ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE GRIOLI

Questioni di stabilità riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 1, nº 1-4 (1949), p. 43-74

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1949_3_1_1-4_43_0>

QUESTIONI DI STABILITÀ RIGUARDANTI LE PRECESSIONI REGOLARI DEL SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

di GIUSEPPE GRIOLI (Roma).

Di recente ho dimostrato [1] che tra i moti dinamicamente possibili per un solido pesante fissato senza attrito per un suo punto esistono [se il punto fisso è opportunamente scelto] ∞^2 precessioni regolari. Nel presente lavoro mi pongo la questione che ora più spontaneamente si presenta: quella della stabilità lineare di tali precessioni.

La questione, legata intimamente alla determinazione della natura degli esponenti caratteristici delle equazioni alle variazioni, si presenta come molto ardua allo stato attuale dell'Analisi, dato che nel caso di un sistema differenziale lineare a coefficienti periodici [2] quella determinazione equivale alla risoluzione di un'equazione algebrica — l'equazione fondamentale caratteristica — i cui coefficienti non sono di facile determinazione, come invece avviene nel caso dei sistemi a coefficienti costanti.

Sono stati, è vero, indicati procedimenti per ottenere gli esponenti caratteristici mediante opportuni sviluppi in serie [3], ma è molto laborioso il costruirli e addirittura proibitivo giudicare su quegli sviluppi della loro natura.

Ho ritenuto conveniente ricavare le equazioni alle variazioni partendo dalle equazioni canoniche della Dinamica: in tale maniera ho avuto modo di sfruttare varie proprietà analitiche delle soluzioni, dovute allo speciale significato delle equazioni scritte, proprietà che mi hanno permesso di stabilire quale sia la natura degli esponenti caratteristici.

Ho trovato, così, che due dei sei esponenti caratteristici sono generalmente non nulli, mentre gli altri quattro sono sempre nulli, qualunque sia

---

(1) G. GRIOLI, « *Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico* », Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 1948, Vol. IV, pag. 420 ; « *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico* », Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, tomo XXVI.

(2) e anche alquanto complicati; vedi n. 9:

(3) H. POINCARE, « *Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste* », Tome I, pag. 201.

la struttura del solido. A due dei quattro esponenti sempre nulli corrispondono soluzioni periodiche che si scrivono facilmente, mentre la determinazione della struttura degli integrali corrispondenti agli altri due è intimamente collegata alla determinazione dei sottogruppi di Hamburger (4) che riuscirebbe estremamente complessa.

Avendo a disposizione due integrali primi a coefficienti periodici delle equazioni alle variazioni ho potuto evitare tale complicazione, giovandomi di un teorema sulle soluzioni periodiche di un sistema lineare non omogeneo a coefficienti periodici di cui ho dato l'enunciato e la dimostrazione [n. 7], non avendoli trovati in nessuno dei trattati e lavori a mia conoscenza.

Sono così giunto alla constatazione della instabilità, in generale, delle precessioni regolari del solido pesante senza escludere, tuttavia, che per particolari strutture vi sia la stabilità lineare. Tale eventualità, si presenta, però, con una probabilità molto piccola, richiedendo che abbiano una soluzione in comune quattro effettive equazioni tra due parametri strutturali del solido.

Nel caso di un giroscopio animato da una precessione regolare del tipo di quelle del solido pesante asimmetrico essa, ad es., non si presenta mai, in accordo a risultati ormai classici.

Ritengo vantaggioso aver potuto constatare che gli integrali delle equazioni alle variazioni ad esponente caratteristico nullo ma generalmente non periodici, capaci di rendere instabili le precessioni regolari del solido pesante, intervengono allora e soltanto allora che la perturbazione iniziale della precessione considerata alteri l'energia totale e il momento delle quantità di moto secondo la verticale o, almeno, uno di questi elementi.

Sicchè si può affermare che se la perturbazione iniziale lascia invariati questi elementi possono aversi per il solido delle effettive piccole oscillazioni intorno alla precessione base.

Infatti allora, in aggiunta ai due integrali ad esponente caratteristico sempre nullo che sono certo periodici, entrano in giuoco solo i due integrali ad esponente generalmente non nullo e questi, almeno per una certa classe di tipi strutturali, non divergono nel tempo o, se pure questa classe non comprende ogni possibile tipo strutturale e il solido considerato non vi appartiene, sono tali che ad uno di essi corrispondono moti con tendenza asintotica alla precessione base. Se invece la perturbazione altera o l'energia totale o il momento delle quantità di moto secondo la verticale o ambedue tali elementi si manifesta [generalmente] la instabilità.

È evidente che l'integrazione completa del sistema delle equazioni alle variazioni non può effettuarsi altro che per sviluppo in serie.

---

(4) G. Sansone, « *Equazioni differenziali nel campo reale* », Parte I, pag 310

Nel problema specifico che tratto ho vista la convenienza di esprimere ogni integrale mediante uno sviluppo in serie rispetto all'angolo formato da una delle due rette baricentrali ortogonali ai piani ciclici dell'ellissoide centrale con la normale ad esso nel punto ove quella lo interseca.

L'annullarsi di tale angolo ha significato meccanico, in quanto caratterizza i giroscopi, e il primo termine dello sviluppo dà l'integrale nel caso che il solido sia un giroscopio. Uno sviluppo in serie così costruito è vantaggioso oltre che per il valore indicativo del suo primo termine anche per motivi di natura analitica.

In particolare si riesce ad individuare le funzioni che devono annullarsi per aversi [eventualmente] la stabilità lineare e a precisare [mediante sviluppo in serie] le equazioni corrispondenti.

Alla fine ho brevemente indicate le caratteristiche salienti dei moti variati corrispondenti agli integrali non divergenti delle equazioni alle variazioni.

1. — Precessioni regolari del solido pesante asimmetrico.

Chiamo S il solido, G il baricentro, E_G l'ellissoide centrale, f una qualsiasi delle due rette baricentrali ortogonali ai piani ciclici, Q il punto in cui f interseca E_G, n la normale in Q ad E_G, $\varkappa$ l'angolo acuto di f ed n.

Perchè il moto di S, quando questo sia fissato senza attrito per un suo punto O e sia soggetto al solo peso proprio, possa essere una precessione regolare [5], occorre che O appartenga ad f senza coincidere con G.

Questa condizione suppongo soddisfatta.

In ogni precessione regolare dinamicamente possibile per S l'asse di precessione p forma con la verticale l'angolo $\varkappa$, mentre quello di figura è ad esso ortogonale e coincide con f.

Penso p orientato verso l'alto e indico con $\boldsymbol{\chi}$ il suo versore e con $\boldsymbol{k}$ quello di OG. Riferisco S simultaneamente alla terna fissa $T^* \equiv O\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{c}'\,\boldsymbol{\chi}$, avente il piano di $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\chi}$ verticale e $\boldsymbol{c}$ orientato verso il basso, e ad una terna solidale $T \equiv O\,\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}$.

Suppongo, com'è certamente lecito, che l'asse di versore $\boldsymbol{i}$ sia asse principale d'inerzia relativo ad O, in modo che [con evidente significato dei simboli] risulti [6]

$$B' = C' = 0 \tag{1}$$

---

[5] Vedi loco cit. nota (1).

[6] Scelgo la terna solidale in modo ancora più particolare di quanto o fatto nei lavori citati in (1) in modo da avere, oltre a $B' = 0$, espressioni più semplici della ψ [vedi (4,1)] e di tutti gli sviluppi successivi.

e che quello di versore j sia orientato in modo da aversi [7]

$$A' < 0 . \tag{2}$$

Detti m e g la massa di S ed il modulo dell'accelerazione di gravità, pongo

$$\alpha = m g \mid O G \mid > 0 . \tag{3}$$

Per caratterizzare completamente le precessioni regolari dinamicamente possibili per S basta aggiungere alle cose già dette che l'angolo di preces sione, ψ, quello di rotazione propria, φ, e quello di mutazione, θ, di T rispetto a T^* soddisfano alle condizioni

$$\psi \equiv \varphi + \frac{\pi}{2} ; \qquad \dot{\psi} \equiv \dot{\varphi} \equiv \pm \sqrt{\frac{\alpha \cos \varkappa}{C}} ; \qquad \theta \equiv \frac{\pi}{2} . \tag{4}$$

2. — Funzione hamiltoniana.

Tenuto conto di (1) e di [8]

$$A = B , \tag{5}$$

si vede subito che la nota espressione della forza viva T di S si riduce a

$$T = \frac{1}{2} \{ A (p^2 + q^2) + C r^2 - 2 A' q r \} , \tag{6}$$

con

$$p = \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi ; \quad q = -\dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi ; \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta . \tag{7}$$

Posto

$$\left\{ \begin{aligned} p_\Theta &= p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A (p \cos \varphi - q \operatorname{sen} \varphi) + A' r \operatorname{sen} \varphi , \\ p_\varphi &= p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C r - A' q , \\ p_\psi &= p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi p + (A \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - A' \cos \theta) q + \\ &\qquad + (C \cos \theta - A' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi) r , \end{aligned} \right. \tag{8}$$

---

(7) Ciò equivale ad attribuire a tale asse quello dei due versi che forma angolo acuto con la normale esterna all'ellissoide d'inerzia relativo ad O nel punto in cui questo è intersecato dal semiasse positivo di versore k.

(8) Si tenga presente che f è ortogonale anche ai piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia relativo ad O.

da (8) segue

$$
(9) \quad \begin{cases}
p = \dfrac{1}{A \operatorname{sen} \theta} \{p_1 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - p_2 \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + p_3 \operatorname{sen} \varphi\}, \\[2ex]
q = \dfrac{1}{(A'^2 - A C) \operatorname{sen}\theta} \{p_1 C \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + p_2 (C \cos\theta \cos\varphi - A' \operatorname{sen}\theta) \quad p_3 C \cos\varphi\}, \\[2ex]
r = \dfrac{1}{(A'^2 - A C) \operatorname{sen}\theta} \{p_1 A' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + (A' \cos\theta \cos\varphi \quad A \operatorname{sen}\theta) p_2 - p_3 A' \cos\varphi\}.
\end{cases}
$$

Da (6), (9) si deduce

$$
(10) \quad T = \frac{1}{2 A (A C - A'^2) \operatorname{sen}^2 \theta} \{(A C - A'^2 \cos^2 \varphi) \operatorname{sen}^2 \theta \, p_1^2 + [(A C -
$$

$$
- A'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos^2 \theta + A^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 2 A A' \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \varphi] \, p_2^2 +
$$

$$
+ (A C - A'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \, p_3^2 + 2 A' (A' \cos \varphi \cos \theta - A \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \, p_1 p_2 -
$$

$$
- 2 A'^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, p_1 p_3 + 2 [A A' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi +
$$

$$
+ (A'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - A C) \cos \theta] \, p_2 p_3\}.
$$

È utile osservare che in base alla scelta dei sistemi di riferimento T e T le componenti di $\boldsymbol{c}$ e χ rispetto agli assi solidali sono rispettivamente

$$
(11) \quad \begin{cases}
c_1 = \cos \psi \cos \varphi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \\
c_2 = -(\cos \psi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \cos \theta), \\
c_3 = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta
\end{cases}
$$

e

$$
(12) \quad \chi_1 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad \chi_2 = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad \chi_3 = \cos \theta .
$$

Detto $\boldsymbol{\mu}$ il versore della verticale discendente si ha

$$
(13) \quad \boldsymbol{\mu} = \operatorname{sen} \varkappa \, \boldsymbol{c} - \cos \varkappa \, \chi .
$$

Da (3), (11,3), (12,3), (13), si deduce che il potenziale di gravità, U, di S è espresso da

$$
(14) \quad U = \alpha \, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\mu} = \alpha \, [\operatorname{sen} \varkappa \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta - \cos \varkappa \cos \theta] .
$$

Posto

$$q_1 = \theta\,, \quad q_2 = \varphi\,, \quad q_3 = \psi\,. \tag{15}$$

da (10), (14), (15) si ricava come espressione dell'energia totale, H, la seguente:

$$(16)\quad H = \frac{1}{2\,A\,(A\,C - A'^2)\operatorname{sen}^2 q_1}\{(A\,C - A'^2\cos^2 q_2)\operatorname{sen}^2 q_1\cdot p_1^2 +$$

$$+ [(A\,C - A'^2\operatorname{sen}^2 q_2)\cos^2 q_1 + A\operatorname{sen} q_1\,(A\operatorname{sen} q_1 - 2\,A'\cos q_1\cos q_2)]\,p_2^2 +$$

$$+ (A\,C - A'^2\operatorname{sen}^2 q_2)\,p_3^2 + 2\,A'\,(A'\cos q_1\cos q_2 -$$

$$- A\operatorname{sen} q_1)\operatorname{sen} q_1\operatorname{sen} q_2\cdot p_1\,p_2 - 2\,A'^2\operatorname{sen} q_1\operatorname{sen} q_2\cos q_2\cdot p_1\,p_3 +$$

$$+ 2\,[A\,A'\operatorname{sen} q_1\cos q_2 + (A'^2\operatorname{sen}^2 q_2 - A\,C)\cos q_1]\,p_2\,p_3\} -$$

$$- \alpha\,[\operatorname{sen}\varkappa\operatorname{sen} q_1\operatorname{sen} q_3 - \cos\varkappa\cos q_1]\,.$$

3. — **Equazioni alle variazioni.**

Denoto con ξ_1, ξ_2, ξ_3 variazioni del primo ordine di q_1, q_2, q_3 e con ξ_4, ξ_5, ξ_6 analoghe variazioni di p_1, p_2, p_3, nel passaggio da un prefissato moto di S ad uno ad esso vicino.

Dalle equazioni di Hamilton

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\,,\\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

si ottengono le equazioni alle variazioni nella forma

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \sum_{h=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_h}\,\xi_h + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_h}\,\xi_{h+3}\right),\\ \dot{\xi}_{i+3} &= -\sum_{h=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_h}\,\xi_h + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_h}\,\xi_{h+3}\right), \end{aligned}\right. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

pur di pensare valutate le derivate seconde di H in corrispondenza al moto di S assunto come motobase.

Come tale assumo precisamente una qualunque delle precessioni regolari dinamicamente possibili di S, descritte al n. 1.

In conseguenza le derivate di H che intervengono nelle (18) vanno considerate per

$$(19)\quad \begin{cases} q_1 = \dfrac{\pi}{2}, \qquad q_2 = \nu t, \qquad q_3 = \nu t + \dfrac{\pi}{2}, \\ p_1 = A' \nu \operatorname{sen} \nu t, \qquad p_2 = (C - A' \cos \nu t) \nu, \qquad p_3 = (A - A' \cos \nu t) \nu, \end{cases}$$

pur di denotare con ν il valore comune, in base a (4, 2) a $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ nella precessione considerata.

Dall'osservazione delle (19) è chiaro che nelle (18) si può assumere come variabile indipendente

$$(20)\qquad x = \nu t,$$

dopodichè, denotando con l'apice la derivazione rispetto alla x delle funzioni che dalla x dipendono, le (18) assumono la forma

$$(21)\qquad \xi'_i = \sum_{s=1}^{6} \alpha_{is} \xi_s, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

con le α_{is} funzioni periodiche della x di periodo 2π che, per adesso, non occorre specificare. Per il seguito saranno utili le seguenti *Osservazioni:*

Osservazione I. — Risulta certamente

$$(22)\qquad A\,C - A'^2 = C\,(A - C\,tg^2 \varkappa) > 0.$$

Osservazione II. — I coefficienti α_{is} intervenienti nelle (21) dipendono dalla struttura di S unicamente per tramite dei parametri A, C, $\varkappa$, ν i quali verificano le relazioni

$$(23)\qquad A > 0, \qquad C > 0, \qquad 0 \leq \varkappa < \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{C}} < \frac{\pi}{2}, \qquad \nu \neq 0.$$

Gli α_{is} sono funzioni olomorfe di k, oltrechè di x, per ogni A, C, ν verificanti le (23), nell'interno del cerchio di centro nell'origine e raggio eguale ad $\operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{A}{C}}$ [nel piano complesso].

OSSERVAZIONE III. — Fatte le posizioni

$$\eta_i = \xi_i \, , \; \eta_{i+3} = \frac{\xi_{i+3}}{C \nu} \, , \qquad (i = 1, \; 2, \; 3), \tag{24}$$

$$\lambda = \frac{A}{C} \, , \tag{25}$$

il sistema (21) si muta nel sistema

$$\eta'_i = \sum_{s=1}^{6} a_{is} \, \eta_s \, , \qquad (i = 1, \; 2, \ldots, 6), \tag{26}$$

i cui coefficienti, *indipendenti da* ν, sono funzioni olomorfe di x, periodiche nella x con periodo 2π sull'asse reale, e di λ e $\varkappa$ e olomorfe rispetto a $\varkappa$ quando il punto P immagine della coppia $(\lambda \, , \, \varkappa)$ appartiene all'insieme aperto, I, definito dalle disuguaglianze (9)

$$0 < \lambda < \infty \, ; \qquad 0 \leq | \, \varkappa \, | < \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda} < \frac{\pi}{2} \, . \tag{27}$$

All'OSSERVAZIONE I si giunge tenendo conto della prima parte della doppia uguaglianza

$$A' = - \, C \, t \, g \, x = - \, \frac{\alpha \operatorname{sen} n}{\nu^2} \tag{28}$$

e pensando all'equazione dell'intersezione dell'ellissoide d'inerzia relativo ad O con il piano $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Il contenuto dell'OSSERVAZIONE II si giustifica tenendo conto della doppia uguaglianza (28) e osservando la struttura delle (16), (18), (19) e la (22).

All'OSSERVAZIONE III si giunge tenendo conto di (20) e pensando che, a causa della forma delle (16), (19) e di (28), nelle (18, 1) i coefficienti di ξ_1, ξ_2, ξ_3 risultano espressi da quozienti di forme cubiche nei parametri A, C moltiplicati per ν mentre quelli di ξ_4, ξ_5, ξ_6 sono quozienti tra forme quadratiche e cubiche in A, C. Invece nelle (18, 2) i coefficienti di ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono rapporti tra forme quartiche e cubiche in A, C moltiplicati per ν^2, quelli di ξ_4, ξ_5, ξ_6 tra cubiche e cubiche in A, C moltiplicati per ν.

---

(9) Intendo dire che per ogni λ reale e soddisfacente alle (27, 1) gli a_{is} sono funzioni olomorfe di $\varkappa$ nel cerchio di centro nell'origine e raggio $\operatorname{arctg} \sqrt{\lambda}$. Tale proprietà degli a_{is} è sufficiente per gli sviluppi del seguito e per tale ragione non mi preoccupo di considerare λ nel campo complesso e constatare l'olomorfia degli a_{is} anche rispetto a λ, allargando l'insieme I di olomorfia delle soluzioni delle equazioni alle variazioni.

* * *

Nel seguito con la locuzione *equazioni alle variazioni* mi riferirò direttamente alle (26), perfettamente equivalenti, in base a (20), (24) alle (18).

4. — Integrali primi delle equazioni alle variazioni - Sistema ridotto.

In base a (1), (5) si deduce che il momento delle quantità di moto di S è

$$K = A\,p\,\boldsymbol{i} + (A\,q - A'\,r)\,\boldsymbol{j} + (C\,r - A'\,q)\,\boldsymbol{k}\,, \tag{29}$$

per cui la componente secondo la verticale discendente di $\boldsymbol{K}$ risulta espressa, in base a (9), (11), (12), (13), da

$$K_\mu = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\operatorname{sen} q_1}\{\operatorname{sen}\varkappa\,(\operatorname{sen} q_1 \cos q_3\,p_1 + \operatorname{sen} q_3\,p_2) - \tag{30}$$

$$- (\operatorname{sen}\varkappa \cos q_1 \operatorname{sen} q_3 + \cos\varkappa \operatorname{sen} q_1)\,p_3\}.$$

Dagli integrali primi

$$\left\{\begin{aligned} H &= \text{cost.},\\ K_\mu &= \text{cost.}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

validi in un qualunque moto di S, si deducono gli integrali primi delle equazioni alle variazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\,\xi_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\xi_{i+3}\right) = m_1\,,\\ &\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial K_\mu}{\partial q_i}\,\xi_i + \frac{\partial K_\mu}{\partial p_i}\,\xi_{i+3}\right) = m_2\,, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

purchè, beninteso, le derivate di H e K_μ intervenienti nelle (28) s'intendano valutate in base alle (19).

Le costanti m_1, m_2 indicano evidentemente le variazioni che subiscono l'energia totale di S e il suo momento delle quantità di moto secondo la verticale discendente nel passaggio dalla precessione considerata ad un suo moto variato.

Tenuto conto di (16), (19), (20), (24), (25), (30), gli integrali primi (32) si scrivono

$$
(33)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \varkappa\,[\cos x\,.\,\eta_1 + \operatorname{sen} x\,.(\eta_2 + \eta_3)] + \eta_5 + \eta_6 = m_1^*, \\[2mm] \operatorname{sen} \varkappa\,[(\lambda + \operatorname{tg} \varkappa \cos x)\cos x\,.\;\eta_1 - \operatorname{sen} x\,(\eta_3 + \eta_4) + \cos x\,\eta_5] - \cos \varkappa\,\eta_6 = m_2^*, \end{cases}
$$

con

$$
(34)\qquad m_1^* = \frac{m_1}{\nu^2 C}\,, \qquad m_2^* = \frac{m_2}{\nu C}\,.
$$

È evidente che alle uguaglianze U_i, $(i = 1,\ 2)$, ottenute derivando le (33) rispetto ad x, si deve poter giungere combinando linearmente, con opportuni coefficienti dipendenti da x, λ, $\varkappa$ le (26). D'altronde, poichè il punto $P \equiv (\lambda\,,\ \varkappa)$ appartiene all'insieme I, definito dalle (27), $\cos \varkappa$ non può annullarsi e le U_i, di conseguenza, contengono sempre *qualunque sia la struttura di S* i termini in η'_5, η'_6 la prima ed η'_6 la seconda. Ne segue che i due integrali primi (33) non possono *mai* ottenersi come conseguenza delle sole prime quattro equazioni del sistema (26), il che vuol dire che esso è equivalente all'insieme delle (33) e del sistema

$$
(35)\qquad \eta'_i = \sum_{s=1}^{6} a_{is}\,\eta_s\,, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).
$$

Da (33) si ottiene

$$
(36)\qquad \begin{cases} \eta_5 = \left[m_1^* \cos \varkappa + m_2^* + \sum\limits_{h=1}^{4} \beta_{5h}\,\eta_h\right] \dfrac{1}{\cos \varkappa + \operatorname{sen} \varkappa \cos x}\,, \\[4mm] \eta_6 = \left[m_1^* \operatorname{sen} \varkappa \cos x - m_2^* + \sum\limits_{h=1}^{4} \beta_{6h}\,\eta_h\right] \dfrac{1}{\cos \varkappa + \operatorname{sen} \varkappa \cos x}\,. \end{cases}
$$

Introducendo le (36) nelle (35) si ottiene il *sistema ridotto delle equazioni alle variazioni*

$$
(37)\qquad \eta' = \sum_{s=1}^{4} b_{is}\,\eta_s + \delta_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),
$$

con

$$
(38)\qquad \delta_i = \frac{(a_{i5} \cos \varkappa + a_{i6} \operatorname{sen} \varkappa \cos x)\,m_1^* + (a_{i5} - a_{i6})\,m_2^*}{\cos \varkappa + \operatorname{sen} \varkappa \cos x}\,.
$$

5. — Integrazione delle equazioni alle variazioni nel caso giroscopico.

Nel caso che S sia un giroscopio il sistema (36) è a coefficienti costanti e si integra con facilità. Ha interesse per il seguito conoscere la natura di sei integrali particolari indipendenti delle equazioni alle variazioni nel caso $\varkappa = 0$. Per tale ragione osservo che in base a (16), (18), (19), (20), (24), (25), (26), (28), le (36), (37), (38), esplicitamente si scrivono

$$(36')\quad \begin{cases} \eta_5 = m_1^* + m_2^* , \\ \eta_6 = - m_2^* ; \end{cases}$$

$$(37')\quad \eta_1' = \frac{1}{\lambda}\eta_4 + \delta_1 ;\ \eta_2' = \eta_1 + \delta_2 ;\ \eta_3' = \frac{1}{\lambda}\eta_1 + \delta_3 ;\ \eta_4' = -\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\eta_1 + \delta_4 ;$$

$$(38')\quad \delta_1 = 0 ; \qquad \delta_2 = m_1^* + m_2^* ;\ \delta_3 = -\frac{m_2^*}{\lambda} ; \quad \delta_4 = \frac{(1-\lambda)m_2^* - \lambda m_1^*}{\lambda}$$

Posto

$$(39)\qquad \sigma = \sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}}$$

le (36′), (37′) danno luogo per $m_1^* = m_2^* = 0$ ai quattro integrali particolari indipendenti i cui elementi sono espressi nella seguente matrice

$$(40)\quad \left|\begin{array}{cccccc} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\cos\sigma x}{\lambda\sigma} & -\dfrac{\operatorname{sen}\sigma x}{\lambda\sigma^2} & -\dfrac{\operatorname{sen}\sigma x}{\lambda^2\sigma^2} & \operatorname{sen}\sigma x & 0 & 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\sigma x}{\lambda\sigma} & -\dfrac{\cos\sigma x}{\lambda\sigma^2} & -\dfrac{\cos\sigma x}{\lambda^2\sigma^2} & \cos\sigma x & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Per m_1^*, m_2^* generiche le (37′), (38′) ammettono l'integrale particolare

$$(41)\quad \begin{cases} \eta_1^* = \dfrac{-\lambda m_1^* + (1-\lambda)m_2^*}{1+\lambda^2} , & \eta_2^* = \dfrac{(\lambda^2-\lambda+1)\,m_1^* + (\lambda^2-\lambda+2)\,m_2^*}{1+\lambda^2}\,x , \\ \eta_3^* = -\dfrac{m_1^* + (1+\lambda)\,m_2^*}{1+\lambda^2}\,x , & \eta_4^* = 0 , \end{cases}$$

ragion per cui le (26) ammettono, per $\varkappa = 0$, l'integrale particolare ottenuto associando alle (41) le

$$\eta_5^* = m_1^* + m_2^*, \qquad \eta_6 = - m_2^*, \tag{42}$$

fornite dalle (36').

I quattro integrali (40) insieme all'integrale (41), (42), equivalgono, per $\varkappa = 0$, a sei integrali particolari indipendenti del sistema (26) che rimane così completamente integrato nell'ipotesi che S sia un giroscopio.

Si conferma così, sulle (41), nel caso particolare $\theta = \frac{\pi}{2}$, che le precessioni regolari di un giroscopio pesante ([10]) sono instabili, pure avendosi la stabilità lineare ridotta [alla Routh] rispetto alla nutazione.

OSSERVAZIONE. — Le (41) corrispondono sempre a due integrali indipendenti ma di essi uno [e soltanto uno] non diverge al divergere di x unicamente per $\lambda = 1$.

Infatti solo per $\lambda = 1$ esistono coppie di valori di m_1^* e m_2^* non simultaneamente nulli che annullano η_2^* ed η_3^* identicamente. Precisamente, se $\lambda = 1$, le (26) ammettono, per $\varkappa = 0$, l'integrale

$$\left\{\begin{array}{lll} \eta_1^* = -\dfrac{m_1^*}{2}, & \eta_2^* = \dfrac{m_1^* + 2\, m_2^*}{2}\, x, & \eta_3^* = -\dfrac{m_1^* + 2\, m_2^*}{2}\, x, \\ \eta_4^* = 0, & \eta_5^* = m_1^* + m_2^*, & \eta_6^* = -m_2^*, \end{array}\right. \tag{43}$$

che per $\dfrac{m_1^*}{m_2^*} = -2$ è non divergente.

6. — Due integrali particolari delle equazioni alle variazioni - Esponenti caratteristici.

È noto che ogni integrale di un sistema differenziale del tipo (26) si lascia esprimere come combinazione lineare di sei integrali del tipo

$$X_{is} = e^{\lambda_i x}\, \bar{X}_{is}, \qquad (i = 1,2,\ldots,6\,;\quad s = 1,2,\ldots,6), \tag{44}$$

([10]) È noto che non vi sono precessioni regolari del giroscopio pesante con nutazione uguale a $\frac{\pi}{2}$, diverse da quelle qui considerate [vedi loc. cit. in (1)] ove:

1°. se gli esponenti caratteristici λ_i, $(i = 1,2,\ldots,6)$, sono tutti distinti, le $\overline{X}_{is}$ sono funzioni periodiche della x con lo stesso periodo dei coefficienti a_{is} delle (26) [nel caso in esame, uguale a 2π];

2°. se invece r (≤ 6) dei λ_i coincidono, e questi, ad es., siano λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$, le $\overline{X}_{is}$, $(i = 1,2,\ldots,r;\ s = 1,2,\ldots,6)$, sono generalmente dei polinomi in x di grado non superiore ad $r - 1$ a coefficienti periodici, con periodo uguale a quello delle a_{is}.

Nel seguito, per brevità, indicherò semplicemente con I_i $(i = 1,2,\ldots,6)$, l'integrale fondamentale i cui elementi sono le X_{is}, $(i=1,2,\ldots,6;\ s=1,2,\ldots,6)$.

Gli esponenti caratteristici λ_i sono legati alle radici z_i dell'equazione fondamentale caratteristica corrispondente al sistema (26) dalle relazioni

$$e^{2\pi\lambda_i} = z_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{45}$$

Dato poi lo speciale significato delle (26) di equazioni alle variazioni della Dinamica, ottenute partendo dalle equazioni canoniche, si presenta la notevole circostanza che i λ_i, $(i = 1, 2 \ldots 6)$, sono a due a due uguali ma di segno opposto [11].

Nel seguito chiamerò *integrale fondamentale* ogni integrale particolare del sistema (26) del tipo (44).

Dagli integrali primi (31) si deducono subito due integrali fondamentali semplicemente ponendo [12]

$$\xi_{1i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \xi_{1i+3} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{46}$$

$$\xi_{2i} = \frac{\partial K_\mu}{\partial p_i}, \qquad \xi_{2i+3} = -\frac{\partial K_\mu}{\partial q_i}, \tag{47}$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

pur di valutare $\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, ecc., in corrispondenza alla precessione di S scelta come moto base.

Corrispondentemente alle (46), (47), le (26) ammettono gli integrali [in base a (16), (19), (20), (24), (25), (26)]

$$X_{11} = 0;\quad X_{12} = X_{13} = 1;\quad X_{14} = -\operatorname{tg}\varkappa\cos x;\quad X_{15} = -\operatorname{tg}\varkappa\operatorname{sen} x; \tag{46'}$$
$$X_{16} = -\operatorname{tg}\varkappa\operatorname{sen} x;$$

---

(11) Loc. cit. in (3); pag. 192 e seg. È evidente che le sostituzioni (20), (24) lasciano valide questa e le altre proprietà delle equazioni alle variazioni della Dinamica, (18), qui sfruttate.

(12) Loc. cit. in (3) pag. 168.

$$(47') \qquad X_{21} = -\operatorname{sen}\varkappa \operatorname{sen} x\,; \quad X_{22} = \operatorname{sen}\varkappa \cos x\,; \quad X_{23} = -\cos x\,;$$
$$X_{24} = -\operatorname{sen}\varkappa\,(\operatorname{tg}\varkappa \cos x + \lambda) \cos x\,; \quad X_{25} = 0\,; \quad X_{26} = \operatorname{sen}\varkappa \operatorname{sen} x.$$

Ai due integrali fondamentali (46′), (47′), corrispondono evidentemente esponenti caratteristici nulli.

Due qualunque integrali fondamentali [come del resto due integrali qualsiasi] soddisfano alla relazione [13]

$$(48) \qquad \sum_{s=1}^{3} (X_{is}\, X_{rs+3} - X_{is+3}\, X_{rs}) = \text{cost.}, \qquad (i\,, r = 1, 2 \ldots 6)$$

e a causa di (46′), (47′), (48) i due integrali primi (33) si possono scrivere

$$(49) \qquad \sum_{s=1}^{3} (X_{is}\, \eta_{s+3} - X_{is+3}\, \eta_s) = m_i^*, \quad (i = 1\,, 2)\,.$$

Penso espresso un qualunque integrale delle (26) mediante la combinazione

$$(50) \qquad \eta_s = \sum_{i=1}^{6} c_i\, X_{is}\,, \quad (s = 1\,, 2\,, \ldots 6)\,.$$

Introducendolo nelle (49) si ottiene

$$(51) \qquad \sum_{r=1}^{6} c_r \sum_{s=1}^{3} (X_{is}\, X_{rs+3} - X_{is+3}\, X_{rs}) = m_i^*, \quad (i = 1\,, 2)\,.$$

Data l'arbitrarietà delle $m_i^*, (i = 1\,, 2)$, [conseguenza della corrispondenza biunivoca tra m_1^*, m_2^* e i valori iniziali di $\eta_5\,, \eta_6$ indicata dalle (33)] le (51) mostrano che almeno uno dei minori del secondo ordine della matrice dei coefficienti delle c_r deve essere differente da zero.

Posto

$$(52) \qquad B_{ir} = \sum_{s=1}^{3} (X_{is}\, X_{rs+3} - X_{is+3}\, X_{rs})\,,$$

sia esso

$$(53) \qquad \Delta_{56} = \begin{vmatrix} B_{15} & B_{16} \\ B_{25} & B_{26} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Si conclude che *ognuno degli integrali* $\mathrm{I}_5\,, \mathrm{I}_6$, *introdotto nelle* (49) *al posto dell'integrale* η_s, $(s = 1\,, 2\,, \ldots, 6)$, *rende non nulla almeno una delle due costanti* m_1^*, m_2^*.

---

[13] Loc. cit. in [3] pag. 166.

Basta questo, insieme al fatto che gli integrali I_1, I_2, hanno esponenti caratteristici nulli, per dedurre che gli esponenti caratteristici λ_5, λ_6 degli integrali I_5, I_6, sono necessariamente nulli.

Infatti le B_{ir}, $(i=1,2;\ r=5,6)$, si presentano formalmente del tipo

$$B_{ir} = e^{\lambda_r x} F_{ir}(x), \quad (i=1,2;\ r=5,6),$$

con le $F_{ir}(x)$ polinomi in x a coefficienti con periodo 2π e poichè esse risultano costanti e [almeno una per ogni r] differenti da zero, necessariamente deve essere

$$\begin{cases} F_{ir} \equiv A_i e^{-\lambda_r x}, & (i=1,2;\ r=5,6), \\ \lambda_r = \pm n\sqrt{-1}, & (r=5,6), \end{cases}$$

con le A_i costanti e η nullo o intero.

Basta allora pensare alla struttura delle X_{is} [vedi (44)] per constatare che ognuno dei casi corrispondenti ad $n \neq 0$ si riconduce immediatament al caso $n=0$ ad essi equivalente.

L'equivalenza del sistema (26) al sistema (36), (37), (38) mostra che:

1⁰. Gli integrali I_5, I_6, soddisfano al sistema (36), (37), (38) per valori di m_1^* ed m_2^* non simultaneamente nulli;

2⁰. Gli integrali fondamentali del sistema omogeneo associato a (36), (37), (38) sono integrali fondamentali del sistema (26); di conseguenza gli I_r, $(r=1,2,\ldots,4)$, sono integrali delle (26) corrispondenti a dati iniziali che rendono nulle m_1^* ed m_2^*.

Se ne deduce che gli integrali I_r, $(r=1,2,\ldots,4)$, rendono

$$B_{ir} = 0, \quad (i=1,2;\ r=1,2,3,4) \tag{54}$$

e le (51) si riducono a

$$\begin{cases} c_5 B_{15} + c_6 B_{16} = m_1^*, \\ c_5 B_{25} + c_6 B_{26} = m_2^*. \end{cases} \tag{55}$$

* * *

Poichè l'equazione caratteristica fondamentale ha almeno quattro radici uguali all'unità [vedi (45), pensando a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$], tenuto conto della circostanza già rilevata che gli esponenti caratteristici sono a due a due uguali ma di segno opposto, si deduce [vedo ancora (45)] che essa si spezza nelle due equazioni

$$\begin{cases} (z-1)^4 = 0, \\ z^2 + 2\varrho z + 1 = 0, \end{cases} \tag{56}$$

con ϱ funzione continua di λ e k.

Possono presentarsi le seguenti circostanze:

a) $$-1 < \varrho < 1 .$$

La (56,2) ammette due radici complesse coniugate di modulo unitario. In corrispondenza da (45) si ricavano due esponenti immaginari puri di segno opposto, λ_3 e $\lambda_4 = -\lambda_3$, a cui corrispondono integrali fondamentali non divergenti al divergere di $|x|$.

b) $$\varrho = 1 .$$

La (56,2) ammette la radice doppia $z = -1$ a cui corrisponde l'esponente doppio (14) $\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\sqrt{-1}}{2}$.

c) $$\varrho = -1 .$$

Si ha la radice doppia $z = 1$ insieme a $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

d) $$\varrho < -1 .$$

Si hanno due radici reali positive della (56,2) e in corrispondenza reali λ_3 e $\lambda_4 = -\lambda_3$.

e) $$\varrho > 1 .$$

La (56,2) ha due radici reali negative e corrispondentemente si hanno due esponenti caratteristici complessi ed opposti, aventi come parte immaginaria $\pm \frac{\sqrt{-1}}{2}$.

Dall'analisi di tutti i casi possibili [*a*), *b*), ..., *e*)] risulta chiaro che l'unico caso in cui si hanno con certezza due integrali non divergenti al divergere di $|x|$ è il caso *a*). Infatti nei casi *d*), *e*) si hanno due integrali dei quali uno tende a zero al divergere di x mentre l'altro diverge e nei casi *b*), *c*) non può per ora escludersi che uno dei due integrali sia un po-

---

(14) Non si ha contraddizione con il fatto che gli esponenti caratteristici sono a due a due opposti. Infatti si può sempre pensare $\frac{\sqrt{-1}}{2} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} + \sqrt{-1}$, scrivere il fattore esponenziale della (44) nella forma $e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}x} = e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}x} e^{\sqrt{-1}x}$ e associare il fattore periodico $e^{\sqrt{-1}x}$ alla $\overline{X}_{is}$.

linomio in x a coefficienti periodici con periodo 2π che, se si è nel caso b), è moltiplicato per $e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}x}$.

Volendo delimitare — se esiste — un insieme aperto $I^*(\lambda, \varkappa)$, contenuto in $I(\lambda, \varkappa)$ e definito per valori reali di $\varkappa$, in cui si abbia la stabilità lineare delle precessioni regolari di S occorrerà, dunque, cercare sotto quali condizioni strutturali si rimane nel caso a) o, come caso limite, si raggiungono i casi b), c) e supposte, quindi, soddisfatte le condizioni sotto le quali gli integrali I_3, I_4 non divergono al divergere di x, studiare il comportamento degli integrali I_5, I_6 al variare di $\lambda, \varkappa$ in I^*.

Sin da ora si può osservare, sulla base delle (40), (41), (42), che per λ generico e $\varkappa = 0$ non si esce dai casi a), b), c).

7. — Un teorema di analisi. (15)

Sia dato il sistema

$$(57) \qquad y_i' - \sum_{s=1}^{n} \beta_{is}\, y_s = f_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

con le β_{is} ed f_i funzioni periodiche della x di periodo ω.

Del sistema omogeneo associato alle (57)

$$(58) \qquad Y_i' - \sum_{s=1}^{n} \beta_{is}\, Y_s = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si conoscano $r < n$ integrali primi espressi da

$$(59) \qquad \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ms}\, Y_s = C_m^*, \qquad (m = 1, 2, \ldots, r),$$

con le γ_{ms} funzioni periodiche della x di periodo ω.

Nell'ipotesi che le (58) ammettono (16) r integrali [e soltanto r] periodici con periodo ω dimostrerò: *Condizione necessaria e sufficiente perchè le* (57)

(15) Nel caso di un'unica equazione di ordine n un analogo teorema [senza l'Osservazione III] è stato dimostrato da W. B. FITE: « *Periodic solutions of linear differential equations* » Annals of Mathematics, Second Series; vol 28, 1927, pag. 59. Non è a mia conoscenza che esso sia stato enunciato o dimostrato nel caso dei sistemi. Pertanto, data la sua utilità per i numeri successivi, ritengo opportuno precisare il suo enunciato nel caso dei sistemi e darne la dimostrazione.

(16) Non sarebbe difficile dimostrare, prendendo in considerazione il sistema differenziale aggiunto del sistema (58), che l'esistenza delle (59) porta come conseguenza quella di r integrali delle (58) periodici con periodo ω e viceversa.

ammettano integrali periodici con periodo ω *è che le* f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *verifichino le* r *uguaglianze.*

$$(60) \qquad \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\omega} \gamma_{ms}(x) f_s(x)\, dx = 0\,, \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Per la dimostrazione del teorema premetto le *Osservazioni*:

OSSERVAZIONE I. — Moltiplicando le (58) per γ_{mi}, sommando rispetto ad i e tenendo conto delle (59) si ricavano le identità

$$(61) \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{mi}\,(Y_i' - \sum_{s=1}^{n} \beta_{is}\, Y_s) = 0 = \frac{d}{d\,x} \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ms}\, Y_s\,, \qquad (m = 1, 2, \ldots, r).$$

OSSERVAZIONE II. — La condizione di periodicità con periodo ω di un integrale y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, delle (57) è completamente espressa dalla condizione

$$(62) \qquad y_i(\omega) - y_i(0) = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Infatti le $y_i(x + \omega) - y_i(x)$, $(i = 1, \ldots, n)$, sono gli elementi di un integrale delle (58), con valori iniziali tutti nulli a causa di (62) e quindi tutti identicamente nulli.

* * *

Se si moltiplicano le (57) per $\gamma_{mi}\, d\,x$, si sommano rispetto ad i e si integrano tra 0 e ω, si ricava, tenuto conto di (61) e della periodicità delle γ_{mi},

$$(63) \qquad \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ms}(0)\,[y_s(\omega) - y_s(0)] + \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\omega} \gamma_{ms}(x) f_s(x)\, d\,x\,, \qquad (m = 1, 2, \ldots, r).$$

Da (63) risulta chiara la necessità della condizione (60).

Dimostro la sufficienza. Detti Y_{is}, $(i = 1, 2, \ldots n;\ s = 1, 2, \ldots, n)$, n integrali fondamentali indipendenti di (58), si può porre

$$(64) \qquad y_i = \sum_{s=1}^{n} c_s\, Y_{si} + y_i^*\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

ove y_i^*, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è un qualunque integrale particolare di (57).

Per l'Osservazione II la condizione di periodicità di y_i è completamente espressa dal sistema

$$(65) \qquad \sum_{s=1}^{n} c_s\,[Y_{si}(\omega) - Y_{si}(0)] = y_i^*(0) - y_i^*(\omega) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e queste, supposto che $Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots, Y_{ri}$ siano gli ammessi integrali periodici indipendenti di (58), si scrivono

$$(66)\qquad \sum_{s=r+1}^{n} c_s [Y_{si}(\omega) - Y_{si}(0)] = y_i^*(0) - y_i^*(\omega) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Moltiplico la generica delle (66) per $\gamma_{mi}(0)$ e sommo rispetto ad i da 1 ad n. Ottengo

$$(67)\qquad \sum_{s=r+1}^{n} c_s \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{mi}(0) [Y_{si}(\omega) - Y_{si}(0)] \right\} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{mi}(0) [y_i^*(0) - y_i^*(\omega)],$$
$$(m = 1, 2, \ldots, r).$$

Poichè da (59) si deduce, data la periodicità delle $\gamma_{ms}(x)$,

$$(68)\qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{mi}(0) [Y_i(\omega) - Y_i(0)] = 0, \qquad (m = 1, 2, \ldots, r),$$

qualunque sia l'integrale $Y_i(x)$, si constata che il primo membro di (67) è nullo. Così pure è nullo il secondo membro di (67) a causa di (63) [per $y_s \equiv y_s^*$], se si ammette verificata per ipotesi la (60).

Rimane così dimostrato che le (66) non sono indipendenti ma che r di esse possono ottenersi come conseguenza delle altre $n - r$. Si può certamente fare in modo di ritenere il sistema (66) equivalente al sistema

$$(69)\qquad \sum_{s=r+1}^{n} c_s [Y_{si}(\omega) - Y_{si}(0)] = y_i^*(0) - y_i^*(\omega), \qquad (i = r + 1, \ldots, n).$$

il cui determinante dei coefficienti delle c_s è certamente differente da zero ([17]) per l'ipotesi ammessa che gli integrali $Y_{si}(x)$, $(s = r + 1, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, n)$, non siano periodici con periodo ω.

Ricavate da (69) le $c_{r+1}, \ldots, c_n$ e lasciate arbitrarie le $c_1, c_2, \ldots, c_r$, la (64) fornisce tutti gli integrali periodici del sistema (57), c. d. d.

([17]) Mi limito, per semplicità, a dimostrarlo nell'ipotesi che gli esponenti caratteristici $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ siano semplici. In tale ipotesi, posto $\tau_s = e^{\lambda_s \omega} - 1$, insieme a

$$Y_{si}(x) = e^{\lambda_s x} \overline{Y}_{si}(x), \qquad (s = r + 1, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, n),$$

con $\overline{Y}_{si}(x)$ periodica nella x di periodo ω, si ha

$$Y_{si}(\omega) - Y_{si}(0) = \tau_s \overline{Y}_{si}(0)$$

OSSERVAZIONE III. — Suppongo che i coefficienti β_{is} siano funzioni di un certo numero di parametri $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_h$ variabili in un insieme $\overline{I}_h$ tale che esistano gli integrali fondamentali delle (57). Detto Q_h il punto $Q_h \equiv (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_h)$ rappresentativo della h-pla di valori $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_h$, suppongo che per Q_h coincidente con un $Q_h^{(0)}$ in $\overline{I}_h$ le (58) ammettano r e soltanto r integrali periodici, come è supposto nell'enunciato del precedente teorema, ma che al muoversi di Q_h a partire da $Q_h^{(0)}$ si giunga ad un $Q_h^{(1)}$ per cui oltre ai supposti r integrali fondamentali periodici se ne aggiunga un altro [$r+1$ esimo] pure periodico con periodo ω. In tal caso il determinante dei coefficienti delle c_s nelle (69) tende a zero e le y_i, $(i=1, 2, \ldots, n)$, fornite da (64) al tendere di Q_h a $Q_h^{(1)}$ hanno una singolarità.

Detto $D(Q_h)$ il determinante dei coefffcienti delle c_s nelle (69) si può dimostrare che [prescindendo da un coefficiente costante inessenziale] si ha

$$\lim_{Q_h \to Q_h^{(1)}} D(Q_h)\, y_i(Q_h) = Y_{r+1i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{70}$$

In altri termini il prodotto degli elementi dell'integrale fornito da (64) per $D(Q_h)$ tende, al tendere di Q_h a $Q_h^{(1)}$, all'$r+1$ esimo integrale periodico di periodo ω delle (58).

Per brevità ometto la dimostrazione.

COROLLARIO. Se ogni integrale delle (58) *è* periodico con periodo ω, $[r=n]$, sussistono ([18]) n integrali primi del tipo (59). Segue che se le (60)

---

e la matrice dei coefficienti delle c_s nelle (66) si scrive

$$\overline{M} \equiv \left\| \begin{matrix} \tau_{r+1}\overline{Y}^{(0)}_{r+1,1} & \tau_{r+2}\overline{Y}^{(0)}_{r+2,1} & \cdots\cdots & \tau_n\overline{Y}_{n1}(0) \\ \tau_{r+1}\overline{Y}^{(0)}_{r+1,2} & \tau_{r+2}\overline{Y}^{(0)}_{r+2,2} & \cdots\cdots & \tau_n\overline{Y}_{n2}(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{r+1}\overline{Y}^{(0)}_{r+1,n} & \tau_{r+2}\overline{Y}^{(0)}_{r+2\,n} & \cdots\cdots & \tau_n\overline{Y}_{nn}(0) \end{matrix} \right\|$$

Data l'indipendenza degli integrali $Y_{r+1i}, \ldots, Y_{ni}, (i=1, 2, \ldots, n)$, almeno uno dei minori di ordine massimo nella matrice $\overline{M}'$ ottenuta dalla $\overline{M}$ ponendo l'unità al posto delle τ_s è differente da zero e poichè ogni minore di ordine massimo di $\overline{M}$ è uguale al corrispondente minore $\overline{M}'$ moltiplicato per $\tau_{r+1}\cdot\tau_{r+2}\cdot\ldots\cdot\tau_n$, segue che anche in $\overline{M}$ almeno un minore di ordine massimo è differente da zero [dato che è $\lambda_s \neq 0$, $s=r+1, \ldots, n$]. Basta allora ordinare gli integrali in modo che tale sia quello formato dalle prime $n-r$ righe per ritenere dimostrato l'asserto.

([18]) Vedi nota (16).

sono verificate per $m = 1, 2, \ldots, n$ ogni integrale di (57) è periodico con periodo ω, mentre se le (60) non sono soddisfatte le (57) non ammettono integrali periodici.

Per convincersene basta osservare che le (63) vanno ora considerate per $m = 1, 2, \ldots, n$ e che l'annullarsi di tutte le differenze $y_s(\omega) - y_s(0)$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$, implica l'annullarsi dei secondi membri delle (63) e viceversa, dato che certamente il determinante $|\gamma_{ms}(0)|$ è differente da zero (19).

8. — Struttura degli integrali I_5, I_6 - Instabilità delle precessioni regolari di S.

Dalle considerazioni svolte al n. 6 risulta che le equazioni alle variazioni ammettono:

1° i due integrali I_1, I_2, periodici con periodo 2π;

2° i due integrali I_3, I_4, dei quali almeno uno non diverge al divergere di x;

3° i due integrali I_5, I_6, per i quali sinora si sa soltanto che hanno [come I_1, I_2] esponente caratteristico nullo.

Inoltre si è constatato che per $\varkappa = 0$, qualunque sia λ, i due integrali I_3, I_4, sono non divergenti e si è, cioè, nel caso *a*) del n. 6 o, eccezionalmente, nei casi *b*), *c*).

Data la continuità rispetto ai parametri degli esponenti caratteristici si può di conseguenza asserire che, escludendo al più quei valori di λ che per $\varkappa = 0$ portano nei casi *b*), *c*) ed altri eventuali valori eccezionali, anche per $\varkappa > 0$, almeno sino a che sia $\varkappa <$ di un certo $\varkappa^*$ si rimane nel caso *a*).

In altre parole si deve ritenere, che per $0 \leq \varkappa < \varkappa^*$ gli integrali I_3, I_4, sono non divergenti, eccettuati al più i valori eccezionali di λ, senza neppure escludere che la non divergenza si verifichi per ogni λ, nè che possa $\varkappa^*$ raggiungere il valore limite $\operatorname{arctg} \sqrt{\lambda}$. Avendo di mira, come già ho avvertito, la delimitazione di quella parte dell'insieme $I(\lambda, \varkappa)$, se esiste, a cui corrisponde la stabilità lineare delle precessioni regolari di S, supporrò quindi che $P(\lambda, \varkappa)$ appartenga all'insieme, forse più ristretto di I, delimitato [nel campo complesso] dalla relazione

$$0 \leq |\varkappa| < \varkappa^* \tag{71}$$

e dall'essere λ contenuto nell'insieme aperto $0 \longleftrightarrow \infty$ esclusi, al più, dei valori eccezionali. In corrispondenza gli integrali I_3, I_4, hanno esponente ca-

(19) Si pensi che il sistema γ_{ms}, $(m = 1, 2, \ldots, n\,;\ s = 1, 2, \ldots, n)$ rappresenta un sistema d'integrali indipendenti del sistema aggiunto del sistema (58).

ratteristico immaginario puro o sono delle funzioni periodiche di periodo 2π e si avrà per le precessioni regolari di S' stabilità lineare o instabilità a seconda della natura degli integrali I_5, I_6. Occorre quindi, e ciò farò in questo numero, analizzare quale possa essere la struttura di tali integrali.

Comincio con l'osservare che almeno quando P appartiene a I^* nessuno dei due integrali I_5, I_6, può essere del tipo [20]

$$(72) \qquad X_{ri} = X_{ri}^{(1)} x^2 + X_{ri}^{(2)} x + X_{ri}^{(3)}, \qquad (r = 5 \text{ opp. } 6 \,;\, i = 1, 2, \ldots, 6),$$

con le $X_{ri}^{(1)}, X_{ri}^{(2)}, X_{ri}^{(3)}$ periodiche nella x con periodo 2π.

Per giustificare tale fatto e perchè utile nel seguito richiamo l'attenzione sulla seguente proprietà: Se sei polinomi di grado n in x del tipo (72) danno gli elementi di un integrale di un sistema del tipo (26), anche le funzioni ottenute riguardando come costanti le $X_{ri}^{(1)}, X_{ri}^{(2)}$, ecc. e derivando [21] una, due, ... n volte quei polinomi danno gli elementi di altrettanti integrali del sistema differenziale.

Poichè nessuno degli integrali I_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, è del tipo $X_{is}^{(1)} x + X_{is}^{(2)}$ ne segue che se si ammette la (72) per $r = 5$ ciò che si ottiene derivando nel modo sopraddetto la (72) è l'integrale I_6.

In altre parole non può che essere

$$(73) \qquad \begin{cases} X_{5i} = \sum\limits_s c_s X_{si} x^2 + X_{5i}^{(2)} x + X_{5i}^{(3)}, \\ X_{6i} = 2 \sum\limits_s c_s X_{si} x + X_{5i}^{(2)}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

con le $\sum\limits_s$ estese per $s = 1{,}2$ oppure $s = 1{,}2{,}3{,}4$ a seconda che degli integrali I_s, $(s = 1{,}2{,}3{,}4)$, siano periodici con periodo 2π solo i primi due o tutti e quattro.

La (73,1) introdotta nelle (40), tenendo conto della (54), implica,

$$(74) \qquad \sum_{r=1}^{3} (X_{ir} X_{5r+3}^{(2)} - X_{ir+3} X_{5r}^{(2)}) = 0, \qquad (i = 1, 2).$$

Questa uguaglianza richiede a causa di (54) e (73,2)

$$(75) \qquad B_{16} = B_{26} = 0,$$

in contrasto con la (53).

---

[20] La stessa circostanza si presenta anche se in riguardo agli integrali I_3, I_4 si è nei casi d), e). In effetti perchè ciò avvenga si richiede solo che nessuno degli X_{3i}, X_{4i} sia del tipo $X_{ri} x + X_{ri}^*$.

[21] E. GOURSAT, « *Cours d'Analyse Mathematique* », Tome II, pag. 513 e seg.

L'ipotesi (72) va quindi esclusa.

Gli integrali I_5, I_6, avendo esponente caratteristico nullo non possono che essere espressi, di conseguenza, da funzioni lineari in x a coefficienti periodici con periodo 2π e si tratterà di vedere, al fine di constatare la stabilità lineare delle precessioni regolari di S, se e sotto quali condizioni strutturali i coefficienti della x risultano tutti identicamente nulli.

Farò, prima di entrare nei dettagli, una breve *premessa analitica.*

Si consideri la matrice quadrata

$$M \equiv \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{vmatrix} \tag{76}$$

i cui elementi sono gli elementi dei quattro integrali fondamentali del sistema omogeneo associato al sistema ridotto delle equazioni alle variazioni, (37).

Detto A_{ih} il reciproco nel determinante di M dell'elemento X_{ih} è ben noto che $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, A_{i4}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, sono gli elementi di un integrale del sistema aggiunto del sistema omogeneo associato a (37) e che risulta [come del resto è evidente]

$$\sum_{s=1}^{4} A_{is} X_{rs} = \text{cost.}, \qquad (i, r = 1, 2, 3, 4). \tag{77}$$

* * *

Per la discussione della struttura degli integrali I_5, I_6, distinguo di due casi:

1°. *Gli integrali* I_3, I_4 *non hanno periodo* 2π.

In tal caso ognuno degli integrali I_5, I_6, per la proprietà di derivazione richiamata a proposito della (72), non può che essere del tipo

$$X_i = (\alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i})\, x + X_i^*, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{78}$$

ed è chiaro che la condizione di esistenza di un integrale del tipo (78) è completamente equivalente a quella dell'esistenza di integrali con periodo 2π del sistema

$$X_i^{*\prime} = \sum_{s=1}^{4} b_{is} X_s^* + \delta_i - (\alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{79}$$

ottenuto introducendo le (78) nelle (37) e tenendo conto che le X_{1i}, X_{2i} $(i = 1, \dots, 4)$, verificano le (37) quando si ponga in esse $\delta_i = 0$, $(i = 1, \dots, 4)$.

Osserviamo la matrice (76) e tenendo presente che gli integrali I_3, I_4 non hanno, come I_1, I_2, esponenti caratteristici nulli ma bensì opposti, si constata che gli elementi A_{1s}, A_{2s} $(s = 1, \dots, 4)$, hanno periodo 2π, mentre A_{3s}, A_{4s}, $(s = 1, \dots, 4)$, certamente no.

Ne segue, in base a (77), che il sistema omogeneo associato a (79) ammette i due integrali primi a coefficienti con periodo 2π

$$\sum_{s=1}^{4} A_{ms} Y_s = \text{cost.}, \qquad (m = 1, 2). \tag{80}$$

È così evidente che in riguardo al sistema (79) si è nelle medesime condizioni del teorema del n. 7 con $n = 4$ ed $r = 2$.

In base a quel teorema si può dunque affermare :

L'espressione (78) *fornisce un'integrale delle equazioni alle variazioni quando e soltanto quando le α_r soddisfano alle equazioni.*

$$\sum_{s=1}^{4} \int_0^{2\pi} A_{ms}(x) \left[\delta_s(x) - (\alpha_1 X_{1s} + \alpha_2 X_{2s})\right] dx = 0 \,, \qquad (m = 1, 2), \tag{81}$$

che, a causa del significato delle A_{ms}, divengono

$$2\pi\alpha_r = \sum_{s=1}^{4} \int_0^{2\pi} A_{rs}(x)\, \delta_s(x)\, dx \,, \qquad (r = 1, 2). \tag{82}$$

Basta osservare le (38) per constatare che i secondi membri delle (82) sono delle combinazioni lineari di m_1^*, m_2^*. Così pure è da supporsi diverso da zero nelle (82), generalmente il determinante D^*, dei coefficienti di m_1^*, m_2^*, come avviene per λ generico e $\varkappa = 0$.

Dalle (82) segue la determinazione di α_1, α_2 in funzione di m_1^*, m_2^* e in conseguenza *rimane determinato l'integrale del tipo* (78) *dipendente dalle due costanti* [arbitrarie] m_1^*, m_2^*.

Esso equivale ad una combinazione lineare di I_5, I_6.

Bastano queste considerazioni per convincersi dell'*instabilità lineare delle precessioni regolari di* S *per λ e $\varkappa$ generici.*

Non può tuttavia escludersi [e un esempio di ha per $\lambda = 1$ e $\varkappa = 0$] che la struttura di S sia tale da rendere nullo D^*. In tale ipotesi per un opportuno valore del rapporto $\frac{m_1^*}{m_2^*}$ le (82) ammettono la soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

e in corrispondenza le (78) forniscono l'integrale periodico X_i^*, $(i = 1, 2 \ldots 6)$. Ma per m_1^* e m_2^* generiche α_1 e α_2 non sono nulle e rimane sempre un integrale del tipo (78) dipendente [questa volta] dal rapporto $\frac{m_1^*}{m_2^*}$. In altri termini se λ e $\varkappa$ rendono $D^* = 0$ si ha sempre instabilità lineare ma, direi, in minor grado dato che dei due integrali I_5, I_6, uno è periodico.

Osservazione. — Affinchè gli integrali I_5, I_6, risultino ambedue periodici occorre e basta che α_1, α_2 risultino nulle qualunque siano m_1^* ed m_2^*.

Tale caso si può verificare quando e soltanto quando siano nulli i quattro coefficienti di m_1^* ed m_2^*, funzioni λ e $\varkappa$, nei secondi membri di (82) e si presenta come assolutamente eccezionale, se non addirittura impossibile. Già per $\varkappa = 0$ ciò non accade per nessun λ.

Meno eccezionale si presenta la stabilità lineare alla Routh rispetto alla nutazione che in base a (46'), (47') richiede solo l'annullarsi di α_2 per qualunque scelta di m_1^*, m_2^* e cioè, in ultima analisi, l'annullarsi dei coefficienti di m_1^* ed m_2^* nella (82, 2) soltanto.

2⁰) *Tutti e quattro gli integrali* I_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *hanno periodo* 2π.

In tal caso gli integrali I_5, I_6 sono del tipo

$$X_i = \sum_{s=1}^{4} \alpha_{si} X_{si} + x X_i^* , \tag{83}$$

mentre gli elementi A_{ih}, $(i, h = 1, \ldots, 4)$, sono tutti periodici con periodo 2π e il sistema omogeneo associato a (79) ammette quattro integrali primi a coefficienti con periodo 2π.

Con un ragionamento analogo a quello del caso 1⁰) si deduce [in base al corollario del n. 7] che le $\varkappa_s$, $(s = 1, \ldots, 4)$, sono determinate da

$$2\pi \alpha_r = \sum_{s=1}^{4} \int_0^{2\pi} A_{rs}(x)\, \delta_s(x)\, dx , \qquad (r = 1, 2, \ldots 4). \tag{84}$$

Valgono nel caso 2⁰) conclusioni analoghe a quelle del caso precedente salvo a rimarcare come ancora più eccezionale si presenti la possibilità di un integrale periodico in dipendenza di un ben determinato rapporto $\frac{m_1^*}{m_2^*}$: si richiede l'annullarsi di tutti i minori del secondo ordine nella matrice di quattro righe e due colonne formata con i coefficienti di m_1^*, m_2^* nelle (84). E anche se ciò avviene rimane un integrale divergente del tipo (83), per $\frac{m_1^*}{m_2^*}$ generico.

In parallelo all'OSSERVAZIONE fatta alla fine del caso 1⁰) si può aggiungere che, nell'eventualità che si verificasse il caso 2⁰) [già esso stesso di natura eccezionale], l'esistenza dei due integrali periodici I_5, I_6, implica l'annullarsi degli otto elementi, funzioni dei due parametri $\lambda, \varkappa$, della matrice dei coefficienti di m_1^*, m_2^*, nelle (84).

9. — Integrazione per serie del sistema delle equazioni alle variazioni.

È chiaro che l'integrazione completa di un sistema del tipo (26) data la complessità dei coefficienti, non può essere effettuata altro che per sviluppo in serie.

È già rimarchevole che la speciale natura delle (26) di equazioni alle variazioni del sistema canonico della Dinamica abbia permesso di determinare due integrali fondamentali e di riconoscere la struttura degli altri quattro rivelando l'instabilità delle precessioni regolari del solido pesante in generale e mostrando quanto sia piccola la probabilità che per qualche particolare struttura di S vi sia la stabilità lineare o almeno quella ridotta rispetto alla nutazione.

È ben noto che un sistema del tipo (26) a coefficienti olomorfi rispetto alla x e, in I, pure rispetto ai parametri $\lambda, \varkappa$, ha ogni suo integrale olomorfo in tutto I, se i suoi elementi hanno valori iniziali olomorfi in I rispetto a λ e $\varkappa$.

Se invece i valori iniziali sono olomorfi in un insieme, I', contenuto in I, l'integrale è olomorfo almeno in I'. Fissato in I' un valore di λ, l'integrale è poi rappresentabile mediante uno sviluppo in serie di potenze di $\varkappa$ e lo sviluppo converge uniformemente in ogni cerchio tutto interno all'insieme di olomorfia rispetto a $\varkappa$ e avente il centro nell'origine.

Osservando le (36), (37), (38) vien fatto di notare che l'olomorfia dei coefficienti si perde se è $\varkappa \geq \frac{\pi}{4}$ e quindi l'olomorfia dei coefficienti delle (37) si ha solo in un insieme che può riuscire più ristretto di I [vedi (27)]. Ma ogni integrale delle (37) completato mediante le (36) è integrale delle (26) e quindi riesce olomorfo in tutto I o, eventualmente, nell'insieme I' di olomorfia dei dati iniziali.

Ne segue, per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di ogni integrale delle (26), che ogni sviluppo costruito a partire dalle (37) è da ritenersi convergente in tutto I [o, eventualmente, solo in I'].

Da tali considerazioni analitiche spontaneamente deriva un procedimento che permette di integrare per sviluppo in serie il sistema delle equazioni alle variazioni.

Ritengo conveniente esporlo per i seguenti due motivi: 1°) ne deriva un completamento alle conclusioni del numero precedente in quanto sulla serie costruita è possibile riconoscere se, e quando, si verifica la condizione eccezionale precisata nella Osservazione del n. 8; 2°) viene conseguita la determinazione di moti variati della precessione regolare assunta come moto base di S.

Dato il significato meccanico del caso $\varkappa = 0$ mi pare spontaneo, oltre che conveniente, integrare il sistema ridotto (37) mediante serie di potenze di $\varkappa$. Anche perchè si presenta la fortunata circostanza che ogni termine dello sviluppo si determina integrando un sistema la cui parte omogenea è a coefficienti costanti ed espressi in forma molto semplice.

Se le condizioni iniziali sono olomorfe rispetto a λ e $\varkappa$ in I, lo sviluppo costruito converge uniformemente, per un fissato λ e per ogni x, all'interno del cerchio avente [nel piano complesso] il centro nell'origine e raggio uguale ad $\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}$. Di conseguenza la serie rappresenta un integrale di (37) in tutto I e in particolare [ed è ciò che interessa] per $0 \leq \varkappa < \operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}$, sull'asse reale.

Intendo che I^* sia quell'integrale del sistema (36), (37), (38) che assume gli stessi valori iniziali di un ben determinato integrale I_0^* del sistema (36'), (37'), (38') ottenuto dalle (36), (37), (38) ponendo in esse $\varkappa = 0$ e definito per $0 < \lambda < \infty$.

È evidente che la condizione di olomorfia in I dei dati iniziali è senz'altro soddisfatta.

Detti η_{i0}, $(i = 1, \ldots, 4)$ gli elementi di I_0^*, η_i, $(i = 1, 2, \ldots, 4)$, quelli di I^* e posto

$$\eta_i = \eta_{i0} + \sum_{h=1}^{\infty} \eta_{ih} \frac{\varkappa^h}{h!}, \quad (i = 1, \ldots, 4), \tag{85}$$

le $\eta_{ih}(x)$ sono determinate dal sistema

$$\left\{ \begin{aligned} \eta'_{1h} &= \frac{\eta_{4h}}{\lambda} + \varphi_{1h}, \quad \eta'_{2h} = \eta_{1h} + \varphi_{2h}, \\ \eta'_{3h} &= \frac{\eta_{1h}}{\lambda} + \varphi_{3h}, \quad \eta'_{4h} = -\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \eta_{1h} + \varphi_{4h}, \end{aligned} \right. \qquad (h = 1, 2, \ldots,), \tag{86}$$

con

$$\varphi_{ih} = \left(\frac{\partial^h \delta_i}{\partial \varkappa^h} \right)_{\varkappa=0} + \sum_{l=1}^{4} \sum_{r=0}^{h-1} \binom{h}{r} \left(\frac{\partial^{h-r} b_{il}}{\partial \varkappa^{h-r}} \right)_{\varkappa=0} \eta_{lh}, \tag{87}$$

e dalle condizioni iniziali

$$\eta_{ih} = 0, \quad \text{per } x = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4; \; h = 1, 2, \ldots). \tag{88}$$

Per $i = 5, 6$ le η_{ih} sono determinate in base alle (36).

Il sistema (86), (88) si integra facilmente e dà luogo a

$$\left\{\begin{aligned}
\eta_{1h} &= \int_0^x \left\{ \varphi_{1h}(\tau)\cos\sigma(\tau - x) + \varphi_{2h}(\tau)\operatorname{sen}\sigma(x-\tau)\frac{1}{\lambda\sigma}\right\} d\tau,\\
\eta_{2h} &= \int_0^x \left[\varphi_{2h}(\tau) + \frac{1}{\lambda^2\sigma^2}\varphi_{4h}(\tau)\right] d\tau - \frac{1}{\lambda\sigma^2}\eta_{4h},\\
\eta_{3h} &= \int_0^x \left[\varphi_{3h}(\tau) + \frac{1}{\lambda^2\sigma^2}\varphi_{4h}(\tau)\right] d\tau - \frac{1}{\lambda^2\sigma^2}\eta_{4h},\\
\eta_{4h} &= \lambda\sigma\int_0^x \left\{ \varphi_{1h}(\tau)\operatorname{sen}\sigma(\tau - x) + \varphi_{2h}(\tau)\cos\sigma(\tau-x)\frac{1}{\lambda\sigma}\right\} d\tau.
\end{aligned}\right.$$

Ricordo che [vedi n. 6] ogni integrale delle (26) corrispondente a dati iniziali per cui m_1^* ed m_2^* non sono simultaneamente nulle è una combinazione lineare d'integrali fondamentali in cui almeno uno degli integrali I_5, I_6, è necessariamente presente.

Assumo come I_0^* proprio l'integrale di (36'), (37'), (38') i cui elementi sono espressi in (41), (42). Ne segue che I^* è quell'integrale delle (26) i cui primi quattro elementi hanno degli sviluppi in serie di potenze di $\varkappa$ aventi come primi termini le espressioni (41), (42) e come successivi quelli ottenuti applicando le formule ricorrenti (87), (89).

Gli elementi η_i di I^* sono in effetti ([22]) [vedi (78), supponendo di essere nel caso 1º) del n. 8]

$$\eta_i = \sum_{s=1}^{4} \nu_s X_{si} + (\alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i})x + X_i^*, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{90}$$

ove le ν_s sono delle costanti [dipendenti, generalmente, da λ e $\varkappa$] e il gruppo di termini fuori della sommatoria non puo certamente essere identicamente nullo e riesce del tipo

$$\begin{aligned}(\alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i})x + X_i^* = [(\alpha_{11} X_{1i} + \alpha_{21} X_{2i})m_1^* +\\ + (\alpha_{12} X_{1i} + \alpha_{22} X_{2i})m_2^*]x + X_{1i}^* m_1^* + X_{2i}^* m_2^*, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).\end{aligned} \tag{91}$$

([22]) Per brevità non considererò il caso 2º del n. 8 che si presenta come eccezionale. Del resto risulterà chiaro dalle righe seguenti che gli sviluppi ad esso corrispondenti sono analoghi a quelli che qui riporto con riferimento al caso 1º.

Tenendo conto che gli esponenti caratteristici degli integrali I_3, I_4, per $\varkappa = 0$, sono $\sigma\sqrt{-1}$, $-\sigma\sqrt{-1}$ e supponendo m_1^* ed m_2^* indipendenti da $\varkappa$ [il che è come dire che I si suppone determinato dai valori iniziali di η_i, $(i = 1, \dots, 4)$ e da quelli attribuiti a m_1^*, m_2^*], si constata, in base a (90), (91), che lo sviluppo (85) ha la forma

$$(92) \qquad \eta_i = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\cos\sigma x \,.\, P_{ih} + \operatorname{sen}\sigma x\, Q_{ih} + R_{ih}\right] \frac{\varkappa^h}{h!} + \\ + x \sum_{h=0}^{\infty} (T_{i1h}\, m_1^* + T_{i2h}\, m_2^*) \frac{\varkappa^h}{h!}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ove P_{ih}, Q_{ih} sono dei polinomi in x e coefficienti dipendenti la λ e periodici rispetto ad x con periodo 2π, mentre R_{ih}, T_{i1h}, T_{i2h}, $(i = 1, 2, 3, 4)$, sono funzioni di λ e di x con periodo 2π rispetto alla x. Anzi la seconda sommatoria delle (92) si può anche scrivere, a causa di (91), nella forma

$$(93) \qquad X_{1i}\left[m_1^* \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{11h}(\lambda) \frac{\varkappa^h}{h!} + m_2^* \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{12h}(\lambda) \frac{\varkappa^h}{h!}\right] + \\ + X_{2i}\left[m_1^* \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{21h}(\lambda) \frac{\varkappa^h}{h!} + m_2^* \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{22h}(\lambda) \frac{\varkappa^h}{h!}\right], \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

È chiaro che le quattro serie contenute nella (93) danno lo sviluppo [a meno di un inessenziale fattore non nullo] dei quattro coefficienti di m_1^* ed m_2^* nei secondi membri di (82).

Si conclude che la condizione strutturale per la stabilità lineare delle precessioni regolari di S, già segnalata come eccezionalmente verificabile [se non addirittura impossibile] nel numero precedente, si traduce in quella dell'annullarsi delle quattro serie

$$(94) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{rsh}(\lambda) \frac{\varkappa^h}{h!}, \qquad (r, s = 1, 2)$$

certamente distinte e non identicamente nulle, dato che per $k = 0$ tale condizione non è soddisfatta, qualunque sia λ.

* * *

Dato che direttamente si costruisce la serie (92), volendo analizzare la possibilità che la condizione di stabilità sia verificata basterà isolare nello sviluppo costruito in base a (85), (87), (89) il termine del tipo $x \sum_{h=0}^{\infty} (T_{i1h}\, m_1^* +$

$+ T_{i2h}\, m_2^*) \dfrac{\varkappa^h}{h\,!}$ e studiare la possibilità di annullamento delle serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} T_{i1h} \frac{\varkappa^h}{h\,!}\,, \quad \sum_{h=0}^{\infty} T_{i2h} \frac{\varkappa^h}{h\,!}\,,$$

calcolate per $x = 0$ e per due valori di i che più fa comodo, scelti tra i numeri 1 , 2 , 3 , 4 .

* * *

Riporto le espressioni dei coefficienti a_{is} del sistema alle variazioni (26), utili per l'integrazione per serie, in base agli sviluppi indicati, delle equazioni stesse.

Posto

$$q = \frac{1}{\lambda\,(\lambda - \operatorname{tg}^2 k)}$$

è

$$a_{11} = -\,q \operatorname{tg}^2 \varkappa (1 + \operatorname{tg} \varkappa \cos x) \operatorname{sen} x \cos x\,; \quad a_{12} = q\{(\lambda - \operatorname{tg}^2 \varkappa) \operatorname{tg} \varkappa \cos x + \lambda \operatorname{tg}^2 \varkappa \operatorname{sen}^2 x\}$$

$$a_{13} = 0\,; \quad a_{14} = q(\lambda - \operatorname{tg}^2 \varkappa \cos^2 x)\,; \quad a_{15} = q \lambda \operatorname{tg} \varkappa \operatorname{sen} x\,; \quad a_{16} = -\,q \operatorname{tg}^2 \varkappa \operatorname{sen} x \cos x\,;$$

$$a_{21} = q\,\{\lambda^2 - \lambda \operatorname{tg} \varkappa \cos x - \lambda \operatorname{tg}^2 \varkappa\,(1 + \cos^2 x)\}\,; \quad a_{22} = q\,\lambda^2 \operatorname{tg} \varkappa \operatorname{sen} x\,; \quad a_{23} = 0\,;$$

$$a_{24} = a_{15}\,; \quad a_{25} = q\,\lambda^2\,; \quad a_{26} = -\,q\,\lambda \operatorname{tg} \varkappa \cos x\,;$$

$$a_{31} = q(\operatorname{tg} \varkappa \cos x + 1)(\lambda - \operatorname{tg}^2 \varkappa \operatorname{sen}^2 x)\,; \quad a_{32} = q \operatorname{tg} \varkappa (\lambda - \lambda \operatorname{tg} \varkappa \cos x - \operatorname{tg}^2 \varkappa) \operatorname{sen} x\,;$$

$$a_{33} = 0\,; \quad a_{34} = a_{16}\,; \quad a_{35} = a_{26}\,; \quad a_{36} = q\,(\lambda - \operatorname{tg}^2 \varkappa \operatorname{sen}^2 x)\,;$$

$$a_{41} = -\,q\,\{\lambda + \lambda^3 - \operatorname{tg}^2 \varkappa \operatorname{sen}^2 x + \lambda \operatorname{tg}^2 \varkappa \cos^2 x - \operatorname{tg}^4 \varkappa \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x +$$

$$+ (\lambda^2 \operatorname{tg} \varkappa + 2\,\lambda \operatorname{tg} \varkappa - \lambda \operatorname{tg}^3 \varkappa) \cos x - \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \varkappa - 2 \operatorname{tg}^3 \varkappa \operatorname{sen}^2 x \cos x +$$

$$+ \lambda \operatorname{tg} \varkappa\,(\lambda - \operatorname{tg}^2 \varkappa) \cos x\}\,; \quad a_{42} = q \operatorname{tg} \varkappa \operatorname{sen} x\,[\operatorname{tg}^2 \varkappa - \lambda + \operatorname{tg}^3 \varkappa \cos x +$$

$$+ \lambda \operatorname{tg}^2 \varkappa \cos^2 x]\,; \quad a_{43} = 0\,; \quad a_{44} = -\,a_{11}\,; \quad a_{45} = -\,a_{21}\,; \quad a_{46} = -\,a_{31}\,;$$

$$a_{51} = a_{42}; \quad a_{52} = q \operatorname{tg} \varkappa\,\{\operatorname{tg}^3 \varkappa - \lambda^2 \operatorname{tg} \varkappa \operatorname{sen}^2 x + (\operatorname{tg}^2 \varkappa - \lambda)\,\lambda \cos x - \lambda \operatorname{tg} \varkappa\}\,;$$

$$a_{53} = 0\,; \quad a_{54} = -\,a_{12}; \quad a_{55} = -\,a_{22}; \quad a_{56} = -\,a_{32}; \quad a_{61} = a_{43}\,; \quad a_{62} = a_{53}\,;$$

$$a_{63} = q\,\lambda \operatorname{tg} \varkappa\,(\operatorname{tg}^2 \varkappa - \lambda) \cos x\,; \quad a_{64} = -\,a_{13}\,; \quad a_{65} = -\,a_{65}\,; \quad a_{66} = -\,a_{33}\,.$$

10. — Moti variati.

È chiaro che le precessioni regolari di S risultano stabili rispetto a quelle perturbazioni che danno luogo ad integrali non divergenti al divergere [23] di x.

Tale fatto ha certamente luogo, almeno per valori non troppo grandi di $\varkappa$, se la perturbazione subita dalla precessione regolare di S considerata non altera la sua energia totale nè il momento delle quantità di moto secondo la verticale $[m_1^* = m_2^* = 0]$.

Corrispondentemente a tali perturbazioni si hanno moti variati [piccole oscillazioni] che si svolgono nell'intorno della prefissata precessione regolare di S. Essi analiticamente sono caratterizzati dalle espressioni che si ottengono sommando ai valori di θ, φ, ψ, corrispondenti alle precessione prescelta [e soddisfacente alle (4)], una qualunque combinazione lineare degli integrali I_1, I_2, I_3, I_4. Tale combinazione lineare è esprimibile mediante lo sviluppo in serie indicato nel numero precedente. Se però ci si limita ai moti variati relativi a perturbazioni che danno luogo ad un integrale delle (26) espresso come combinazione lineare dei soli I_1, I_2, essi, in base a (46'), (47') sono espressi in forma molto semplice e la loro validità si mantiene per ogni λ ed ogni $\varkappa$ in I.

Molto brevemente si possono mettere in evidenza le caratteristiche principali di questi ultimi moti variati.

Intanto osservo come in base a (46') risulti che il contributo dell'integrale I_1 alla perturbazione di una determinata precessione regolare di S è inessenziale, corrispondendo esso ad un incremento costante ed uguale di φ e ψ e coincidendo, di conseguenza, il moto variato con la precessione di partenza. Basterà, quindi, considerare soltanto moti variati corrispondenti ad una perturbazione che dà luogo [a meno di un fattore costante] all'integrale I_2.

Tenuto conto di (15), (19), (20), (24,1) essi sono espressi da

$$(95)\qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} - c_1 \operatorname{sen} \varkappa \operatorname{sen} (\nu t + \bar{\varphi}_0), \\ \varphi = \bar{\varphi}_0 + \nu t + c_1 \operatorname{sen} \varkappa \cos (\nu t + \bar{\varphi}_0), \\ \psi = \bar{\varphi}_0 + \dfrac{\pi}{2} + \nu t - c_1 \cos \varkappa, \end{cases}$$

---

[23] Ovviamente mi riferisco al caso $\nu > 0$ [vedi (4,2)]. Nel caso $\nu <$ si direbbe: al divergere di $-x$.

ove $\overline{\varphi}_0$ rappresenta il valore iniziale dell'angolo di rotazione propria nella precessione base e c_1 una costante del primo ordine, arbitraria.

Sia V l'estremo libero del vettore $\boldsymbol{k}$ applicato in O. Considero la sfera di centro O e raggio unitario assumendo come asse polare l'asse di precessione [orientato verso l'alto]. Su tale sfera, in corrispondenza al moto variato (95), V oscilla tra i paralleli $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - c_1 \operatorname{sen} \varkappa$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + c_1 \operatorname{sen} \varkappa$ compiendo un'oscillazione completa nello stesso tempo, $\frac{2\pi}{\nu}$, in cui esso compie un intero giro intorno all'asse polare. Da (95) si ricava

$$\theta = \frac{\pi}{2} + c_1 \operatorname{sen} \varkappa \cos (\psi + c_1 \cos \varkappa),$$

da cui si deduce che la traiettoria di V presenta le seguenti caratteristiche:

a) incontra il parallelo base sotto l'angolo $c_1 \operatorname{sen} \varkappa$:

b) è tangente al parallelo sui paralleli estremi.

c) ha dei flessi sul parallelo base.

* * *

In base alle considerazioni conclusive del n. 6 non puo escludersi che per valori sufficientemente grandi di $\varkappa$ solo uno degli integrali I_3, I_4 sia non divergente al divergere di x.

Se ciò avviene, corrispondentemente all'integrale non divergente si hanno moti variati consistenti in

1°. piccole oscillazioni con periodo doppio di quello della precessione base se si è nel caso *b*) del n. 6;

2°. piccole oscillazioni con periodo uguale a quello della precessione base se si è nel caso *c*);

3°. moti oscillatori smorzati con periodo di oscillazione uguale a quello della precessione base e con tendenza asintotica ad essa se si è nel caso *d*);

4°. moti oscillatori smorzati con periodo di oscillazione doppio di quello della precessione base e con tendenza asintotica ad essa se si è nel caso *e*).

[*Pervenuto alla Redazione il 29 aprile 1949*]