissato quasi ovunque  $M$  in  $A$  esiste il limite

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} v(M, \varrho) = \mu(M)$$

- 3<sup>o</sup>. nei punti di  $A_1$ , dove è definita, riesce  $\mu(M) = 0$ ;

4<sup>o</sup>. la funzione  $v(M, \varrho)$  è funzione di  $M$  uniformemente sommabile in  $A$  al variare di  $\varrho$  in  $(0, \varrho_0)$ .

Per le ipotesi ammesse la successione  $\{v^{(k)}(M, \varrho)\}$  converge in media in  $S$ . Diciamo  $\Phi(M, \varrho)$  la sua funzione limite e poniamo

$$f_k(M) = \int_0^{\varrho_0} [v^{(k)}(M, \varrho) - \Phi(M, \varrho)]^2 d\varrho.$$

La funzione  $f_k(M)$ , non negativa, è quasi continua e sommabile in  $A$  e si ha, posto  $dU = du_1 du_2 \dots du_r$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k(M) dU = 0.$$

Possiamo allora determinare una successione crescente di indici  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$  e un insieme di misura nulla  $N$ , contenuto in  $A$ , tale che per ogni punto  $M$  di  $A - N$ , si abbia

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f_{k_h}(M) = 0,$$

cioè

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\varrho_0} [v_{\varrho}^{(k_h)}(M, \varrho) - \Phi(M, \varrho)]^2 d\varrho = 0.$$

Ne segue che la successione di funzioni di  $\varrho: v_{\varrho}^{(k_h)}(M, \varrho)$ , per ogni fissato  $M$  in  $A - N$ , converge in media nell'intervallo  $(0, \varrho_0)$  verso  $\Phi(M, \varrho)$ . Sarà allora, fissato comunque  $\varrho$  tra 0 e  $\varrho_0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\varrho} v_{\varrho}^{(k_h)}(M, \tau) d\tau = \int_0^{\varrho} \Phi(M, \tau) d\tau,$$

cioè

$$(9) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \{v^{(k_h)}(M, \varrho) - v^{(k_h)}(M, 0)\} = \int_0^{\varrho} \Phi(M, \tau) d\tau.$$

Scegliamo un punto  $M_0$  in  $A_1 - N$  e una quantità  $\bar{\varrho}$  tale che sia  $0 < \bar{\varrho} < \varrho_0$ . Si ottiene allora

$$\lim_{h \rightarrow \infty} v^{(k_h)}(M_0, \bar{\varrho}) = \int_0^{\bar{\varrho}} \Phi(M_0, \tau) d\tau.$$

Pongo

$$(10) \quad v(M_0, \bar{\varrho}) = \lim_{h \rightarrow \infty} v^{(k_h)}(M_0, \bar{\varrho}).$$

Fissato poi  $(M, \varrho)$  in  $S - \mathcal{F}S$  e indicato con  $d(M, \varrho)$  il vettore di componenti  $(du_1, du_2, \dots, du_r, d\varrho)$ , porrò

$$v(M, \varrho) = \int_{\mathcal{F}} [\lim_{h \rightarrow \infty} \text{grad } v^{(k_h)}(M, \varrho) \times d(M, \varrho)] + v(M_0, \varrho),$$



essendo  $\Gamma$  un qualsiasi arco di curva regolare contenuto in  $\mathcal{S} - \mathcal{F}\mathcal{S}$ , che unisce  $(M_0, \bar{\varrho})$  con  $(M, \varrho)$ .

È ovvio che l'integrale curvilineo non dipende da  $\Gamma$ .

Poichè si ha

$$\begin{aligned} \int_C [\lim_{h \rightarrow \infty} \text{grad } v^{(k_h)}(M, \varrho) \times d(M, \varrho)] &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_C [\text{grad } v^{(k_h)} \times d(M, \varrho)] = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} [v^{(k_h)}(M, \varrho) - v^{(k_h)}(M_0, \bar{\varrho})], \end{aligned}$$

ne viene, per la (10)

$$v(M, \varrho) = \lim_{h \rightarrow \infty} v^{(k_h)}(M, \varrho),$$

uniformemente in ogni insieme chiuso di  $\mathcal{S} - \mathcal{F}\mathcal{S}$ .

D'altronde si ha, uniformemente nell'interno di  $\mathcal{S}$ ,

$$\text{grad } v(M, \varrho) = \lim_{h \rightarrow \infty} \text{grad } v^{(k_h)}(M, \varrho)$$

ed è quindi assurata la continuità in  $\mathcal{S} - \mathcal{F}\mathcal{S}$  anche delle derivate prime di  $v(M, \varrho)$ .

Fissato  $M$  in  $A - N$  si ha per  $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} v(M, \varrho) &= \int_{\bar{\varrho}}^{\varrho} v_{\varrho}(M, \tau) d\tau + v(M, \bar{\varrho}) = \int_{\bar{\varrho}}^{\varrho} \lim_{h \rightarrow \infty} v_{\varrho}^{(k_h)}(M, \tau) d\tau + \\ &+ v(M, \bar{\varrho}) = \int_{\bar{\varrho}}^{\varrho} \Phi(M, \tau) d\tau + v(M, \bar{\varrho}). \end{aligned}$$

Ne segue che esiste  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} v(M, \varrho)$  e si ha

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} v(M, \varrho) = \int_{\bar{\varrho}}^0 \Phi(M, \tau) d\tau + v(M, \bar{\varrho}) = \mu(M).$$

Se  $M$  è in  $A_1 - N$  si trae, tenendo presente la (9),

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \int_{\bar{\varrho}}^0 \Phi(M, \tau) d\tau + v(M, \bar{\varrho}) = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \{v^{(k_h)}(M, 0) - v^{(k_h)}(M, \varrho)\} + \lim_{h \rightarrow \infty} v^{(k_h)}(M, \bar{\varrho}) = 0. \end{aligned}$$

Infine, poichè si ha

$$v(M, \varrho) = \int_{\bar{e}}^e v_{\varrho}(M, \tau) d\tau + v(M, \bar{\varrho})$$

e quindi

$$|v(M, \varrho)| \leq \int_0^{\varrho_0} |v_{\varrho}(M, \tau)| d\tau + |v(M, \bar{\varrho})|,$$

segue l'uniforme sommabilità di  $v(M, \varrho)$  in  $A$  rispetto a  $\varrho$ .

### 3. — Teorema d'esistenza.

Siamo adesso in grado di dimostrare il preannunciato teorema d'esistenza per la equazione integrale (4) e quindi, in virtù del teorema V, per il problema al contorno misto in istudio.

XI. — *Condizione sufficiente perchè esista una soluzione  $\mu(Q)$  dell'equazione integrale (4) è che  $\delta(Q)$  sia la traccia su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  di una funzione  $\delta^*(Q)$  continua su  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  e verificante la condizione*

$$\int_{\mathcal{F} \mathcal{D}} \delta^*(Q) d\sigma = 0,$$

se  $c \equiv 0$  in  $\mathcal{D}$ .

Indico con  $\{\varphi_k(P)\}$  un sistema di funzioni hilbertianamente completo nell'insieme  $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$  e pongo

$$v^{(k)}(P) = \int_{\mathcal{D}' - \mathcal{D}} \varphi_k(P') G(P, P') d_{P'} T.$$

Le funzioni  $v^{(k)}$  sono continue in  $\mathcal{D}$  assieme alle loro derivate prime e verificano in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  l'equazione  $E[u] = 0$ . La risoluzione della (4) equivale a quella del seguente sistema di FISCHER-RIESZ

$$\int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \mu \frac{d v^{(k)}}{d v} d\sigma = \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \delta v^{(k)} d\sigma.$$

Per ogni  $P$  si consideri la forma quadratica definita positiva

$$(11) \quad \sum_{h,k}^{1,m} \alpha_{hk}(P) \lambda_h \lambda_k$$

nelle variabili  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Essa assuma la forma canonica

$$(12) \quad \sum_{k=1}^m A_k (P) \gamma_k^2$$

e sia

$$(13) \quad \gamma_h = \sum_{k=1}^m \alpha_{hk} (P) \lambda_k \quad (h = 1, 2, \dots, m)$$

la sostituzione ortogonale che fa passare dalla (12) alla (11). Posto, per una data funzione  $u$

$$\gamma_h [u] = \sum_{k=1}^m \alpha_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (h = 1, 2, \dots, m),$$

diciamo  $\Gamma[u]$  il vettore avente le seguenti  $m + 1$  componenti

$$A_1^{\frac{1}{2}} \gamma_1 [u], \quad A_2^{\frac{1}{2}} \gamma_2 [u], \dots, \quad A_m^{\frac{1}{2}} \gamma_m [u], \quad (-c)^{\frac{1}{2}} u.$$

Se  $u$  è una soluzione biregolare in  $\mathfrak{D}$  della  $E[u] = 0$ , si ha :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathfrak{D}} |\Gamma[u]|^2 dT &= - \int_{\mathfrak{D}} \left\{ \sum_{k=1}^m A_k [\gamma_k [u]]^2 - c u^2 \right\} dT = \\ &= - \int_{\mathfrak{D}} \left\{ \sum_{h,k}^{1,m} \alpha_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} - u^2 \right\} dT = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u \frac{du}{dv} d\sigma, \end{aligned}$$

come si constata mercé l'applicazione del teorema di GREEN.

Poichè si ha

$$\Gamma[u + u'] = \Gamma[u] + \Gamma[u']$$

ed essendo

$$\int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u \frac{du'}{dv} d\sigma = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u' \frac{du}{dv} d\sigma$$

si deduce

$$- \int_{\mathfrak{D}} \{ \Gamma[u] \times \Gamma[u'] \} d\sigma = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u \frac{du'}{dv} d\sigma = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u' \frac{du}{dv} d\sigma.$$

Facciamo l'ipotesi che il sistema di vettori  $\{\Gamma[v^{(k)}]\}$  sia ortonormale in  $\mathfrak{D}$ , ipotesi a cui possiamo sempre ridurre operando opportune sostituzioni lineari sulle funzioni del sistema  $\{\varphi_k\}$ .

Detta  $u^*$  la funzione, soluzione di  $E[u] = \theta$ , la cui derivata conormale su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  coincide con  $\delta^*$ , poniamo

$$(14) \quad c_k = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} v^{(k)} \delta^* d\sigma = \int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}} \delta v^{(k)} d\sigma.$$

Poichè si ha <sup>(22)</sup>:

$$c_k = - \int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[u^*] \times \Gamma[v^{(k)}] \} d\sigma,$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$$

risulta convergente, epperò la successione

$$\Gamma \left[ \sum_{k=0}^n c_k v^{(k)} \right] = \sum_{k=0}^n c_k \Gamma[v^{(k)}]$$

<sup>(22)</sup> Detta  $N(Q, P)$  la funzione di GREEN per il problema di NEUMANN nel dominio  $\mathcal{D}$  si ha

$$u^*(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \delta^*(Q) N(Q, P) d_Q \sigma$$

e

$$\Gamma[u^*(P)] = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \delta^*(Q) \Gamma_P[N(Q, P)] d_Q \sigma$$

riuscendo  $\Gamma[u^*]$ , per quanto si è dimostrato col teor. III, di quadrato sommabile in  $\mathcal{D}$ .

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[u^*] \times \Gamma[v^{(k)}] \} dT &= \int_{\mathcal{D}} \left\{ \Gamma[v^{(k)}(P)] \times \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \delta^*(Q) \Gamma_P[N(Q, P)] d_Q \sigma \right\} d_P T = \\ &= \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \delta^*(Q) \left[ \int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[v^{(k)}(P)] \times \Gamma_P[N(Q, P)] \} d_P T \right] d_Q \sigma. \end{aligned}$$

Ricordando che la parte principale di  $N(Q, P)$  è  $-\frac{1}{km} F(Q, P)$  si ha

$$v^{(k)}(Q) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \frac{d v^{(k)}}{d \nu} N(Q, P) d_P \sigma = - \int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[v^{(k)}] \times \Gamma_P[N(Q, P)] \} d_P T$$

e si deduce

$$\int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[u^*] \times \Gamma[v^{(k)}] \} dT = - \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \delta^* v^{(k)} d\sigma.$$

converge in media in  $\mathcal{D}$ . Sia

$$\lambda_h = \sum_{k=1}^m \beta_{hk} (P) \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

la sostituzione inversa della (13). Avremo allora

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_i} = \sum_{h=0}^m \beta_{ih} \gamma_h \left[ \sum_{k=0}^n c_k v^{(k)} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

e quindi, posto

$$V^{(n)} = - \sum_{k=0}^n c_k v^{(k)}$$

la successione  $\{\text{grad } V^{(n)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) converge in media in  $\mathcal{D}$ , e pertanto (teor. IX) uniformemente nell'interno di  $\mathcal{D}$ .

Sia  $Q \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  un punto variabile su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  e supponiamo che le funzioni

$$\xi_k = \psi_k(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

siano tali che, quando il punto  $M \equiv (u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$  varia in assegnati domini limitati dello spazio euclideo a  $m - 1$  dimensioni, la cui somma chiuderà  $A$ , il punto  $Q$  descrive tutta  $\mathcal{F}\mathcal{D}$ .

Siano  $\alpha_k(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$  i coseni direttori della normale interna a  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  nel punto  $Q$ . Le ipotesi assunte per  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  ci assicurano che le  $\psi_k$  sono di classe 2 in  $A$  e le  $\alpha_k$  di classe 1. Consideriamo il sistema di coordinate curvilinee a ipersuperficie parallele  $(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, \varrho)$  dato dalla trasformazione

$$(15) \quad x_k = \varphi_k(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) + \varrho \alpha_k(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}),$$

supponendo  $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$  con  $\varrho_0$  abbastanza piccolo da riuscire

$$J(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, \varrho) > 0$$

e avendo indicato con  $J$  le jacobiano della trasformazione (15).

Diciamo  $S$  il cilindro dello spazio  $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, \varrho$  ottenuto al variare di  $M$  in  $A$  e di  $\varrho$  in  $(0, \varrho_0)$ . Sia poi  $A_2$  l'insieme dei punti di  $A$  che per le (15) si trasformano in punti di  $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ . La successione  $\{V^{(n)}\}$  verifica in  $S$  tutte le ipotesi del teor. X. Resta così definita quasi ovunque su  $\mathcal{F}\mathcal{D}$  una funzione  $\mu(Q)$  sommabile e quasi ovunque nulla su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ .

Detto  $\mathcal{D}_\varrho$  il dominio, contenuto in  $\mathcal{D}$ , la cui frontiera è descritta dal punto di coordinate date dalle (15), quando  $\varrho$  è fissato fra 0 e  $\varrho_0$  ed  $M$

varia in  $A$ , si ha, indicata con  $v(M, \varrho) = v(P)$  la funzione, che per il teor. III si definisce come limite di una successione subordinata a  $\{V^{(n)}\}$ :

$$(16) \quad \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_\varrho} v \frac{d v^{(k)}}{d v} d \sigma = - \int_{\mathcal{D}_\varrho} \{ \Gamma[v] \times \Gamma[v^{(k)}] \} d T.$$

D'altra parte, poichè la successione

$$- \sum_{k=0}^n c_k \Gamma[v^{(k)}]$$

converge in media in  $\mathcal{D}$ , essa deve aver per limite  $\Gamma[v]$ , che è il limite di una successione ad essa subordinata, per cui deve essere

$$c_k = - \int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[v] \times \Gamma[v^{(k)}] \} d T.$$

Dalla (16) passando al limite per  $\varrho \rightarrow 0$  si deduce

$$\int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \mu \frac{d v^{(k)}}{d v} d \sigma = - \int_{\mathcal{D}} \{ \Gamma[v] \times \Gamma[v^{(k)}] \} d T$$

e quindi per la (14)

$$\int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \mu \frac{d v^{(k)}}{d v} d \sigma = \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \delta v^{(k)} d \sigma,$$

cio che dimostra completamente il teorema.

#### 4. — Estensione ai sistemi di equazioni lineari del secondo ordine autoaggiunti.

Indicherò con  $E_{rs}$  il seguente operatore differenziale lineare del secondo ordine alle derivate parziali i cui coefficienti supporrò definiti in  $C$ :

$$E_{rs} \equiv \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}^{(r,s)} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^m b_h^{(r,s)} \frac{\partial}{\partial x_h} + c^{(r,s)}$$

e considererò il seguente sistema di  $p$  equazioni differenziali nel vettore incognito  $U$  di componenti  $u_1, u_2, \dots, u_p$

$$(12) \quad \sum_{s=1}^p E_{rs} [u_s] = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, p).$$

Dirò — seguendo il PICONE <sup>(23)</sup> — che tale sistema è autoaggiunto se, qualunque sia la coppia di indici  $r, s$ , accade che l'operatore  $E_{rs}$  coincide con l'operatore aggiunto di  $E_{sr}$ , che denoterò con  $E_{sr}^*$ , se cioè si ha

$$\| E_{rs} \| \equiv \| E_{sr} \| \quad (r, s = 1, 2, \dots, p).$$

Ciò equivale al sussistere in  $U$  delle seguenti identità

$$a_{hk}^{(r,s)} \equiv a_{hk}^{(s,r)}, \quad b_h^{(r,s)} + b_h^{(s,r)} \equiv 2 \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_{hk}^{(s,r)}}{\partial x_h},$$

$$c^{(r,s)} \equiv \sum_{h,k}^{1,m} \frac{\partial^2 a_{hk}^{(s,r)}}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{h=1}^m \frac{\partial b_h^{(s,r)}}{\partial x_h} + c^{(s,r)}.$$

Se  $U$  e  $V$  sono due vettori soluzioni di (17) biregolari in  $\mathcal{D}$ , posto

$$t_r[U] = \sum_{s=1}^p \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}^{(r,s)} \cos(x_h, n) \frac{\partial u_s}{\partial x_k}$$

e detto  $T[U]$  il vettore di componenti  $t_1[U], t_2[U], \dots, t_p[U]$ , sussistono in  $\mathcal{D}$  le seguenti formule di GREEN

$$(18) \quad \int_{\mathcal{E}\mathcal{D}} [(U \times T[V]) - (V \times T[U])] d\sigma = 0$$

$$(19) \quad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} (U \times T[U]) d\sigma + \int_{\mathcal{D}} \left\{ \sum_{r,s}^{1,p} \left( \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}^{(r,s)} \frac{\partial u_r}{\partial x_h} \frac{\partial u_s}{\partial x_k} - c^{(r,s)} u_r u_s \right) \right\} dt = 0.$$

Dirò che il sistema (17) è di tipo ellittico in se la forma quadratica nelle  $pm$  variabili  $\lambda_h^{(r)} (r = 1, 2, \dots, p; h = 1, 2, \dots, m)$

$$\sum_{r,s}^{1,p} \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}^{(r,s)} (P) \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)}$$

è definita, ad esempio positiva, comunque si assuma il punto  $P$  in  $C$ .

Faremo inoltre l'ipotesi che la forma quadratica

$$\sum_{r,s}^{1,p} c^{(r,s)} \lambda_r \lambda_s$$

sia semidefinita negativa in  $C$ . In tali ipotesi può dimostrarsi il teorema di

<sup>(23)</sup> Cfr. Loc. cit. (3).

unicità per il problema di DIRICHLET per il sistema (17). Si supponga che sia possibile acquisire quello di esistenza relativo al dominio  $\mathcal{D}'$  e sia

$$\| g_{rs}(Q, P) \| \quad (r, s = 1, 2, \dots, p)$$

la matrice di GREEN del detto problema considerato in  $\mathcal{D}'$  <sup>(24)</sup>. Supponiamo altresì che, indicato con  $G_r(Q, P)$  il vettore di componenti  $\{g_{r1}(Q, P), g_{r2}(Q, P), \dots, g_{rp}(Q, P)\}$ , sussista il seguente teorema

XII. — Siano  $\mathcal{L}(Q)$  e  $\mathcal{T}(Q)$  due vettori definiti su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  e ivi sommabili, i quali per ogni  $P'$  contenuto in  $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ , verificchino le equazioni

$$(20) \quad \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \{ \mathcal{L}(Q) \times T_Q [G_r(Q, P')] - [\mathcal{T}(Q) \times G_r(Q, P')] \} d_Q \sigma = 0$$

(r = 1, 2, \dots, p).

Il vettore  $U(P)$  che in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  è definito dalle uguaglianze

$$(20') \quad u_r(P) = \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \{ \mathcal{L}(Q) \times T_Q [G_r(Q, P)] - [\mathcal{T}(Q) \times G_r(Q, P)] \} d_Q \sigma$$

(r = 1, 2, \dots, p)

soddisfa ivi al sistema (17), mentre verifica le seguenti condizioni al contorno

$$(21) \quad \lim_{P \rightarrow M} U(P) = 0 \quad \text{se } M \text{ è su } \mathcal{F}_2 \mathcal{D},$$

$$(22) \quad \lim_{P \rightarrow M \text{ (su } n_M^*)} U(P) = \mathcal{L}(M), \quad \lim_{P \rightarrow M \text{ (su } n_M^*)} T[U(P)] = \mathcal{T}(M)$$

per quasi tutti i punti di  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ .

Dimostriamo in seguito questo teorema in un caso particolare di grande interesse per le applicazioni e, cioè, quello del sistema delle cosiddette equazioni dell'elasticità.

Una volta che per il sistema (17) sia stato acquisito detto teorema, il problema consistente nel dimostrare l'esistenza di un vettore  $U$  soluzione in

<sup>(24)</sup> La soluzione del problema di DIRICHLET in  $\mathcal{D}'$  per il sistema (17) sarà data allora dalla formula

$$u_2(P) = \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}'} \{ U(Q) \times T_Q [G_r(Q, P)] \} d_Q \sigma \quad (r = 1, 2, \dots, p),$$

essendo

$$G_r(Q, P) \equiv \{ g_{r1}(Q, P), g_{r2}(Q, P), \dots, g_{rp}(Q, P) \}.$$



$\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$  del sistema

$$\sum_{s=1}^p E_{rs} [u_s] = f_r \quad (r = 1, 2, \dots, p)$$

e del quale su  $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$  sono stati prescritti i valori mentre su  $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$  sono stati prescritti i valori di  $T[U(Q)]$ , si riconduce — ragionando come nel caso di una sola equazione — a dimostrare, una volta assegnato  $\mathcal{C}(Q)$ , l'esistenza di un vettore  $\mathcal{Q}(Q)$  che verifichi le equazioni integrali (20). A questo punto faremo la ulteriore ipotesi che per il sistema (17) si verifichino le due seguenti circostanze :

a) Sussiste nella classe delle soluzioni, per cui valgono le formule (18) e (19), il teorema di esistenza del problema al contorno per il sistema (17), consistente nel prescrivere su tutta  $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$  i valori del vettore  $T[U]$ .

b) Sussiste per il sistema (17) l'analogo del teorema IX. cioè se  $\{U^{(h)}\}$  è una successione di vettori biregolari in  $\mathfrak{D}$  e soluzioni di (17), tale che le successioni  $\{\text{grad } u_r^{(h)}\}$  ( $r = 1, 2, \dots, p$ ) convergono in media in  $\mathfrak{D}$ , esse convergono uniformemente nell'interno di  $\mathfrak{D}$ .

Le ipotesi ammesse forniscono tutti gli elementi per estendere al sistema (17) il teorema XI e dimostrare così l'esistenza del vettore  $\mathcal{Q}(Q)$  soluzione del sistema integrale (20). Ciò non presenta nessuna difficoltà e la dimostrazione seguita nel caso di una sola equazione si ripete — solo con qualche ovvio mutamento nei simboli — per il caso generale in questione.

Naturalmente, poichè la teoria dei sistemi alle derivate parziali è meno progredita di quella di una sola equazione, abbiamo dovuto ammettere come ipotesi il verificarsi di alcune proprietà, che nel caso particolare della (1) vengono invece dimostrate. Ma farò vedere adesso come, in un caso particolare assai notevole, possano dimostrarsi tutte le anzidette proprietà.

### 5. — Equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo.

Un sistema che rientra fra quelli testè considerati, è quello classico dell'equilibrio di un solido elastico, isotropo e omogeneo. Supponendo che il corpo elastico non sia soggetto all'azione di forza di massa, caso a cui ci si può sempre ricondurre, il sistema in questione si può scrivere al modo seguente :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0, \\ A_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0, \\ A_2 u_3 + k \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0, \end{array} \right.$$

avendo indicato, come di consueto, con  $\Delta_2$  l'operatore di LAPLACE e con  $k$  una costante positiva che dipende dalle caratteristiche elastiche del corpo stesso. La (8) altro non esprime che il ben noto teorema di reciprocità del BETTI.

Posto  $\overline{PQ} = r$  il sistema (23) possiede la seguente matrice fondamentale di soluzioni, dovuta al SOMIGLIANA

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} & - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} & - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_3} \\ - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} & - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_2 \partial x_3} \\ - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_3} & - \frac{k}{1(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

laddove è ben noto il seguente teorema

XIII. — Se  $\mathcal{F}\mathcal{D}'$  è di classe 2, esiste la matrice di GREEN

$$\| g_{ij}(Q, P) \|$$

per il problema di DIRICHLET considerato nel dominio  $\mathcal{D}'$ . Ciascuna funzione della matrice dipende biregolarmente da  $(Q, P)$ , quando questi due punti variano in due domini senza punti in comune, la parte principale di  $\varphi_{ij}(Q, P)$  riuscendo uguale, a meno di un fattore costante, al termine di equal posto della matrice di SOMIGLIANA.

Orbene, in virtù di questo teorema, si possono ripetere i ragionamenti fatti nella dimostrazione del teor. IV per pervenire alla (6), e stabilire la (21), mentre per dimostrare le (22) non c'è che da rifare gli stessi ragionamenti da me seguiti per dimostrare il teorema uguale al XII, ma usando la matrice di SOMIGLIANA anzichè quella di GREEN <sup>(25)</sup>.

Indicherò con  $\mathcal{E}_U$  la classe dei vettori continui in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}_2\mathcal{D}$  nulli su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ , aventi derivate prime e seconde continue in  $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$  e verificanti ivi il sistema (23), per i quali, inoltre, esistendo i limiti (20) e (20') risultano verificate le (20) e (20'). La classe  $\mathcal{E}_U$  contiene quella delle soluzioni biregolari in  $\mathcal{D}$  del sistema (23), che si annullano su  $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ .

Il problema principale dell'elasticità consiste nel determinare le deformazioni elastiche di un corpo, tenuto fisso lungo una parte della superficie esterna e sollecitato da un assegnato sistema di forze sulla restante parte.

<sup>(25)</sup> Cfr. G. FICHERA, *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo e omogeneo*, Rend. Seminario Mat. Università Padova, 1943.

Questo problema ha come corrispondente problema analitico nella classe  $\mathcal{E}_U$  il seguente altro: determinare un vettore della classe  $\mathcal{E}_U$ , avendo assegnato su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  il vettore  $\mathcal{T}(Q)$ .

Per quanto riguarda l'esistenza di un tale vettore, segue ovviamente dal teorema XII che

XIV. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una soluzione del problema considerato nella classe  $\mathcal{E}_U$  è che ammetta soluzione il sistema integrale di prima specie (20) nel vettore incognito  $\mathcal{M}(Q)$ .*

Non ci resta che far vedere come per il sistema (23) sussistano la a) e la b) del § precedente. Per quanto riguarda la a) la questione è risolta dal seguente teorema dovuto al KORN <sup>(26)</sup>.

XV. — *Se  $\mathcal{T}^*(Q)$  è un sistema continuo di vettori, definito su  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  ed in equilibrio, tale che comunque si assumano  $Q$  ed  $M$  su  $\mathcal{F} \mathcal{D}$  si ha*

$$(24) \quad | \mathcal{T}^*(Q) - \mathcal{T}^*(M) | < K \overline{QM}^\alpha$$

con  $K$  ed  $\alpha$  costanti positive e  $\alpha \leq 1$ , allora esiste un vettore  $U$ , biregolare in  $\mathcal{D}$ , verificante in  $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$  il sistema (23) e la condizione al contorno  $\mathbf{T}[Q] = \mathcal{T}^*(Q)$ .

Il sussistere della proprietà b) si deduce dal fatto che le componenti di  $U$ , in quanto soluzioni del sistema (23), sono funzioni bi-iperarmoniche, e per tali funzioni questa proprietà è già nota.

Si hanno così tutti gli elementi per ripetere la dimostrazione del teor. XI a stabilire il seguente

XVI. — *Condizione sufficiente perchè esista una soluzione  $\mathcal{M}(Q)$  del sistema integrale (20), e quindi del problema principale dell'elasticità, considerato nella classe  $\mathcal{E}_u$ , è che  $\mathcal{T}(Q)$  sia la traccia su  $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$  di un vettore  $\mathcal{T}^*(Q)$  definito su tutta  $\mathcal{F} \mathcal{D}$ , verificante le condizioni d'equilibrio e la condizione di Hölder (24).*

[Pervenuto alla redazione il 14 maggio 1949].

---

<sup>(26)</sup> Cfr. A. KORN, *Solution général du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, t. X, 1908, pp. 165-269.